Compléments MPC, semestre 1

# Feuille d'exercices n° 1

## Équations différentielles du premier ordre

**Exercice 1.** (Équations linéaires)
**(1)** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' - 2y = 2e^x \sin(x)$. Déterminer la solution $f$ telle que $f(0) = 1$.
**(2)** Résoudre chacune des équations différentielles suivantes puis examiner si elles possèdent une ou plusieurs solutions définies sur $\mathbb{R}$.

$$(x-2)y' = y + 2(x-2)^3, \qquad x^3y' + (2-3x^2)y = x^3.$$

**Exercice 2.** Résoudre les équations de Bernoulli suivantes (pour les deux premières, mentionner notamment les solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier) :
**(1)** $y' - y = xy^5$ ;
**(2)** $y' + 2xy + xy^4 = 0$ ;
**(3)** $xy' = y + x(1 + 3\ln x)y^3$.

**Exercice 3.** Résoudre les équations de Riccati suivantes (en mentionnant notamment les éventuelles solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier).
**(1)** $x^3y' + y^2 + yx^2 + 2x^4 = 0$. *On donne une solution particulière (à vérifier) :* $y_p(x) = -x^2$.
**(2)** $(1-x^2)y' - y^2 + 1 = 0$. *(On commencera par chercher une solution particulière constante.)*

## Équations différentielles linéaires du 2$^{\text{d}}$ ordre à coefficients constants

**Exercice 4.** Résoudre chacune des équations différentielles linéaires suivantes concernant des fonctions de variable $x$ :
**(1)** $y'' - 4y' + 5y = e^x\big(\cos(x) - \sin(x)\big)$ ;
**(2)** $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\sin(x)$.

**Exercice 5.** Résoudre chacune des équations différentielles linéaires suivantes à l'aide de la méthode de variation des constantes :
**(1)** $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{1+x^2}$ ;
**(2)** $y'' - 9y = \frac{1}{\operatorname{ch}(3x)}$. *(Indication : primitiver $C_1' + C_2'$ et $C_1' - C_2'$ pour obtenir $C_1'$ et $C_2'$.)*

FIN

# Mathématiques spé

## I - Équations différentielles du premier ordre

**Exercice 1 :** * $y' - 2y = 2e^{x} \sin x$

- $y_H = C.e^{\int 2dx}$ $\quad y_H = C.e^{2x}$

- $y_0 = e^{2x}$

$C'(x) = 2\sin x e^{-x}$

$C(x) = -2\cos x e^{-x} - \int 2\cos x e^{-x}$

$= -2\cos x e^{-x} - 2\sin x e^{-x} - C(x)$

$= -e^{-x}(\cos x + \sin x)$

$y_p = -e^{x}(\cos x + \sin x)$

$y = C.e^{2x} - e^{x}(\cos x + \sin x)$

* $y' - \dfrac{y}{x-2} = 2(x-2)^2$

- $y_H = C.e^{\int \frac{1}{x-2}}$ $\quad y_H = C.|x-2|$

- $y_0 = x - 2$

$C'(x) = 2(x-2)$

$C(x) = (x-2)^2$

$y_p = (x-2)^3$

$y = C.(x-2) + (x-2)^3$

* $y' + \dfrac{2-3x^2}{x^3} y = 1$

- $y_H = C.e^{\int -\frac{2-3x^2}{x^3}}$ $\quad y_H = C.x^3.e^{1/x^2}$

- $y_0 = x^3.e^{1/x^2}$

$C'(x) = x^{-3}e^{-1/x^2}$

$C(x) = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}}$

$y_p = \dfrac{1}{2}x^3$

$y = C.x^3.e^{x^{-2}} + \dfrac{1}{2}x^3$

## Exercice 2

**1)** $y' - y = xy^5 \Leftrightarrow \dfrac{y'}{y^5} - \dfrac{1}{y^4} = x$

on pose $z = \dfrac{1}{y^4} \Leftrightarrow z' = -4 \cdot \dfrac{y'}{y^5}$

donc $z' + 4z = -4x$

- $z_H = C \cdot e^{\int -4\,dx}$
  $z_H = C \cdot e^{-4x}$
- $z_0 = e^{-4x}$
  $C'(x) = -4x\,e^{4x}$
  $C(x) = (-x + 1/4)\,e^{4x}$

$z_p = -x + \dfrac{1}{4}$

$z = C \cdot e^{-4x} - x + \dfrac{1}{4}$

**2)** $y' + 2xy + xy^4 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{y'}{y^4} + \dfrac{2x}{y^3} = -x$

on pose $z = \dfrac{1}{y^3} \Leftrightarrow z' = -\dfrac{3}{y^3}\,y'$

donc $z' - 6x\,z = 3x$

- $z_H = C \cdot e^{\int 6x}$
  $z_H = C \cdot e^{3x^2}$
- $z_p = -\dfrac{1}{2}$

$z = C \cdot e^{3x^2} - \dfrac{1}{2}$

**3)** $xy' = y + x(1 + 3\ln(x))\,y^3 \Leftrightarrow \dfrac{y'}{y^3} - \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y^2} = 1 + 3\ln x$

$\Leftrightarrow y' - \dfrac{1}{x}\,y = (1 + 3\ln(x))\,y^3$

on pose $z = \dfrac{1}{y^2} \Leftrightarrow z' = -\dfrac{2y'}{y^3}$

donc $z' + \dfrac{2}{x}\,z = 2(1 + 3\ln(x))$

- $z_H = C \cdot e^{\int 2/x\,dx}$
  $z_H = C \cdot \dfrac{1}{x^2}$
- $z_0 = 1/x^2$
- $C'(x) = x^2(2 + 6\ln(x))$
- $C(x) = \dfrac{18x^3}{9} \cdot \ln x$

$z_p = 2x\ln x$

$z = C \cdot \dfrac{1}{x^2} + 2x\ln x$

## Exercice 3

**1)** $x^3 y' + y^2 + yx^2 + 2x^4 = 0$

on pose $y = y_0 + z$

$y = -x^2 + z$

$y' = -2x + z'$

$-2x^4 + x^3 z' + z^2 - 2zx^2 + x^4 + x^2 z - x^4 + 2x^4 = 0$

$x^3 z' + z^2 - 2z x^2 + x^2 z = 0$

$x^3 z' + z^2 - zx^2 = 0$

$x^3 z' - z x^2 = -z^2$

$z' - \frac{z}{x} = -x^{-3} z^2$

on pose $u = \frac{1}{z} \Leftrightarrow u' = -\frac{z'}{z^2}$

$\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{xz} = -x^{-3} \Leftrightarrow -u' - \frac{u}{x} = -x^{-3}$

$\Leftrightarrow u' + \frac{u}{x} = x^{-3}$

$u_H = C.e^{\int -\frac{1}{x} dx}$

$= C.x^{-1}$

$u_0 = x^{-1}$

$C'(x) = x^{-2}$

$C(x) = -x^{-1}$

$u_p = -\frac{1}{x^2}$

$u = \frac{C}{x} - \frac{1}{x^2}$

**2)** $(1-x^2)y' - y^2 + 1 = 0$

$y_p = cte \Rightarrow -y_p^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow y_p = \pm 1$

on pose $y = 1+z$ :

$(1-x^2)z' - (1+z)^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (1-x^2)z' - 2z = z^2$

$\Leftrightarrow (1-x^2)\frac{z'}{z^2} - \frac{2}{z} = 1$

On pose $u = \frac{1}{z} \Leftrightarrow u' = -\frac{1}{z^2} z'$

$-(1-x^2)u' - 2u = 1 \Leftrightarrow u' + \frac{2}{1-x^2} u = -\frac{1}{1-x^2}$

- $u_H = C.e^{\int -\frac{2}{1-x^2}}$
$u_H = C.\frac{1-x}{1+x}$

- $u_p = -\frac{1}{2}$

- $u = -\frac{1}{2} + C.\frac{1-x}{1+x}$

## II - Équations différentielles linéaires du $2^{nd}$ ordre à coefficients constants

### Exercice 4

1) $y'' - 4y' + 5y = e^x(\cos x - \sin x)$

$R^2 - 4R + 5 = 0$

$\Delta = -4$

$R_1 = 2 + i$

$R_2 = 2 - i$

donc $y_H = a\,e^{2x}\cos x + b e^{2x}\sin x$

$y_p$ sous la forme $y_p = \lambda \cos x\, e^x + \mu \sin x\, e^x$

$y_p' = \lambda \cos x\, e^x - \lambda \sin x\, e^x + \mu \cos x\, e^x +$
$\mu \sin x\, e^x$

$y_p'' = \lambda(e^x\cos x - 2e^x\sin x - e^x\cos x) +$
$\mu(e^x\sin x + 2e^x\cos x)$

donc $\lambda(e^x\cos x - 2e^x\sin x - e^x\cos x) + \mu(e^x\sin x + 2e^x\cos x)$
$-4\lambda(\cos x\, e^x - \sin x\, e^x) - 4\mu(\cos x\, e^x + \sin x\, e^x) + 5(\lambda\cos x\, e^x$
$+ \mu\sin x\, e^x)$

$= e^x[(\lambda - 2\mu)\cos x + (2\lambda + \mu)\sin x]$

$= e^x(\cos x - \sin x)$

$\begin{cases} \lambda - 2\mu = 1 \\ 2\lambda + \mu = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1/5 \\ \mu = -3/5 \end{cases}$

