

Feuille d'exercices n° 1

Équations différentielles du premier ordre

Exercice 1. (Équations linéaires)

- (1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' - 2y = 2e^x \sin(x)$. Déterminer la solution f telle que $f(0) = 1$.
(2) Résoudre chacune des équations différentielles suivantes puis examiner si elles possèdent une ou plusieurs solutions définies sur $\mathbb{R}$.

$$\backslash (x-2)y' = y + 2(x-2)^3, \quad \backslash x^3y' + (2-3x^2)y = x^3.$$

Exercice 2. Résoudre les équations de Bernoulli suivantes (pour les deux premières, mentionner notamment les solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier) :

- (1) $y' - y = xy^5$;
(2) $y' + 2xy + xy^4 = 0$;
(3) $xy' = y + x(1 + 3 \ln x)y^3$.

Exercice 3. Résoudre les équations de Riccati suivantes (en mentionnant notamment les éventuelles solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier).

- (1) $x^3y' + y^2 + yx^2 + 2x^4 = 0$. On donne une solution particulière (à vérifier) : $y_p(x) = -x^2$.
(2) $(1-x^2)y' - y^2 + 1 = 0$. (On commencera par chercher une solution particulière constante.)

Équations différentielles linéaires du 2^d ordre à coefficients constants

Exercice 4. Résoudre chacune des équations différentielles linéaires suivantes concernant des fonctions de variable x :

- (1) $y'' - 4y' + 5y = e^x (\cos(x) - \sin(x))$;
(2) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin(x)$.

Exercice 5. Résoudre chacune des équations différentielles linéaires suivantes à l'aide de la méthode de variation des constantes :

- (1) $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{1+x^2}$;
(2) $y'' - 9y = \frac{1}{\operatorname{ch}(3x)}$. (Indication : primitiver $C_1' + C_2'$ et $C_1' - C_2'$ pour obtenir C_1' et C_2' .)

FIN

Mathématiques spé

I - Équations différentielles du premier ordre

Exercice 1: * $y' - 2y = 2e^x \sin x$

• $y_H = C \cdot e^{\int 2 dx}$

$y_H = C \cdot e^{2x}$

• $y_0 = e^{2x}$

$C'(x) = 2 \sin x e^{-2x}$

$$\begin{aligned} C(x) &= -2 \cos x e^{-x} - \int 2 \cos x e^{-x} \\ &= -2 \cos x e^{-x} - 2 \sin x e^{-x} - C(x) \\ &= -e^{-x} (\cos x + \sin x) \end{aligned}$$

$y_p = -e^x (\cos x + \sin x)$

$y = C \cdot e^{2x} - e^x (\cos x + \sin x)$

* $y' - \frac{y}{x-2} = 2(x-2)^2$

• $y_H = C \cdot e^{\int \frac{1}{x-2}}$

$y_H = C \cdot (x-2)$

• $y_0 = x-2$

$C'(x) = 2(x-2)$

$C(x) = (x-2)^2$

$y_p = (x-2)^3$

$y = C \cdot (x-2) + (x-2)^3$

* $y' + \frac{2-3x^2}{x^3} y = 1$

• $y_H = C \cdot e^{\int -\frac{2-3x^2}{x^3}}$

$y_H = C \cdot x^3 \cdot e^{1/x^2}$

• $y_0 = x^3 \cdot e^{1/x^2}$

$C'(x) = x^{-3} e^{-1/x^2}$

$C(x) = \frac{1}{2} e^{-1/x^2}$

$y_p = \frac{1}{2} x^3$

$y = C \cdot x^3 \cdot e^{1/x^2} + \frac{1}{2} x^3$

Exercice 2

$$1) \quad y' - y = xy^5 \Leftrightarrow \frac{y'}{y^5} - \frac{1}{y^4} = x$$

$$\text{on pose } z = \frac{1}{y^4} \Leftrightarrow z' = -4 \cdot \frac{y'}{y^5}$$

$$\text{donc } z' + 4z = -4x$$

$$\begin{aligned} z_H &= C \cdot e^{\int -4 dx} \\ z_H &= C \cdot e^{-4x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{-4x} \\ C'(x) &= -4x e^{4x} \\ C(x) &= (-x + \frac{1}{4}) e^{4x} \end{aligned}$$

$$z_P = -x + \frac{1}{4}$$

$$z = C \cdot e^{-4x} - x + \frac{1}{4}$$

$$2) \quad y' + 2xy + xy^4 = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y^4} + \frac{2x}{y^3} = -x$$

$$\text{on pose } z = \frac{1}{y^3} \Leftrightarrow z' = -\frac{3}{y^3} y'$$

$$\text{donc } z' - 6xz = 3x$$

$$\begin{aligned} z_H &= C \cdot e^{\int 6x dx} \\ z_H &= C \cdot e^{3x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_P &= -\frac{1}{2} 3x^2 \\ z &= C \cdot e^{3x^2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad xy' &= y + x(1 + 3\ln(x))y^3 \\ \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x}y &= (1 + 3\ln(x))y^3 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y^3} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y^2} = 1 + 3\ln x$$

$$\text{on pose } z = \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow z' = -\frac{2y'}{y^3}$$

$$\text{donc } z' + \frac{2}{x}z = 2(1 + 3\ln(x))$$

$$\begin{aligned} z_H &= C \cdot e^{\int \frac{2}{x} dx} \\ z_H &= C \cdot \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{x^2} \\ C'(x) &= x^2(2 + 6\ln(x)) \\ C(x) &= \frac{18x^3}{9} \cdot \ln x \end{aligned}$$

$$z_P = 2x \ln x$$

$$z = C \cdot \frac{1}{x^2} + 2x \ln x$$

Exercice 3

1) $x^3 y' + y^2 + yx^2 + 2x^4 = 0$

on pose $y = y_0 + z$

$$y = -x^2 + z$$

$$y' = -2x + z'$$

$$-2x^4 + x^3 z' + z^2 - 2zx^2 + x^4 + x^2 z - x^4 + 2x^4 = 0$$

$$x^3 z' + z^2 - 2zx^2 + x^2 z = 0$$

$$x^3 z' + z^2 - 2zx^2 = 0$$

$$x^3 z' - 2zx^2 = -z^2$$

$$z' - \frac{2}{x} z = -x^{-3} z^2$$

on pose $u = \frac{1}{z} \Leftrightarrow u' = -\frac{z'}{z^2}$

$$\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{xz} = -x^{-3} \Leftrightarrow -u' - \frac{u}{x} = -x^{-3}$$

$$\Leftrightarrow u' + \frac{u}{x} = x^{-3}$$

$$u_H = C \cdot e^{\int -\frac{1}{x} dx}$$

$$= C \cdot x^{-1}$$

$$u_0 = x^{-1}$$

$$C'(x) = x^{-2}$$

$$C(x) = -x^{-1}$$

$$u_P = -\frac{1}{x^2}$$

$$u = \frac{C}{x} - \frac{1}{x^2}$$

2) $(1-x^2)y' - y^2 + 1 = 0$

$$y_P = cte \Rightarrow -y_P^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow y_P = \pm 1$$

on pose $y = 1 + z$:

$$(1-x^2)z' - (1+z)^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-x^2)z' - 2z = z^2$$

$$\Leftrightarrow (1-x^2) \frac{z'}{z^2} - \frac{2}{z} = 1$$

On pose $u = \frac{1}{z} \Leftrightarrow u' = -\frac{1}{z^2} z'$

$$-(1-x^2)u' - 2u = 1 \Leftrightarrow u' + \frac{2}{1-x^2} u = -\frac{1}{1-x^2}$$

$$u_H = C \cdot e^{\int -\frac{2}{1-x^2}}$$

$$u_H = C \cdot \frac{1-x}{1+x}$$

$$u_P = -\frac{1}{2}$$

$$u = -\frac{1}{2} + C \cdot \frac{1-x}{1+x}$$

II - Équations différentielles linéaires du 2nd ordre à coefficients constants

Exercice 4

$$1) \quad y'' - 4y' + 5y = e^x (\cos x - 3 \sin x)$$

$$R^2 - 4R + 5 = 0$$

$$\Delta = -4$$

$$\text{donc } y_H = a e^{2x} \cos x + b e^{2x} \sin x$$

$$R_1 = 2 + i$$

$$R_2 = 2 - i$$

$$\begin{aligned} y_P \text{ sous la forme } y_P &= \lambda \cos x e^x + \mu \sin x e^x \\ y_P' &= \lambda \cos x e^x - \lambda \sin x e^x + \mu \cos x e^x + \mu \sin x e^x \\ y_P'' &= \lambda (e^x \cos x - 2e^x \sin x - e^x \cos x) + \mu (e^x \sin x + 2e^x \cos x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } &\lambda (e^x \cos x - 2e^x \sin x - e^x \cos x) + \mu (e^x \sin x + 2e^x \cos x) \\ &- 4\lambda (\cos x e^x - \sin x e^x) - 4\mu (\cos x e^x + \sin x e^x) + 5(\lambda \cos x e^x + \mu \sin x e^x) \\ &= e^x [(\lambda - 2\mu) \cos x + (2\lambda + \mu) \sin x] \\ &= e^x (\cos x - 3 \sin x) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lambda - 2\mu = 1 \\ 2\lambda + \mu = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{5} \\ \mu = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$y_P = -\frac{1}{5} \cos x e^x - \frac{3}{5} \sin x e^x$$

$$y = y_P + y_H$$

$$2) \quad y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin x$$

$$R^2 - 4R + 5 = 0$$

$$\Delta = -4$$

$$R_1 = 2 + i$$

$$R_2 = 2 - i$$

$$y_H = a \cdot e^{2x} \cos x + b e^{2x} \sin x$$

$$\begin{cases} C_1' e^{2x} \cos x + C_2' e^{2x} \sin x = 0 \\ C_2' e^{2x} (2 \cos x - \sin x) + C_2' e^{2x} (2 \sin x + \cos x) = e^{2x} \sin x \end{cases}$$

