

Relativité

1
rel

Exercice 1

(R_L) : référentiel du laboratoire

(R_p) : référentiel de la particule

$d = 5,19 \text{ m}$ dans (R_L)

$\tau = 20 \text{ ns} = 20 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ dans (R_L)

τ' durée dans (R_p) durée propre dans (R_p)

$$\tau = \gamma \tau'$$

$$\tau' = \tau \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad v = \text{vitesse de } (R_p) / (R_L)$$

$$v = \frac{d}{\tau} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (d/\tau c)^2}} = 2$$

$$\tau' = 10 \text{ ns}$$

Par là voir il faut la accélération.

Exercice 2

$L_0 = 1 \text{ m}$ dans (R_B)

Dans (R) $L = 50 \text{ cm}$

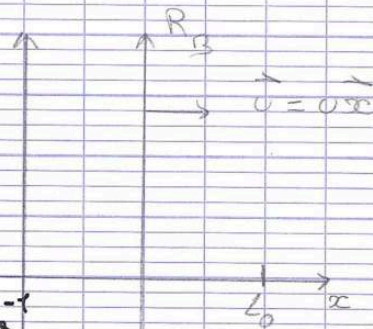
$L_{\text{propre}} = \gamma L_{\text{impropre}}$

$$L_0 = \gamma L \Rightarrow \gamma = 2 \Rightarrow v = 2,6 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1} \\ = 0,87 c$$

$$L = 99,9 \text{ cm} : \gamma = 1,001, \beta = 0,0419$$

$$= 99 \text{ cm} \quad \gamma = 1,01 \quad \beta = 0,136$$

$$= 10 \text{ cm} \quad \gamma = 10 \quad \beta = 0,995$$



Exercice 3

(R) : Terre et Lune (R') se déplace à $v = v_{\text{terre}}$
 (R') : fusée par rapport à (R)
 $d = 384\,000 \text{ km}$ dans (R)

1) T durée du trajet dans (R)

$$T = \frac{d}{v} = \frac{384\,000}{0,8c} = 1,6 \text{ sec}$$

2) Durée dans (R') propre T'

$$T' = \frac{T}{\gamma} = \frac{5}{3} = 0,963$$

3) distance Terre - Lune mesurée par le passager.
 $d = \text{distance propre}$
 $d' = \frac{d}{\gamma} = 230\,400 \text{ km}$

Exercice 4

R : Paul
 R' : Pierre, se déplace à $v = 0,992c$ par rapport à (R)

Alors
 T'_A : durée propre
 T_A : durée impropre
 $T'_A = \gamma T_A$
 $T_A = 2,5 \text{ ans}$
 $T_A = 20 \text{ ans}$

$T' = 5 \text{ ans}$
 $T = \gamma T' = 40 \text{ ans}$

Exercice 5

R' : train $v = 300 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 83,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 R : gare $d = 600 \text{ km}$ dans R

Durée du voyage dans (R) : $T = 2 \text{ h}$

Dans (R') : T' propre

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow T' &= T/\gamma = T\sqrt{1-\beta^2} \\
 &= T(1-\frac{v^2}{c^2})^{1/2} \\
 &= T(1-\frac{c^2 v^2}{2c^2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta T &= T - T' \\
 &= \frac{v^2}{2c^2} T = 0,28 \text{ ms.}
 \end{aligned}$$

Exercice 6

1) a) Par O l'allumage est simultané

b) Aux moments des émissions, A était plus proche de O' que B . La distance à parcourir pour la lumière est égale plus grande venant de B que de A . La lumière se déplace à c dans les deux cas. Si O' voit les 2 flashes en même temps c'est que le flash est parti de B avant celui qui est parti de A .
 B a allumé avant A .

		(R)	(R')
2) $\bar{L}_A$	A allume sa lampe	(ct_A, x_A)	(ct'_A, x'_A)
$\bar{L}_B$	B	(ct_B, x_B)	(ct'_B, x'_B)
$x_A = -L$			
$t_A = -\frac{L}{c} \Rightarrow ct_A = -L$		$\bar{L}_A (ct_A = -L, x_A = -L)$	
		$\bar{L}_B (x_B = L, ct_B = -L)$	
$\bar{L}_A$ et $\bar{L}_B$	simultanés dans R .		

Dans (R') :

$$\begin{cases}
 x' = \gamma(x - \beta ct) \\
 ct' = \gamma(ct - \beta x)
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 x'_A &= \gamma(x_A - \beta ct_A) \\
 &= \gamma(-L + \beta L) \\
 &= -L\gamma(1 - \beta) \\
 &= -L \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1 - \beta) &= \sqrt{(1 - \beta)(1 - \beta)} \\
 \sqrt{1 - \beta^2} &= \sqrt{(1 - \beta)(1 + \beta)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ct'_A &= \gamma(ct_A - \beta x_A) \\
 &= \gamma(-L + \beta L) \\
 &= -L\gamma(1 - \beta) \\
 &= -L \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x'_B &= \gamma(x_B - \beta ct_B) = \gamma(L + \beta L) \\
 &= L\gamma(1 + \beta) = L \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_A(ct'_A = -L, x'_A = -L)$$

$$\mathcal{E}_B(ct'_B = -L, x'_B = -L)$$

$$\mathcal{E}_A(ct'_A = -L \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}, x'_A = -L \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}})$$

$$\mathcal{E}_B(ct'_B = -L \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}, x'_B = L \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}})$$

$$\begin{aligned}
 |ct'_B| &> |ct'_A| \quad \text{Dans } (R') \\
 ct'_B &< ct'_A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ct'_B &= \gamma(ct_B - \beta x_B) \\
 &= \gamma(-L - \beta L) \\
 &= -L\gamma(1 + \beta) = -L \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}
 \end{aligned}$$

Exercice 7

R : station

R' : fusée

P = fusée dans (R')

L = station dans (R)

$$v \text{ tel que } \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{P}{L}$$

$$\mathcal{E}_1(ct_1 = 0, x_1 = 0)$$

$$\mathcal{E}_1(ct'_1 = 0, x'_1 = 0)$$

$\mathcal{E}_2$: la queue de la fusée entre dans la station

$$L_2 \begin{cases} x_2 = -L \\ ct_2 \end{cases}$$

$$L_2 \begin{cases} x_2' = -P \\ ct_2' \end{cases}$$

3
not

$$x_2' = \gamma(x_2 - \beta ct_2)$$

$$\Leftrightarrow -P = \gamma(-L - \beta ct_2)$$

$$x_2' = \gamma(-L - \beta ct_2)$$

$$P - \gamma L = 0$$

||

$$ct_2' = \gamma(ct_2 - \beta x_2) \Leftrightarrow P = \gamma L + \gamma \beta ct_2$$

$$ct_2' = \gamma(ct_2 - \beta x_2)$$

$$= \gamma(-\beta(-L))$$

$$= \gamma \beta L$$

Dans (R), $ct_2 = ct_1 = 0$ simultané

Longueur de la fusée dans (R) : P_R

$$L_{\text{propre}} = \frac{L_{\text{impropre}}}{\gamma}$$

$P_R = \frac{P}{\gamma} = L$ station et fusée ont la même longueur dans R.