$y_p = -\frac{1}{5}\cos x\, e^x - \frac{3}{5}\sin x\, e^x$

$y = y_p + y_H$

2) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin x$

$R^2 - 4R + 5 = 0$

$\Delta = -4$ $\qquad y_H = a \cdot e^{2x} \cos x + b e^{2x} \sin x$

$R_1 = 2 + i$

$R_2 = 2 - i$

$$\begin{cases} C_1' e^{2x} \cos x + C_2' e^{2x} \sin x = 0 \\ C_2' e^{2x} (2\cos x - \sin x) + C_2' e^{2x} (2\sin x + \cos x) = e^{2x} \sin x \end{cases}$$

(1) $$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ 2\cos x - \sin x & 2\sin x + \cos x \end{vmatrix} = 1$$

(2) $$C_1' = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sin x & 2\sin x + \cos x \end{vmatrix} = -\sin^2 x = -\frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

(3) $$C_2' = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ 2\cos x - \sin x & \sin x \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

$C_1 = \frac{1}{4} \sin(2x) - \frac{x}{2}$

$C_2 = -\frac{1}{4} \cos(2x)$

$$y_P = -\frac{1}{4} \cos(2x) e^{2x} \sin x + \frac{1}{4} \sin(2x) e^{2x} \cos(x) - \frac{x}{2} e^{2x} \cos x$$

$y = y_P + y_H$

## Exercice 5

1) $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{1+x^2}$

$R^2 - 4R + 4 = 0$ $\qquad y_H = a \cdot e^{2x} + bxe^{2x}$

$\Delta = 0$

$R = 2$

Variation de la constante :

$$\begin{cases} C_1' \cancel{e^{2x}} + C_2' x\cancel{e^{2x}} = 0 \\ C_1' 2\cancel{e^{2x}} + C_2' (1+2x)\cancel{e^{2x}} = \dfrac{e^{2x}}{1+x^2} \end{cases}$$

(1) : $\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 1+2x \end{vmatrix} = 1$

(2) : $C_1' = \begin{vmatrix} 0 & x \\ \frac{1}{1+x^2} & 1+2x \end{vmatrix} = -\dfrac{x}{1+x^2} \iff C_1 = -\dfrac{1}{2} \ln(1+x^2)$

(3) : $C_2' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{1+x^2} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{1+x^2} \iff C_2 = \operatorname{Arctan} x$

$$y_P = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) e^{2x} + \operatorname{Arctan} x \cdot x \cdot e^{2x}$$

$$y = ae^{2x} + bxe^{2x} - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) e^{2x} + \operatorname{Arctan} x \cdot x \cdot e^{2x}$$

2) $y'' - 9y = \frac{1}{ch(3x)}$

$y_H'' - 9y_H = 0$ $\quad\quad y_H = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$

$R = \pm 3$

Variation de la constante :

$$\begin{cases} C_1' e^{3x} + C_2' e^{-3x} = 0 \\ C_1' 3e^{3x} + C_2'(-3e^{3x}) = \frac{1}{ch(3x)} \end{cases}$$

Par Cramer
$$\begin{cases} C_1' = \frac{e^{-3x}}{6ch(3x)} \\ C_2' = -\frac{e^{3x}}{6ch(3x)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' + C_2' = -\frac{1}{3} th(3x) \\ C_1' - C_2' = \frac{1}{3} \end{cases} \quad\quad \begin{cases} C_1 + C_2 = -\frac{1}{3} \ln ch(3x) \\ C_1 - C_2 = \frac{x}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{1}{18} \ln ch(3x) + \frac{x}{6} \\ C_2 = -\frac{1}{18} \ln ch(3x) - \frac{x}{6} \end{cases}$$

$$y_P = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3} \ln ch(3x) - x\right) e^{3x} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3} \ln ch(3x) + x\right) e^{-3x}$$

$y = y_P + y_H$

## Feuille d'exercices n° 2

### Suites numériques

**Exercice 6.**

**(1)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe à termes non nuls. Montrer que si la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $R_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers une limite $\ell$ telle que $|\ell| < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. *(Conseil : écrire la définition de la convergence de $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\varepsilon = \frac{1-|\ell|}{2}$ et en déduire que pour $n$ assez grand, $|R_n| < \frac{1+|\ell|}{2} < 1$.)*

**(2)** En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = n!/n^n$.

**Exercice 7.**

**(1)** Montrer que si une suite réelle ou complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\ell \in \mathbb{C}$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ converge aussi vers $\ell$ (« théorème de Cesàro »). *(Conseil : on pourra écrire la définition de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers $\ell$ et en déduire une majoration de $|v_n - \ell|$ en coupant la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ en deux parties, pour $n$ assez grand.)*

**(2)** Que dire de la nature de la suite de terme général $w_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \sin\dfrac{1}{k}$ ?

**(3)** La réciproque du théorème de Cesàro est-elle vraie ? *(On pourra examiner le cas de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.)*

### Suites définies par une relation de récurrence d'ordre 1

**Exercice 8.** Étudier la définition, le sens de variation et la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

**Exercice 9.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{2u_n+2}$.

**(1)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n$ existe et est élément de $[0, 1]$. *(On ne demande pas, pour le moment, d'expliciter $u_n$ en fonction de $n$.)*

**(2)** Étudier le sens de variation et la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**(3)** Exprimer le terme général $u_n$ en fonction de $n$ et retrouver les résultats précédents.

**Exercice 10.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_{n+1} = \frac{u_n+2}{u_n+1}$.

(1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n$ existe et est élément de $[1,2]$. *(On ne demande pas, pour le moment, d'expliciter $u_n$ en fonction de $n$.)*

(2) La suite est-elle monotone ?

(3) Étudier la nature de cette suite en examinant les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

(4) Exprimer le terme général $u_n$ en fonction de $n$ et retrouver les résultats précédents.

**Exercice 11.** On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs termes initiaux $u_0$, $v_0$ donnés tels que $0 < u_0 < v_0$ et les relations de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$.

(1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n$ et $v_n$ existent et sont éléments de $\mathbb{R}_+^*$.

(2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > u_n$. *(Conseil : exprimer $v_n^2 - u_n^2$ en fonction de $u_{n-1}$ et $v_{n-1}$ pour $n \geq 1$.)*

(3) En déduire le sens de variation des deux suites.

(4) Montrer que $\forall n \geq 1$, $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$. Que conclure quant à leur nature ?

Correction TD maths spé

# Suites numériques

## Exercice 1

1) $R_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \rho$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |R_n - \rho| < \varepsilon$

Prenons $\varepsilon = \frac{1-|\rho|}{2}$ : $\exists n, \forall n, N \geq n \Rightarrow |R_n - \rho| < \frac{1-|\rho|}{2}$

$\Rightarrow |R_n| = |R_n - \rho + \rho| \leq |R_n - \rho| + |\rho| < \frac{1-|\rho|}{2} + |\rho|$

donc $\frac{1+|\rho|}{2} < 1$

Donc : pour $N \geq n$, $|R_n| < \frac{1+|\rho|}{2} = q$

, $|U_{n+1}| < q\,|u_n|$

, $|U_{n+2}| < q\,|U_{n+1}| < q^2\,|U_n|$

d'où $\forall N \geq n$, $|u_{n+3}| < q|u_{n+2}| < q^3|u_n|$

et par récurrence : $\forall N \geq n, \forall p \geq 0, |u_{n+p}| < q^p|u_n|$

Prenons $n = N$ :

$\forall p \geq 0, |u_{N+p}| < q^p|u_N|$ et donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

2) $u_n = \frac{n!}{n^n} \Rightarrow R_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$

$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e}$

⚠ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n}\right)$

$\longrightarrow e^1$ car $\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$

Ainsi $R_n \to \ell = \frac{1}{e}$ et $|\ell| = \frac{1}{e} < 1$ donc $\ell e$ (1) s'applique et $u_n \to 0$

donc $\frac{n!}{n^n} \to 0$

## Exercice 7

1) $u_n \to \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, n \geq N \Rightarrow \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$

Alors $v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n)$

$\Rightarrow v_n - \ell = \frac{1}{n}((u_1 - \ell) + \dots + (u_n - \ell))$

Soit $n \geq N$ : $v_n - \ell = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} (u_k - \ell) + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^{n} (u_k - \ell)$

$\Rightarrow |v_n - \ell| \leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{N-1} (u_k - \ell) \right| + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^{n} \underbrace{|u_k - \ell|}_{<\varepsilon} \leq \frac{1}{n}(n-N+1)\,\varepsilon$

& Soit $\eta > 0$ : pour $n$ assez grand, disons $n \geq N_\eta$, on a :

$\frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{N} (u_k - \ell) \right| < \eta/2$

Par ailleurs $\frac{n-N+1}{n} \varepsilon \underset{n \to +\infty}{\to} \varepsilon$ donc, prenant $\varepsilon < \eta/2$, quitte à

augmenter $N_\eta$ on aura : $n \geq N_\eta \Rightarrow \frac{n-N+1}{n} \varepsilon < \eta/2$

donc $|v_n - \ell| < \eta/2 + \eta/2 = \eta$ On vient de montrer

Suite

que $\forall \eta > 0$, $\exists N_\eta$, $\forall n$, $n \geq N_\eta \Rightarrow |v_n - l| < \eta$

donc $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$

2) $k \sin \frac{1}{k} = \dfrac{\sin 1/k}{1/k} \longrightarrow 1$

donc (Cesàro) : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \sin \frac{1}{k} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

3) $u_n = (-1)^n$

$u_n$ ne converge pas

mais $v_n = \frac{1}{n} \left( -1 + 1 \ldots \left| \begin{array}{l} +1 \\ -1 \end{array} \right. \right)$ si $n$ pair ; si $n$ est impair

donc $|v_n| \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0$, donc $v_n \to 0$

réciproque fausse

## Exercice 8

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$$

- Supposons $u_n$ bien définit et $u_n \geq 0$
  alors $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ est bien définie et $\geq 0$

- En fait $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \sqrt{x+1}$
  donc $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$ $f$ est croissante

  $u_0 = 1$, $u_1 = f(u_0) = \sqrt{2} > u_0$

  donc la suite $(u_n)$ est croissante.