$$(1) \quad \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ 2 \cos x - \sin x & 2 \sin x + \cos x \end{vmatrix} = 1$$

$$(2) \quad C_1' = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sin x & 2 \sin x + \cos x \end{vmatrix} = -\sin^2 x = -\frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$(3) \quad C_2' = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ 2 \cos x - \sin x & \sin x \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

$$C_1 = \frac{1}{4} \sin(2x) - \frac{x}{2}$$

$$C_2 = -\frac{1}{4} \cos(2x)$$

$$y_P = -\frac{1}{4} \cos(2x) e^{2x} \sin x + \frac{1}{4} \sin(2x) e^{2x} \cos x - \frac{x}{2} e^{2x} \cos x$$

$$y = y_P + y_H$$

Exercice 5

$$1) \quad y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{1+x^2}$$

$$R^2 - 4R + 4 = 0$$

$$\Delta = 0$$

$$R = 2$$

$$y_H = a \cdot e^{2x} + b x e^{2x}$$

Variation de P_a constante :

$$\begin{cases} C_1' e^{2x} + C_2' x e^{2x} = 0 \\ C_1' 2e^{2x} + C_2' (1+2x) e^{2x} = \frac{e^{2x}}{1+x^2} \end{cases}$$

$$(1) : \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 1+2x \end{vmatrix} = 1$$

$$(2) : C_1' = \begin{vmatrix} 0 & x \\ \frac{1}{1+x^2} & 1+2x \end{vmatrix} = -\frac{x}{1+x^2} \Leftrightarrow C_1 = -\frac{1}{2} P_m(1+x^2)$$

$$(3) : C_2' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{1+x^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow C_2 = \text{Arctan } x$$

$$y_P = -\frac{1}{2} P_m(1+x^2) e^{2x} + \text{Arctan } x \cdot x \cdot e^{2x}$$

$$y = a e^{2x} + b x e^{2x} - \frac{1}{2} P_m(1+x^2) e^{2x} + \text{Arctan } x \cdot x \cdot e^{2x}$$

$$2) \quad y'' - 9y = \frac{1}{\cosh(3x)}$$

$$y_H'' - 9y_H = 0$$

$$R = \pm 3$$

$$y_H = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$$

Variation de la constante :

$$\begin{cases} C_1' e^{3x} + C_2' e^{-3x} = 0 \\ C_1' 3e^{3x} + C_2' (-3e^{-3x}) = \frac{1}{\cosh(3x)} \end{cases}$$

Par Cramer

$$\begin{cases} C_1' = \frac{e^{-3x}}{6\cosh(3x)} \\ C_2' = -\frac{e^{3x}}{6\cosh(3x)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' + C_2' = -\frac{1}{3} \tanh(3x) \\ C_1' - C_2' = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = -\frac{1}{3} P_m \cosh(3x) \\ C_1 - C_2 = \frac{x}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{1}{18} P_m \cosh(3x) + \frac{x}{6} \\ C_2 = -\frac{1}{18} P_m \cosh(3x) - \frac{x}{6} \end{cases}$$

$$y_p = -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} P_m \cosh(3x) - x \right) e^{3x} - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} P_m \cosh(3x) + x \right) e^{-3x}$$

$$y = y_p + y_H$$

Feuille d'exercices n° 2

Suites numériques

Exercice 6.

(1) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe à termes non nuls. Montrer que si la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $R_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers une limite ℓ telle que $|\ell| < 1$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. (Conseil : écrire la définition de la convergence de $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\varepsilon = \frac{1-|\ell|}{2}$ et en déduire que pour n assez grand, $|R_n| < \frac{1+|\ell|}{2} < 1$.)

(2) En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = n!/n^n$.

Exercice 7.

(1) Montrer que si une suite réelle ou complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\ell \in \mathbb{C}$ alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ converge aussi vers ℓ (« théorème de Cesàro »). (Conseil : on pourra écrire la définition de la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers ℓ et en déduire une majoration de $|v_n - \ell|$ en coupant la somme $\sum_{k=1}^n$ en deux parties, pour n assez grand.)

(2) Que dire de la nature de la suite de terme général $w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \sin \frac{1}{k}$?

(3) La réciproque du théorème de Cesàro est-elle vraie ? (On pourra examiner le cas de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.)

Suites définies par une relation de récurrence d'ordre 1

Exercice 8. Étudier la définition, le sens de variation et la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

Exercice 9. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{2u_n+2}$.

(1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et est élément de $[0, 1]$. (On ne demande pas, pour le moment, d'exprimer u_n en fonction de n .)

(2) Étudier le sens de variation et la nature de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(3) Exprimer le terme général u_n en fonction de n et retrouver les résultats précédents.

Exercice 10. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{u_n+2}{u_n+1}$.

- (1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et est élément de $[1, 2]$. (On ne demande pas, pour le moment, d'explicitier u_n en fonction de n .)
- (2) La suite est-elle monotone ?
- (3) Étudier la nature de cette suite en examinant les sous-suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
- (4) Exprimer le terme général u_n en fonction de n et retrouver les résultats précédents.

Exercice 11. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par leurs termes initiaux u_0, v_0 donnés tels que $0 < u_0 < v_0$ et les relations de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

- (1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n existent et sont éléments de $\mathbb{R}_+^*$.
- (2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > u_n$. (Conseil : exprimer $v_n^2 - u_n^2$ en fonction de u_{n-1} et v_{n-1} pour $n \geq 1$.)
- (3) En déduire le sens de variation des deux suites.
- (4) Montrer que $\forall n \geq 1$, $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$. Que conclure quant à leur nature ?

Exercice 1

$$1) R_m = \frac{u_{m+1}}{u_m} \rightarrow P$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow |R_n - P| < \varepsilon$$

$$\text{Prenez } \varepsilon = \frac{1 - |P|}{2} : \exists m, \forall n, n \geq m \Rightarrow |R_n - P| < \frac{1 - |P|}{2}$$

$$\Rightarrow |R_m| = |R_m - P + P| \leq |R_m - P| + |P| < \frac{1 - |P|}{2} + |P|$$

$$\text{donc } \frac{1 + |P|}{2} < 1$$

$$\text{Donc : pour } n \geq m, |R_n| < \frac{1 + |P|}{2} = q$$

$$|u_{m+1}| < q |u_m|$$

$$|u_{m+2}| < q |u_{m+1}| < q^2 |u_m|$$

$$\text{d'où } \forall n \geq m, |u_{m+3}| < q |u_{m+2}| < q^3 |u_m|$$

$$\text{et par récurrence : } \forall n \geq m, \forall p \geq 0, |u_{m+p}| < q^p |u_m|$$

$$\text{Prenez } m = N:$$

$$\forall p \geq 0, |u_{N+p}| < q^p |u_N| \text{ et donc } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$2) u_n = \frac{n!}{n^n} \Rightarrow R_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \rightarrow \frac{1}{e}$$

$$\Delta \quad \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \exp\left(m \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right) = \exp\left(\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{1/m}\right)$$

$$\rightarrow e^1 \text{ car } \frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1$$

Ainsi $R_m \rightarrow P = \frac{1}{e}$ et $|P| = \frac{1}{e} < 1$ donc $P_e(1)$ s'applique
et $u_m \rightarrow 0$

$$\text{donc } \frac{3!}{3^3} \rightarrow 0$$

Exercice 7

1) $u_m \rightarrow P \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m, m \geq N \Rightarrow P - \varepsilon < u_m < P + \varepsilon$

Après $v_m = \frac{1}{m} (u_1 + \dots + u_m)$

$$\Rightarrow v_m - P = \frac{1}{m} ((u_1 - P) + \dots + (u_m - P))$$

Soit $m \geq N$: $v_m - P = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{N-1} (u_k - P) + \frac{1}{m} \sum_{k=N}^m (u_k - P)$

$$\Rightarrow |v_m - P| \leq \frac{1}{m} \left| \sum_{k=1}^{N-1} (u_k - P) \right| + \frac{1}{m} \sum_{k=N}^m |u_k - P| < \varepsilon < \frac{1}{m} (m - N + 1) \varepsilon$$

& Soit $\eta > 0$: pour m assez grand, disons $m \geq N_\eta$, on a :

$$\frac{1}{m} \left| \sum_{k=1}^N (u_k - P) \right| < \eta/2$$

Par ailleurs $\frac{m - N + 1}{m} \varepsilon \rightarrow \varepsilon$ donc, prenant $\varepsilon < \eta/2$, quitte à

augmenter N_η on aura : $m \geq N_\eta \Rightarrow \frac{m - N + 1}{m} \varepsilon < \eta/2$

donc $|v_m - P| < \eta/2 + \eta/2 = \eta$ On vient de montrer

Suite que $\forall \eta > 0, \exists N_\eta, \forall m, m \geq N_\eta \Rightarrow |v_m - l| < \eta$

donc $v_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} l$

$$2) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} = \frac{\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R}}{\lim_{R \rightarrow +\infty} R} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

donc (Cesàro) : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} = 0$

$$3) \quad u_n = (-1)^n$$

u_n ne converge pas

mais $v_n = \frac{1}{n} (-1 + 1 - 1 + 1 \dots + 1)$

$\swarrow$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n$ impair
 $\nwarrow$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n$ pair

donc $|v_n| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$, donc $v_n \rightarrow 0$

Réciproque fautive

Exercice 8

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{m+1} = \sqrt{u_m + 1} \end{cases}$$

Supposons u_m bien définie et $u_m \geq 0$
 alors $u_{m+1} = \sqrt{u_m + 1}$ est bien définie et ≥ 0

En fait $u_{m+1} = f(u_m)$ où $f(x) = \sqrt{x+1}$
 donc $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$ f est croissante

$$u_0 = 1, u_1 = f(u_0) = \sqrt{2} > u_0$$

donc la suite (u_m) est croissante.

