Relativité

Exercice 1

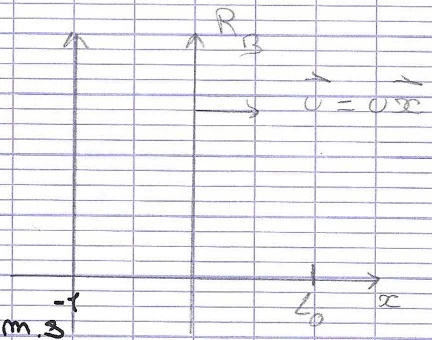
(R_L) : référentiel du laboratoire
(R_p) : référentiel de la particule

$d = 5,19$ m dans (R_L)
$\tau = 20$ ns $= 20.10^{-9}$ s dans (R_L)
τ' durée dans (R_p) durée propre dans (R_p)
$\tau = \gamma \tau'$
$\tau' = \tau \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ v = vitesse de $(R_p) / (R_L)$

$v = \frac{d}{\tau}$ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(d/\tau c)^2}} = 2$

$\tau' = 10$ ~~ns~~ ns
Pour la voir il faut la accélérer.

Exercice 2



$L_0 = 1$m dans (R_B)
Dans (R) $L = 50$ cm
$L_{propre} = \gamma L_{impropre}$
$L_0 = 2L \Rightarrow \gamma = 2 \Rightarrow v = 2,6.10^8$ m.s^{-1}
$= 0,87\, c$

$L = 99,9$ cm : $\gamma = 1,001$, $\beta = 0,0447$
$= 99$ cm $\gamma = 1,01$ $\beta = 0,136$
$= 10$ cm $\gamma = 10$ $\beta = 0,995$

Exercice 3

(R) : Terre et Lune — (R') se déplace à $\vec{v} = v\vec{e}_x$
(R') : fusée — par rapport à (R)
$d = 384\ 000$ km dans (R)

1) T durée du trajet dans (R)

$$T = \frac{d}{v} = \frac{384\ 000}{0{,}8c} = 1{,}6 \text{ sec}$$

2) Durée dans (R') propre T'

$$T' = \frac{T}{\gamma} \qquad \gamma = \frac{5}{3}$$
$$= 0{,}96 \text{ s}$$

3) distance Terre - Lune mesurée par le passager.

$d =$ distance propre

$$d' = \frac{d}{\gamma} = 230\ 400 \text{ km}$$

Exercice 4

R : Paul
R' : Pierre, se déplace à $v = 0{,}992\,c$ par rapport à (R)

Aller

T'_A : durée propre
T_A : durée impropre

$$T_A = \gamma\, T'_A$$
$$T'_A = 2{,}5 \text{ ans}$$
$$T_A = 20 \text{ ans}$$

$T' = 5$ ans
$T = \gamma T' = 40$ ans

Exercice 5

R' : train $\quad v = 300 \text{ km.h}^{-1} = 83,3 \text{ m.s}^{-1}$

R : gare $\quad d = 600$ km dans R

Durée du voyage dans (R) : $T = 2h$

Dans (R') : T' propre

$\Rightarrow T' = T/\gamma = T\sqrt{1-\beta^2}$

$= T\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$

$= T\left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right)$

$\Delta T = T - T'$

$= \frac{v^2}{2c^2} T = 0,28$ ms.

Exercice 6

1) a) Pour O l'allumage est simultané

b) Aux moments des émissions, A était plus proche de O' que B. La distance à parcourir pour la lumière est ~~égale~~ plus grande venant de B que de A. La lumière se déplace à c dans les deux cas. Si O' voit les 2 flashs en même temps c'est que le flash est parti de B avant celui qui est parti de A.

B a allumé avant A.

		(R)	(R')
2) E_A	A allume sa lampe	(ct_A, x_A)	(ct'_A, x'_A)
E_B	B ———	(ct_B, x_B)	(ct'_B, x'_B)

$x_A = -L$

$t_A = -\frac{L}{c} \Rightarrow ct_A = -L$

$E_A(ct_A = -L, x_A = -L)$

$E_B(x_B = L, ct_B = -L)$

E_A et E_B simultanés dans R.

Dans (R') : $\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases}$

$$x'_A = \gamma(x_A - \beta c t_A) = \gamma(-L + \beta L) = -L\gamma(1-\beta) = -L\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$$(1-\beta) = \sqrt{(1-\beta)(1-\beta)}$$
$$\sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}$$

$$ct'_A = \gamma(ct_A - \beta x_A) = \gamma(-L + \beta L) = -L\gamma(1-\beta) = -L\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$$x'_B = \gamma(x_B - \beta c t_B) = \gamma(L + \beta L) = L\gamma(1+\beta) = L\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

$E_A\ (ct_A = -L,\ x_A = -L)$

$E_B\ (ct_B = -L,\ x_B = -L)$

$E_A\ \left(ct'_A = -L\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}},\ x'_A = -L\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\right)$

$E_B\ \left(ct'_B = -L\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}},\ x'_B = L\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right)$

$|ct'_B| > |ct'_A|$ Dans (R')

$ct_B < ct'_A$

$$ct'_B = \gamma(ct_B - \beta x_B) = \gamma(-L - \beta L) = -L\gamma(1+\beta) = -L\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

Exercice 7 — R : station, R' : fusée

$P =$ fusée dans (R')
$L =$ station dans (R)

v tel que $\dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \dfrac{P}{L}$

$E_1\ (ct_1 = 0,\ x_1 = 0)$

$E_1\ (ct'_1 = 0,\ x'_1 = 0)$

E_2 : la queue de la fusée entre dans la station

$E_2 \begin{cases} x_2 = -L \\ ct_2 \end{cases}$ $\qquad$ $E_2 \begin{cases} x_2' = -l \\ ct_2' \end{cases}$

$x_2' = \gamma(x_2 - \beta ct_2)$

$\Leftrightarrow -l = \gamma(-L - \beta ct_2)$

$x' = \gamma(x - \beta ct)$ $\qquad$ $l - \gamma L = 0$

$ct' = \gamma(ct - \beta x)$ $\qquad \Leftrightarrow \quad l = \gamma L + \gamma\beta ct_2$

$ct_2' = \gamma(ct_2 - \beta x_2)$

$= \gamma(-\beta(-L))$

$= \gamma\beta L$

Dans (R), $ct_2 = ct_1 = 0$ simultanés

Longueur de la fusée dans (R) : l_R

$L_{impropre} = \dfrac{L_{impropre}}{\gamma}$

$l_R = \dfrac{l}{\gamma} = L$ $\quad$ station et fusée ont la même longueur dans R.