Dans (R') : $ct_2' > ct_1'$ la tête est avant que la queue de la fusée même

Longueur de la station dans (R') : $L_{R'}$

$$L_{R'} = \frac{L}{\gamma} = \frac{P}{\gamma^2} < P.$$

Exercice 8

$$L_1 (ct_1 = 3, x_1 = 1)$$

$$L_2 (ct_2 = 2, x_2 = -2)$$

$$a) \exists ? (R') / ct_1' = ct_2'$$

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - \delta^2$$

$$= (ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2$$

$$= -8 < 0 \text{ intervalle de genre espace}$$

ou $\exists (R')$ dans lequel $ct_1' = ct_2'$

(R') se déplace à $\vec{v} = v \vec{x}$ / $ct' = \gamma(ct - \beta x)$

$$\begin{cases} ct'_1 = \gamma(ct_1 - \beta x_1) \\ ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta x_2) \end{cases} \quad (R)$$

$$\begin{cases} ct'_1 = \gamma(3 - \beta) \\ ct'_2 = \gamma(2 + 2\beta) \end{cases} \quad \text{Pour } R' \text{ qui se déplace à } \vec{v} = c/3 \vec{x} / (R), \quad \vec{E}_1 \text{ et } \vec{E}_2 \text{ sont simultanés}$$

b) $\exists ? (R') / x'_1 = x'_2$ (non) car $(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (x_2 - x_1)^2 < 0$

$$\begin{cases} x'_1 = \gamma(x_1 - \beta ct_1) \\ x'_2 = \gamma(x_2 - \beta ct_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'_1 = \gamma(1 - 3\beta) \\ x'_2 = \gamma(-2 - 2\beta) \end{cases}$$

$$x'_1 = x'_2 \Leftrightarrow 1 - 3\beta = -2 - 2\beta \Leftrightarrow v = 3c \quad \text{impossible}$$

c) Chronologie absolue ?

$$ct_1 = 3 \quad \text{et} \quad ct_2 = 2$$

$$ct_1 > ct_2$$

$\vec{E}_1$ postérieur à $\vec{E}_2$ dans R

$$\exists ? (R') / ct'_1 < ct'_2$$

$$3 - \beta < 2 + 2\beta$$

$$1 < 3\beta \Leftrightarrow \frac{c}{3} < v \quad \text{possible}$$

on peut avoir $\vec{E}_2$ après $\vec{E}_1$
pas de chronologie absolue

$$2) a) (\Delta s)^2 = (8-3)^2 - (4-1)^2$$

$$= 16 > 0 \quad \text{intervalle de genre temps}$$

$$\exists (R') / ct'_1 = ct'_2$$

$$ct'_1 = ct'_2$$

$$\Leftrightarrow \gamma(ct_1 - \beta x_1) = \gamma(ct_2 - \beta x_2)$$

$$\Leftrightarrow 3 - \beta = 8 - 4\beta \Leftrightarrow 3\beta = 5 \Rightarrow \beta = 5/3 > 1 \quad \text{impossible}$$

b) $\exists (R') / x_1' = x_2'$
 $x_1' = x_2'$
 $\Rightarrow x$

chronologie cbs

Exercice 9 R' se déplace à $\vec{U} = u \vec{x}$ dans R
 $\vec{v}'$ dans R' , $\vec{v}$ dans R

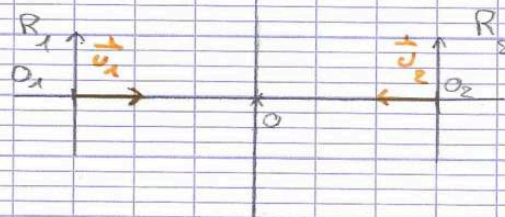
$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \quad v_x = \frac{v_x' + u}{1 + \frac{uv_x'}{c^2}}$$

a) $v_x = \frac{0,9}{1,08} c = 0,83 c$

b) $\vec{v}' = v_x' \vec{x} = -0,8 c \vec{x} \Rightarrow v_x = \frac{-0,8c + 0,1c}{1 + (0,1 \times -0,8)} = -0,76 c$

c) $v_y' = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \quad v_y = \frac{v_y' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{uv_x'}{c^2}}$
 $v_y = \frac{0,8 c \sqrt{1 - (0,1)^2}}{1 + 0} = 0,796 c$
 $\theta = 82,8^\circ$

Exercice 10



$\vec{u}_1 = u_1 \vec{x} = 0,75 c \vec{x}$
 $\vec{u}_2 = u_2 \vec{x} = -0,75 c \vec{x}$
 on cherche $\vec{v}_{21}$

$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$

$v_x' = v_{21} = \frac{u_2 - u_1}{1 - \left[\frac{u_1 u_2}{c^2} \right]}$

$(R) = (R) \quad \vec{v} = \vec{u}_2 = -0,75 c \vec{x}$

$(R') = (R_1) \quad \vec{v}' = \vec{v}_{21} = v_{21} \vec{x}$

$\vec{u} = \vec{u}_1 = 0,75 c \vec{x}$

$= \frac{-0,75c - 0,75c}{1 - \left[\frac{0,75 \times -0,75}{c^2} \right]}$

$= -0,96 c$

Exercice 11

Effet Doppler

émission $\lambda = 656 \text{ nm}$

$$v_1 = 0,5c$$

$$v_2 = 0,2c$$

Effet doppler

$$\lambda_n = \lambda_e \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta\right)$$

$\theta = 0^\circ$ si la source s'éloigne le long de l'axe

ou

$\theta = 180^\circ$ si elle s'approche

a) Longueur d'onde mesu sur Terre $v_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}$

$$\lambda = \gamma_1 \lambda_1 \left(1 + \frac{v_1}{c}\right) = \lambda_1 \frac{\left(1 + \frac{v_1}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \lambda_1 \sqrt{\frac{1 + \frac{v_1}{c}}{1 - \frac{v_1}{c}}} = \frac{656 \text{ nm}}{0,936} = 701 \text{ nm}$$

b) $\lambda_2 = \gamma_2 \lambda \left(1 - \frac{v_2}{c}\right)$

$$= \frac{\lambda \left(1 - \frac{v_2}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} = \lambda \sqrt{\frac{1 - \frac{v_2}{c}}{1 + \frac{v_2}{c}}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda = \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda_1 = 528 \text{ nm}$$

c) $\lambda_2 = \gamma_{12} \lambda_1 \left(1 + \frac{v_{12}}{c}\right)$ source s'éloigne $\theta = 0$

$$\lambda_2 = \lambda_1 \sqrt{\frac{1 + \frac{v_{12}}{c}}{1 - \frac{v_{12}}{c}}}$$