Point fixe : $g(x) = x$
 $\sqrt{x+1} = x$
 $x^2 - x - 1 = 0$
 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Vérifions que $u_m < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (\forall m)$

$$u_0 = 1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

si $u_m < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors

$$u_{m+1} = \sqrt{u_m + 1} = g(u_m) < g\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Donc la propriété est vraie

(u_m) est croissante majorée donc convergente. Et

comme g est continue, la limite l de (u_m)

vérifie $g(l) = l$ (où $l > 0$) donc $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Exercice 9

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{m+1} = \frac{3u_m + 1}{2u_m + 2} \end{cases}$$

(1) $u_0 \in [0, 1]$

Si $u_m \in [0, 1]$ alors

$u_{m+1} = g(u_m)$ existe et

$u_{m+1} \in [0, 1]$. En effet, $g(x) = \frac{3x+1}{2x+2}$

donc g est croissante $g'(x) = \frac{4}{(2x+2)^2} > 0$

$g(x) = x_1 = 1$ Sur $[0, +\infty[$, g croît de 0 à $\frac{3}{2}$

$x_2 = -\frac{1}{2}$ et $u_0 = 0, u_1 = \frac{1}{2}$

donc (u_m) est croissante

Donc $u_m \nearrow$ donc convergente et sa limite est le point fixe 1.

Comme g est homographique on peut appliquer directement ce résultat du cours :

$$\Delta > 0$$

$$\frac{u_{m+1/2}}{u_m - 1} \text{ est géométrique de raison } q = 4$$

$$v_{m+1} = \frac{u_{m+1} + \frac{1}{2}}{u_{m+1} - 1} = \frac{\frac{3u_m + 1}{2u_m + 2} + \frac{1}{2}}{\frac{3u_m + 1}{2u_m + 2} - 1} = 4 \frac{u_m + \frac{1}{2}}{u_m - 1}$$

$$v_m = -\frac{1}{2} \cdot 4^m$$

$$\text{donc } u_m = \frac{4^m - 1}{4^m + 2}$$

Exercice 10

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{m+1} = \frac{u_m + 2}{u_m + 1} \end{cases}$$

$$(1) u_0 \in [1, 2]$$

$$\text{Si } u_m \in [1, 2]$$

$$u_{m+1} = \frac{u_m + 1 + 1}{u_m + 1} = 1 + \frac{1}{u_m + 1}$$

$$\begin{cases} u_{m+1} \geq 1 + \frac{1}{2} \geq 1 \\ u_{m+1} \leq 1 + \frac{1}{2} \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{donc } u_{m+1} \in [1, 2]$$

$$(2) g(x) = \frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$$

donc décroissante sur $[1, 2]$ donc (u_m) n'est pas monotone

$$\frac{v_m}{x} = y = \frac{x - p_1}{x - p_2}$$

$$yx - yp_2 = x - p_1$$

$$yx - x = yp_2 - p_1$$

$$x(y - 1) = yp_2 - p_1$$

$$x = \frac{yp_2 - p_1}{y - 1}$$

$$u_m = \frac{-v_m + \frac{1}{2}}{v_m - 1}$$

$$u_m = \frac{-\frac{1}{2} \cdot 4^m + \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} \cdot 4^m - 1}$$

$$= \frac{1 - 4^m + 1}{2 - 4^m - 2}$$

$$= \frac{-4^m + 1}{-4^m - 2} = \frac{-4^m + 1}{4^m + 2}$$

(3) (u_{2m}) est croissante car $u_{2m+2} = f \circ f(u_{2m})$ avec $f \nearrow$

(u_{2m+1}) est décroissante car $\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} > u_3 = f(u_2) \\ \text{car } f \text{ croissante} \end{cases}$

et elles sont bornées ($u_m \in [0, 2]$) donc convergentes
 $\lim(u_{2m})$ et $\lim(u_{2m+1})$ sont des points fixes de $f \circ f$

$$f \circ f(x) = x \Leftrightarrow f\left(\frac{x+2}{x+1}\right) = x \Leftrightarrow \frac{3x+4}{2x+3} = x \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Le seul point fixe dans $[1, 2]$ est $\sqrt{2}$

(4) $f(x) = \frac{x+2}{x+1} = x \Leftrightarrow x^2 = 2$
 $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Soit $v_m = \frac{u_m - \sqrt{2}}{u_m + \sqrt{2}}$

$$v_{m+1} = \frac{u_{m+1} - \sqrt{2}}{u_{m+1} + \sqrt{2}} \Leftrightarrow v_{m+1} = \frac{\frac{u_m+2}{u_m+1} - \sqrt{2}}{\frac{u_m+2}{u_m+1} + \sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-\sqrt{2})u_m + \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(1+\sqrt{2})u_m + \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} \Leftrightarrow q = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = -3+2\sqrt{2}$$

donc $v_m = (-3+2\sqrt{2})(-3+2\sqrt{2})^m$
 $= (-3+2\sqrt{2})^{m+1}$

$$u_m = \frac{\sqrt{2}(-3+2\sqrt{2})^{m+1} + \sqrt{2}}{(-3+2\sqrt{2})^{m+1} - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}((-3+2\sqrt{2})^{m+1} + 1)}{(-3+2\sqrt{2})^{m+1} - 1}$$

$$y = \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}$$

$$yx + y\sqrt{2} = x - \sqrt{2}$$

$$yx - x = -y\sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$x(y-1) = -y\sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{-y\sqrt{2} - \sqrt{2}}{y-1}$$

$$x = -\frac{y\sqrt{2} + \sqrt{2}}{y-1}$$

Correction Exercice 11
TD maths

$$0 < u_0 < v_0$$

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{moy géo}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{moy arith}$$

(1) $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $v_0 \in \mathbb{R}_+^*$
 Si $u_n \in \mathbb{R}_+^*$, $v_n \in \mathbb{R}_+^*$, alors
 $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ existe et $u_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$
 $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ existe et $v_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$

Donc la propriété $(u_n \in \mathbb{R}_+^*, v_n \in \mathbb{R}_+^*)$ est héréditaire
 et donc la suite $(u_n), (v_n)$ sont bien définies et
 $\forall n, u_n \in \mathbb{R}_+^*, v_n \in \mathbb{R}_+^*$

(2) $v_n^2 - u_n^2 = \left(\frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2} \right)^2 - u_{n+1} v_{n+1}$
 $= \left(\frac{u_{n+1} - v_{n+1}}{2} \right)^2$

HR: $v_{n-1} > u_{n-1}$ (voir pour $n-1=0$)
 alors $v_n^2 - u_n^2 = \left(\frac{v_{n-1} - u_{n-1}}{2} \right)^2 > 0$

d'où $(v_n - u_n)(v_n + u_n) > 0$
 et donc $v_n > u_n$ héréditaire

(3) $v_n > u_n$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} > u_n$ (car $u_n \in \mathbb{R}_+^*$)
 $\Rightarrow u_{n+1} > u_n$: la suite (u_n) est ↗
 car $v_n > u_n$
 $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} < v_n = v_n$
 $\Rightarrow$ la suite (v_n) est ↘

$$\begin{aligned}
 (4) \quad v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} \\
 &= \frac{u_n^2 - 2\sqrt{u_n v_n} + v_n}{2} \\
 &= \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2} \\
 &= \frac{v_n - u_n}{\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}} \cdot \frac{\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}}{2} < \frac{1}{2}(v_n - u_n) \\
 &\in]0, 1[\quad \text{car } u_n \in \mathbb{R}_+^*, v_n \in \mathbb{R}_+^* \\
 &\quad \sqrt{v_n} > \sqrt{u_n}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } v_n - u_n < \frac{1}{2} (v_{n-1} - u_{n-1})$$

Récapitulons

$$\begin{aligned}
 (u_n) &\nearrow \\
 (v_n) &\searrow \\
 v_n - u_n &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0
 \end{aligned}$$

Elles sont adjacentes et cv vers la même limite

Feuille d'exercices n° 3

Limites

Exercice 12. Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x - 6}{x^2 - 4}; & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - 1}; & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 4} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} + x; & \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 1} + x; & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2+x^2} - x}{\sqrt{7+x^2} - x} \end{aligned}$$

Exercice 13. Calculer les limites suivantes en utilisant des comparaisons de fonctions (équivalents, etc.) :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\tan^2(2x)}; & \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(\frac{\pi}{6} - x)}{1 - 2 \sin x}; & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + |x|}{x}; & \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin(1/x); & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^2} \quad (\alpha > 0); & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^2} \quad (\alpha > 0); \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \quad (a \in \mathbb{R}); & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x}; & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{ch} x)^{2/x}. \end{aligned}$$

Continuité

Exercice 14. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{\sin x \cdot \tan x}{1 - \cos x} & \text{si } x \in]0, \frac{\pi}{4}] \\ a \sin x - 1 & \text{si } x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

- (1) Étudier la continuité de f .
- (2) Pour quelle valeur du réel a la fonction f est-elle continue sur tout intervalle de $\mathbb{R}^*$?
- (3) Déterminer b de telle sorte que f soit prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$.

Exercice 15. (1) Montrer que le polynôme $P(x) = x^5 - 3x - 1$ admet au moins une racine comprise entre -1 et 0 .

(2) Montrer que tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 16. Montrer que toute fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ admet au moins un point fixe. (On pourra considérer la fonction $x \mapsto f(x) - x$.)