Dans (R') : $ct_2' > ct_1'$ $\quad$ la tête sort avant que la queue de la fusée n'entre

longueur de la station dans (R') : $L_{R'}$

$L_{R'} = \dfrac{L}{\gamma} = \dfrac{l}{\gamma^2} < l.$

Exercice 8

$E_1\ (ct_1 = 3,\ x_1 = 1)$

$E_2\ (ct_2 = 2,\ x_2 = -2)$

a) $\exists ?\ (R') \,/\, ct_1' = ct_2'$

$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - \ell^2$

$= (ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2$

$= -8 < 0$ intervalle de genre espace

oui $\exists\ (R')$ dans lequel $ct_1' = ct_2'$

(R') se déplace à $\vec{u} = u\vec{x}$ / $ct' = \gamma(ct - \beta x)$

$$\begin{cases} ct'_1 = \gamma(ct_1 - \beta x_1) \\ ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta x_2) \end{cases} \quad (R)$$

$$\begin{cases} ct'_1 = \gamma(3 - \beta) \\ ct'_2 = \gamma(2 + 2\beta) \end{cases}$$ Pour R' qui se déplace à $\vec{u} = c/3 \ \vec{x}$ / (R), E_1 et E_2 sont simultanés

b) $\exists$? (R') / $x'_1 = x'_2$ (non) car $(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (x_2 - x_1)^2 < 0$

$$\begin{cases} x'_1 = \gamma(x_1 - \beta ct_1) \\ x'_2 = \gamma(x_2 - \beta ct_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'_1 = \gamma(1 - 3\beta) \\ x'_2 = \gamma(-2 - 2\beta) \end{cases}$$

$x'_1 = x'_2 \Leftrightarrow 1 - 3\beta = 2 - 2\beta \Leftrightarrow u = 3c$ impossible

c) Chronologie absolue ?

$ct_1 = 3$ et $ct_2 = 2$

$ct_1 > ct_2$

E_1 postérieur à E_2 dans R

$\exists$? (R') / $ct'_1 < ct'_2$

$3 - \beta < 2 + 2\beta$

$1 < 3\beta \Leftrightarrow \frac{c}{3} < u$ possible on peut avoir E_2 après E_1 pas de chronologie absolue

2) a) $(\Delta s)^2 = (8-3)^2 - (4-1)^2$

$= 16 > 0$ intervalle de genre temps

$\nexists$ (R') / $ct'_1 = ct'_3$

$ct'_1 = ct'_3$

$\Leftrightarrow \gamma(ct_1 - \beta x_1) = \gamma(ct_3 - \beta x_3)$

$\Leftrightarrow 3 - \beta = 8 - 4\beta \Leftrightarrow 3\beta = 5 \Rightarrow \beta = 5/3 > 1$ impossible

b) $\exists (R') \,/\, x_1' = x_3'$ chronologie abs

$x_1' = x_3'$

$\Rightarrow \gamma$

Exercice 9 R' se déplace à $\vec{u} = u\vec{x}$ dans R

$\vec{v}'$ dans R', $\vec{v}$ dans R

$$\boxed{v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \qquad v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}}}$$

a) $v_x = \frac{0,9}{1,08} c = 0,83\ c$

b) $\vec{v}' = v'_x x = -0,8\,c\,\vec{x} \Rightarrow v_x = \frac{-0,8c + 0,1c}{1 + (0,1 \times -0,8)} = \underline{-0,76\ c}$

c) $v'_y = \frac{v_y\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$ $\quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}}$

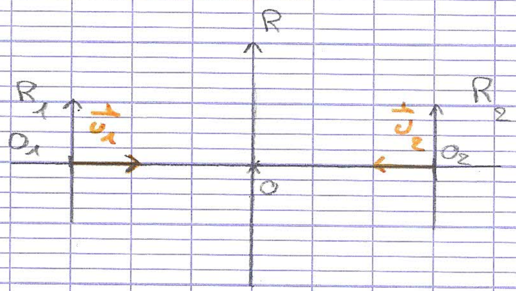
$v_y = \frac{0,8\,c\sqrt{1 - (0,1)^2}}{1 + 0} = \underline{0,796\ c}$

$v_x = 0,1c$

$v_y = 0,796\ c$

$\theta = 82,8°$

Exercice 10



$\vec{u}_1 = u_1\vec{x} = 0,75\,c\,\vec{x}$

$\vec{u}_2 = u_2\vec{x} = -0,75\,c\,\vec{x}$

on cherche $\vec{v}_{21}$

$(R) = (R)$ $\quad \vec{v} = \vec{u}_2 = -0,75\,c\,\vec{x}$

$(R') = (R_1)$ $\quad \vec{v}' = \vec{v}_{21} = v_{21}\vec{x}$

$\vec{u} = \vec{u}_1 = 0,75\,c\,\vec{x}$

$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$

$v'_x = v_{21} = \frac{u_2 - u_1}{1 - \left[\frac{u_1 u_2}{c^2}\right]} = \frac{-0,75c - 0,75c}{1 - \left[\frac{0,75 \times -0,75c^2}{c^2}\right]}$

$= \underline{-0,96\ c}$.