Gm cherche v_{12} $v_{12} = \frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}}$

$$v_{12} = \frac{0,5c - 0,2c}{1 - \frac{0,5c \cdot 0,2c}{c^2}} = 0,3c$$

$$\lambda_2 = \lambda \sqrt{\frac{1 + \frac{v_{12}}{c}}{1 - \frac{v_{12}}{c}}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda_1 = 528 \text{ nm}$$

$$(R) = (R)$$

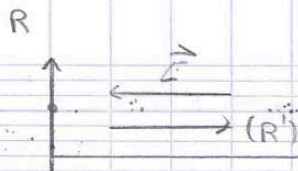
$$(R_1) = (R_2)$$

$$v = v$$

$$v = v$$

$$v = v$$

Exercice 12



$$\begin{aligned} \vec{a}' &= a' \vec{x}' \\ a' &= \gamma a \end{aligned}$$

$$d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

1) (R), (R') (R') : $\vec{u} = u \vec{x} \quad / (R)$

$$\vec{v} \text{ dans } (R) = v_x \vec{x}$$

$$\vec{v}' \text{ dans } (R') = v'_x \vec{x}'$$

$$\vec{a} = a_x \vec{x}$$

$$\vec{a}' = a'_x \vec{x}'$$

$$a'_x = a_x \frac{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}{(1 - uv_x/c^2)^3}$$

$$a = a_x$$

$$a' = a'_x$$

Transformée inverse : $a_x = a'_x \frac{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}{(1 + uv'_x/c^2)^3}$

$$\Rightarrow a_x = a'_x \frac{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}{(1+0)^3} = a'_x \frac{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}{(1 + \frac{uv'_x}{c^2})^3}$$

$$a = a' (1 - v^2/c^2)^{3/2}$$

$$dv = a' (1 - v^2/c^2)^{3/2} dt$$

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$$

$$d\gamma = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{2v}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} dv$$

$$d\gamma = \frac{v}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} dv$$

$$dv = \frac{c^2}{v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} d\gamma \quad \Rightarrow \quad a' dt = \frac{c^2}{v} d\gamma$$

il faut éliminer v

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \gamma$$

Quand $t \rightarrow +\infty$
 $x(t) \rightarrow \frac{c^2}{a'} \frac{a'^t}{c} = ct$ équation d'un photon.

$$4) a' = \frac{Rc^2}{L}, \quad \gamma \propto x(t) = \frac{c^2}{a'} (\gamma(t) - 1)$$

$$\gamma(t) = 1 + \frac{a' x(t)}{c^2}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{(1 + (\frac{a' x}{c^2})^2)^2}}$$

$$a' = \frac{Rc^2}{L} \Leftrightarrow \frac{a' x}{c^2} = \frac{Rx}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{(1 + Rx/L)^2}}$$

$$5) x \gg L \quad \frac{Rx}{L} \gg 1 \Leftrightarrow (1 + \frac{Rx}{L})^2 \approx (\frac{Rx}{L})^2$$

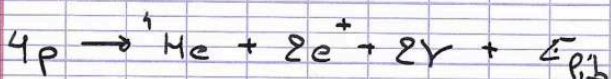
$$\frac{v}{c} \approx \sqrt{1 - (\frac{L}{Rx})^2} \quad \text{on } L/Rx \ll 1$$

$$\frac{v}{c} \approx 1 - \frac{L^2}{2R^2 x^2}$$

$$x = 3 \text{ m}, \quad \frac{v}{c} \approx 1 - 5 \cdot 10^{-5} \quad (v = 0,99995 c)$$

$$x = 3 \text{ km}, \quad \frac{v}{c} \approx 1 - 5 \cdot 10^{-14}$$

Exercice 13



$$1) \bar{E}_{Av} = 4 \times m_p c^2$$

$$\bar{E}_{Ap} = m_{\text{He}} c^2 + 2m_e c^2 + \bar{E}_{\text{cin p,b}}$$

$$\bar{E}_{Av} = \bar{E}_{Ap}$$

$$\Leftrightarrow \bar{E}_{p,b} = 4m_p c^2 - m_{\alpha} c^2 - 2m_e c^2 = 21,8 \text{ MeV}$$

$$2) P = 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W } (\text{J} \cdot \text{s}^{-1})$$

$$\Delta m \rightarrow \Delta E = \Delta m \times c^2$$

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta m c^2}{\Delta t}$$

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta M \times c^2}{\Delta t}$$

$$\Delta E = 3,8 \times 10^{26} \text{ J}$$

$$\Delta t = 1 \text{ s}$$

$$\Delta m = \frac{P \Delta t}{c^2}$$

par seconde : $\Delta m = 1,2$ millions de tonnes

$$\begin{aligned} \text{par siècle} : \Delta M &= \Delta m \times 100 \times 365,25 \times 86400 \\ &= 1,33 \cdot 10^{13} \text{ kg} \end{aligned}$$

Exercice 14

1) $E = 185 \text{ MeV}$

E_T pour 1g

$m_u = 235 u$

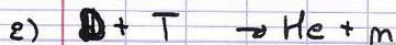
$u = \frac{1g}{N_A}$

N : nb de noyau d'Uranium dans 1g.

$$N = \frac{1g}{m_u} = \frac{1}{235 u} = \frac{N_A}{235} = 2,6 \cdot 10^{24} \text{ noyaux}$$

$$E_T = N \times E = 1,8 \times 10^{23} \text{ MeV} = 4,8 \cdot 10^{23} \text{ eV}$$

$$= 7,7 \cdot 10^{10} \text{ J}$$



$\Delta E = \Delta m c^2$

$$= (m_D + m_T - m_{\alpha} - m_n) c^2$$

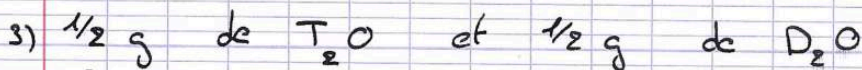
$$= (0,017722 u) c^2$$

1g d'Uranium $\rightarrow 4,8 \cdot 10^{23} \text{ MeV}$

$$\Delta E = 0,017722 \times \frac{1g}{N_A} \times c^2$$

$$= 2,65 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

$$= 16,55 \text{ MeV.}$$



Il faut déterminer le nombre de noyaux de T dans $\frac{1}{2} \text{ g}$ de T_2O

$$N = \frac{0,5g}{22,03g \cdot \text{mol}^{-1}} \times 2 = 2,73 \cdot 10^{22} \text{ noyaux.}$$

$E_T = N \times \Delta E$

$$= 2,73 \cdot 10^{22} \times 16,55 \text{ MeV}$$

$$= 1,5 \times 10^{23} \text{ MeV}$$

$$= 7,83 \times 10^{10} \text{ J} \approx 3,14 \text{ tonnes charbon.}$$

Problème 1 - Électron confiné dans une boîte 1D

unidimensionnelle

Partie 1 : Raisonnements qualitatifs

1) Équation aux valeurs propres

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi''(x) + V(x) \varphi(x) = E \varphi(x)$$

Si $x < 0$ ou $x > L$ on a $V(x) = +\infty$
alors E serait ∞ . Or l'énergie d'une particule
ne peut être ∞ .

