| | | |
|---|---|---|
| | Année 2018/2019 | TD Logique propositionnelle |

LOGIQUE ET PREUVE DE PROGRAMMES
IF107

Filière : Informatique, Année : 1

Web: `http://herbrete.vvv.enseirb-matmeca.fr/IF107`

## Exercice 1 (Implication)

Répondre aux questions suivantes en vous basant sur l'affirmation "les personnes qui ont des chats ont également des chiens".

1. Si une personne n'a pas de chien, peut-on en déduire qu'elle n'a pas de chat ?
2. Si une personne n'a pas de chat, peut-on en déduire qu'elle n'a pas de chien ?
3. Les phrases suivantes sont-elles équivalentes à l'affirmation ci-dessus ? Lesquelles sont équivalentes entre elles ?
   (a) "les personnes qui n'ont pas de chat, n'ont pas non plus de chiens"
   (b) "les personnes qui n'ont pas de chien, n'ont pas non plus de chat"
   (c) "les personnes qui ont des chiens ont également des chats"
4. Traduire ces 4 affirmations en logique propositionnelle en utilisant les proprositions `a-chat` et `a-chien`

♦

## Exercice 2 (Tables de vérité)

Pour les formules suivantes :
— introduire les parenthèses en respectant la priorité des opérateurs,
— calculer la table de vérité et indiquer si la formule est satisfaisable et si elle est valide.

1. $p \wedge (q \vee r)$
2. $p \implies (q \implies p)$
3. $p \wedge \neg q \wedge r$
4. $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r)$

♦

## Exercice 3 (Énigme)

Vous êtes perdu sur une piste dans le désert. Vous arrivez à une bifurcation. Chacune des deux pistes est gardée par un sphinx que vous pouvez interroger. Les pistes peuvent soit conduire à une oasis, soit se perdre dans un désert profond (au mieux, elles conduisent toutes à une oasis, au pire elles se perdent toutes les deux). Vous disposez des informations suivantes :

**A.** Le sphinx de droite vous répond : "Une au moins des deux pistes conduit à une oasis".

**B.** Le sphinx de gauche vous répond : "La piste de droite se perd dans le désert".

**C.** Vous savez que les sphinx disent tous les deux la vérité, ou bien mentent tous les deux.

1. Soit D est la proposition "Il y a une oasis au bout de la route droite" et soit G est la proposition "Il y a une oasis au bout de la route gauche". Exprimer les affirmations A, B et C en logique propositionnelle (formules $\phi_A$, $\phi_B$, $\phi_C$).
2. Construire la table de vérité de formules $\phi_A$, $\phi_B$ et $\phi_C$.
3. Répondre aux questions suivantes en justifiant votre raisonnement par la table de vérité.
   (a) peut-il y avoir deux oasis ?
   (b) les sphinx ont-ils menti tous les deux ?
   (c) peut-il avoir une oasis à doite ?
   (d) y-a-t'il une oasis à gauche ?

♦

## Exercice 4 (Équivalences logiques)

1. Démontrer les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
A \vee (B \wedge C) &\equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \\
A \wedge (B \vee C) &\equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\
\neg(A \wedge B) &\equiv \neg A \vee \neg B \\
\neg(A \vee B) &\equiv \neg A \wedge \neg B \\
A \implies B &\equiv \neg A \vee B
\end{aligned}$$

2. Simplifier les formules $(A \vee B) \wedge B$, $(A \wedge B) \vee A$
3. Donner une formule équivalente à $A \implies B \implies C$ qui n'utilise pas l'implication

♦

## Exercice 5 (Fini)

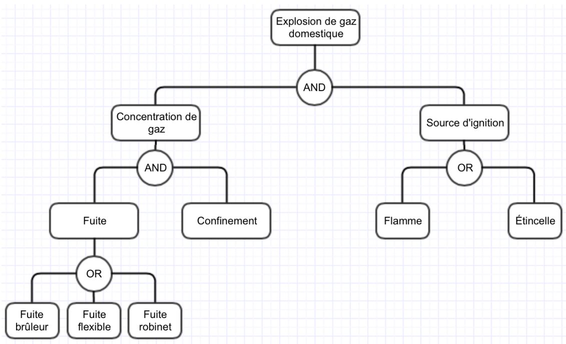
Soient deux variables propositionnelles $p$ et $q$.

1. Montrer qu'il existe une infinité de formules utilisant ces 2 variables
2. Combien y-a-t'il de tables de vérité utilisant ces deux variables ?
3. Combien de formules construites sur $n$ variables propositionnelles faut-il prendre pour en avoir deux différentes qui sont équivalentes ?