Exercice 11 L'effet Doppler émission $\lambda = 656$ mm

$\vec{v}_1 = 0,5\, c\ \vec{x}$

$\vec{v}_2 = 0,2\, c\ \vec{x}$

L'effet doppler $\lambda_n = \gamma \lambda_s (1 + \frac{v}{c} \cos \theta)$

$\theta = 0°$ si la source s'éloigne le long de l'axe Ox

$\theta = 180°$ si elle s'approche

a) longueur d'onde reçu sur Terre $\gamma_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}$

$$\lambda = \gamma_1 \lambda_1 (1 + v_1/c) = \lambda_1 \frac{(1 + v_1/c)}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = \lambda_1 \sqrt{\frac{1 + v_1/c}{1 - v_1/c}}$$ ~~= 656 mm~~ = 1136 mm

b) $\lambda_2 = \gamma_2 \lambda (1 - \frac{v_2}{c})$

$$= \frac{\lambda (1 - v_2/c)}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = \lambda \sqrt{\frac{1 - v_2/c}{1 + v_2/c}} = \sqrt{2/3}\, \lambda = \sqrt{2}\, \lambda_1 = 328 \text{ mm}$$

c) $\lambda_2 = \gamma_{1/2}\, \lambda_1 (1 + v_{1/2}/c)$ source s'éloigne $\theta = 0$

$$\cancel{\lambda_{21}} \quad \lambda_2 = \lambda_1 \sqrt{\frac{1 + v_{1/2}/c}{1 - v_{1/2}/c}}$$

On cherche $v_{1/2}$ $\quad v'_x = \dfrac{v_x - v}{1 - \frac{v v_x}{c^2}}$

(R) = (R)

(R') = (R_2)

$\vec{v} = \vec{v}_2$

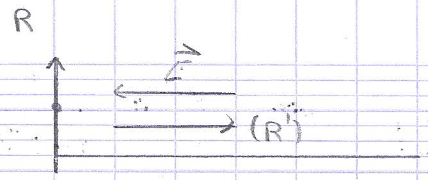
$\vec{V} = \vec{v}_1$

$\vec{V'} = \vec{v}_{1/2}$

$$v'_x = v_{1/2} = \frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_2 v_1}{c^2}} = c/3$$

$$\lambda_2 = \lambda \sqrt{\frac{1 + 1/3}{1 - 1/3}} = \sqrt{2}\, \lambda_1$$
$= 927$ mm

Exercice 12



$\vec{a}' = a'\vec{x}$

$a' = cte$

$d\mathcal{E} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

1) (R), (R') (R') : $\vec{u} = u\vec{x}$ /(R)

$\vec{v}$ dans (R) $= v_x\vec{x}$

$\vec{v}'$ dans (R') $= v'_x\vec{x}$

$\vec{a} = a_x\vec{x}$

$\vec{a}' = a'_x\vec{x}$

$$a'_x = a_x \frac{(1-u^2/c^2)^{3/2}}{(1-uv_x/c^2)^3}$$

$a = a_x$ $a' = a'_x$

Transfo inverse : $$a_x = a'_x \frac{(1-u^2/c^2)^{3/2}}{\left(1+\frac{uv'_x}{c^2}\right)^3}$$

$$\Rightarrow a_x = a'_x \frac{(1-v^2/c^2)^{3/2}}{(1+0)^3} = \cancel{a'_x \frac{(1-u^2/c^2)^{3/2}}{\left(1+\frac{uv'_x}{c^2}\right)^3}}$$

$$a = a'(1-v^2/c^2)^{3/2}$$

$$dv = a'(1-v^2/c^2)^{3/2}\,dt$$

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = (1-v^2/c^2)^{-1/2}$$

$$d\gamma = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{2v}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} dv$$

$$d\gamma = \frac{v}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} dv$$

$$dv = \frac{c^2}{v}(1-v^2/c^2)^{3/2}\,d\gamma \quad \Leftrightarrow \quad a'\,dt = \frac{c^2}{v}\,d\gamma$$

il faut éliminer v

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Leftrightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1-v^2/c^2}$$

$$1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2} \Leftrightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2}$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \left(\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow a'\,dt = \frac{c^2}{v}\,d\gamma \qquad a'dt = c\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}}\,d\gamma$$

$$\Rightarrow a't = c\sqrt{\gamma^2-1} + K$$

$\bar{c}$ $t=0$, $x=0$ et $v=0$ $\Rightarrow \gamma = 1$

$\Leftrightarrow K=0$

Pour obtenir $v(t)$ $\quad \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma}$

$$\sqrt{\gamma^2-1} = \frac{a't}{c} \Leftrightarrow \gamma^2-1 = \left(\frac{a't}{c}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \gamma^2 = 1+\left(\frac{a't}{c}\right)^2 \Leftrightarrow \gamma = \left(1+\left(\frac{a't}{c}\right)^2\right)^{1/2}$$

et donc $\frac{v}{c} = \frac{a't/c}{\sqrt{1+\left(\frac{a't}{c}\right)^2}}$ $\quad$ donc si $t \to +\infty$

$$\sqrt{1+(a't/c)^2} \simeq \sqrt{\left(\frac{a't}{c}\right)^2} = \frac{a't}{c}$$

$$v(t) \longrightarrow \frac{a't}{a't/c} = c$$

3) $x(t) = \int_0^t v(t)\,dt = \int_0^t \frac{a't}{(1+(a't/c)^2)^{1/2}}\,dt$

$$= \frac{c^2}{a'}\left[\sqrt{1+\left(\frac{a't}{c}\right)^2}\right]_0^t$$

$$= \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\left(\frac{a't}{c}\right)^2} - 1\right)$$

Rep 6

Quand $t \to +\infty$

$x(t) \to \frac{c^2}{a'} \frac{a't}{c} = ct$ équation d'un photon.