2) $0 < x < L \Rightarrow V(x) = 0$

$$\begin{aligned} E &= E_c + V(x) \\ &= \frac{1}{2} m v^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow E \geq 0 \end{aligned}$$

3) Heisenberg $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

On suppose que $p=0$

$$\Rightarrow \Delta p = 0$$

$$E_c = \frac{p^2}{2m} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p}$$

Partie 2 : État stationnaires et énergie associée

$\Delta x = \infty$ donc x n'est
pas déterminée hors
elle est confinée dans
la boîte.

4) Équations aux valeurs propres

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi''(x) + V(x) \varphi(x) = E \varphi(x)$$

$$\varphi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi(x) = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} > 0$$

5) $\varphi(x) = B \cos(kx) + A \sin(kx)$

6) en $x=0 \Rightarrow \varphi(0) = 0 = B \cos(0) + A \sin(0)$
 $\Rightarrow B = 0$

en $x=L \Rightarrow \varphi(L) = 0 = A \sin(kL)$

$$(A \neq 0) \quad R L = m \pi$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{m \pi}{L}$$

$$\varphi_m(x) = A \sin\left(\frac{m \pi}{L} x\right)$$

$$\text{énergie } \frac{m \pi}{L} = \frac{\sqrt{2m E_m}}{\hbar}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2 \pi^2 \hbar^2}{2m L^2} = E_m$$

$$1) \quad E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m L^2} = 6,02 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

$$= 37,62 \text{ eV}$$

$$6,02 \cdot 10^{-26} \text{ J}$$

$$E_2 = 4 E_1 \quad 37,62 \cdot 10^{-9} \text{ eV}$$

$$1 \text{ A}$$

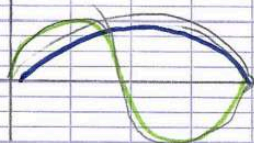
$$2) \quad \Psi_1(x, t) = \varphi_1(x) e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t}$$

$$= A \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \exp\left(-i \frac{E_1}{\hbar} t\right)$$

$$\int_0^L |\varphi_1(x)|^2 dx = 1 \Leftrightarrow A^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi}{L} x\right) dx$$

$$A^2 = \frac{2}{L} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}} e^{i\delta}$$

10)



Partie 3 Probabilité de présence

$$P_m(x, t) = |\Psi_m(x, t)|^2$$

$$\text{on } \Psi_m(x, t) = \varphi_m(x) \exp\left(-i \frac{E_m}{\hbar} t\right)$$

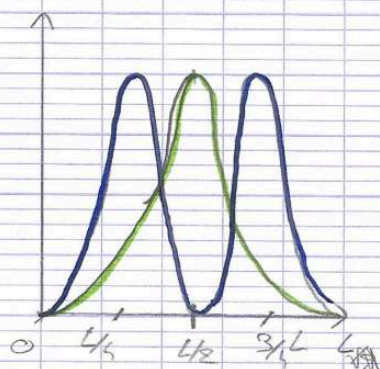
$$|\Psi_m(x, t)|^2 = |\varphi_m(x)|^2 \left| \exp\left(-i \frac{E_m}{\hbar} t\right) \right|^2$$

$$= |\varphi_m(x)|^2$$

$$= P_m(x)$$

$$12) |\varphi_1(x)|^2 = \frac{2}{L} \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$|\varphi_2(x)|^2 = \frac{2}{L} \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$



$$\begin{aligned} 13) \int_{L/3}^{2L/3} \rho_1(x) dx &= \int_{L/3}^{2L/3} \frac{2}{L} \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_{L/3}^{2L/3} \frac{1 - \cos(2\pi x/L)}{2} dx \\ &= \frac{2}{L} \left[\frac{x}{2} - \frac{L}{4\pi} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right]_{L/3}^{2L/3} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} = 0,61 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{L/3}^{2L/3} \rho_2(x) dx &= \frac{2}{L} \int_{L/3}^{2L/3} \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \left[\frac{x}{2} - \frac{L}{8\pi} \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right) \right] \\ &= \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = 0,20 \end{aligned}$$

Partie 4: Évolution temporelle de la fonction d'onde

$$\begin{aligned} 14) \psi(x, t=0) &= \frac{\sqrt{3}}{3} \varphi_1(x) - \frac{\sqrt{3}}{3} \varphi_2(x) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \varphi_1(x) \exp\left(-i \frac{E_1 t}{\hbar}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \varphi_2(x) \exp\left(-i \frac{E_2 t}{\hbar}\right) \end{aligned}$$

$$15) P(E_1) = \frac{1}{3} \quad P(E_2) = \frac{2}{3}$$

16) Non, car l'énergie n'est pas déterminée

$$17) \rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2$$

$$\begin{aligned}
&= \psi^*(x, t) \psi(x, t) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \psi_1^* \psi_1 + \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{3 \times 3} \psi_3^* \psi_3 - \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{3 \times 3} (\psi_1^* \psi_3 + \psi_3^* \psi_1) \\
&= \frac{1}{3} \varphi_1^2(x) + \frac{2}{3} \varphi_3^2(x) - \frac{\sqrt{2}}{3} (\varphi_1(x) \varphi_3(x) \exp(-i(\epsilon_3 - \epsilon_1)t/\hbar) + \exp(i(\epsilon_3 - \epsilon_1)t/\hbar)) \\
&= \frac{1}{3} \varphi_1^2(x) + \frac{2}{3} \varphi_3^2(x) - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos\left(\frac{\epsilon_3 - \epsilon_1}{\hbar} t\right) \\
&= \rho(x, t)
\end{aligned}$$

$$18) \psi(x, t) = \frac{\sqrt{3}}{3} \varphi_1(x) e^{-i\epsilon_1 t/\hbar} - \frac{\sqrt{3}}{3} \varphi_3(x) e^{-i\epsilon_3 t/\hbar}$$

$$\Rightarrow \forall t > t_0 \quad \psi(x, t) = \varphi_3(x) e^{-i\epsilon_3 t/\hbar}$$

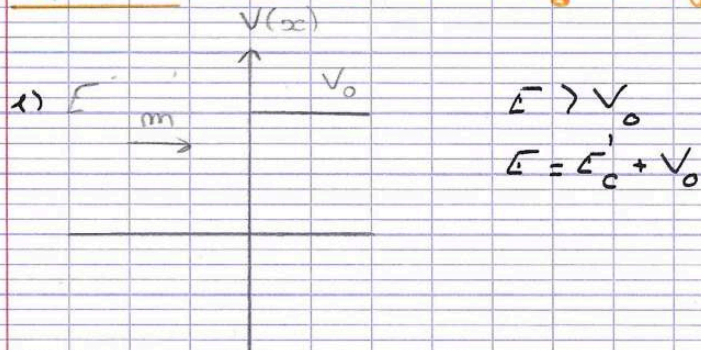
puisque à t_0 on trouve l'énergie ϵ_3

Puits 5 - Analogie avec l'optique. Détermination simple des énergies quantifiées du puits infini.