· Point fixe : $f(x) = x$

$$\sqrt{x+1} = x$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

· Vérifions que $u_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $(\forall n)$

$u_0 = 1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

si $u_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors

$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} = f(u_n) < f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Donc la propriété est vraie

$(u_n)$ est croissante majorée donc convergente. Et comme $f$ est continue, la limite $l$ de $(u_n)$ vérifie $f(l) = l$ (où $l > 0$) donc $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Exercice 9

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 2} \end{cases}$$

(1) $u_0 \in [0, 1]$

Si $u_n \in [0,1]$ alors

$u_{n+1} = f(u_n)$ existe et

$u_{n+1} \in [0, 1]$. En effet, $f(x) = \frac{3x+1}{2x+2}$

donc $f$ est croissante $f'(x) = \frac{4}{(2x+2)^2} > 0$

$f(x) = x_1 = 1$ Sur $[0, +\infty[$, $f$ croît de $0$ à $\frac{3}{2}$

$x_2 = -\frac{1}{2}$ et $u_0 = 0$, $u_1 = 1/2$

donc $(u_n)$ est croissante

Donc $u_n \nearrow$ donc convergente et sa limite est le point fixe 1.

Correction
Prepa TD
Maths spé



Comme $f$ est homographique on peut appliquer directement ce résultat du cours :

$\Delta > 0$

$\dfrac{u_n + 1/2}{u_n - 1}$ est géométrique de raison $q = 4$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + \frac{1}{2}}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{3u_n+1}{2u_n+2} + \frac{1}{2}}{\frac{3u_n+1}{2u_n+2} - 1} = 4\,\frac{u_n + 1/2}{u_n - 1}$$

$$v_n = -\frac{1}{2} \cdot 4^n$$

$$v_n = y = \frac{x - \ell_1}{x - \ell_2}$$

$$yx - y\ell_2 = x - \ell_1$$

$$yx - x = y\ell_2 - \ell_1$$

$$x(y-1) = y\ell_2 - \ell_1$$

$$x = \frac{y\ell_2 - \ell_1}{y-1}$$

$$u_n = \frac{v_n + 1/2}{v_n - 1}$$

$$u_n = \frac{-\frac{1}{2} \cdot 4^n + \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} \cdot 4^n - 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(-4^n + 1\right)}{\frac{-4^n - 2}{2}}$$

$$= \frac{-4^n + 1}{-4^n - 2} = \left[\frac{-4^n + 1}{4^n + 2}\right]$$

donc $u_n = \dfrac{4^n - 1}{4^n + 2}$

**Exercice 10**

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1} \end{cases}$$

(1) $u_0 \in [1, 2]$

Si $u_n \in [1, 2]$

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 1 + 1}{u_n + 1} = 1 + \frac{1}{u_n + 1}$$

$$\begin{cases} u_{n+1} \geqslant 1 + \frac{1}{3} \geqslant 1 \\ u_{n+1} \leqslant 1 + \frac{1}{2} \leqslant 2 \end{cases}$$

donc $u_{n+1} \in [1, 2]$

(2) $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1} = 1 + \dfrac{1}{x+1}$

donc décroissante sur $[1, 2]$ donc $(u_n)$ n'est pas monotone

(3) $(u_{2n})$ est croissante car $u_{2n+2} = f\circ f(u_{2n})$ avec $f\circ f \nearrow$)

$(u_{2n+1})$ est décroissante car $\left[ \begin{array}{l} u_1 = \frac{3}{2} > u_3 = f(u_2) \\ \text{car } f\circ f \text{ croissante} \end{array} \right.$

et elles sont bornées ($u_n \in [0,2]$) donc convergentes
$\lim (u_{2n})$ et $\lim (u_{2n+1})$ sont des points fixes de $f\circ f$

$f\circ f(x) = x \Leftrightarrow f\left(\frac{x+2}{x+1}\right) = x \Leftrightarrow \frac{3x+4}{2x+3} = x \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Le seul point fixe dans $[1,2]$ est $\sqrt{2}$

(4) $f(x) = \frac{x+2}{x+1} = x \Leftrightarrow x^2 = 2$
$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Soit $v_n = \frac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}$

$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{2}}{u_{n+1} + \sqrt{2}} \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{\frac{u_n+2}{u_n+1} - \sqrt{2}}{\frac{u_n+2}{u_n+1} + \sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \frac{(1-\sqrt{2})u_n + \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(1+\sqrt{2})u_n + \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} \Leftrightarrow q = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = -3+2\sqrt{2}$

donc $v_n = (-3+2\sqrt{2})(-3+2\sqrt{2})^n$
$= (-3+2\sqrt{2})^{n+1}$

$u_n = \frac{\sqrt{2}(-3+2\sqrt{2})^{n+1} + \sqrt{2}}{(-3+2\sqrt{2})^{n+1} - 1}$
$= \frac{\sqrt{2}\left((-3+2\sqrt{2})^{n+1} + 1\right)}{(-3+2\sqrt{2})^{n+1} - 1}$.

$y = \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}$

$yx + y\sqrt{2} = x - \sqrt{2}$
$yx - x = -y\sqrt{2} - \sqrt{2}$
$x(y-1) = -y\sqrt{2} - \sqrt{2}$
$x = \frac{-y\sqrt{2} - \sqrt{2}}{y-1}$

$x = -\frac{y\sqrt{2} + \sqrt{2}}{y-1}$

Correction TD maths

Exercice 11

$0 < u_0 < v_0$

$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ moy géo

$v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ moy arith

(1) $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $v_0 \in \mathbb{R}_+^*$

Si $u_n \in \mathbb{R}_+^*$, $v_n \in \mathbb{R}_+^*$, alors

$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ existe et $u_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$

$v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ existe et $v_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$

Donc la propriété $(u_n \in \mathbb{R}_+^*, v_n \in \mathbb{R}_+^*)$ est héréditaire et donc les suites $(u_n), (v_n)$ sont bien définies et $\forall n, u_n \in \mathbb{R}_+^*, v_n \in \mathbb{R}_+^*$

(2) $v_n^2 - u_n^2 = \left(\dfrac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}\right)^2 - u_{n-1} v_{n-1}$

$= \left(\dfrac{u_{n-1} - v_{n-1}}{2}\right)^2$

HR : $v_{n-1} > u_{n-1}$ (vrai pour $n-1=0$)

alors $v_n^2 - u_n^2 = \left(\dfrac{v_{n-1} - u_{n-1}}{2}\right)^2 > 0$

d'où $(v_n - u_n)(v_n + u_n) > 0$

et donc $v_n > u_n$ héréditaire

(3) $v_n > u_n$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n . v_n} > u_n$ (car $u_n \in \mathbb{R}_+^*$)

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n$ : la suite $(u_n)$ est $\nearrow$

car $v_n > u_n$

$v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} < v_n = v_n$

$\Rightarrow$ la suite $(v_n)$ est $\searrow$

(4) $$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n}$$

$$= \frac{u_n - 2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n} + v_n}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})}{2}$$

$$= \frac{v_n - u_n}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}} \cdot \frac{\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}}{2} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

$\in ]0,1[$ car $u_n \in \mathbb{R}_+^*$, $v_n \in \mathbb{R}_+^*$

$\sqrt{v_n} > \sqrt{u_n}$

Donc $v_n - u_n < \frac{1}{2} \cancel{(v_{n+1} - u_{n+1})} (v_{n-1} - u_{n-1})$

Récapitulons $(u_n) \nearrow$

$(v_n) \searrow$

$v_n - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Elles sont adjacentes et CV vers la même limite

# Feuille d'exercices n° 3

## Limites

**Exercice 12.** Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x-6}{x^2-4};\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1};\qquad \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}+x;\qquad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}+x;\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2+x^2}-x}{\sqrt{7+x^2}-x}$$

**Exercice 13.** Calculer les limites suivantes en utilisant des comparaisons de fonctions (équivalents, etc.) :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\tan^2(2x)};\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{1-2\sin x};\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2+|x|}{x};\qquad \lim_{x\to 0}x\sin(1/x)$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\sin(1/x);\qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^2}\quad(\alpha>0);\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^2}\quad(\alpha>0);$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x\quad(a\in\mathbb{R});\qquad \lim_{x\to 0^+}x^{1/x};\qquad \lim_{x\to+\infty}(\operatorname{ch}x)^{2/x}.$$

## Continuité

**Exercice 14.** On considère la fonction $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{si}\quad x<0 \\ \dfrac{\sin x\cdot\tan x}{1-\cos x} & \text{si}\quad x\in\left]0,\dfrac{\pi}{4}\right] \\ a\sin x-1 & \text{si}\quad x>\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

(1) Étudier la continuité de $f$.
(2) Pour quelle valeur du réel $a$ la fonction $f$ est-elle continue sur tout intervalle de $\mathbb{R}^*$ ?
(3) Déterminer $b$ de telle sorte que $f$ soit prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$.