Correction

Limites:

TD 2pe

Exercice 12

$$\frac{x^3 - x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 3)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 2} = \frac{11}{4}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2} - 1} : \text{FI du type } 0/0 \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(\sqrt{1+x^2} + 1)}{x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{x} \rightarrow +\infty \sim \frac{2}{x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 4} &= \frac{4x+1-9}{(\sqrt{4x+1}+3)(x^2-4)} = \frac{4x-8}{(\sqrt{4x+1}+3)(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{4(x-2)}{(\sqrt{4x+1}+3)(x-2)(x+2)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}$$

$$\sqrt{x^2 - 1} + x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\sqrt{x^2 + 1} + x : \text{FI du type } +\infty - \infty$$

$$\left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{-1} \right)^{-1} = \left(-\sqrt{x^2 + 1} + x \right)^{-1} \rightarrow 0$$

$$\frac{\sqrt{9+x^2} - 3}{\sqrt{9+x^2} - x} = \frac{2}{\sqrt{9+x^2} + x} \cdot \frac{\sqrt{9+x^2} + x}{9}$$

$$= \frac{2}{9} \frac{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}} + 1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}} + 1} \rightarrow \frac{2}{9}$$

Exercice 13

$$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\cos t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\cos^2(2x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{(2x)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}{1 - 2\sin x}$$

Numérateur $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{6}}{\sim} \frac{\pi}{6} - x$

Dénominateur $1 - 2\sin x \rightarrow 0$

$$x = \frac{\pi}{6} - \left(\frac{\pi}{6} - x\right) \Rightarrow \sin \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \cos \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

$$\Rightarrow 1 - 2\sin x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

$$\Rightarrow = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

$$= 2 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} - x\right)} \right)^2 \left(\frac{\pi}{6} - x\right) \cdot \frac{1}{4}$$

donc $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}{1 - 2\sin x} \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{6}}{\sim} \frac{\frac{\pi}{6} - x}{\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6} - x\right)} \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{6}}{\rightarrow} \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$1 - 2\sin x = 2 \left(\frac{1}{2} - \sin x \right) = 2 \left(\sin \frac{\pi}{6} - \sin x \right)$$

$$= 2 \cdot 2\sin \frac{\frac{\pi}{6} - x}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{6} + x}{2}$$

$$\underset{x \rightarrow \frac{\pi}{6}}{\sim} \left(\frac{\pi}{6} - x\right) \cdot \sqrt{3}$$

$$\underset{x \rightarrow \frac{\pi}{6}}{\sim} \sqrt{3} \left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + |x|}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + |x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + |x|}{x} = -1$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + |x|}{x}$ $\nexists$

Pre

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sim \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x} \leq x \leq \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

Correction

TD maths

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sim \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow x \sim \frac{1}{\frac{1}{x}} \sim x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{P_n(1+x)^x}{x^2}$$

(5)

$$\begin{aligned} P_n(1+x^x) &\sim x^x \\ \text{et donc (5)} &\sim x^{x-2} \end{aligned} \quad \begin{cases} 0 \text{ si } x > 2 \\ 1 \text{ si } x = 2 \\ +\infty \text{ si } x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_n(1+x^x)}{x^2}$$

$$\sim \frac{x P_n x}{x^2} \sim x \frac{P_n x}{x^2} \rightarrow 0$$

$$\frac{P_n(1+x)}{x} \sim 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$$

$$= \exp\left(x P_n\left(1 + \frac{a}{x}\right)\right) = \exp\left(a \frac{P_n(1 + \frac{a}{x})}{a/x}\right) = e^a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x}$$

$$\sim \exp\left(\frac{P_n(x)}{x}\right) \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (ch x)^{2/x}$$

$$\sim \exp\left(\frac{2 ch x}{x}\right)$$

$$P_n ch x = P_n \frac{1}{2} + x + P_n(1 + e^{-2x})$$

$$\text{donc } \frac{2}{x} P_n ch x \sim \frac{2}{x} P_n\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{x} P_n(1 + e^{-2x}) \rightarrow 2$$

$$\text{donc } (ch x)^{2/x} \rightarrow e^2$$

Exercice 14

- 1) $ax + b$ est continue sur $\mathbb{R}^*$
• $\frac{\sin x \cdot \tan x}{1 - \cos x}$ si $0 < x < \frac{\pi}{4}$
• $a \sin x - 1$ continue sur $x > \frac{\pi}{4}$

Il faut étudier la continuité de g en 0
et en $\frac{\pi}{4}$ à droite

Limite à gauche en 0. $\lim_{0^-} ax + b = b$

$$\lim_{0^+} \frac{\sin x \cdot \tan x}{1 - \cos x} = \frac{\sin x \cdot \tan x}{2 \sin^2(\frac{x}{2})}$$
$$\sim_{0^+} \frac{x^2}{2(\frac{x}{2})^2} = 2 \quad \text{donc} \quad \lim_{0^+} g = 2$$

Maïs $g(0)$ n'est pas définie !

Donc on peut dire que g est prolongeable par continuité en 0 si $\lim_{0^-} g = \lim_{0^+} g$ i.e si $b=2$
alors pour prolonger g par continuité en 0 il faut poser $g(0) = 2$

Limite à droite de $\frac{\pi}{4}$:

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sqrt{2}$$

$$g \text{ continue en } \frac{\pi}{4} \text{ si } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} g = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sqrt{2}$$

$$\text{or } x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^+ \quad \lim g(x) = a \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

$$\text{donc } a \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = 1 + \sqrt{2}$$

$$\frac{a}{\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2} \Leftrightarrow a = 2\sqrt{2} + 2$$

Donc g est continue en $\frac{\pi}{4}$ si $a = 2(\sqrt{2} + 1)$

Récap: $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

TVI

Si g est dg, continue dans D_g : g est continue sur D_g
 $\forall d \in [a, b], \exists c \in]a, b[, g(c) = d$: g est continue en $\frac{\pi}{4}$ si $a = 2(\sqrt{2} + 1)$
 Et on en a profité pour constater que g est prolongeable par continuité en 0 si $b = 2$ et qu'alors $g(0) = 2$

Exercice 15 (1) P continue (évident)

$$P(-1) = -1 + 3 - 1 = 1$$

$$P(0) = -1$$

P est continue et change de signe dans $[-1, 0]$ donc elle s'annule au moins une fois dans cet intervalle (mercé TVI).

(2) P polynôme réel de degré impair :

$$P(x) = a_{2m+1} x^{2m+1} + a_{2m} x^{2m} + \dots + a_1 x + a_0$$

où $a_{2m+1} \neq 0$

$$P(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} a_{2m+1} x^{2m+1}$$

De même les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de P sont des signes opposés, donc $P(x)$ prend pour $x \rightarrow \pm\infty$ avec $|x|$ assez grand des valeurs de signes opposés. Donc, par le TVI, P s'annule au moins une fois dans $\mathbb{R}$.

P continue se fait pas de saut.

Exercice 16

- Méca
- Chimie
- Maths spé

$$f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto f(x) - x \quad \text{fonction continue}$$

$$f(0) - 0 \geq 0 \quad \text{car } f(0) \in [0, 1]$$

$$f(1) - 1 \leq 0 \quad \text{car } f(1) \in [0, 1]$$

Donc $f(x) - x$ s'annule au moins une fois dans $[0, 1]$ (soit en 0, soit en 1 soit par le TVI par où alors elle change de signe : $f(0) - 0 > 0$, $f(1) - 1 < 0$)

Donc $\exists x \in [0, 1], f(x) = x$ i.e. f a-t un point fixe.

Feuille d'exercices n° 4

Dérivabilité

Exercice 17. Étudier la dérivabilité en 0 des fonctions $f : x \mapsto |x|$, $g : x \mapsto x|x|$, $h : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Lorsque la dérivée existe, dire si elle est continue en 0.

Exercice 18. (1) Définir la différentielle de $f : x \mapsto x^3 - x^2 + 5x - 6$ en 0 puis en 1. L'une au moins d'entre elles était-elle prévisible sans calcul ?

(2) À l'aide de la différentielle de $f : x \mapsto \frac{2x}{1+\sqrt{x}}$ donner une valeur approchée de $f(1,004)$.

Exercice 19. (1) Montrer que si une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I s'annule en n points de I distincts, alors f' s'annule au moins $n - 1$ fois dans I .

(2) Montrer que l'équation $x^n + px + q = 0$ ne peut avoir plus de deux racines réelles si n est pair et plus de trois racines réelles si n est impair.

Exercice 20. Montrer que la fonction $f : [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (1+x)^{1/3}$ est contractante sur $[0, +\infty[$.

Exercice 21. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$ et que son (unique) prolongement est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22. Étudier les variations $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ (où $\arcsin$ est prise à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$). Tracer sa représentation graphique.

Exercice 23. Étudier les variations $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x-1)^2 \arcsin(x)$ (où $\arcsin$ est prise à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$). Tracer sa représentation graphique.

Exercice 24. Calculer les dérivées d'ordre n de $f : x \mapsto \sin(x)$, $g : x \mapsto x^2 \sin(3x)$, $h : x \mapsto (x^2 + 1)e^{2x}$.

Développements limités

Exercice 25. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = o(x^n)$ ($x \rightarrow 0$).

En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Écrire le DL de f en 0 à l'ordre n .

Exercice 26. Calculer le $DL_4(1)$ de $\arctan$ (où $\arctan$ est prise à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$) ; le $DL_4(2)$ de $\exp$; le $DL_4(2)$ de $\ln$; le $DL_4(\pi/4)$ de $\cos$.

Exercice 27. (1) Calculer le $DL_4(0)$ de : $e^x + \cos(x)$; $\ln(1+x) + \sin(x)$; $e^x \ln(1+x)$; $\frac{\ln(1-x)}{1-x}$; $\ln(\cos x)$; $e^{\sin x}$; $e^{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\ln(1+x)}$.

(2) Calculer le $DL_2(0)$ de $\frac{x - \ln(1+x)}{\sin x}$.

Exercice 28. (1) Du $DL_2(0)$ de $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$ déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

(2) Déterminer a et b réels tels que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b - \sqrt[4]{16x^4 + x^3 + 1}) = 0$.
Conseil : poser $X = 1/x$, $g(X) = f(x)$ et faire le $DL_1(0)$ de g .