$$\begin{aligned}
15) \quad \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{2L}{n} & \epsilon &= \frac{p^2}{2m} \\
p &= \frac{mh}{2L} \\
\epsilon &= \frac{(mh/2L)^2}{2m} = \frac{m^2 h^2}{8L^2 m} = \frac{m^2 h^2 \pi^2}{8mL^2}
\end{aligned}$$

Problème 2 - Marche de potentiel

Partie 1: Cas où $E > V_0$: réflexion partielle



Équation aux valeurs propres

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi''(x) + V(x) \varphi(x) = E \varphi(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \varphi''(x) + E(x) \varphi(x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi(x) = 0$$

On pose $K_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ avec $K_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$$\varphi''(x) + K_1^2 \varphi(x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = A e^{iK_1 x} + B e^{-iK_1 x}$$

$$\psi(x, t) = \varphi(x) e^{-iEt/\hbar}$$

$$= (A e^{iK_1 x} + B e^{-iK_1 x}) e^{-iEt/\hbar}$$

incidente réfléchi

$$2) \frac{\hbar^2}{2m} \varphi''(x) + (E - V_0) \varphi(x) = 0$$

$$\varphi''(x) + \frac{(E - V_0) 2m}{\hbar^2} \varphi(x) = 0$$

On pose $K_2^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}$ avec $K_2 \geq 0$ car $E > V_0$

$$\varphi(x) = (C e^{iK_2 x} + D e^{-iK_2 x}) e^{-iEt/\hbar}$$

$$\psi(x, t) = (C e^{i k_2 x} + D e^{-i k_2 x}) e^{-i \omega t / \hbar}$$

$$= C e^{i(k_2 x - \omega t / \hbar)} + D e^{-i(k_2 x + \omega t / \hbar)}$$

onde incidente onde refletida

$x = +\infty \Rightarrow$ impossible

Donc $D = 0$ donc $\psi(x, t) = C e^{i k_2 x} e^{-i \omega t / \hbar} \quad (x > 0)$

3) Continuité de ψ en $x = 0$ $\psi(x < 0) = A e^{i k_1 x} + B e^{-i k_1 x}$
 $\Rightarrow A + B = C$ ① $\psi(x > 0) = C e^{i k_2 x}$

Continuité de $\frac{d\psi}{dx}$ en 0 $\psi'(x < 0) = i k_1 (A e^{i k_1 x} - B e^{-i k_1 x})$
 $\psi'(x > 0) = i k_2 C e^{i k_2 x}$

$\Rightarrow k_1 (A - B) = k_2 C$ ②

$B = C - A$

$k_1 (A - C + A) = k_2 C$

$2k_1 A = C (k_1 + k_2)$

$C = \frac{2k_1 A}{k_1 + k_2}$

$k_1 A = k_2 C + k_1 B$

$k_1 A = k_2 (A + B) + k_1 B$

$A(k_1 - k_2) = B(k_1 + k_2)$

$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A$

4) $\mathcal{J} = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)$

$\mathcal{J}_i = \frac{\hbar}{2mi} \left[(A e^{-i(k_1 x - \omega t / \hbar)}) i k_1 A e^{i(k_1 x - \omega t / \hbar)} \right.$
 $\left. - (A e^{i(k_1 x - \omega t / \hbar)}) A (-i k_1) e^{-i(k_1 x - \omega t / \hbar)} \right]$

$= \frac{\hbar}{2mi} (i k_1 A^2 + i k_1 A^2)$

$= \frac{\hbar}{m} k_1 A^2$

$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A, \quad C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A$

$\mathcal{J}_r = -\frac{\hbar}{m} k_1 B^2$

$$\begin{aligned}
 5) \quad T &= \frac{\mathcal{T}_r}{\mathcal{T}_i} = \frac{k_2}{k_1} \frac{C^2}{A^2} = \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{2k_1}{k_1 + k_2} \right)^2 \\
 &= \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}
 \end{aligned}$$

$$R = \left| \frac{\mathcal{T}_r}{\mathcal{T}_i} \right| = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$$

$$\begin{aligned}
 R + T &= \frac{4k_1 k_2 + k_1^2 - 2k_1 k_2 + k_2^2}{(k_1 + k_2)^2} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

c) Classiquement les particules devraient toutes passer mais quantiquement elles ne passent pas toutes il y a réflexion.

Partie 2 - Cas où $E < V_0$: réflexion totale

$$1) \quad \varphi(x) = A e^{i k_1 x} + B e^{-i k_2 x}$$

$$2) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \varphi''(x) + V_0 \varphi(x) = E \varphi(x)$$

$$\Rightarrow \varphi''(x) - \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E) \varphi(x) = 0 \quad \text{On pose } \alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = C e^{-\alpha x} + D e^{\alpha x}$$

$$3) \quad p(x) = |\varphi(x)|^2 = |C|^2 e^{-2\alpha x} + |D|^2 e^{2\alpha x} + 2CD$$

ou on pourrait justifier sur le fait que $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
donc $D = 0$

$$4) \begin{cases} A+B=C \\ i\hbar k_x(A-B) = -\alpha C \end{cases} \quad \text{en } 0$$

$$\begin{cases} \alpha(1) + 2 \quad \alpha(A+B) + i\hbar k_x(A-B) = 0 \\ i\hbar k_x(2) \quad \hbar k_x A = C(i\hbar k_x - \alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -A \frac{\alpha + i\hbar k_x}{i\hbar k_x - \alpha} \\ C = 2A \frac{i\hbar k_x}{i\hbar k_x - \alpha} \end{cases}$$

$$5) J_i = \frac{\hbar k_x |A|^2}{m}$$

$$\varphi_t = C e^{-\alpha x} \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| = -\alpha \varphi_t$$

$$J_R = -\frac{\hbar k_x |B|^2}{m}$$

$$J_T = \frac{-\hbar}{2m_1} (C^* C(-\alpha) - C C^*(-\alpha)) = 0$$

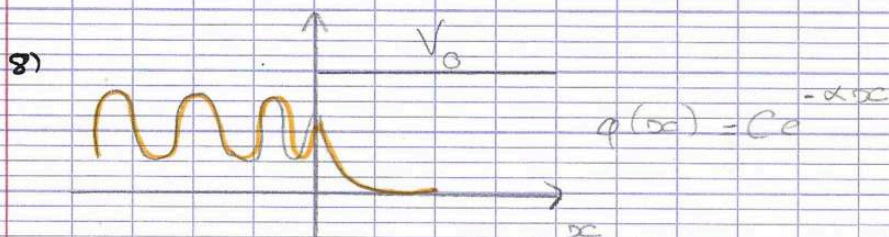
$$R = \left| \frac{J_R}{J_i} \right| = \frac{\alpha^2 + k_x^2}{\alpha^2 + k_x^2} = 1$$