**Exercice 15.** (1) Montrer que le polynôme $P(x)=x^5-3x-1$ admet au moins une racine comprise entre $-1$ et $0$.

(2) Montrer que tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

**Exercice 16.** Montrer que toute fonction continue $f:[0,1]\to[0,1]$ admet au moins un point fixe. *(On pourra considérer la fonction $x\mapsto f(x)-x$.)*

Correction TD spé

Limites :

**Exercice 12**

• $$\frac{x^3 - x - 6}{x^2 - 4} = \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+3)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+2x+3}{x+2} = \frac{11}{4}$$

• $$\frac{x}{\sqrt{1+x^2} - 1}$$ : FI du type $0/0$ $(x \to 0)$

$$\Leftrightarrow \frac{x(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x} \longrightarrow \pm\infty \underset{0}{\sim} \frac{2}{x}$$

• $$\frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2-4} = \frac{4x+1-9}{\sqrt{4x+1}+3} \cdot \frac{1}{x^2-4}$$

$$= \frac{4\cancel{(x-2)}}{\sqrt{4x+1}+3} \cdot \frac{1}{\cancel{(x-2)}(x+2)}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{6}$$

• $$\sqrt{x^2-1} + x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

• $\sqrt{x^2-1} + x$ : FI du type $+\infty - \infty$

$$\left(\frac{\sqrt{x^2-1} - x}{-1}\right)^{-1} = \left(-\sqrt{x^2-1} + x\right)^{-1} \longrightarrow 0$$

• $$\cancel{\sqrt{2x+1}} \quad \frac{\sqrt{2+x^2} - x}{\sqrt{7+x^2} - x} = \frac{2}{\sqrt{2+x^2}+x} \cdot \frac{\sqrt{7+x^2}+x}{7}$$

$$= \frac{2}{7} \frac{\sqrt{1+7/x^2}+1}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1} \longrightarrow \frac{2}{7}$$

## Exercice 13

$\sin x \underset{0}{\sim} x$

$\tan t \underset{0}{\sim} t$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\tan^2(2x)} \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{(2x)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{1-2\sin x}$$

· Numérateur $\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right) \underset{x\to\frac{\pi}{6}}{\sim} \frac{\pi}{6}-x$

· Démominateur $1-2\sin \to 0$

$$x = \frac{\pi}{6} - \left(\frac{\pi}{6}-x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\cos\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$$

$$\Rightarrow 1-2\sin x = 1-\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$$

$$\Rightarrow = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}-\frac{x}{2}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$$

$$= 2\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}\right)^2 \left(\frac{\pi}{6}-x\right)\cdot\frac{1}{4}$$

$$\text{donc } \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{1-2\sin x} \underset{x\to\frac{\pi}{6}}{\sim} \frac{\frac{\pi}{6}-x}{\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)} \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{6}]{} \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$x^6 + x^3 + x$

$$1-2\sin x = 2\left(\frac{1}{2}-\sin x\right) = 2\left(\sin\frac{\pi}{6} - \sin x\right)$$

$$= 2\cdot 2\sin\frac{\frac{\pi}{6}-x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{6}+x}{2}$$

$$\underset{x\to\pi/6}{\sim} \left(\frac{\pi}{6}-x\right)\cdot\sqrt{3}$$

$$\underset{x\to\pi/6}{\sim} \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+|x|}{x}$$

$$\cdot \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+|x|}{x} = 1$$

$$\cdot \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+|x|}{x} = -1$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+|x|}{2} \nexists$

Pre Correction TD maths

$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} \Rightarrow -x \leqslant x\sin\frac{1}{x} \leqslant x \to 0$

$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} \underset{+\infty}{\to} 0 \Rightarrow \sin\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$

$\Rightarrow x\sin\frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} x\cdot\frac{1}{x} = 1$

$\lim_{0^+} \frac{\ln(1+x)^\alpha}{x^2}$ $(E)$ $\ln(1+x^\alpha) \underset{x\to 0}{\sim} x^\alpha$

et donc $(E) \underset{0}{\sim} x^{\alpha-2} \underset{x\to 0}{\to} \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha>2 \\ 1 \text{ si } \alpha=2 \\ +\infty \text{ si } \alpha<2 \end{cases}$

$\lim_{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha\ln x}{x^2} \sim \alpha\frac{\ln x}{x^2} \to 0.$

$\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{0}{\sim} 1$

$\lim_{+\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \exp\left(x\ln(1+a/x)\right) = \exp\left(a\frac{\ln(1+a/x)}{a/x}\right)$

$= e^a$

$\lim_{x\to 0^+} x^{1/x} \underset{0}{\sim} \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) \to 0.$

$\lim_{x\to+\infty} (\operatorname{ch} x)^{2/x} \underset{0}{\sim} \exp\left(\frac{2\ln\operatorname{ch} x}{x}\right)$

$\ln\operatorname{ch} x = \ln\frac{1}{2} + x + \ln(1+e^{-2x})$

donc $\frac{2}{x}\ln\operatorname{ch} x \sim \frac{2}{x}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{x}\ln(1+e^{-2x}) \underset{x\to+\infty}{\to} 2$

donc $(\operatorname{ch} x)^{2/x} \longrightarrow e^2$

## Exercice 14

1) • $ax+b$ est continue sur $\mathbb{R}_-^*$

• $\dfrac{\sin x \cdot \tan x}{1-\cos x}$ si $0 < x < \frac{\pi}{4}$

• $a\sin x - 1$ continue sur $x > \frac{\pi}{4}$

Il faut étudier la continuité de $f$ en $0$ et en $\frac{\pi}{4}$ à droite

Limite à gauche en $0$. $\lim_{0^-} ax+b = b$

$$\lim_{0^+} \frac{\sin x \tan x}{1-\cos x} = \frac{\sin x \cdot \tan x}{2\sin^2(x/2)}$$

$$\underset{0^+}{\sim} \frac{x^2}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 2 \quad \text{donc} \quad \lim_{0^+} f = 2$$

Mais $f(0)$ n'est pas définie !
Donc on peut dire que $f$ est prolongeable par continuité en $0$ si $\lim_{0^-} f = \lim_{0^+} f$ ie si $b=2$
alors pour prolonger $f$ par continuité en $0$ il faut poser $f(0) = 2$

Limite à droite de $\frac{\pi}{4}$ :
$f(\frac{\pi}{4}) = 1+\sqrt{2}$
$f$ continue en $\frac{\pi}{4}$ ssi $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f = f(\frac{\pi}{4}) = 1+\sqrt{2}$

or $x \to (\frac{\pi}{4})^+$ $\lim f(x) = a\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

donc $a\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = 1+\sqrt{2}$
$\frac{a}{\sqrt{2}} = 2+\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 2\sqrt{2} + 2$

Donc $f$ est continue en $\frac{\pi}{4}$ ssi $a = 2(\sqrt{2}+1)$

Récap: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

TVI

Si $f$ est déf, continue alors $\forall d \in [a,b], \exists c \in ]a,b[, f(c) = d$

- $f$ est continue sur $D_f$
- $f$ est continue en $\frac{\pi}{4}$ ssi $a = 2(\sqrt{2}+1)$
- Et on en a profité pour constater que $f$ est prolongeable par continuité en $0$ ssi $b=2$ et qu'alors $f(0)=2$

Exercice 15 (1) $P$ continue (évident)

$P(-1) = -1+3-1 = 1$

$P(0) = -1$

$P$ est continue et change de signe dans $[-1,0]$ donc elle s'annule au moins une fois dans cet intervalle (merci TVI).

(2) $P$ polynome réel de degrés impair:

$P(x) = a_{2n+1} x^{2n+1} + a_{2n} x^{2n} + \dots + a_1 x + a_0$

où $a_{2n+1} \neq 0$

$P(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_{2n+1} x^{2n+1}$

De même les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de $P$ sont des signes opposés, donc $P(x)$ prend pour $x \ominus$ et $x \oplus$ avec $|x|$ assez grand des valeurs de signes opposés. Donc, par le TVI, $P$ s'annule au moins une fois dans $\mathbb{R}$

$f$ continue se fait pas de saut.

· Méca
· Chimie
· Maths spe

Exercice 16

$f : [0,1] \to [0,1]$

$x \mapsto f(x) - x$ fonction continue

$f(0) - 0 \geq 0$ car $f(0) \in [0,1]$

$f(1) - 1 \leq 1$ car $f(1) \in [0,1]$

Donc $f(x) - x$ s'annule au moins une fois dans $[0,1]$ (soit en 0, soit en 1 soit par le TVI par qu'alors elle change de signe : $f(0) - 0 > 0$, $f(1) - 1 < 0$

Donc $\exists x \in [0,1], f(x) = x$ i.e $f$ a un point fixe.

# Feuille d'exercices n° 4

## Dérivabilité

**Exercice 17.** Étudier la dérivabilité en 0 des fonctions $f : x \mapsto |x|$, $g : x \mapsto x\,|x|$, $h : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Lorsque la dérivée existe, dire si elle est continue en 0.

**Exercice 18.** (1) Définir la différentielle de $f : x \mapsto x^3 - x^2 + 5x - 6$ en 0 puis en 1. L'une au moins d'entre elles était-elle prévisible sans calcul ?

(2) À l'aide de la différentielle de $f : x \mapsto \frac{2x}{1+\sqrt{x}}$ donner une valeur approchée de $f(1,004)$.

**Exercice 19.** (1) Montrer que si une fonction $f$ dérivable sur un intervalle ouvert $I$ s'annule en $n$ points de $I$ distincts, alors $f'$ s'annule au moins $n-1$ fois dans $I$.

(2) Montrer que l'équation $x^n + px + q = 0$ ne peut avoir plus de deux racines réelles si $n$ est pair et plus de trois racines réelles si $n$ est impair.

**Exercice 20.** Montrer que la fonction $f : [-1, +\infty[ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1+x)^{1/3}$ est contractante sur $[0, +\infty[$.

**Exercice 21.** Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$ et que son (unique) prolongement est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 22.** Étudier les variations $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ (où arcsin est prise à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$). Tracer sa représentation graphique.

**Exercice 23.** Étudier les variations $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x-1)^2 \arcsin(x)$ (où arcsin est prise à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$). Tracer sa représentation graphique.