4) $a' = \frac{kc^2}{L}$, $\gamma \propto$ $x(t) = \frac{c^2}{a'}(\gamma(t)-1)$

$$\gamma(t) = 1 + \frac{a' x(t)}{c^2}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma} = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{(1+(\frac{a'x}{c^2}))^2}}$$

$$a' = \frac{kc^2}{L} \Leftrightarrow \frac{a'x}{c^2} = \frac{kx}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1-\frac{1}{(1+kx/L)^2}}$$

5) $x \gg L$ $\quad \frac{kx}{L} \gg 1 \Leftrightarrow \left(1+\frac{kx}{L}\right)^2 \simeq \left(\frac{kx}{L}\right)^2$

$$\frac{v}{c} \simeq \sqrt{1-(L/kx)^2} \quad \text{or } L/kx \ll 1$$

$$\frac{v}{c} \simeq 1 - \frac{L^2}{2k^2x^2}$$

$x = 3\,m$, $\frac{v}{c} \simeq 1 - 5.10^{-5}$ $\quad (v = 0,99995\,c)$

$x = 3\,km$ $\quad \frac{v}{c} \simeq 1 - 5.10^{-11}$

Exercice 13

$$4p \to {}^4He + 2e^+ + 2\gamma + E_{lib}$$

1) $E_{Av} = 4 \times m_p c^2$

$E_{Ap} = m_{He}c^2 + 2m_e c^2 + E_{cin\,lib}$

$E_{Av} = E_{Ap}$

$\Leftrightarrow E_{lib} = 4m_pc^2 - m_\alpha c^2 - 2m_ec^2 = 24,8$ ~~m~~ MeV

2) $P = 3,8 . 10^{26}$ W ($J.s^{-1}$)

$\Delta m \rightarrow \Delta E = \Delta m \times c^2$

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta m c^2}{\Delta t}$$

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta T} = \frac{\Delta M \times c^2}{\Delta T}$$

$\Delta E = 3,8 \times 10^{26}$ J

$\Delta t = 1s$

$$\Delta m = \frac{P \Delta t}{c^2}$$

par seconde : $\Delta m = 4,2$ millions de tonnes

par siècle : $\Delta M = \Delta m \times 100 \times 365,25 \times 86400$

$= 1,33 . 10^{18}$ kg

Exercice 14

1) $E = 185$ MeV E_T pour 1g

$m_U = 235\ u$

$u = \frac{1g}{N_A}$ N : nb de noyau d'uranium dans 1g.

$N = \frac{1g}{m_U} = \frac{1}{235\ u} = \frac{N_A}{235} = 2,6 \cdot 10^{21}$ noyaux

$E_T = N \times E = 4,8 \times 10^{23}$ MeV $= 4,8 \cdot 10^{29}$ eV

$= 7,7 \cdot 10^{10}$ J

2) D + T → He + n

$\Delta E = \Delta m c^2$

$= (m_D + m_T - m_\alpha - m_n) c^2$

$= (0,01772 2\ u) c^2$ 1 g d'uranium → $4,8 \cdot 10^{23}$ MeV

$\Delta E = 0,017722 \times \frac{1g}{Na} \times c^2$

$= 2,65 \cdot 10^{-12}$ J

$= 16,55$ MeV.

3) 1/2 g de T_2O et 1/2 g de D_2O

Il faut déterminer le nombre de noyaux de T dans 1/2 g de T_2O

$N = \frac{0,5g}{22,03\ g.mol^{-1}} Na \times 2 = 2,73 \cdot 10^{22}$ noyaux.

$E_T = N \times \Delta E$

$= 2,73 \cdot 10^{22} \times 16,55$ MeV

$= 4,5 \times 10^{23}$ MeV

$= 7,23 \times 10^{10}$ J $\simeq 3,14$ tonnes charbon.

Problème 1 - Électron confiné dans une boîte unidimensionnelle

p1

Partie 1 : Raisonnements qualitatifs

1) Équation aux valeurs propres

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

Si $x < 0$ ou $x > L$ on a $V(x) = +\infty$

alors E serait ∞. Or l'énergie d'une particule ne peut être ∞.

2) $0 < x < L \Rightarrow V(x) = 0$

$E = E_c + V(x)$

$= \frac{1}{2}mv^2 \geqslant 0$

$\Rightarrow E \geqslant 0$

3) Heisenberg $\Delta x \Delta p > \frac{\hbar}{2}$

On suppose que $p = 0$

$\Rightarrow \Delta p = 0$

$E_c = \frac{p^2}{2m} = 0$

$\Rightarrow \Delta x > \frac{\hbar}{2\Delta p}$

$\Delta x = \infty$ donc x n'est pas déterminée hors elle est confinée dans la boite.

Partie 2 : État stationnaires et énergie associés

4) Équations aux valeurs propres

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

$$\varphi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi(x) = 0 \quad \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} > 0$$

5) $\varphi(x) = B\cos(kx) + A\sin(kx)$

6) en $x = 0 \Rightarrow \varphi(0) = 0 = B\cos(0) + A\sin(0)$

$\Leftrightarrow B = 0$

en $x = L \Rightarrow \varphi(L) = 0 = A\sin(kL)$

$(A \neq 0)$ $\quad kL = n\pi$ $\quad \varphi_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$

$\Leftrightarrow k = \frac{n\pi}{L}$

énergie $\frac{n\pi}{L} = \frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar}$

$\Leftrightarrow \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = E_n$

7) $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = 6{,}02 . 10^{-18}\,J$ $\quad 1\,\mathring{A}$

$= 37{,}62\ eV$

$6{,}02 . 10^{-26}\,J$ $\quad 1\,\mu m$

$E_2 = 4E_1$ $\quad 3{,}7 . 10^{-7}\ eV$

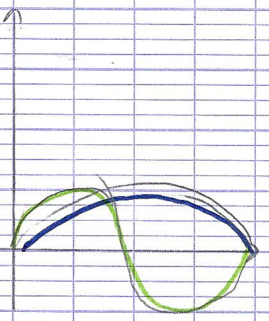
8) $\Psi_1(x,t) = \varphi_1(x) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$

$= A \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \exp\left(-i \frac{Et}{\hbar}\right)$

$\int_0^L |\varphi_1(x)|^2 dx = 1 \Leftrightarrow A^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi}{L} x\right) dx$

$A^2 = \frac{2}{L} \Rightarrow A = \sqrt{2/L}\, e^{i\delta}$

10)



Partie 3 : Probabilité de présence

$\rho_n(x,t) = |\Psi_n(x,t)|^2$

or $\Psi_n(x,t) = \varphi_n(x) \exp\left(-i \frac{E_n}{\hbar} t\right)$

$|\Psi_n(x,t)|^2 = |\varphi_n(x)|^2 \left|\exp\left(-i \frac{E_n}{\hbar} t\right)\right|^2$