Exercice 29. (Étude locale d'une fonction)

Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x + 2 - \frac{1}{x}) \arctan x$ (où $\arctan$ est prise à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$). Montrer que f admet un DL_2 quand $x \rightarrow 0$, qu'on explicitera.

En déduire qu'elle est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$. Définir le prolongement $\tilde{f}$ correspondant. Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable en 0. Donner l'équation de la tangente Δ au graphe de $\tilde{f}$ en son point d'abscisse 0. Quelle est localement la position du graphe par rapport à Δ ?

Exercice 30. (Étude de branches infinies)

Étudier les branches infinies de $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x(\frac{x}{1+x})^2$ et de $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x(\frac{x}{1+x})^x$.

donc $g'_g(0) = -1$, $g'_d(0) = 1$ et $g'(0)$ n'existe pas.

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x|x|}{x} \rightarrow 0 \quad \text{d'où } g \text{ est dérivable en } 0$$

Exercice 18

1) Définir la différentielle de f en a puis en 1
où $f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 6$ l'une au moins était elle
prévisible sans calcul ?

$$d g_a(h) = g'(a)h, \quad g(x) = g(a) + d g_a(h) + o(h)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d f_0(h)}{dh} = g'(0) \cdot h = (3x^2 - 2x + 5) \Big|_{x=0} \quad \begin{matrix} h = x - a \\ h \\ x=0 \end{matrix}$$

domc $df_{g_0}(h) = sh, h \in \mathbb{R}$ ~~$(3x^2 - 2x + 5)$~~
 $df_{g_1}(h) = \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=1} h = 6h, h \in \mathbb{R}$

$$g(x) = -6 + 5x - x^2 + x^3 \quad (x \rightarrow 0)$$

$$g^{(1)}$$

$$\Rightarrow dg_0(h) = 5h$$

La diff est la partie linéaire
du dpt limite de g en 0 . Pour
un polynôme, le dpt limite en 0
est la somme des monômes de
 g écartés dans l'ordre de puissances
croissantes

2) À l'aide de la d'f de $g: x \mapsto \frac{2x}{1+\sqrt{x}}$ donner une valeur approchée de $g(1,004)$

$$g(x) = \frac{2x}{1+\sqrt{x}} \Rightarrow g'(x) = \frac{2(1+\sqrt{x}) - x/\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{2+\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$\text{Donc } dg_a(h) = g'(a)h = \frac{2+\sqrt{a}}{(1+\sqrt{a})^2} h$$

$$\text{D'où } dg_1(h) = \frac{3}{4} h$$

$$\text{on a donc : } g(1,004) = g(1) + dg_1(0,004) = 1 + \frac{3}{4} \cdot 0,004 + R \approx 1,003$$

Correction

maths spé

$$\Leftrightarrow x = \pm (-p/m)^{\frac{1}{2m}} \quad \text{si } -p/m > 0$$

$$\Rightarrow \text{la dérivée a au plus 2 racines}$$

$$\Rightarrow R-1 \leq 2 \Rightarrow R \leq 3$$

Exercice 20

$g: [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ Montrer qu'elle est contractante
 $x \mapsto (1+x)^{1/3}$

D'après le TAF, g est M -Lipsh si $M = \sup |g'|$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$

Calculons g' :

$$g'(x) = ((1+x)^{1/3})' = \frac{1}{3} (1+x)^{-2/3}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow 1+x \geq 1 \Rightarrow (1+x)^{-2/3} \leq 1^{-2/3} = 1 \Rightarrow |g'(x)| \leq \frac{1}{3}$$

g est $\frac{1}{3}$ Lip et donc est contractante.

Exercice 21

$$g(x) = e^{-1/x^2} \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

$$g(x) = e^{-1/x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Donc g est prolongeable par continuité en 0 par

Montrons que $\tilde{g}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sur

$\mathbb{R}^+ \cdot \forall x \in \mathbb{R}^+, \tilde{g}'(x) = g'(x) =$

$$\tilde{g}(0) = 0$$

$$\tilde{g} = g \quad \text{sur } \mathbb{R}^+$$

$$\frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

dont TDB $\tilde{g}'(0) = 0$

Sur $\mathbb{R}^+$, $\tilde{f} = f$ et indéfiniment dérivable et $f^{(m)}(x) = P_m\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$ où P est un polynôme. En effet, c'est vrai pour $m=0$: $f^{(0)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ ($P_0=1$) et si c'est

vrai pour un certain m , alors :

$$f^{(m+1)}(x) = (f^{(m)})'(x) = (P_m\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}})' = \frac{1}{x^2} P_m'\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} + P_m\left(\frac{1}{x}\right) \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = P_{m+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

où $P_{m+1}(x) = -x^2 P_m'(x) + 2x^3 P_m(x)$ est bien un polynôme. Donc la propriété (*) est vraie pour $m=0$ et héréditaire est donc vraie $\forall m$.

Or : $P_m\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Donc en appliquant successivement le théorème de dérivation aux bornes à $\tilde{f}, \tilde{f}', \dots, \tilde{f}^{(m-1)}$ on obtient que $\tilde{f}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\tilde{f}^{(m)}(0) = 0$.

Par Taylor-Young, on a un $D_m(0)$: $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(0) + \tilde{f}'(0)x + \dots$

Exercice 22 $f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ Arctan y existe si $y \in [-1, 1]$, ie si $|y| \leq 1$.

At-on $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$?

oui car $1 + |x|^2 - 2|x| \geq 0 \Leftrightarrow (1 - |x|)^2 \geq 0$ vrai pour

on a donc bien $D_f = \mathbb{R}$ tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ comme composée de fonctions dérivables et } f'(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' \text{Arctan}'\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{2(1+x^2) - (2x)^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}$$

$$= \frac{2}{1+x^2} \quad \text{Donc} \quad f(x) = \text{Arctan} \frac{2x}{1+x^2} = 2 \text{Arctan } x + C$$

Correction

Exercice 22

TD 2pc

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \\
 &= \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\frac{1}{1+x^2} \sqrt{(1-x^2)^2}} \\
 &= \frac{2(1-x^2)}{1+x^2} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}}
 \end{aligned}$$

Comme $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ (x n'est pas nécessairement dans $] -1, 1[$, on a $\sqrt{(1-x^2)^2} = |1-x^2|$

Donc

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \frac{1-x^2}{|1-x^2|} \quad \text{d'où sur }]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

$$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2} \quad \text{et sur }]-1, 1[, \quad f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

$$\text{et donc : sur }]-\infty, -1[: f(x) = -2 \operatorname{Arctan} x + C_1$$

$$\text{sur }]-1, 1[: f(x) = 2 \operatorname{Arctan} x + C_2$$

$$\text{sur }]1, +\infty[, f(x) = 2 \operatorname{Arctan} x + C_3$$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{Arctan} x + C_1$$

$$f(0) = 0$$

$$= 2 \operatorname{Arctan} 0 + C_2 \quad \text{d'où } C_2 = 0$$

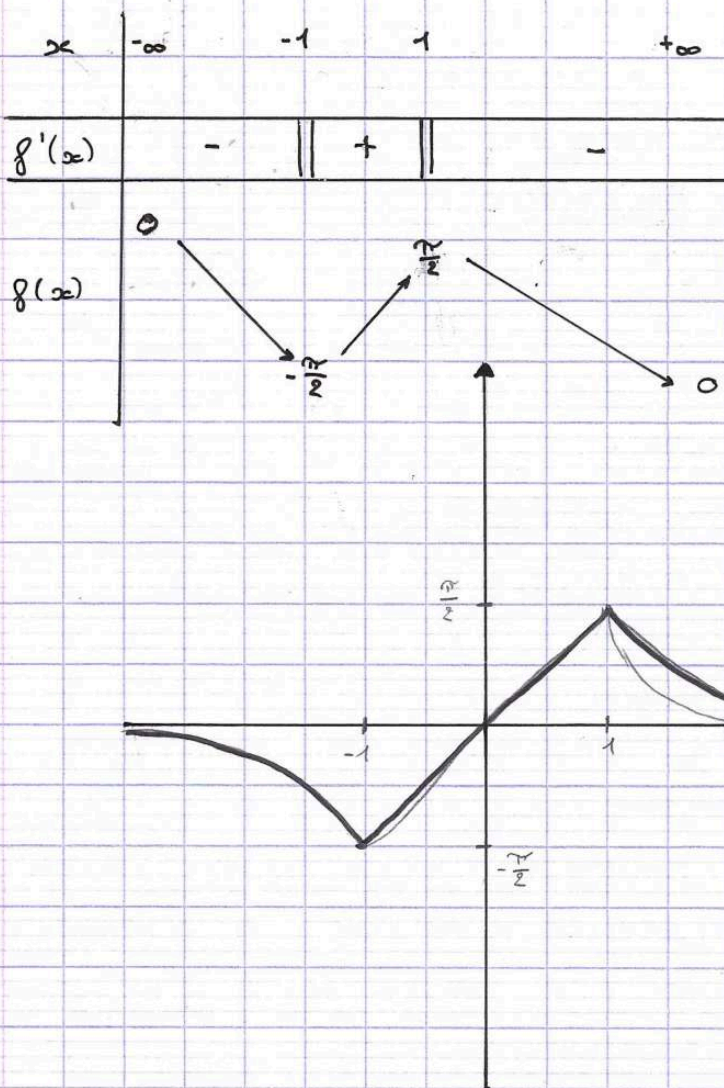
$$= \pi + C_1$$

$$\text{d'où } C_1 = -\pi$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 0$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctan} x + C_3$$

$$\text{d'où } C_3 = \pi$$



Exercice 29

$$f(x) = (x-1)^2 \operatorname{Arccos} x \quad D_f = D_{\operatorname{Arccos}} = [-1, 1]$$

$$f'(x) = 2(x-1) \operatorname{Arccos} x + (x-1)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{sur }]-1, 1[$$