**Exercice 24.** Calculer les dérivées d'ordre $n$ de $f : x \mapsto \sin(x)$, $g : x \mapsto x^2 \sin(3x)$, $h : x \mapsto (x^2+1)e^{2x}$.

## Développements limités

**Exercice 25.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = o(x^n)$ $(x \underset{\neq}{\to} 0)$. En déduire que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Écrire le $DL$ de $f$ en 0 à l'ordre $n$.

**Exercice 26.** Calculer le $DL_4(1)$ de arctan (où arctan est prise à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$) ; le $DL_4(2)$ de exp ; le $DL_4(2)$ de ln ; le $DL_4(\pi/4)$ de cos.

**Exercice 27.** (1) Calculer le $DL_4(0)$ de : $e^x + \cos(x)$ ; $\ln(1+x) + \sin(x)$ ; $e^x \ln(1+x)$ ; $\frac{\ln(1-x)}{1-x}$ ; $\ln(\cos x)$ ; $e^{\sin x}$ ; $e^{\sin x}$ ; $\frac{\sin x}{\ln(1+x)}$.

(2) Calculer le $DL_2(0)$ de $\frac{x - \ln(1+x)}{\sin x}$.

**Exercice 28.** (1) Du $DL_2(0)$ de $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$ déduire $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

**(2)** Déterminer $a$ et $b$ réels tels que $\lim_{x\to+\infty}(ax+b-\sqrt[4]{16x^4+x^3+1})=0$.
*Conseil : poser $X=1/x$, $g(X)=f(x)$ et faire le $DL_1(0)$ de $g$.*

**Exercice 29.** (Étude locale d'une fonction)
Soit $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=(x+2-\frac{1}{x})\arctan x$ (où arctan est prise à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$). Montrer que $f$ admet un $DL_2$ quand $x \underset{\neq}{\to} 0$, qu'on explicitera.

En déduire qu'elle est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$. Définir le prolongement $\widetilde{f}$ correspondant. Montrer que $\widetilde{f}$ est dérivable en 0. Donner l'équation de la tangente $\Delta$ au graphe de $\widetilde{f}$ en son point d'abscisse 0. Quelle est localement la position du graphe par rapport à $\Delta$ ?

**Exercice 30.** (Étude de branches infinies)
Étudier les branches infinies de $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x\left(\frac{x}{1+x}\right)^2$ et de $g:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.

Correction Dérivabilité

TD spé

## Exercice 17

$$\frac{f(x)-|0|}{x-0} = \frac{|x|}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} +1 \text{ si } x > 0^+ \\ -1 \text{ si } x < 0^- \end{cases}$$

donc $f'_g(0) = -1$, $f'_d(0) = 1$ et $f'(0)$ n'existe pas.

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{x|x|}{x} \to 0$$ donc $g$ est dérivable en $0$ et $g'(0)=0$

## Exercice 18

1) Définir la différentielle de $f$ en $0$ puis en $1$ où $f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 6$. L'une au moins était-elle prévisible sans calcul ?

$df_a(h) = f'(a)h$, $f(x) = f(a) + df_a(h) + o(h)$

$\hookrightarrow h = x - a$

En $0$ $df_0(h) = f'(0).h = (3x^2 - 2x + 5)\Big|_{x=0} h$

donc $df_0(h) = 5h$, $h \in \mathbb{R}$ ~~$= (3x^2 - 2x + 5)$~~

$df_1(h) = f'(x)\Big|_{x=1} h = 6h$, $h \in \mathbb{R}$

$f(x) = \underbrace{-6}_{\text{cte}} + \underbrace{5x}_{\text{linéaire}} \underbrace{- x^2 + x^3}_{o(x)} \quad (x \to 0)$

$f(0)$

$\Rightarrow df_0(h) = 5h$

La diff est la partie linéaire du dvpt limité de $f$ en $0$. Pour un polynôme, le dvpt limité en $0$ est la somme des monômes de $f$ écrits dans l'ordre des puissances croissantes

2) À l'aide de la diff de $f : x \to \frac{2x}{1+\sqrt{x}}$ donner une valeur approchée de $f(1,004)$

$$f(x) = \frac{2x}{1+\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(1+\sqrt{x}) - x/\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}$$
$$= \frac{2+\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}$$

Donc $df_a(h) = f'(a)h = \frac{2+\sqrt{a}}{(1+\sqrt{a})^2} h$

D'où $df_1(h) = \frac{3}{4} h$

on a donc : $f(1,004) = f(1) + df_1(0,004) = 1 + \frac{3}{4} \cdot 0,004 + R$

$$\simeq 1,003$$

correction
maths spé

$\Leftrightarrow x = \pm (-p/n)^{\frac{1}{2n}}$ si $-p/n > 0$

$\Rightarrow$ la dérivée a au plus 2 racines

$\Rightarrow k-1 \leq 2 \Rightarrow k \leq 3$

## Exercice 20

$f : [-1, -\infty[ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1+x)^{1/3}$ Montrer qu'elle est contractante

D'après le TAF, $f$ est $M$-lipschitz où $M = \sup |f'|$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$

Calculons $f'$ :

$f'(x) = ((1+x)^{1/3})' = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}$

$x \geq 0 \Rightarrow 1+x \geq 1 \Rightarrow (1+x)^{-2/3} \leq 1^{-2/3} = 1 \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{3}$

$f$ est $\frac{1}{3}$ lip et donc est contractante.

## Exercice 21

$f(x) = e^{-1/x^2}$ $(x \in \mathbb{R}^*)$

$f(x) = e^{-1/x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ Donc $f$ est prolongeable par continuité en 0 par

$\begin{cases} \tilde{f}(0) = 0 \\ \tilde{f} = f \text{ sur } \mathbb{R}^* \end{cases}$

Montrons que $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sur $\mathbb{R}^*$. $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\tilde{f}'(x) = f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

donc TDB $\tilde{f}'(0) = 0$

Sur $\mathbb{R}^*$, $\tilde{f} = f$ est indéfiniment dérivable et $f^{(n)}(x) = P_n(1/x)\, e^{-1/x^2}$ où $P_n$ est un polynome. En effet, c'est vrai pour $n=0$ : $f^{(0)}(x) = e^{-1/x^2}$ $(P_0 = 1)$ et si c'est vrai pour un certain $n$, alors :

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \underset{\text{existe}}{(f^{(n)})'(x) =} -\frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} + P_n\left(\frac{1}{x}\right)\frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} = P_{n+1}(1/x)\, e^{-1/x^2}$$

où $P_{n+1}(X) = -X^2 P_n'(X) + 2X^3 P_n(X)$ est bien un polynome

Donc la propriété $(*)$ est vraie pour $n=0$ et héréditaire est donc vraie $\forall\, n$.

Or : $P_n(1/x)\, e^{-1/x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ Donc en appliquant successivement le théorème de dérivation aux bornes à $\tilde{f}, \tilde{f}' \ldots \tilde{f}^{(n-1)}$ on obtient que $\tilde{f}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\tilde{f}^{(n)}(0) = 0$

Par Taylor-Young, on a un $DL_n(0)$: $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(0) + \tilde{f}'(0)x + \ldots$

**Exercice 22** $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ Arcsin $y$ existe ssi $y \in [-1, 1]$, ie ssi $|y| \leq 1$

A t-on $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1$ ?

oui car $1 + |x|^2 - 2|x| \geq 0 \Leftrightarrow (1-|x|)^2 \geq 0$ vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$

On a donc bien $D_f = \mathbb{R}$

$f(x) = \operatorname{Arc}\cancel{\tan}\sin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et $f'(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' \operatorname{Arcsin}'\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

$$= \frac{2(1+x^2) - (2x)^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}$$

$$= \frac{2}{1+x^2}$$ Donc $f(x) = \operatorname{Arcsin}\frac{2x}{1+x^2}$

$= 2\operatorname{Arctan} x + C$

Correction TD spé

## Exercice 22

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}$$

$$= \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\frac{1}{1+x^2}\sqrt{(1-x^2)^2}}$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{1+x^2} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}}$$

Comme $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ ($x$ n'est pas nécessairement dans $]-1,1[$, on a $\sqrt{(1-x^2)^2} = |1-x^2|$

Donc

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \frac{1-x^2}{|1-x^2|} \quad \text{dans sur } ]-\infty,-1[ \cup ]-1,+\infty[$$

$$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2} \quad \text{et sur } ]-1,1[, \; f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

et donc : sur $]-\infty,-1[$ : $f(x) = -2\,\mathrm{Arctan}\, x + C_1$

sur $]-1,1[$ : $f(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\, x + C_2$

sur $]1,+\infty[$, $f(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\, x + C_3$

$$f(x) = \mathrm{Arc}\sin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$$= -2\lim_{-\infty} \mathrm{Arctan}\, x + C_1$$