$= |\varphi_n(x)|^2$

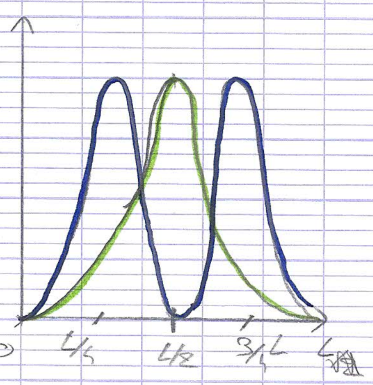
$= \rho_n(x)$

2

p9

12) $|\varphi_1(x)|^2 = \frac{2}{L}\sin^2(\pi x/L)$

$|\varphi_2(x)|^2 = \frac{2}{L}\sin^2(2\pi x/L)$



13) $\int_{L/3}^{2L/3} \rho_1(x)\,dx = \int_{L/3}^{2L/3} \frac{2}{L}\sin^2\left(\frac{\pi}{L}x\right) dx$

$= \frac{2}{L}\int_{L/3}^{2L/3} \frac{1-\cos(2\pi x/L)}{2}\,dx$

$= \frac{2}{L}\left[\frac{x}{2} - \frac{L}{4\pi}\sin\left(\frac{2}{L}\pi x\right)\right]_{L/3}^{2/3 L}$

$= \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} = 0,61$

$\int_{L/3}^{2L/3} \rho_2(x)\,dx = \frac{2}{L}\int_{L/3}^{2L/3} \sin^2\left(\frac{2\pi}{L}x\right) dx$

$= \frac{2}{L}\left[\frac{x}{2} - \frac{L}{8\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{L}x\right)\right]$

$= \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = 0,20$

Partie 4 : Évolution temporelle de la fonction d'onde

14) $\Psi(x, t=0) = \frac{\sqrt{3}}{3}\varphi_1(x) - \frac{\sqrt{6}}{3}\varphi_3(x)$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}\varphi_1(x)\exp\left(-i\frac{E_1 t}{\hbar}\right) - \frac{\sqrt{6}}{3}\varphi_2(x)\exp\left(-i\frac{E_3 t}{\hbar}\right)$

15) $P(E_1) = \frac{1}{3}$ $\qquad P(E_3) = \frac{2}{3}$

16) Non, car l'énergie n'est pas déterminée

17) $\rho(x,t) = |\Psi(x,t)|^2$

$$= \Psi^*(x,t)\,\Psi(x,t)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}\,\varphi_1^*\varphi_1 + \frac{\sqrt{6}\sqrt{6}}{3\times 3}\,\varphi_3^*\varphi_3 - \frac{\sqrt{3}\sqrt{6}}{3\times 3}\left(\varphi_1^*\varphi_3 + \varphi_3\varphi_1\right)$$

$$= \frac{1}{3}\varphi_1^2(x) + \frac{2}{3}\varphi_3^2(x) - \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\varphi_1(x)\varphi_3(x)\exp\left(-\frac{i(E_3-E_1)t}{\hbar}\right) + \exp\left(i\frac{(E_3-E_1)t}{\hbar}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\varphi_1^2(x) + \frac{2}{3}\varphi_3^2(x) - \frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\left(\frac{E_3-E_1}{\hbar}t\right)$$

$$= \rho(x,t)$$

18) $\Psi(x,t) = \frac{\sqrt{3}}{3}\varphi_1(x)\,e^{-\frac{iE_1t}{\hbar}} - \frac{\sqrt{6}}{3}\varphi_3(x)\,e^{-iE_3t/\hbar}$

$\Rightarrow \forall\, t > t_0 \quad \Psi(x,t) = \varphi_3(x)\,e^{-iE_3t/\hbar}$

puisque à t_0 on trouve l'énergie E_3

Partie 5 - Analogie avec l'optique. Détermination simple des énergies quantifiées du puits infini.

15) $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2L}{m}$ $\qquad E = \frac{p^2}{2m}$

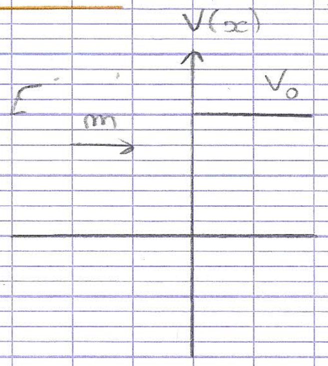
$$p = \frac{mh}{2L}$$

$$E = \frac{(mh/2L)^2}{2m} = \frac{m^2h^2}{8L^2m} = \frac{m^2\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$$

Problème 2 - Marche de potentiel

Partie 1 : Cas où $E > V_0$: reflexion partielle

1)



$E > V_0$

$E = E'_c + V_0$

Équation aux valeurs propres

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + E(x)\varphi(x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi''(x) + \frac{2Em}{\hbar^2}\varphi(x) = 0$$

On pose $k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ avec $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$$\varphi''(x) + k_1^2\varphi(x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$$

$$\Psi(x,t) = \varphi(x)\, e^{-iEt/\hbar}$$

$$= (\underbrace{Ae^{ik_1x}}_{\text{incidente}} + \underbrace{Be^{-ik_1x}}_{\text{refléchie}})e^{-iEt/\hbar}$$

2) $\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + (E - V_0)\varphi(x) = 0$

$$\varphi''(x) + \frac{(E-V_0)2m}{\hbar^2}\varphi(x) = 0$$

On pose $k_2^2 = \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}$ avec $k_2 > 0$ car $E > V_0$

$$\varphi(x) = (Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x})\cancel{e^{-iEt/\hbar}}$$

$$\psi(x,t) = \left(Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}\right)e^{-iEt/\hbar}$$
$$= \underbrace{Ce^{i(k_2x - Et/\hbar)}}_{\text{onde transmise}} + \underbrace{De^{-i(k_2x + Et/\hbar)}}_{\text{onde revenant de } x=+\infty \Rightarrow \text{ impossible}}$$