$$T = \left| \frac{J_T}{J_i} \right| = 0$$

6) Non car quand $x > 0$ et $T=0$ il ne devrait pas y avoir de particule $\Rightarrow$ incohérence

$$7) \begin{aligned} \rho(x) &= |\varphi(x)|^2 \\ &= |C e^{-\alpha x}|^2 \\ &= C^2 e^{-2\alpha x} \end{aligned}$$

$$P(x > 0, t) = \int_0^{+\infty} \rho(x) dx = C^2 \left[-\frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha x} \right]_0^{+\infty} = \frac{C^2}{2\alpha}$$



$$\psi(x, t) = \varphi(x) e^{-\frac{E}{\hbar} t} = C e^{-\alpha x} e^{-i \frac{E}{\hbar} t} = \underbrace{C e^{-\alpha x}}_{\text{Amplitude}} e^{-i \omega t}$$

Problème 3 : Microscopie à effet tunnel - Barrière de potentiel

Partie 1 : Traitement théorique de l'effet tunnel

1) $\varphi_1(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad x < 0$ voir problème 1 et 2.
 $\uparrow$ φ_i $\uparrow$ φ_n

$\varphi_2(x) = C e^{-\alpha x} + D e^{\alpha x} \quad 0 < x < a$

$\varphi_3(x) = \cancel{C} e^{ikx} + \cancel{F} e^{-ikx} \quad x > a$
 $\uparrow$ φ_t

2) Continuité de φ et φ' en $x=0$

$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) \quad x=0$

$A + B = C + D \quad 1$

$\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0)$

$i k A - i k B = -\alpha C + \alpha D \quad 2$

$\varphi_2(a) = \varphi_3(a)$

$C e^{-\alpha a} + D e^{\alpha a} = \cancel{C} e^{ik a}$ 3

$-\alpha C e^{-\alpha a} + \alpha D e^{\alpha a} = i k \cancel{C} e^{ik a}$ 4

3)
$$\begin{cases} A + B = C + D & 1 \\ i k A - i k B = \alpha(D - C) & 2 \\ C e^{-\alpha a} + D e^{\alpha a} = \cancel{C} e^{ik a} & 3 \\ -\alpha C e^{-\alpha a} + \alpha D e^{\alpha a} = i k \cancel{C} e^{ik a} & 4 \end{cases}$$

$\alpha L_3 - L_4 \Leftrightarrow 2\alpha C e^{-\alpha a} = (\alpha - i k) \cancel{C} e^{ik a}$
 $C = \frac{\alpha - i k}{2\alpha} \cancel{C} e^{a(i k + \alpha)}$

$\alpha L_3 + L_4 \Leftrightarrow 2\alpha D e^{\alpha a} = \cancel{C} e^{ik a} (\alpha + i k)$
 $D = \frac{(\alpha + i k)}{2\alpha} \cancel{C} e^{a(i k - \alpha)}$

$$ikL_1 + L_2 \Leftrightarrow 2ikA = ik(C+D) + \alpha(D-C)$$

$$2ikA = C(ik-\alpha) + D(\alpha+ik)$$

$$\Leftrightarrow 2ikA = \frac{(\alpha-ik)}{2\alpha} \mathcal{L} e^{\alpha(ik+\alpha)} (ik-\alpha)$$

$$+ \frac{\alpha+ik}{2\alpha} \mathcal{L} e^{\alpha(ik-\alpha)} (\alpha+ik)$$

$$\Leftrightarrow 2ikA = \frac{\mathcal{L} e^{ik\alpha}}{2\alpha} [-(\alpha-ik)^2 e^{\alpha\alpha} + (\alpha+ik)^2 e^{-\alpha\alpha}]$$

$$\Leftrightarrow 4ik\alpha A = \mathcal{L} e^{ik\alpha} [(\alpha^2 - k^2 + 2ik\alpha) e^{-\alpha\alpha} + (-\alpha^2 + k^2 + 2i\alpha k) e^{\alpha\alpha}]$$

$$= \mathcal{L} e^{ik\alpha} [(k^2 - \alpha^2)(e^{\alpha\alpha} - e^{-\alpha\alpha}) + 2i\alpha k (e^{\alpha\alpha} + e^{-\alpha\alpha})]$$

$$= \mathcal{L} e^{ik\alpha} [2(k^2 - \alpha^2) \sinh(\alpha\alpha) + 4i\alpha k \cosh(\alpha\alpha)]$$

$$\Rightarrow \frac{\mathcal{L}}{A} = \frac{2ik\alpha e^{-ik\alpha}}{(k^2 - \alpha^2) \sinh(\alpha\alpha) + 2i\alpha k \cosh(\alpha\alpha)}$$

$$4) J_i = \frac{\hbar k}{m} |A|^2$$

$$J_f = \frac{\hbar k}{m} |\mathcal{L}|^2$$

$$T = \frac{J_f}{J_i} \left| \frac{\mathcal{L}}{A} \right|^2$$

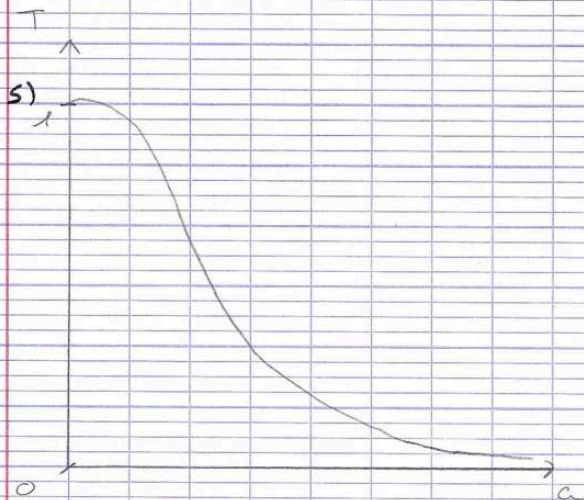
$$= \frac{4\alpha^2 k^2}{(k^2 - \alpha^2)^2 \sinh^2(\alpha\alpha) + 4\alpha^2 k^2 \cosh^2(\alpha\alpha)}$$

$$= \frac{4\alpha^2 k^2}{(k^4 + \alpha^4 - 2\alpha^2 k^2) \sinh^2(\alpha\alpha) + 4\alpha^2 k^2 (1 + \sinh^2(\alpha\alpha))}$$

$$= \frac{4\alpha^2 k^2}{(k^2 + \alpha^2)^2 \sinh^2(\alpha\alpha) + 4\alpha^2 k^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha^2 + k^2}{2\alpha k} \right)^2 \sinh^2(\alpha\alpha)}$$

$$\alpha = \frac{2m\mathcal{L}}{\hbar^2}, \quad k = \frac{2m(V_0 - \mathcal{L})}{\hbar^2}$$