$f(0) = 0$

$= 2\,\mathrm{Arctan}\, 0 + C_2$ donc $C_2 = 0$ $\quad = \pi + C_1$

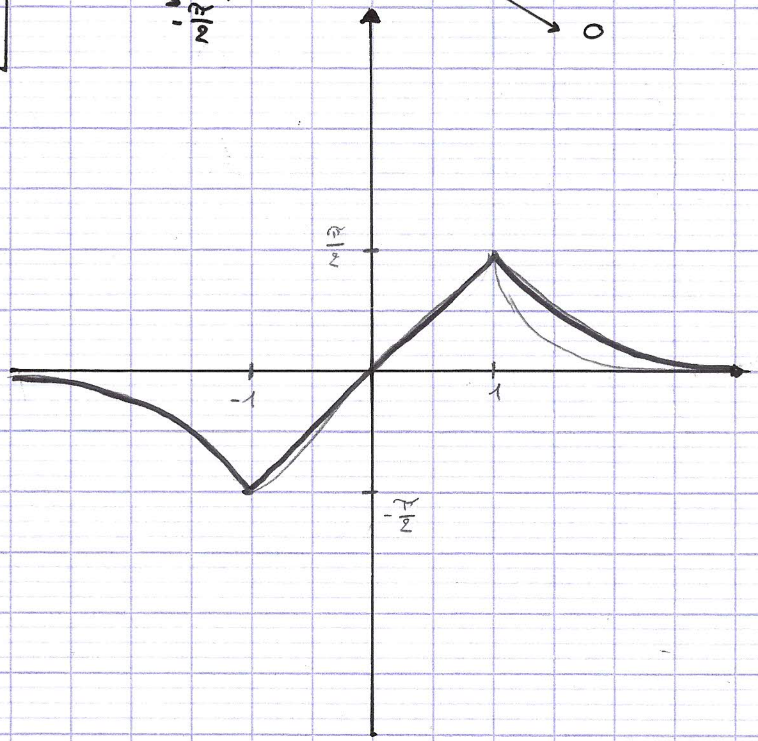
donc $C_1 = -\pi$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 0$$

$$= -2\lim_{+\infty} \mathrm{Arctan}\, x + C_2$$

donc $C_3 = \pi$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $\|$ | $+$ | $\|$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\nearrow$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\searrow$ | $0$ |




## Exercice 29

$f(x) = (x-1)^2 \operatorname{Arcsin} x \qquad D_f = D_{\operatorname{Arcsin}} = [-1, 1]$

$f'(x) = 2(x-1) \operatorname{Arcsin} x + (x-1)^2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad$ sur $]-1, 1[$

Sur $]-1, 0]$, $\begin{cases} x-1 < 0 \\ \operatorname{Arcsin} x \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow (x-1) \operatorname{Arcsin} x \geqslant 0$

or $(x-1)^2 \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0 \qquad$ Sur $]0, 1[$ : $\operatorname{Arcsin} x > 0$

$f'(x) = \left(2 \operatorname{Arcsin} x + \dfrac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \underbrace{(x-1)}_{<0}$

$= g(x)(x-1)$

où $g(x) = 2\,\text{Arcsin}\, x - \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

$$g'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1+x}}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{-1-1}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

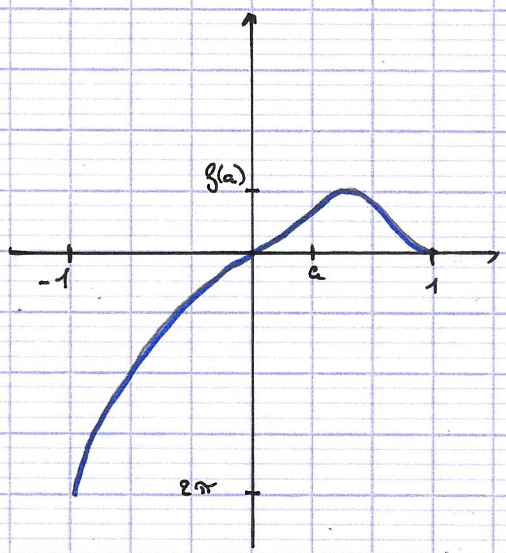
Donc $g$ croît sur $]0,1]$ de $g(0) = -1$

à $g(1) = \pi$

Donc $g$ s'annule exactement une fois, en un point

$a \in ]0,1[$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | $a$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $g(-\pi/2)$ | $\nearrow$ | | $g(a)$ | $\searrow$ | $0$ |



$$\frac{(2x)}{x\left(\frac{1}{x}+x\right)}$$

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+x}$$

$0$

Donc $f(x) = 2\,\text{Arctan}\, x + C_1$ sur $]-\infty, -1[$

$= 2\,\text{Arctan}\, x + C_2$ sur $]-1, 1[$

$= 2\,\text{Arctan}\, x + C_3$ sur $]1, +\infty[$

Mais $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto f(x) - \text{Arctan}\, x$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $C_1 = C_2 = C_3$

Donc $f(x) = 2\,\text{Arctan}\, x + C$ sur $\mathbb{R}$

Mais $f(0) = 0$ et $2\,\text{Arctan}\, 0 = 0$ donc $C = 0$

On conclut que $f(x) = 2\,\text{Arctan}\, x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

~~Prepa~~ TD correction spé

# Développements limités

## Exercice 25

voir exo 21

## Exercice 26

Appliquons Taylor Young :

$$\mathrm{Arctan}\, x = \mathrm{Arctan}\, 1 + (\mathrm{Arctan}'\, 1)(x-1) + \frac{1}{2}(\mathrm{Arctan}''\, 1)(x-1)^2 + \frac{1}{6}(\mathrm{Arctan}'''\, 1)(x-1)^3 + \frac{1}{24}(\mathrm{Arctan}^{4}\, 1)(x-1)^4 + o(x-1)^4$$

$\mathrm{Arctan}\, 1 = \frac{\pi}{4}$ , $\mathrm{Arctan}'\, x = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \mathrm{Arctan}'\, 1 = \frac{1}{2}$

$$\mathrm{Arctan}''\, x = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \mathrm{Arctan}''\, 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Arctan}'''\, x = \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{-2(1+x^2) + 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Arctan}'''\, 1 = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Arctan}^{(4)}\, x = 2 . \frac{6x(1+x^2)^3 - 6x(3x^2-1)(1+x^2)^2}{(1+x^2)^4}$$

$$= 12x \frac{1+x^2-(3x^2-1)}{(1+x^2)^4}$$

$$= 12x \frac{2-2x^2}{(1-x^2)^4}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Arctan}^{(4)}(1) = 0$$

$$\mathrm{Arctan}\, x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3$$

$$+ o((x-1)^4) \qquad (x \to 1)$$

$DL_4(2)$ de exp :

$$TY \Rightarrow e^x = e^2 + e'^{2}(x-2) + \frac{1}{2}e''^{2}(x-2)^2 + \frac{1}{6}e'''^{2}(x-2)^3 + \frac{1}{24}e^{(4)^2}(x-2)^4 + o(x-2)^4$$

$$= e^2 + e^2(x-2) + \frac{1}{2}e^2(x-2)^2 + \frac{1}{6}e^2(x-2)^3 + \frac{1}{24}e^2(x-2)^4 + o(x-2)^4 \quad (x \to 2)$$

$DL_4(2)$ de $\ln$ :

$$\ln x = \ln 2 + \ln' 2\,(x-2) + \frac{1}{2}\ln'' 2\,(x-2)^2 + \frac{1}{6}\ln''' 2\,(x-2)^3 + \frac{1}{24}\ln^{(4)} 2\,(x-2)^4 + o((x-2)^4)$$

$\ln' x = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln 2 = \frac{1}{2}$

$\ln'' x = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \ln'' 2 = -\frac{1}{4}$

$\ln'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow \ln''' 2 = \frac{1}{4}$

$\ln^{(4)} x = \frac{-6}{x^4} \Rightarrow \ln^{(4)} 2 = -\frac{3}{8}$

et donc $\ln x = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 - \frac{1}{64}(x-2)^4 + o((x-2)^4)$

$DL_4(\frac{\pi}{4})$ de $\cos$ :

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{4} + \cos'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\cos''\left(\frac{\pi}{4}\right).\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{6}\cos'''\left(\frac{\pi}{4}\right).\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{24}\cos^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right).\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4\right) \quad x \to \frac{\pi}{4}$$

~~Prépa~~
Correction
TD Spé
maths

## Exercice 24

$x \mapsto \sin(x)$ :

$$\sin' x = \cos x$$
$$\sin'' x = -\sin x$$
$$\sin''' x = -\cos x$$
$$\sin^{4} x = \sin x$$

Donc
$$\sin^{4k} x = \sin x$$
$$\sin^{4k+1} x = \cos x$$
$$\sin^{4k+2} x = -\sin x$$
$$\sin^{4k+3} x = -\cos x$$

ou $\boxed{\sin^{n}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)}$

$g : x \mapsto x^2 \sin(3x)$

$$g'(x) = 2x \sin(3x) + 3x^2 \cos(3x)$$
$$g''(x) = 2\sin(3x) + 12x\cos(3x) - 9x^2 \sin(3x)$$
$$g^{n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2)^{k} (\sin(3x))^{(n-k)}$$

avec si $k=0$ : $(x^2)^{(k)} = x^2$

si $k=1$ : $(x^2)^{(k)} = 2x$

si $k=2$ : $(x^2)^{(k)} = 2$

Donc pour $n \geq 3$ :
$$g^{n}(x) = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} (x^2)^{k} (\sin(3x))^{(n-k)}$$ Formule de Leibnitz

$$= x^2 (\sin(3x))^{(n)} + n \cdot 2x (\sin(3x))^{(n-1)}$$
$$+ n(n-1) (\sin(3x))^{(n-2)}$$
$$= x^2\, 3^n \sin^{(n)}(3x) + 2nx \cdot 3^{n-1} \sin^{(n-1)}(3x)$$
$$+ n(n-1)\, 3^{n-2} \sin^{(n-2)} 3x$$
$$= 3^n x^2 \sin\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right) + 2n \cdot 3^{n-1} x \sin\left(3x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$
$$+ 3^{n-2} n(n-1) \sin\left(3x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right)$$

$\frac{n!}{2(n-2)!}$

$h : x \longrightarrow (x^2+1)e^{2x}$ $\qquad n! = \int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt$

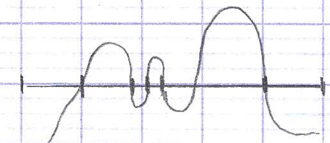
$h'(x) = 2x e^{2x} + 2(x^2+1)e^{2x}$

$n \geqslant 2 : h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2+1)^{(k)} (e^{2x})^{(n-k)}$

$= \binom{n}{0}(x^2+1)2^n e^{2x} + \binom{n}{1} 2x\, 2^{n-1} e^{2x} + \binom{n}{2} 2^{n-1} e^{2x} + 0.$

$= 2^n (x^2+1)e^{2x} + n 2^n x e^{2x} + n 2^n x e^{2x} + n(n-1)2^{n-2} e^{2x}$

## Exercice 19



$x^2 - 1$

$2x$

1) Soient $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ les $n$ points supposés de $I$ où $f$ s'annule.
D'après le théorème de Rolle,
il existe $a_i \in ]x_i, x_{i+1}[$ tq $f'(a_i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et les $]x_i, x_{i+1}[$ sont disjoints donc les $a_i$ sont distincts.