Donc $D = 0$ donc $\psi(x,t) = Ce^{ik_2x}e^{-iEt/\hbar}$ $(x>0)$

3) Continuité de φ en $x = 0$ $\qquad \varphi(x<0) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$

$\Rightarrow A + B = C$ ① $\qquad \varphi(x>0) = Ce^{ik_2x}$

Continuité de $\frac{d\varphi}{dx}$ en 0 $\qquad \varphi'(x<0) = ik_1(Ae^{ik_1x} - Be^{-ik_1x})$

$\qquad \varphi'(x>0) = ik_2\, Ce^{ik_2x}$

$\Rightarrow k_1(A-B) = k_2C$ ②

$B = C - A$

$k_1(A - C + A) = k_2C$

$2k_1A = C(k_1+k_2)$

$C = \frac{2k_1A}{k_1+k_2}$

$k_1A = k_2C + k_1B$

$k_1A = k_2(A+B) + k_1B$

$A(k_1-k_2) = B(k_1+k_2)$

$B = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}A$

4) $J = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)$

$$J_i = \frac{\hbar}{2mi}\left[\left(Ae^{-i(k_1x - Et/\hbar)}\, ik_1Ae^{i(k_1x - Et/\hbar)}\right) - \left(Ae^{i(k_1x - Et/\hbar)}A(-ik_1)e^{-i(k_1x - Et/\hbar)}\right)\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2mi}(ik_1A^2 + ik_1A^2)$$

$$= \frac{\hbar}{m}k_1A^2$$

$B = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}A$, $C = \frac{2k_1}{k_1+k_2}A$

$J_r = -\frac{\hbar}{m}k_1B^2$

5) $T = \frac{J_t}{J_i} = \frac{k_2}{k_1}\frac{C^2}{A^2} = \frac{k_2}{k_1}\left(\frac{2k_1}{k_1+k_2}\right)^2$

$= \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2}$

$R = \left|\frac{J_r}{J_i}\right| = \frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}$

$R + T = \frac{4k_1k_2 + k_1^2 - 2k_1k_2 + k_2^2}{(k_1+k_2)^2}$

$= 1.$

6) Classiquement les particules devraient toutes passer mais quantiquement elles ne passent pas toute il y a réflexion.

Partie 2 - Cas où $E < V_0$: réflexion totale

1) $\varphi(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_2x}$

2) $-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V_0\varphi(x) = E\varphi(x)$

$\Rightarrow \varphi''(x) - \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)\varphi(x) = 0$ On pose $\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E$

$\Rightarrow \varphi(x) = Ce^{-\alpha x} + De^{\alpha x}$

3) $p(x) = |\varphi(x)|^2 = |C^2e^{-2\alpha x} + D^2e^{2\alpha x} + 2CD|$

a) on pourrait justifier sur le fait que $\varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $D = 0$

4) $\begin{cases} A+B = C & \text{en } 0 \\ ik_1(A-B) = -\alpha C \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha(1)+2 & \alpha(A+B) + ik_1(A-B) = 0 \\ ik_1(1)+(2) & k_1 A = C(ik_1-\alpha) \end{cases}$

$\begin{cases} B = -A \dfrac{\alpha+ik_1}{\alpha-ik_1} \\ C = 2A \dfrac{ik_1}{ik_1-\alpha} \end{cases}$

5) $J_i = \dfrac{\hbar k_1 |A|^2}{m}$ $\qquad \varphi_t = Ce^{-\alpha x} \quad \left| \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = -\alpha \varphi_t \right.$

$J_R = -\dfrac{\hbar k_1 |B|^2}{m}$ $\qquad J_T = \dfrac{-\hbar}{2mi} \left(C^* C(-\alpha) - CC^*(-\alpha) \right) = 0$

$R = \left| \dfrac{J_R}{J_I} \right| = \dfrac{\alpha^2+k_1^2}{\alpha^2+k_1^2} = 1$

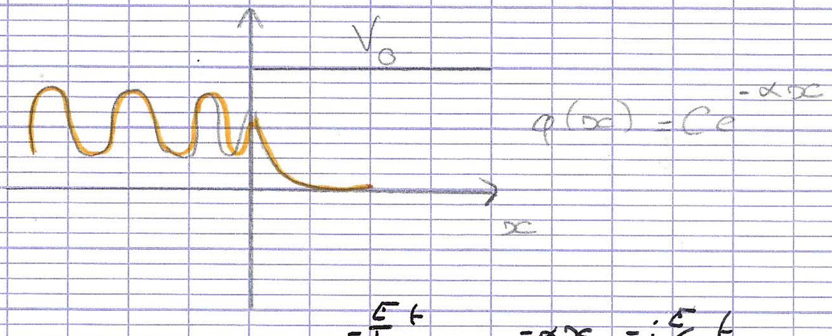
$T = \left| \dfrac{J_T}{J_I} \right| = 0$

6) Non car quand $x>0$ et $T=0$ il ne devrait pas y avoir de particule ⇒ incohérence

7) $\rho(x) = |\varphi(x)|^2$
$= |Ce^{-\alpha x}|^2$
$= C^2 e^{-2\alpha x}$

$P(x>0, t) = \int_0^{+\infty} \rho(x)\,dx = C^2 \left[-\frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha x} \right]_0^{+\infty} = \dfrac{C^2}{2\alpha}$

8)



$\Psi(x,t) = \varphi(x) e^{-\frac{E}{\hbar}t} = Ce^{-\alpha x} e^{-i\frac{E}{\hbar}t} = \underbrace{Ce^{-\alpha x}}_{\text{Amplitude}} e^{-i\omega t}$

Problème 3 : Microscopie à effet tunnel - Barrière de potentiel

Partie 1 : Traitement théorique de l'effet tunnel

1) $\varphi_1(x) = \underset{\varphi_i}{Ae^{ikx}} + \underset{\varphi_r}{Be^{-ikx}}$ $\quad x < 0$ $\quad$ voir problème 1 et 2.