$$\text{Sur }]-1, 0], \quad \begin{cases} x-1 < 0 \\ \operatorname{Arccos} x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow (x-1) \operatorname{Arccos} x \geq 0$$

$$\text{or } (x-1)^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0 \quad \text{Sur }]0, 1[: \operatorname{Arccos} x > 0$$

$$f'(x) = \left(2 \operatorname{Arccos} x + \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}} \right) (x-1)$$

$$= g(x) (x-1)$$

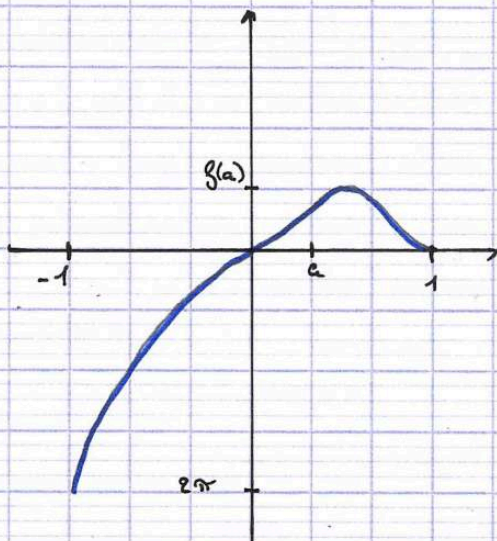
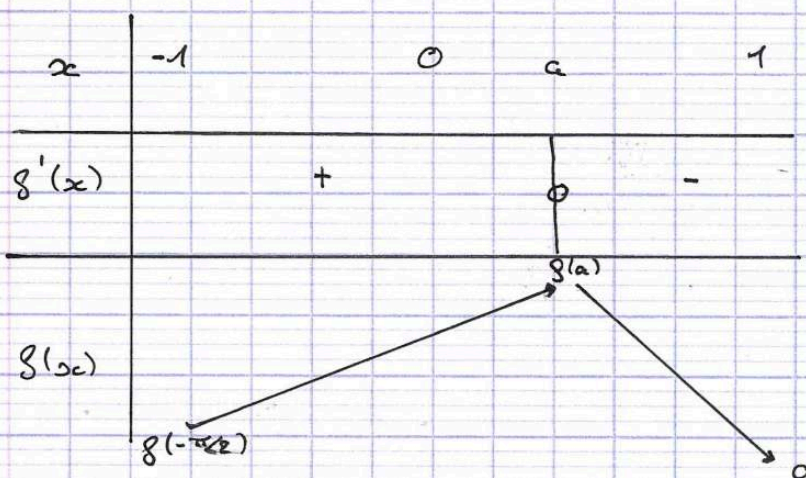
où $g(x) = 2 \operatorname{Arctan} x - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)' \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{-1-1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{1}{(1-x)^2} > 0 \end{aligned}$$

Donc g croît sur $]0, 1[$ de $g(0) = -1$

à $g(1) = \pi$

Donc g s'annule exactement une fois, en un point $a \in]0, 1[$



$$\begin{aligned}
 \text{Donc } f(x) &= 2 \operatorname{Arctan} x + C_1 \text{ sur }]-\infty, -1[\\
 &= 2 \operatorname{Arctan} x + C_2 \text{ sur }]-1, 1[\\
 &= 2 \operatorname{Arctan} x + C_3 \text{ sur }]1, +\infty[
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &f'(x) \\
 &= \frac{1}{x^2 + 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &2 \\
 &\frac{1}{x^2 + 1}
 \end{aligned}$$

Mais f est continue sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto f(x) - \operatorname{Arctan} x$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $C_1 = C_2 = C_3$

$$\text{Donc } f(x) = 2 \operatorname{Arctan} x + C \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\text{Mais } f(0) = 0 \text{ et } 2 \operatorname{Arctan} 0 = 0 \text{ donc } C = 0$$

$$\text{On conclut que } f(x) = 2 \operatorname{Arctan} x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Prep TD
Correction
2pc

Développement P. m. l'ez

Exercice 25

Voir exo 21

Exercice 26

Appliquons Taylor Young :

$$\operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan} 1 + (\operatorname{Arctan}' 1)(x-1) + \frac{1}{2} (\operatorname{Arctan}'' 1)(x-1)^2 + \frac{1}{6} (\operatorname{Arctan}''' 1)(x-1)^3 + \frac{1}{24} (\operatorname{Arctan}^{(4)} 1)(x-1)^4 + o((x-1)^4)$$

$$\operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{Arctan}' x = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \operatorname{Arctan}' 1 = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Arctan}'' x = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \operatorname{Arctan}'' 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctan}''' x &= \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{-2(1+x^2) + 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Arctan}''' 1 = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Arctan}^{(4)} x = 2 \cdot \frac{6x(1+x^2)^3 - 6x(3x^2-1)(1+x^2)^2}{(1+x^2)^4}$$

$$= 12x \frac{1+x^2 - (3x^2-1)}{(1+x^2)^4}$$

$$= 12x \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^4}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Arctan}^{(4)}(1) = 0$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctan} x &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 \\ &\quad + o((x-1)^4) \quad (x \rightarrow 1) \end{aligned}$$

$DL_4(2)$ de exp:

$$\begin{aligned} T_y \Rightarrow e^x &= e^2 + e^{1x} (x-2) + \frac{1}{2} e^{2x} (x-2)^2 \\ &+ \frac{1}{6} e^{3x} (x-2)^3 + \frac{1}{24} e^{4x} (x-2)^4 + o((x-2)^4) \\ &= e^2 + e^2 (x-2) + \frac{1}{2} e^2 (x-2)^2 + \frac{1}{6} e^2 (x-2)^3 + \frac{1}{24} e^2 (x-2)^4 \\ &+ o((x-2)^4) \quad (x \rightarrow 2) \end{aligned}$$

$DL_4(2)$ de P_m :

$$\begin{aligned} P_m x &= P_m 2 + P_m' 2 (x-2) + \frac{1}{2} P_m'' 2 (x-2)^2 + \frac{1}{6} P_m''' 2 (x-2)^3 \\ &+ \frac{1}{24} P_m^{(4)} 2 (x-2)^4 + o((x-2)^4) \end{aligned}$$

$$P_m' x = \frac{1}{x} \Rightarrow P_m' 2 = \frac{1}{2}$$

$$P_m'' x = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow P_m'' 2 = -\frac{1}{4}$$

$$P_m'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow P_m''' 2 = \frac{1}{4}$$

$$P_m^{(4)} x = \frac{-6}{x^4} \Rightarrow P_m^{(4)} 2 = -\frac{3}{8}$$

$$\text{et donc } P_m x = P_m 2 + \frac{1}{2} (x-2) - \frac{1}{8} (x-2)^2 + \frac{1}{24} (x-2)^3 - \frac{1}{64} (x-2)^4 + o((x-2)^4)$$

$DL_4\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de cos:

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos \frac{\pi}{4} + \cos' \left(\frac{\pi}{4} \right) \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \cos'' \left(\frac{\pi}{4} \right) \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{6} \cos''' \left(\frac{\pi}{4} \right) \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^3 + \frac{1}{24} \cos^{(4)} \left(\frac{\pi}{4} \right) \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^4 \\ &+ o \left(\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^4 \right) \quad x \rightarrow \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

~~Prépa~~

Exercice 24

Correction

TD 3^{pe}

maths

$$x \mapsto \sin(x) :$$

$$\sin' x = \cos x$$

$$\sin'' x = -\sin x$$

$$\sin''' x = -\cos x$$

$$\sin^{(4)} x = \sin x$$

$$\text{Donc } \sin^{(4k)} x = \sin x \quad \text{ou}$$

$$\sin^{(m)}(x) = \sin\left(x + m \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin^{(4k+1)} x = \cos x$$

$$\sin^{(4k+2)} x = -\sin x$$

$$\sin^{(4k+3)} x = -\cos x$$

$$g: x \mapsto x^2 \sin(3x)$$

$$g'(x) = 2x \sin(3x) + 3x^2 \cos(3x)$$

$$g''(x) = 2 \sin(3x) + 12x \cos(3x) - 9x^2 \sin(3x)$$

$$g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} (\sin(3x))^{(n-k)}$$

$$\text{avec } \sin^{(k)} R=0 : (x^2)^{(k)} = x^2$$

$$\sin^{(k)} R=1 : (x^2)^{(k)} = 2x$$

$$\sin^{(k)} R=2 : (x^2)^{(k)} = 2$$

Donc pour $n \geq 3$:

$$g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} (\sin(3x))^{(n-k)} \quad \text{Formule de Leibnitz}$$

$$= x^2 (\sin(3x))^{(n)} + n \cdot 2x (\sin(3x))^{(n-1)}$$

$$+ n(n-1) (\sin(3x))^{(n-2)}$$

$$= x^2 3^n \sin^{(n)}(3x) + 2nx \cdot 3^{n-1} \sin^{(n-1)}(3x)$$

$$+ n(n-1) 3^{n-2} \sin^{(n-2)}(3x)$$

$$= 3^n x^2 \sin\left(3x + n \frac{\pi}{2}\right) + 2n \cdot 3^{n-1} x \sin\left(3x + (n-1) \frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ 3^{n-2} n(n-1) \sin\left(3x + (n-2) \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{n!}{2^{(n-2)}!}$$

$$h: x \rightarrow (x^2+1)e^{2x}$$

$$m! = \int_0^{\infty} t^m e^{-t} dt$$

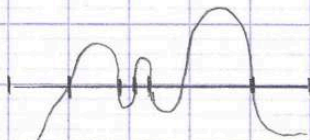
$$h'(x) = 2xe^{2x} + 2(x^2+1)e^{2x}$$

$$m \geq 2: h^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (x^2+1)^{(k)} (e^{2x})^{(m-k)}$$

$$= \binom{m}{0} (x^2+1) 2^m e^{2x} + \binom{m}{1} 2x 2^{m-1} e^{2x} + \binom{m}{2} 2^{m-1} e^{2x} + 0.$$

$$= 2^m (x^2+1)e^{2x} + m 2^m x e^{2x} + m 2^m x e^{2x} + m(m-1) 2^{m-2} e^{2x}$$