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{1 + \left[\frac{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}{\frac{2}{\hbar^2} \sqrt{2m\epsilon} \sqrt{2m(V_0 - \epsilon)}} \right]^2} \sinh^2(\alpha a) \\
 &= \frac{1}{1 + \left[\frac{V_0}{2\sqrt{\epsilon(V_0 - \epsilon)}} \right]^2} \sinh^2(\alpha a) \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4\epsilon(V_0 - \epsilon)}} \sinh^2(\alpha a)
 \end{aligned}$$



Partie 2 : Application : microscopie à effet tunnel (STM)

$$\epsilon = 2 \text{ eV}$$

$$V_0 = -4 \text{ eV}$$

$$V_0 = 4 \text{ eV}$$

$$1) \quad T = \frac{1}{1 + \frac{16}{4 \times 2 \times 2} \sinh^2(\alpha a)} = \frac{1}{1 + \sinh^2(\alpha a)}$$

$$2) \quad \alpha a \gg 1$$

$$\sinh^2(\alpha a) = \frac{e^{2\alpha a} - 2 + e^{-2\alpha a}}{4} = \frac{e^{2\alpha a}}{4}$$

$$T \approx \frac{1}{1 + e^{\frac{2\alpha a}{\hbar}}} = 4e^{-2\alpha a}$$

1) $\bar{E} = 2 \text{ eV}$

$V_0 = -4 \text{ eV}$

$V_0 = 4 \text{ eV}$

$T \approx \frac{1}{1 + 16}$

3) $\alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - \bar{E})}}{\hbar}$

$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

$V_0 - \bar{E} = 2 \text{ eV} = 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$

$\hbar = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{2\pi} \text{ J.s}$

$\alpha = 7,21 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1} = 0,721 \text{ \AA}^{-1}$

$\sinh(\alpha a) = \frac{e^{\alpha a} + e^{-\alpha a}}{2} \approx \frac{e^{\alpha a}}{2}$

$e^{\alpha a} > 100 e^{-\alpha a}$

$e^{2\alpha a} > 100$

$2\alpha a > \ln(100)$

$a > \frac{\ln(100)}{2\alpha}$

$a > 3,2 \text{ \AA}$

4) $i \propto T$

$i \propto 4e^{-2\alpha a}$

$i_{c-h} \propto 4e^{-2\alpha(c-h)} = 1000 i_a$

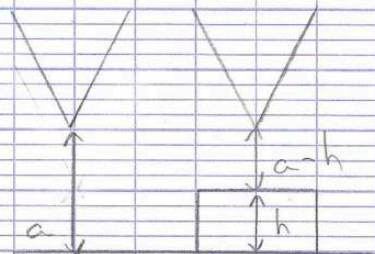
$\frac{4e^{-2\alpha(c-h)}}{4e^{-2\alpha a}} = 1000$

$\frac{e^{-2\alpha(c-h)}}{e^{-2\alpha a}} = 1000$

$\Rightarrow e^{-2\alpha(c-h)} = 1000 e^{-2\alpha a}$

$2\alpha h = \ln(1000)$

$h = \frac{\ln(1000)}{2\alpha} = 4,8 \text{ \AA}$



$$s) \quad i_{a-h_{\min}} = 1,05 i_B$$

$$e^{2\alpha h_{\min}} = 1,05$$

$$h_{\min} = 0,035 \text{ \AA} < \text{taille d'un atome}$$

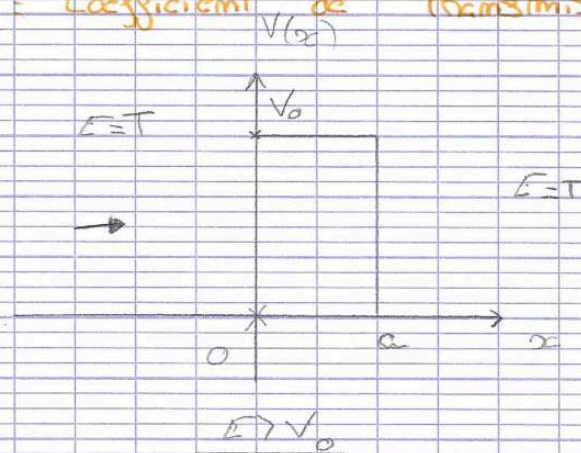
$$R = \frac{1,22 \lambda}{m \sin i}$$

$$\lambda \sim 0,5 \mu\text{m}$$

$$R = 5000 \text{ \AA}$$

Problème 4: Barrière de potentiel - Longeurs de résonance

Partie 1: Coefficient de transmission de la barrière



$$\begin{aligned}
 x < 0 & \quad \varphi(x) = A e^{i k_1 x} + B e^{-i k_1 x} \\
 0 < x < a & \quad \varphi(x) = C e^{i k_2 x} + D e^{-i k_2 x} \\
 & \quad \vdots \\
 & \quad \text{comme problème 3}
 \end{aligned}$$

Partie 2: Étude des longueurs de résonance

$$(1) \left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{2k_1 k_2} \right)^2 = \left(\frac{\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}{2 \frac{\sqrt{2mE} \sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar^2}} \right)^2$$

$$= \left(\frac{2mV_0}{4m \sqrt{E(E - V_0)}} \right)^2$$

$$= \frac{V_0^2}{4E(E - V_0)}$$

1) équations A, B, C, D, E

$$T = \left| \frac{E}{A} \right|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{2k_1 k_2} \right)^2 \sin^2(k_1 a)}$$

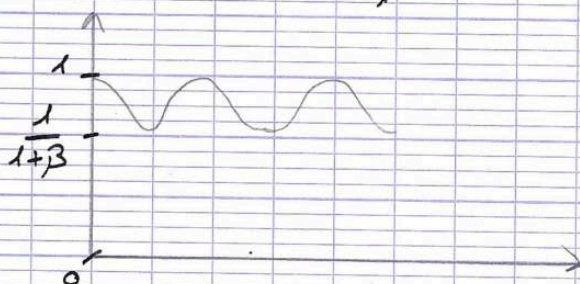
$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(E - V_0)} \sin^2(k_2 a)}$$

12) $0 < T \leq 1$

$$T = \frac{1}{1 + \beta \sin^2(k_2 a)}$$

Quand a varie, T oscille entre $T_{\max} = 1$
(quand $\sin(k_2 a) = 0$)

et $T_{\min} = \frac{1}{1 + \beta}$ quand $\sin(k_2 a) = \pm 1$



13) a_m tel que $T = 1$
 $\sin^2(k_2 a) = 0 \Leftrightarrow k_2 a = m\pi$
 $a_m = m \frac{\pi}{k_2} = \frac{m\pi h}{\sqrt{2m(E - V_0)}}$

Partie 3: Lien avec la longueur d'onde de la particule

$$14) \lambda = \frac{h}{p}$$

$$15) \mathcal{E} = T + V_0 = \frac{p^2}{2m} + V_0$$

$$p^2 = 2m(\mathcal{E} - V_0)$$

$$p = \sqrt{2m(\mathcal{E} - V_0)}$$

$$16) a_m = \frac{m\pi h}{p} = \frac{m\pi h}{2\pi p} = \frac{mh}{2p} = \frac{m}{2} \lambda$$

$$2a_m = m\lambda$$

→ La longueur d'onde est un multiple de la taille de la cavité.