$\varphi_2(x) = Ce^{-\alpha x} + De^{\alpha x}$ $\quad 0 < x < a$

$\varphi_3(x) = \underset{\varphi_t}{Ee^{ikx}} + \cancel{Fe^{-ikx}}$ $\quad x > a$

2) Continuité de φ et φ' en $x = 0$

$x = a$

$\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$

$A + B = C + D$ $\quad$ 1

$\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0)$

$ikA - ikB = -\alpha C + \alpha D$ $\quad$ 2

$\varphi_2(a) = \varphi_3(a)$

$Ce^{-\alpha a} + De^{\alpha a} = Ee^{ika}$ $\quad$ 3

$-\alpha Ce^{-\alpha a} + \alpha De^{\alpha a} = ikEe^{ika}$ $\quad$ 4

3) $\begin{cases} A + B = C + D & 1 \\ ikA - ikB = \alpha(D - C) & 2 \\ Ce^{-\alpha a} + De^{\alpha a} = Ee^{ika} & 3 \\ -\alpha Ce^{-\alpha a} + \alpha De^{\alpha a} = ikEe^{ika} & 4 \end{cases}$

$\alpha L_3 - L_4 \Leftrightarrow$ $\quad 2\alpha Ce^{-\alpha a} = (\alpha - ik)Ee^{ika}$

$C = \dfrac{\alpha - ik}{2\alpha} Ee^{a(ik+\alpha)}$

$\alpha L_3 + L_4 \Leftrightarrow$ $\quad 2\alpha De^{\alpha a} = Ee^{ika}(\alpha + ik)$

$D = \dfrac{(\alpha + ik)}{2\alpha} Ee^{a(ik-\alpha)}$

$ik\, L_1 + L_2 \quad \Leftrightarrow \quad 2ikA = ik(C+D) + \alpha(D-C)$

$$2ikA = C(ik-\alpha) + D(\alpha+ik)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2ikA = \frac{\cancel{(\alpha+}(\alpha-ik)}{2\alpha}\, \mathcal{E} e^{a(ik+\alpha)} (ik-\alpha) + \frac{\alpha+ik}{2\alpha}\, \mathcal{E} e^{a(ik-\alpha)} (\alpha+ik)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2ikA = \frac{\mathcal{E} e^{ika}}{2\alpha} \left[-(\alpha-ik)^2 e^{\alpha a} + (\alpha+ik)^2 e^{-\alpha a} \right]$$

$$\Leftrightarrow \quad 4ik\alpha A = \mathcal{E} e^{ika} \left[(\alpha^2 - k^2 + 2ik\alpha) e^{-\alpha a} + (-\alpha^2 + k^2 + 2i\alpha h) e^{\alpha a} \right]$$

$$= \mathcal{E} e^{ika} \left[(k^2-\alpha^2)(e^{\alpha a} - e^{-\alpha a}) + 2i\alpha k (e^{\alpha a} + e^{-\alpha a}) \right]$$

$$= \mathcal{E} e^{ika} \left[2(k^2-\alpha^2)\, sh(\alpha a) + 4i\alpha h\, ch(\alpha a) \right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathcal{E}}{A} = \frac{2ik\alpha e^{-ika}}{(k^2-\alpha^2)\, sh(\alpha a) + 2i\alpha k\, ch(\alpha a)}$$

4) $J_i = \dfrac{\hbar k}{m} |A|^2 \qquad J_t = \dfrac{\hbar k}{m} |\mathcal{E}|^2$

$$T = \frac{J_T}{J_i} \left| \frac{\mathcal{E}}{A} \right|^2$$

$$= \frac{4\alpha^2 k^2}{(k^2-\alpha^2)^2 sh^2(\alpha a) + 4\alpha^2 k^2 ch^2(\alpha a)}$$

$$= \frac{4\alpha^2 k^2}{(k^4+\alpha^4 - 2\alpha^2 k^2)\, sh^2(\alpha a) + 4\alpha^2 k^2 (1 + sh^2(\alpha a))}$$

$$= \frac{4\alpha^2 k^2}{(k^2+\alpha^2)^2 sh^2(\alpha a) + 4\alpha^2 h^2} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\alpha^2+k^2}{2\alpha k} \right)^2 sh^2(\alpha a)}$$

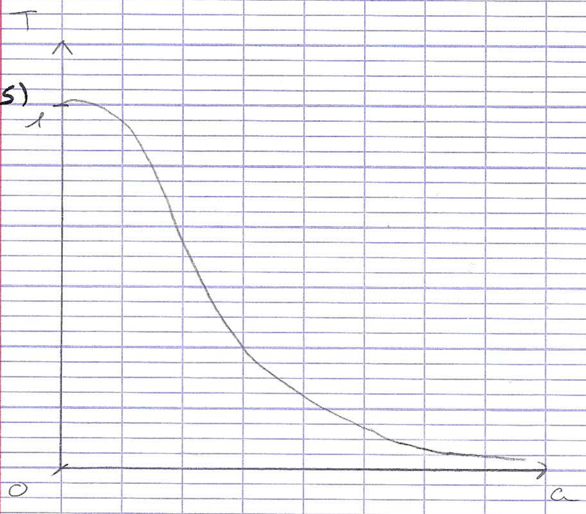
or $k^2 = \dfrac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2}$, $\alpha^2 = \dfrac{2m(V_0 - \mathcal{E})}{\hbar^2}$

$$T = \frac{1}{1 + \left[\frac{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}{\frac{2}{\hbar^2}\sqrt{2mE\,2m(V_0-E)}}\right]^2 sh^2(\alpha a)}$$

$$= \frac{1}{1 + \left[\frac{V_0}{2\sqrt{E(V_0-E)}}\right]^2 sh^2(\alpha a)}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)} sh^2(\alpha a)}$$

5)



Partie 2 : Application : microscopie à effet tunnel (STM)

$E = 2eV$

$V_0 = -4eV$

$V_0 = 4eV$

1) $$T = \frac{1}{1 + \frac{16}{4\times2\times2} sh^2(\alpha a)} = \frac{1}{1 + sh^2(\alpha a)}$$