2) $x^n + px + q = 0$
S'il y a $k$ racines réelles, d'après le (1) la dérivée s'annule en au moins $k-1$ points distincts.
Or : $(x^n + px + q)' = nx^{n-1} + p = 0$
$\Leftrightarrow x^{n-1} = -p/n \quad (*)$

· Si $n$ est pair : $n = 2m$
et $(*) \Leftrightarrow x^{2m-1} = -p/n$
$\Leftrightarrow x = (-p/n)^{\frac{1}{2m-1}}$ uniq donc le nbr de racines de la dérivée est 1 et $\geqslant k-1$ ~~d'app~~ d'après le (1) et donc $k-1 \leqslant 1$ et donc $k-1 \leqslant 1$, ie $k \leqslant 2$
ie $x^n + px + q = 0$ a au plus 2 racines réelles

· Si $n$ est impair $n = 2m+1$
Alors $(*) \Leftrightarrow x^{2m} = -p/n$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{6}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3$$

$$+ \frac{1}{24}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4\right) \quad \left(x \to \frac{\pi}{4}\right)$$

## Exercice 27

(1) On fait la somme des $DL_4(0)$ de $e^x$ et de $\cos x$ :

$e^x + \cos x$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$= 2 + x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$\ln(1+x) + \sin x$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) + x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$= 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

- $e^x \ln(1+x)$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$\frac{\ln(1-x)}{1-x}$

$$= \frac{1}{1-x}\ln(1-x) = \left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)\right)\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right.$$

$$\left. - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) = -x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o(x^4)$$

$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$ $\quad x \to 0$

$$\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + o(X^2) \qquad X \to 0$$

où $X = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ et donc $o(X^2) = o(x^4)$

donc $\ln(\cos x) = X - \frac{X^2}{2} + o(X^2) = -\frac{x^2}{2} + \cancel{\frac{x^4}{24}} + \cancel{o(x^4)} - \frac{1}{2}$

$$\left(-\frac{x^2}{2} + \cancel{\frac{x^4}{24}} + o(x^4)\right)^2$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$\underline{e^{\sin x}} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}(\sin x)^2 + \frac{1}{6}(\sin x)^3 + \frac{1}{24}(\sin x)^4 + \underbrace{o((\sin x)^4)}_{= o(x^4)}$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3$$

$$+ \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 + o(x^4) = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4\right.$$

$$\left. + o(x^4)\right) + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) \qquad (x \to 0)$$

$$\frac{\sin x}{\ln(1+x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)}$$

$$= \frac{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)}$$

$$= \frac{1}{1+X}\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)$$

où $X = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)$

On a donc : $= \left[1 - \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5}\right) + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5}\right)^2 - \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^3 + \left(-\frac{x}{2}\right)^4\right]\left[1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right] + o(x^4)$

$$= \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{24} + \cancel{\frac{13}{360}x^4} + \frac{199}{720}x^4\right)\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) + o(x^4)$$

(2) $$\frac{x - \ln(1+x)}{\sin x} = \frac{x - \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right]}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

$$= \frac{\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)$$

## Exercice 28

(1) $$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{180} + o(x^5)}{x}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{6}\right)x^4 + o(x^4)\right)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{15} + o(x^4)\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{6} - \frac{x^2}{15} + o(x^2)\right)$$

$$= e^{-1/6}\exp\left(-\frac{x^2}{15} + o(x^2)\right) = e^{-1/6} - \frac{e^{-1/6}}{180}x^2 + o(x^2)$$

$(x \to 0)$

donc $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} \to e^{-1/6}$

(2) $ax+b-\sqrt[4]{16x^4+x^3+1}$

$X=\frac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$

$ax+b-\sqrt[4]{16x^4+x^3+1}=\frac{a}{X}+b-\sqrt[4]{\frac{16}{X^4}+\frac{1}{X^3}+1}$

$=\frac{1}{X}\left(a+bX-2\left(1+\frac{X}{16}+\frac{X^4}{16}\right)^{1/4}\right)$

$=\frac{1}{X}\left(a+bX-2\left(1+\frac{1}{4}\left(\frac{X}{16}\right)+o(X)\right)\right)$

$=\frac{1}{X}\left(a-2+\left(b-\frac{1}{32}\right)X+o(X)\right)$

$\underset{X\to0}{\longrightarrow}0$ ssi $\begin{cases}a=2\\ b=\frac{1}{32}\end{cases}$

Exercice 29 $f(x)=\left(x+2-\frac{1}{x}\right)\operatorname{Arctan}x$

$=\left(x+2-\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{24}x^3+o(x^3)\right)$

$\operatorname{Arctan}'''x=\frac{2(3x^2+1)}{(1+x^2)^3}=\frac{1}{4}\Big|_{x=0}$

$=x^2+2x-1-\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{24}x^2+o(x^4)$

$=-1+2x+\frac{23}{24}x^2+o(x^2)$

$\tilde{f}(0)=-1$ tangente en 0 : $y=-1+2x$

Correction TD spe

## Exercice 30

Branches infinies :

$f(x) \to \pm\infty$

$f(x) = x.\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 \longrightarrow +\infty$

si $x \to +\infty$ $\quad (x \in \mathbb{R}_+^*)$

On cherche s'il y a une direction asymptotique ($\frac{y}{x} \to$ limite $a$)
si oui, y a-t-il une asymptote ($y - ax \to$ limite $b$) ?
Si oui, de quel côté de l'asymptote se trouve le graphe de $f$, signe de $f(x) - (ax+b)$ ?
On peut tout faire en même temps en faisant un DL de $f(x)/x$ quand $x \to +\infty$

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (x \to +\infty)$$

Ici $\dfrac{f(x)}{x} = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-2}$

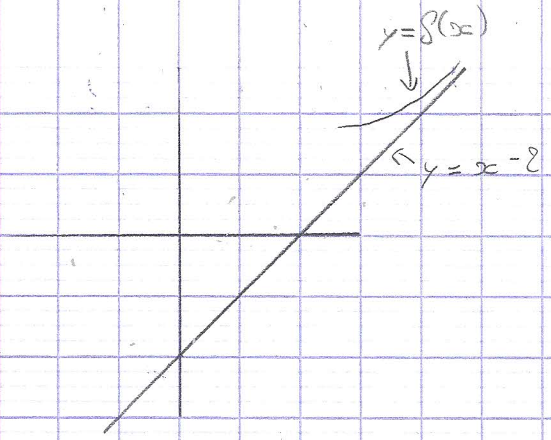
$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + o(t^2) \quad (t \to 0)$$

$$= 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Donc :

$$f(x) = x - 2 + \frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to +\infty)$$

Donc quand $x \to +\infty$, le graphe de $f$ a pour asymptote $y = x - 2$
et il est au dessus de cette asymptote (car $\frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ est du signe de $\frac{3}{x} > 0$ si $x$ est assez grand.




$$g(x) = x\left(\frac{x}{x+1}\right)^x \Rightarrow \frac{g(x)}{x} = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \exp\left[x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]$$

$$= \exp\left[-x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right]$$

$$= \exp\left[-1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$= e^{-1} \cdot \exp\left(\underbrace{\frac{1}{2x} - \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{u \to 0 \quad (x \to +\infty)}\right)$$

$$= e^{-1}\left[1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right]$$

$$= e^{-1}\left[1 + \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{3x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x} - \cancel{\frac{1}{3x^2}}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$= e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2x} + e^{-1}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{8}\right)\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x}{e} + \frac{1}{2e} + \underbrace{e^{-1}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{8}\right)\frac{1}{x}}_{<0} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc quand $x \to +\infty$, le graphe de $g(x)$ a pour asymptote $y = \frac{1}{e}x + \frac{1}{2e}$ et il est au-dessous de celle-ci.