♦

## Exercice 6 (Arbres de défaillances)

En sûreté de fonctionnement, une analyse des risques est souvent conduite en construisant un arbre de défaillance. Par exemple :

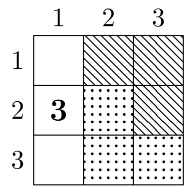



L'arbre est construit en partant de l'événement redouté (ici, "explosion de gaz domestique") et en analysant les causes possibles jusqu'à obtenir des causes élémentaires. L'arbre représente in fine les combinaisons de ces causes pouvant conduire à la catastrophe.

1. Soit $P = \{a, b, c, d, e, f\}$ les variables propositionnelles associées aux feuilles de l'arbre. Donner la formule correspondant à l'arbre ci-dessus.
2. La sûreté de fonctionnement s'intéresse aux "coupes minimales", c'est à dire aux plus petits ensembles de causes élémentaires pouvant produire l'événement redouté. Proposer un algorithme simple pour calculer les coupes minimales d'une formule donnée.
3. La sûreté de fonctionnement considère qu'un système critique est sûr si ses coupes minimales sont de taille au moins 3. L'installation de gaz domestique ci-dessus est-elle sûre ?

NB : les arbres de défaillances sont utilisées dans l'industrie (aéronautique, nucléaire, etc) pour les analyses de défaillances et le contrôle des risques industriels. ♦

## Exercice 7 **(Spécification et résolution d'un jeu)**




On considère un jeu proche du Sudoku représenté ci-contre. Une solution du jeu attribue à chaque case de la grille un chiffre parmi $\{1, 2, 3\}$ tel que chaque chiffre apparaît de manière unique dans chaque ligne, chaque colonne et chaque bloc coloré.

Le but de cet exercice est de modéliser les solutions du jeu par une formule de *logique propositionnelle* $\phi$ qui est *satisfaisable si et seulement si le jeu admet une solution*. Comme en cours, nous utilisons pour cela un ensemble de variables propositionnelles $p_{ijk}$, avec la signification suivante : $p_{ijk}$ est vraie lorsque la case $(i, j)$ contient la valeur $k$, et fausse sinon. Dans la grille ci-dessous, nous avons $p_{213}$ puisque la case $(2, 1)$ contient la valeur 3 et $\neg p_{211}$ puisque la case $(2, 1)$ ne contient pas la valeur 1.

1. Écrire une formule de logique propositionnelle qui exprime $\ll$ s'il y a 1 en case $(1, 1)$, il n'y a pas 1 en case $(1, 2)$, ni en case $(1, 3)$ $\gg$.
2. Généraliser la formule précédente à : $\ll$ s'il y a $k$ en case $(i, j)$, alors il n'y a pas $k$ dans les cases de l'ensemble $C$ $\gg$. On écrira $\bigwedge_{(i',j')\in C} \cdots$ pour quantifier sur toutes les cases de $C$ (c'est à dire pour écrire $\ll$ pour toute case $(i', j')$ de $C$ ... $\gg$). *Attention : $(i, j)$ peut appartenir à $C$.*
3. On note $\phi_{i,j,k,C}$ la formule obtenue à la question précédente. À l'aide de $\phi_{i,j,k,C}$ écrire une formule qui exprime : $\ll$ la valeur $k$ apparaît au plus une fois dans l'ensemble de cases $C$ $\gg$.
4. On note $\phi_{k,C}$ la formule obtenue à la question précédente. À l'aide de $\phi_{k,C}$ écrire une formule qui exprime : $\ll$ chaque valeur $k \in \{1, 2, 3\}$ apparaît au plus une fois dans l'ensemble de cases $C$ $\gg$.
5. On note $\phi_C$ la formule obtenue à la question précédente. Écrire une formule qui exprime les contraintes d'unicité sur les lignes, les colonnes et les blocs de la grille en utilisant $\phi_C$. On notera $L_1$, $L_2$ et $L_3$ les ensembles de cases correspondant aux lignes, $C_1$, $C_2$ et $C_3$ ceux correspondant aux colonnes, et $B_1$, $B_2$ et $B_3$ ceux correspondant aux blocs colorés.
6. Quelle(s) autre(s) contrainte(s) faut-il ajouter à la formule précédente pour obtenir une formule $\phi$ qui est satisfaisable si et seulement si la grille admet une solution ? Justifier.
7. On fixe usuellement la valeur de certaines cases, comme la case $(2, 1)$ dans l'exemple ci-dessus pour restreindre les solutions possibles. Comment ces valeurs fixées peuvent-elles être modélisées dans la formule $\phi$ ?
8. Décrire en 2 à 3 lignes un algorithme pour déterminer si le jeu admet une solution à partir de la formule $\phi$.
9. Supposons qu'un algorithme fournit une solution $s$ au jeu à partir de $\phi$. Comment utiliser cet algorithme pour vérifier si $s$ est l'unique solution du jeu ?
10. Supposons connue une solution du jeu. Donner un algorithme qui permet de construire une grille à trous qui possède une unique solution.

♦