Exercice 19



1) Soient $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ les m points supposés de I où g s'annule

D'après le théorème de Rolle,

il existe $a_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tq $g'(a_i) = 0$,

$1 \leq i \leq m-1$ et les $]x_i, x_{i+1}[$ sont disjointes donc

les a_i sont distincts.

$$2) x^m + px + q = 0$$

Si P a R racines réelles, d'après le (1) la dérivée s'annule en au moins $R-1$ points distincts.

$$\text{Or: } (x^m + px + q)' = mx^{m-1} + p = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -p/m \quad (*)$$

Si m est pair: $m = 2m$

$$\text{et } (*) \Leftrightarrow x^{2m-1} = -p/m$$

$$\Leftrightarrow x = (-p/m)^{\frac{1}{2m-1}} \text{ unique donc le mbr de}$$

racines de la dérivée est 1 et $\geq R-1$ d'après

d'après le (1) et donc $R-1 \leq 1$ et donc

$$R-1 \leq 1, \text{ i.e. } R \leq 2$$

i.e. $x^m + px + q = 0$ a au plus 2 racines réelles

Si m est impair $m = 2m+1$

$$\text{Alors } (*) \Leftrightarrow x^{2m} = -p/m$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{6} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$$

$$+ \frac{1}{24} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4\right) \quad \left(x \rightarrow \frac{\pi}{4}\right)$$

Exercice 2

(1) On peut la somme des $D_n(x)$ de e^x et de

$\cos x$:

$$\frac{e^x + \cos x}{2}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$= 2 + x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$\frac{\sin(1+x) + \sin x}{2}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) + x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$= 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$- e^x \sin(1+x)$$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$\frac{\sin(1-x)}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} \sin(1-x) = (1+x+x^2+x^3+x^4+o(x^4)) \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right.$$

$$\left. - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) = -x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o(x^4)$$

$$\frac{\sin(\cos x)}{x \rightarrow 0} = \sin\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$$

$$P_m(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad x \rightarrow 0$$

$$\text{on } x = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \quad \text{et donc } o(x^2) = o(x^4)$$

$$\text{donc } P_m(\cos x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{1}{2}$$

$$\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right)^2$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \sin x + \frac{1}{2} (\sin x)^2 + \frac{1}{6} (\sin x)^3 \\ &\quad + \frac{1}{24} (\sin x)^4 + o((\sin x)^4) = o(x^4) \end{aligned}$$

$$= 1 + x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^2}{6} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^2}{6} \right)^3$$

$$+ \frac{1}{24} \left(x - \frac{x^2}{6} \right)^4 + o(x^4) = 1 + x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right)$$

$$+ o(x^4) + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^4 + o(x^4) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\frac{e^{\sin x}}{P_m(1+x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)}$$

$$= \frac{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)}$$

$$= \frac{1}{1+x} \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right)$$

$$= \frac{1}{1+x} \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right)$$

$$\text{on } x = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)$$

$$\begin{aligned}
 \text{On a donc: } &= \left[1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right) + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} \right)^3 + \left(-\frac{x}{2} \right)^4 \right] \left[1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} \right] + o(x^4) \\
 &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{24} + \frac{13}{960} x^4 + \frac{199}{720} x^4 \right) \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} \right) \\
 &\quad + o(x^4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \frac{x - \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)}{\sin x} &= \frac{x - \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right]}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\
 &= \frac{\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^2) \right) \\
 &= \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^2)
 \end{aligned}$$

Exercice 28

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2} &= \exp \left(\frac{1}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \right) = \exp \left(\frac{1}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) \right) \\
 &= \exp \left(\frac{1}{x^2} \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{6} \right) x^5 + o(x^4) \right) \right) \\
 &= \exp \left(\frac{1}{x^2} \left(-\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{15} + o(x^4) \right) \right) = \exp \left(-\frac{1}{6} - \frac{x^2}{15} + o(x^2) \right) \\
 &= e^{-1/6} \exp \left(-\frac{x^2}{15} + o(x^2) \right) = e^{-1/6} - \frac{e^{-1/6}}{180} x^2 + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0) \\
 \text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2} &\rightarrow e^{-1/6}
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad ax + b - \sqrt[4]{16x^4 + x^8 + 1}$$

$$X = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$ax + b - \sqrt[4]{16x^4 + x^8 + 1} = \frac{a}{X} + b - \sqrt[4]{\frac{16}{X^4} + \frac{1}{X^8} + 1}$$

$$= \frac{1}{X} (a + bX - 2(1 + \frac{X}{16} + \frac{X^4}{16})^{1/4})$$

$$= \frac{1}{X} (a + bX - 2(1 + \frac{1}{4}(\frac{X}{16}) + o(X)))$$

$$= \frac{1}{X} (a - 2 + (b - \frac{1}{32})X + o(X))$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \text{ si } \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{1}{32} \end{cases}$$

Exercice 29

$$f(x) = (x+2 - \frac{1}{x}) \operatorname{Arctan} x$$

$$= (x+2 - \frac{1}{x}) \left(x - \frac{1}{24}x^3 + o(x^3) \right)$$

$$\operatorname{Arctan}''' x = \frac{2(3x^2+1)}{(1+x^2)^3} = \frac{1}{4} \Big|_{x=0}$$

$$= x^2 + 2x - 1 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{24}x^2 + o(x^4)$$

$$= -1 + 2x + \frac{23}{24}x^2 + o(x^2)$$

$$\tilde{f}(0) = -1 \quad \text{tangente en } 0 : y = -1 + 2x$$

Correction Exercice 30
TD spe

Branches infinies:

$$g(x) \rightarrow \pm \infty$$

$$g(x) = x \cdot \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 \rightarrow +\infty$$

$$\text{si } x \rightarrow +\infty \quad (x \in \mathbb{R}_+^*)$$

On cherche s'il y a une direction asymptotique ($\frac{y}{x} \rightarrow \text{limite } a$)

si oui, y a-t-il une asymptote ($y = ax \rightarrow \text{limite } b$) ?

Si oui, de quel côté de l'asymptote se trouve le graphe de g , signe de $g(x) - (ax + b)$?

On peut tout faire en même temps en faisant un DL de $g(x)/x$ quand $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{g(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (x \rightarrow +\infty)$$

$$\text{ici: } \frac{g(x)}{x} = \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{-2}$$

$$(1+t)^{-\alpha} = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} t^2 + o(t^2) \quad (t \rightarrow 0)$$

$$= 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

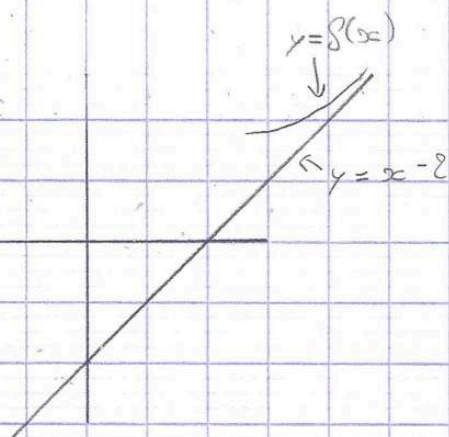
Donc :

$$g(x) = x - 2 + \frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \rightarrow +\infty)$$

Donc quand $x \rightarrow +\infty$, le graphe de g a pour asymptote

$$y = x - 2$$

et il est au-dessus de cette asymptote (car $\frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ est du signe de $\frac{3}{x} > 0$ si x est assez grand).



$$g(x) = x \left(\frac{x}{x+1} \right)^x \Rightarrow \frac{g(x)}{x} = \left(\frac{x}{x+1} \right)^x = \exp \left[x \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) \right]$$

$$= \exp \left[-x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \right]$$

$$= \exp \left[-1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right]$$

$$= e^{-1} \cdot \exp \left(\underbrace{\frac{1}{2x} - \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{u \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty)} \right)$$

$$= e^{-1} \left[1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2) \right]$$

$$= e^{-1} \left[1 + \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{3x^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{3x^2} \right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right]$$

$$= e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2x} + e^{-1} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{8} \right) \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x}{e} + \frac{1}{2e} + \underbrace{\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{8} \right) \frac{1}{x}}_{< 0} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

< 0

Donc quand $x \rightarrow +\infty$, le graphe de $g(x)$ a pour asymptote
 $y = \frac{1}{e}x + \frac{1}{2e}$ et il est au-dessous de celle-ci.