# La divisibilité dans $\mathbb{Z}$

## Exercice 1 :

| | | majorant | minorant | + grande | + petite | borne sup | borne inf |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A : | $[\![-1,3]\!] \cup ]\!]1,5[\![ = [\![-1,5[\![$ | 100 | -100 | / | -1 | 5 | -1 |
| B : | $[\![-1,3]\!] \cap ]\!]1,5[\![ = ]\!]1,3]\!]$ | 100 | -100 | 3 | ∅ | 3 | 1 |
| C : | $2\mathbb{N}$ | / | -200 | / | 0 | / | 0 |
| D : | $[\![-3,3]\!]$ | 100 | -100 | 3 | -3 | 3 | -3 |

## Exercice 2

$$\begin{array}{r|l} 15 & 4 \\ \hline -12 & 3 \\ 3 & \end{array} \qquad , \qquad \begin{array}{r|l} -15 & 4 \\ \hline +12 & -3 \\ -3 & \end{array} \qquad , \qquad \begin{array}{r|l} m^2+2m+1 & m \\ \hline -\ m^2 & m+2 \\ 2m+1 & \\ -\ 2m & \\ 1 & \end{array}$$

## Exercice 3

- Methode 1 : $m^3 - m = m(m^2-1)$

$= m(m+1)(m-1)$

3 nombres consecutifs donc : • 1 pair

• 1 multiple de 3

- Methode 2 : $P(m)$ : " $m^3 - m = 6k$ " $m, k \in \mathbb{N}^*$

Pour $m = 0$, $m^3 - m = 0$

$6 \times 0 = 0$

$\forall m$, $(m+1)^3 - (m+1)$ on pose $N = m+1$

donc $N^3 - N = 6k$ (par (HR))

donc $m^3 - m = 6k$

Exercice 4 $\quad \Delta_n = \{k \in \mathbb{N} \,/\, k \text{ est premier et } k^2 \leq n\}$

$\Leftrightarrow$ n premier si il n'admet aucun diviseur dans $[\![2, \sqrt{n}]\!] \Leftrightarrow 2 \leq k \leq \sqrt{n}$ avec k un diviseur premier

- Si n est premier, il admet donc un div premier : lui même
- Si n n'est pas premier, l'ensemble des diviseurs d de n tel que $2 \leq d < n \neq \emptyset$. Il admet donc un plus petit e p. Si p n'était pas premier il admettrait un diviseur d' tel que $2 \leq d' < k$ qui diviserait n. Ceci est impossible car k est le + petit. Donc k est premier.
- On a donc k premier et $n = p \times q$ avec $p \leq q$ on a donc $k^2 \leq kq \Leftrightarrow k^2 \leq n$ donc $k \leq \sqrt{n}$

- Ainsi si k ∄ alors n est premier

1111 est divisible par 11.

$\Delta_{1117} = \{\cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{5}, \cancel{7}, \cancel{11}, \cancel{13}, \cancel{17}, \cancel{19}, \cancel{23}, \cancel{29}, \cancel{31}\}$ donc 1117 est premier

Exercice 5

On calcule pgcd(pgcd(12345, 678), 91011) = A

- pgcd(12345, 678) : $= \underline{3}$

$12345 = 678 \times 18 + 141$

$678 = 141 \times 4 + 114$

$141 = 114 \times 1 + 27$

$114 = 27 \times 4 + 6$

$27 = 4 \times 6 + 3$

$6 = 2 \times 3$

- pgcd(3, 91011) :

$91011 = 30337 \times 3 + 0$

donc pgcd(3, 91011) = 3

Ainsi $A = 3$.

Exercice 6

1) pgcd(473, 220) = 11

$473 = 220 \times 2 + 33$

$220 = 6 \times 33 + 22$

$33 = 1 \times 22 + 11$

$22 = 2 \times 11 + 0$

2) $473u + 220v = 1 = 11(43u + 20v)$

$0 = 22 - 2 \times 11$

$= (220 - 6 \times 33) - 2(33 - 22)$

$= 220 - 6(473 - 220 \times 2) - 2[(473 - 220 \times 2) - (220 - 6 \times 33)]$

$= \cancel{20}\ 13 \times 220 - 6 \times 473 - 2(473 - 3 \times 220 + 6 \times 33)$

$= 19 \times 220 - 8 \times 473 - 12 \times 33$

$= 19 \times 220 - 8 \times 473 - 12(473 - 2 \times 220)$

$= -20 \times 473 + 43 \times 220$

Une solution particulière de $473u_0 + 220v_0 = 1$ est $(-20, 43)$.

Ainsi $473u_0 + 220v_0 = 473u + 220v$

$\Leftrightarrow 473(u_0 - u) = 220(v - v_0)$

$\Leftrightarrow 43(u_0 - u) = 20(v - v_0) \Rightarrow 43 \mid 20(v - v_0)$

or pgcd(43, 20) = 1

donc par Gauss $43 \mid (v - v_0)$ donc $\exists k \in \mathbb{Z} \,/\, v - v_0 = 43k$

donc $v = 43k + 43$ ainsi $u = -20k - 20$

- $473u + 220v = 11$ donc $pgcd(43, 20) = 0$

$43u + 20v = 1$

$43 = 2 \times 20 + 3$

$20 = 3 \times 6 + 2$

$3 = 2 \times 1 + 1$

$2 = 2 \times 1 + 0$

$0 = 2 - 2 \times 1$

$= 20 - 3 \times 6 - 2(3 - 2)$

$= 20 - 6(43 - 2 \times 20) - 2[(43 - 2 \times 20) - (20 - 3 \times 6)$

$= 13 \times 20 - 6 \times 43 - 2[43 - 2 \times 20 - 20 + 3 \times 6]$

$= 19 \times 20 - 8 \times 43 - 6 \times 6$

$= 19 \times 20 - 8 \times 43 - 12(43 - 2 \times 20)$

$= -20 \times 43 + 43 \times 20$

donc $(u_0, v_0) = (-20, 43)$

$43u + 20v = 43u_0 + 20v_0$

$43(u - u_0) = 20(v_0 - v)$

donc $43 \mid 20(v_0 - v)$ or pgcd $43, 20 = 1$ donc

par Gauss $43 \mid (v_0 - v)$ donc $\exists k \in \mathbb{Z} \,/\, 43k = v_0 - v$

$\Leftrightarrow v = v_0 - 43k$

$\Leftrightarrow v = 43 - 43k$

ainsi $u = -20 + 20k$

$S = (u, v) = (-20 + 20k, 43 - 43k)$

- $473u + 220v = 22$

$43u + 20v = 2$

$2 = 20 - 3 \times 6$

$= 20 - 6(43 - 2 \times 20)$

$= -6 \times 43 + 13 \times 20$

donc $(u_0, v_0) = (-6, 13)$

$43u + 20v = 43u_0 + 20v_0$

$43(u - u_0) = 20(v_0 - v)$

$43 \mid 20(v_0 - v)$ or pgcd $43, 20 = 1$ donc d'après

gauss $43 \mid v_0 - v$ donc $\exists k \in \mathbb{Z} \,/\, 43k = 13 - v$

donc $v = 13 - 43k$

$u = -6 + 20k$

$43u + 20(-43k - 15) = 1$

43

20

$43u = -860k + 300$

$43u = 860k + 360$

$43(u - 7) = 20(-43k - 30)$

$43u - 301 = -860k - 600$

$43u = -86k$

$43(7 + 20k) + 20v = 1$

$300 + 860k = -20v$

$-15 - 43k = v$

Exercice 7

1) $11u - 8v = 9$

on prend $u_0 = 3$

$v_0 = 3$

$11 \times 3 - 8 \times 3 = 9$

donc $11u - 8v = 11u_0 - 8v_0$ — $8v_0 - 8v_0$

$11(u - u_0) = 8(v - v_0)$ — $8(v - v_0)$

donc $11 \mid 8(v - v_0)$ or pgcd $(11, 8) = 1$

par gauss $11 \mid (v - v_0)$ donc $\exists k \in \mathbb{Z} \,/\, 11k = v - 3$

$v = 11k + 3$

$u = 8k + 3$

2) $341\,1000009$ (8 aux)

$\Rightarrow 3 + 9 + 3 + 4 + 90 + 8x = 11k$

$108 + 8x = 11k$

$11k - 8x = 108$

donc $x = 3$.

# Un peu d'arithmétique

**I** **1)** $\text{pgcd}(473, 220) = 11$

$473 = 220 \times 2 + 33$

$220 = 6 \times 33 + 22$

$33 = 1 \times 22 + 11$

$22 = 2 \times \underline{11} + 0$

**2)** Résoudre $473u + 220v = 11$

$11 = 33 - 1 \times 22$

$= (473 - 220 \times 2) - (220 - 6 \times 33)$

$= 473 - 2 \times 220 - 220 + 6(473 - 2 \times 220)$

$= 7 \times 473 - 15 \times 220$

donc $(u_0, v_0) = (7, -15)$

ainsi $43u + 20v = 43u_0 + 20v_0$

$\Leftrightarrow 43(u - u_0) = 20(-v + v_0)$

ainsi $43 \mid 20(-v + v_0)$

or $\text{pgcd}(43, 20) = 1$ donc $43 \mid -v + v_0$

donc $\exists\, k \in \mathbb{Z} \;/\; 43k = \cancel{-v + 15} - v - 15$

$v = -43k - 15$

ainsi $u = 7 + 20k$

$\text{pgcd}(a, b)$ $\quad \begin{cases} u = u_0 + b/d\, k \\ v = v_0 + a/d\, k \end{cases}$

II 1) $11u - 8v = 9$

~~$11 = 8\times 1 + 3$~~

on remarque que 11 et 8 sont premières entre eux

de plus on a $u_0 = 3$

$v_0 = 3$

donc $11u - 8v = 11u_0 - 8v_0$

$11(u - u_0) = 8(v - v_0)$

donc $11 \mid 8(v - v_0)$ par Gauss $11 \mid v - v_0$ donc

$\exists k \in \mathbb{Z} / 11k = v - 3$

$v = 11k + 3$

$u = 8k + 3$

2) $\sum_{j=1}^{10} j c_j = 1\times 3 + 2\times 4 + 3\times 1 + 4\times 1 + 5\times 0 + 6\times 0 + 7\times 0 + 8 c_8$

$+ 9\times 0 + 10\times 9 = 11u.$

$11u - 8v = 108$ où $v = c_8$

$v$ est un chiffre et $v \neq 0$ donc $1 \leq v \leq 9$

$11u - 8v = 12\times 9$

$v_0 = 3$

$u_0 = 12$