Problème 5: Puits de potentiel - États électroniques localisés

$$1) -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + V(x) \varphi(x) = E \varphi(x)$$

Région 1 : $x < -a/2$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \varphi''(x) + E \varphi(x) = 0$$

$$\varphi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi(x) = 0$$

$$\varphi''(x) - \rho^2 \varphi(x) = 0 \quad \text{avec} \quad -\rho^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

idem en région 3.

En région 2 : $-a/2 < x < a/2$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi'' - V_0 \varphi = E \varphi$$

$$\Leftrightarrow \varphi'' + \frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2} \varphi = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi'' + K^2 \varphi = 0 \quad \text{avec} \quad K^2 = \frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}$$

2) $x < -a/2$

$$\varphi_1(x) = \underline{A e^{\rho x}} + \underline{C e^{-\rho x}}$$

on a év. - divergence quand $x \rightarrow -\infty$
maximale

pas de propagation car il y a conservation de l'énergie donc $E < 0$ on si $x < -a/2$
on a $E_p = 0$ donc $E_c < 0 \Rightarrow v \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

$$\varphi_3(x) = \underline{A e^{\rho x}} + \underline{C e^{-\rho x}}$$

diverge

par symétrie $C = A$.

$$\varphi_2(x) = B \cos(kx) + D \sin(kx)$$

$$4) \rho(x) = |\varphi_3(x)|^2 = |C e^{-\rho x}|^2 = C^2 e^{-2\rho x}$$

$$\rho(x > a/2, 1) = \int_{a/2}^{+\infty} \rho(x) dx$$

$$= |C|^2 \int_{a/2}^{+\infty} e^{-2\rho x} dx$$

$$= |C|^2 \frac{1}{2\rho} e^{-\rho a} = |C|^2 \frac{\hbar}{2\sqrt{2m|E|}} \exp\left(-\frac{a\sqrt{2m|E|}}{\hbar}\right)$$

Cela ne dépend pas de la "profondeur" du puit mais de l'énergie de la particule.

Partie 1 : Recherche des états stationnaires permis

$$5) \text{ Conditions aux limites } \begin{cases} \varphi_p(a/2) = \varphi_3(a/2) \\ \varphi'_p(a/2) = \varphi'_3(a/2) \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} B \cos(ka/2) = C e^{-\rho a/2} \\ B \sin(ka/2) \rho = C \rho e^{-\rho a/2} \end{cases}$$

$$(2)/(1) : k \tan(k \frac{a}{2}) = \rho \Rightarrow \tan(k \frac{a}{2}) = \frac{\rho}{k} \quad (*)$$

$$6) \tan\left(\frac{a\sqrt{2m(E+V_0)}}{2\hbar}\right) = \sqrt{\frac{-E}{E+V_0}}$$

$$\Rightarrow 1 + \tan^2(ka/2) = 1 + \frac{\rho^2}{k^2} = \frac{k^2 + \rho^2}{k^2}$$

$$= \frac{2m(E+V_0) - 2mE}{\hbar^2 k^2} = \frac{2mV_0}{\hbar^2 k^2} = \frac{K_0^2}{k^2}$$

tan

$$8) \tan(R_c/2) = \rho/R$$

$$1 + \tan^2(R_c/2) = 1 + (\rho/R)^2$$

$$1 + \tan^2(\alpha) = \left(\frac{\alpha_0}{\alpha}\right)^2$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \left(\frac{\alpha_0}{\alpha}\right)^2$$

$$\cos^2 \alpha = (\alpha/\alpha_0)^2 \Leftrightarrow |\cos \alpha| = \frac{\alpha}{\alpha_0} > 0 \text{ et } \tan \alpha > 0$$

3)



car 0 sont des fausses solutions
car $\tan \alpha < 0$ or $\tan \alpha = \frac{\rho}{R} > 0$.

10) • V_0 augmente donc α_0 augmente donc la pente diminue et ainsi le nombre d'état stationnaire augmente

• $\frac{\alpha}{\alpha_0}$ est positif donc $\frac{\alpha}{\alpha_0}$ coupe toujours $|\cos \alpha|$. Donc il existe toujours au moins un état stationnaire

$$\alpha = \frac{a\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar} \quad \alpha_0 = \frac{a\sqrt{2mV_0}}{\hbar}$$

dépend donc de la profondeur du puit

$$\alpha_1 = \frac{a\sqrt{2m(E_1+V_0)}}{\hbar}$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{(\alpha_1 \hbar)^2}{2am} - V_0$$

Partie 2 : Recherche des énergies des états stationnaires impaires

$$11) \cos x = \frac{a}{2}$$

$$\varphi_1(a/2) = \varphi_3(a/2)$$

$$D \sin(Ra/2) = C e^{-p a/2}$$

$$R D \cos(Ra/2) = -p C e^{-p a/2}$$

$$\frac{R}{p} = \frac{C e^{-p a/2}}{D \cos(Ra/2)} = \tan(Ra/2)$$

$$\begin{aligned} 12) \tan\left(\frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar} \frac{a}{2}\right) &= -\frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\sqrt{2m|E|}} \\ &= -\frac{\sqrt{E+V_0}}{\sqrt{-E}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13) \text{ Montrons que } 1 + \frac{1}{\tan^2(Ra/2)} &= 1 + \frac{1}{\left(-\frac{R}{p}\right)^2} \\ &= 1 + \frac{p^2}{R^2} \\ &= 1 + \frac{|E|}{E+V_0} = 1 - \frac{E}{E+V_0} \\ &= \frac{V_0}{E+V_0} \end{aligned}$$

$$\text{On } \frac{R_0}{R} = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\sqrt{2m(E+V_0)}} = \sqrt{\frac{V_0}{E+V_0}}$$

$$1 + \frac{1}{\tan^2(Ra/2)} = \frac{R_0^2}{R^2}$$

$$15) \quad \alpha = \frac{ka}{2} \quad \alpha_0 = \frac{k_0 a}{2}$$

$$1 + \frac{1}{\cos^2(\alpha)} = \frac{1}{\sin^2(\alpha)} = \frac{\alpha_0^2}{4} \Rightarrow \frac{1}{|\sin(\alpha)|} = \frac{\alpha_0}{2}$$

$$\Rightarrow |\sin(\alpha)| = \frac{2}{\alpha_0}$$