La divisibilité dans $\mathbb{Z}$ Exercice 1:

	majorants	mineurs	$\oplus$ grande	$\oplus$ petite	borne sup	borne inf
A: $[-1, 3] \cup]1, 5[$ = $[1, 5[$	100	-100	/	-1	5	-1
B: $[-1, 3] \cap]1, 5[$ = $]1, 3]$	100	-100	3	0	3	1
C: $2\mathbb{N}$	/	-100	/	0	/	0
D: $[-3, 3]$	100	-100	3	-3	3	-3

Exercice 2

$$\begin{array}{r|l} 15 & 4 \\ -12 & 3 \\ \hline 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -15 & 4 \\ +12 & -3 \\ \hline -3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} m^2+2m+1 & m \\ -m^2 & m+2 \\ \hline 2m+1 & \\ -2m & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Exercice 3

• Méthode 1:

$$m^3 - m = m(m^2 - 1)$$

$$= m(m+1)(m-1)$$

3 nombres consécutifs

donc: • 1 pair

• 1 multiple de 3

• Méthode 2:

$$P(m): "m^3 - m = 6k" \quad m, k \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Pour } m=0, m^3 - m = 0$$

$$6 \times 0 = 0$$

$$\forall m, (m+1)^3 - (m+1) \text{ on pose } N = m+1$$

$$\text{donc } N^3 - N = 6k \text{ (par (HR))}$$

$$\text{donc } m^3 - m = 6k$$

Exercice 4

$$\Delta_n = \{R \in \mathbb{N} \mid R \text{ est premier et } R^2 \leq n\}$$

$\Rightarrow n$ premier si $\mathcal{P}$ n'admet aucun diviseur dans $[2, \sqrt{n}] \Leftrightarrow 2 \leq R \leq \sqrt{n}$ avec R un diviseur premier

- Si n est premier, $\mathcal{P}$ admet donc un div. premier : lui-même
- Si n n'est pas premier, l'ensemble des diviseurs d de n tel que $2 \leq d \leq n \neq \emptyset$. $\mathcal{P}$ admet donc un plus petit p . Si p n'était pas premier, $\mathcal{P}$ admettrait un diviseur d' tel que $2 \leq d' < R$ qui diviserait n . Ceci est impossible car R est le $\oplus$ petit. Donc R est premier.
- On a donc R premier et $n = p \times q$ avec $p \leq q$ on a donc $R^2 \leq Rq \Rightarrow R^2 \leq n$ donc $R \leq \sqrt{n}$
- Ainsi si $R \notin \mathcal{P}$ alors n est premier

1111 est divisible par 11.

$$\Delta_{1111} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\} \text{ donc } 1111 \text{ est premier}$$

Exercice 5

$$\text{On calcule } \text{pgcd}(\text{pgcd}(12345, 678), 91011) = 0$$

$$\bullet \text{pgcd}(12345, 678): 12345 = 678 \times 18 + 141$$

$$= \underline{\underline{3}}$$

$$678 = 141 \times 4 + 114$$

$$141 = 114 \times 1 + 27$$

$$114 = 27 \times 4 + 6$$

$$27 = 4 \times 6 + 3$$

$$6 = 2 \times 3$$

$$\text{pgcd}(3, 91011):$$

$$91011 = 30337 \times 3 + 0$$

$$\text{donc } \text{pgcd}(3, 91011) = 3$$

$$\text{Ainsi } A = 3$$

Exercice 6

$$1) \text{pgcd}(473, 220) = 11$$

$$473 = 220 \times 2 + 33$$

$$220 = 6 \times 33 + 22$$

$$33 = 1 \times 22 + 11$$

$$22 = 2 \times 11 + 0$$

$$2) \quad 473u + 220v = 1 = 11(43u + 20v)$$

$$0 = 22 - 2 \times 11$$

$$= (220 - 6 \times 33) - 2(33 - 22)$$

$$= 220 - 6(473 - 220 \times 2) - 2[(473 - 220 \times 2) - (220 - 6 \times 33)]$$

$$= 220 - 6 \times 473 + 12 \times 220 - 2 \times 473 + 4 \times 220 - 12 \times 33$$

$$= 19 \times 220 - 8 \times 473 - 12 \times 33$$

$$= 19 \times 220 - 8 \times 473 - 12(473 - 2 \times 220)$$

$$= -20 \times 473 + 43 \times 220$$

Une solution particulière de $473u_0 + 220v_0 = 1$ est $(-20, 43)$.

$$\text{Ainsi } 473u_0 + 220v_0 = 473u + 220v$$

$$\Leftrightarrow 473(u_0 - u) = 220(v - v_0)$$

$$\Leftrightarrow 43(u_0 - u) = 20(v - v_0) \Rightarrow 43 \mid 20(v - v_0)$$

$$\text{or } \text{pgcd}(43, 20) = 1$$

$$\text{donc par Gauss } 43 \mid (v - v_0) \text{ donc } \exists k \in \mathbb{Z} / v - v_0 = 43k$$

$$\text{donc } v = 43k + 43 \text{ ainsi } u = -20k - 20$$

$$\bullet 43u + 20v = 19$$

$$43u + 20v = 1$$

$$43 = 2 \times 20 + 3$$

$$20 = 3 \times 6 + 2$$

$$3 = 2 \times 1 + 1$$

$$2 = 2 \times 1 + 0$$

$$\text{donc } \text{pgcd}(43, 20) = 1$$

$$0 = 2 - 2 \times 1$$

$$= 20 - 3 \times 6 - 2(3 - 2)$$

$$= 20 - 6(43 - 2 \times 20) - 2[43 - 2 \times 20] - (20 - 3 \times 6)$$

$$= 13 \times 20 - 6 \times 43 - 2[43 - 2 \times 20 - 20 + 3 \times 6]$$

$$= 19 \times 20 - 8 \times 43 - 8 \times 6$$

$$= 19 \times 20 - 8 \times 43 - 48$$

$$= -20 \times 43 + 43 \times 20$$

$$\text{donc } (u_0, v_0) = (-20, 43)$$

$$43u + 20v = 43u_0 + 20v_0$$

$$43(u - u_0) = 20(v - v_0)$$

$$\text{donc } 43 \mid 20(v - v_0) \text{ or } \text{pgcd}(43, 20) = 1 \text{ donc}$$

$$\text{par Gauss } 43 \mid (v - v_0) \text{ donc } \exists k \in \mathbb{Z} / 43k = v - v_0$$

$$\text{ainsi } u = -20 + 20k$$

$$\Rightarrow v = v_0 - 43k$$

$$\Rightarrow v = 43 - 43k$$

$$S = (u, v) = (-20 + 20k, 43 - 43k)$$

$$\bullet 43u + 20v = 22$$

$$43u + 20v = 2$$

$$2 = 20 - 3 \times 6$$

$$= 20 - 6(43 - 2 \times 20)$$

$$= -6 \times 43 + 18 \times 20$$

$$\text{donc } (u_0, v_0) = (-6, 18)$$

$$43u + 20v = 43u_0 + 20v_0$$

$$43(u - u_0) = 20(v - v_0)$$

$$43 \mid 20(v - v_0)$$

$$\text{or } \text{pgcd}(43, 20) = 1$$

$$\text{donc d'après}$$

$$\text{Gauss } 43 \mid v - v_0 \text{ donc } \exists k \in \mathbb{Z} / 43k = 18 - v$$

$$\text{donc } v = 18 - 43k$$

$$u = -6 + 20k$$

$$43u + 20(-43k - 15) = 1$$

$$43u = -860k + 300$$

$$43u = 860k + 360$$

$$43u = 860k + 360$$

$$43(u - 7) = 20(-43k - 30)$$

$$43u - 301 = -860k - 600$$

$$43u = -860k - 299$$

$$43(7 + 20k) + 20v = 1$$

$$301 + 860k = -20v$$

$$-15 - 43k = v$$

Exercice 7

1) $11u - 8v = 9$

on prend $u_0 = 3$

$v_0 = 3$

$11 \times 3 - 8 \times 3 = 9$

donc $11u - 8v = 11u_0 - 8v_0$

$11(u - u_0) = 8(v - v_0)$

$8v_0 - 8v_0$

$8(v - v_0)$

donc $11 \mid 8(v - v_0)$ or pgcd $11, 8 = 1$

par gauss $11 \mid (v - v_0)$ donc $\exists k \in \mathbb{Z} \mid 11k = v - 3$

$v = 11k + 3$

$u = 8k + 3$

2) 341100009

$\Rightarrow 3 + 9 + 3 + 4 + 9_0 + 8x = 11k$

$108 + 8x = 11k$

$11k - 8x = 108$

donc $x = 3$.

Un peu d'arithmétique

I 1) $\text{pgcd}(473, 220) = 11$

$$473 = 220 \times 2 + 33$$

$$220 = 6 \times 33 + 22$$

$$33 = 1 \times 22 + 11$$

$$22 = 2 \times 11 + 0$$

2) Résoudre $473u + 220v = 11$

$$11 = 33 - 1 \times 22$$

$$= (473 - 220 \times 2) - (220 - 6 \times 33)$$

$$= 473 - 2 \times 220 - 220 + 6(473 - 2 \times 220)$$

$$= 7 \times 473 - 15 \times 220$$

$$\text{donc } (u_0, v_0) = (7, -15)$$

$$\text{ainsi } 473u + 220v = 473u_0 + 220v_0$$

$$\Leftrightarrow 473(u - u_0) = 220(v - v_0)$$

$$\text{ainsi } 473 \mid 220(v - v_0)$$

$$\text{or } \text{pgcd}(473, 220) = 1 \quad \text{donc } 473 \mid -v + v_0$$

$$\text{donc } \exists k \in \mathbb{Z} \mid 473k = -v + 15$$

$$v = -473k - 15$$

$$\text{ainsi } u = 7 + 220k$$

$$\text{pgcd}(a, b)$$

$$\begin{cases} u = u_0 + b/d \cdot k \\ v = v_0 + a/d \cdot k \end{cases}$$

II 1) $11u - 8v = 9$

~~$11 = 8 \times 1 + 3$~~

on remarque que 11 et 8 sont premiers entre eux
de plus on a $u_0 = 3$

$v_0 = 3$

donc $11u - 8v = 11u_0 - 8v_0$

$11(u - u_0) = 8(v - v_0)$

donc $11 \mid 8(v - v_0)$ par Gauss $11 \mid v - v_0$ donc

$\exists R \in \mathbb{Z} \mid 11R = v - 3$

$v = 11R + 3$

$u = 8R + 3$

2) $\sum_{j=1}^{10} j c_j = 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 1 + 4 \times 1 + 5 \times 0 + 6 \times 0 + 7 \times 0 + 8 c_8$
 $+ 9 \times 0 + 10 \times 9 = 11u$

$11u - 8v = 108$ où $v = c_8$

v est un chiffre et $v \neq 0$ donc $1 \leq v \leq 9$

$11u - 8v = 12 \times 9$

$v_0 = 3$

$u_0 = 12$