2) $\alpha a \gg 1$

$$sh^2(\alpha a) = \frac{e^{2\alpha a} - 2 + e^{-2\alpha a}}{4} = \frac{e^{2\alpha a}}{4}$$

$$T \simeq \frac{1}{1+e^{2\alpha a}/4} = 4e^{-2\alpha a}$$

1) $\cancel{E = 2eV}$ $\quad \cancel{T = \frac{1}{1+16}}$

$\cancel{V_0 = -4eV}$

$\cancel{V_0 = 4eV}$

3) $$\alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg

$V_0 - E = 2eV = 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$

$\hbar = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{2\pi}$ $J.s^{-1}$

$\alpha = 7{,}24 \cdot 10^{9}\ m^{-1} = 0{,}724\ \mathring{A}^{-1}$

$$sh(\alpha a) = \frac{e^{\alpha a} + e^{-\alpha a}}{2} \simeq \frac{e^{\alpha a}}{2}$$

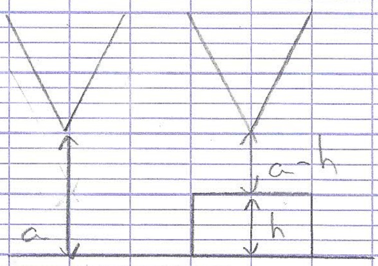
$e^{\alpha a} > 100\, e^{-\alpha a}$

$e^{2\alpha a} > 100$

$2\alpha a > \ln(100)$

$$a > \frac{\ln(100)}{2\alpha}$$

$a > 3{,}2\ \mathring{A}$



4) $i \propto T$

$i_a \propto 4e^{-2\alpha a}$

$i_{a-h} \propto 4e^{-2\alpha(a-h)} = 1000\, i_a$

$$\frac{4e^{-2\alpha(a-h)}}{4e^{-2\alpha a}} = 1000$$

$\Leftrightarrow \quad e^{2\alpha h} = 1000$

$2\alpha h = \ln(1000)$

$$h = \frac{\ln(1000)}{2\alpha} = 4{,}8\ \mathring{A}$$

5) $i_{a-h_{min}} = 1,05\, i_A$

$e^{2\alpha h_{min}} = 1,05$

$h_{min} = 0,035\ \mathring{A}$ < taille d'un atome

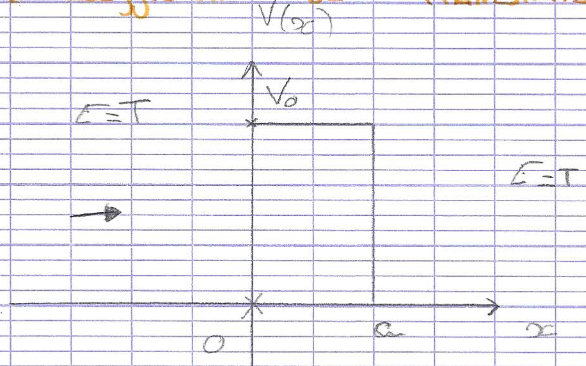
$R = \frac{1,22\,\lambda}{n \sin i}$

$\lambda \sim 0,5\ \mu m$

$R = 5000\ \mathring{A}$

Problème 4 : Barrière de potentiel - Largeurs de résonance

Partie 1 : Coefficient de transmission de la barrière



$E > V_0$

$x < 0 \qquad \varphi(x) = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}$

$0 < x < a \qquad \varphi(x) = C e^{ik_2 x} + D e^{-ik_2 x}$

comme problème 3

Partie 2 : Étude des largeurs de résonance

1.1) $$\left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{2k_1k_2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}{2\,\frac{\sqrt{2mE}\,\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar^2}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2mV_0}{4m\sqrt{E(E-V_0)}}\right)^2$$

$$= \frac{V_0^2}{4\,E(E-V_0)}$$

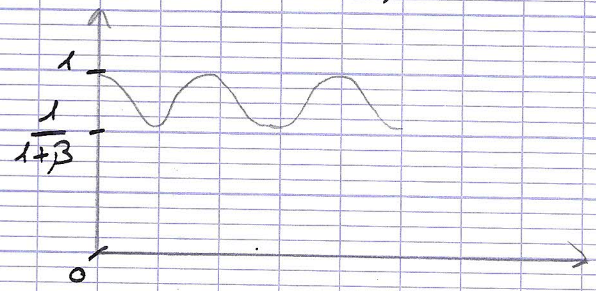
1) équations A, B, C, D, E

$$T = \left|\frac{E}{A}\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{k_1^2-k_2^2}{2k_1k_2}\right)^2 \sin^2(k_1 a)}$$

$$T = \frac{1}{1+\frac{V_0^2}{4E(E-V_0)}\sin^2(k_2 a)}$$

2) $0 < T \leq 1$ $\qquad T = \frac{1}{1+\beta \sin^2(k_2 a)}$

quand a varie, T oscille entre $T_{max} = 1$
(quand $\sin(k_2 a) = 0$)
et $T_{min} = \frac{1}{1+\beta}$ quand $\sin(k_2 a) = \pm 1$



3) a_m tel que $T = 1$

$\sin^2(k_2 a) = 0 \Leftrightarrow k_2 a = m\pi$

$$a_m = m\frac{\pi}{k_2} = \frac{m\pi\hbar}{\sqrt{2m(E-V_0)}}$$

Partie 3 : Lien avec la longueur d'onde des particules

14) $\lambda = \dfrac{h}{p}$

15) $E = T + V_0 = \dfrac{p^2}{2m} + V_0$

$p^2 = 2m(E - V_0)$

$p = \sqrt{2m(E - V_0)}$

16) $a_m = \dfrac{m\pi\hbar}{p} = \dfrac{m\pi h}{2\pi p} = \dfrac{m h}{2 p} = \dfrac{m}{2}\lambda$

$2a_m = m\lambda$

17) La longueur d'onde est un multiple de la taille de la cavité.

Problème 5 : Puits de potentiel - États électroniques localisés

1) $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$

Région 1 : $x < -a/2$

$\dfrac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + E\varphi(x) = 0$

$\varphi''(x) + \dfrac{2mE}{\hbar^2}\varphi(x) = 0$

$\varphi''(x) - \rho^2\varphi(x) = 0$ avec $-\rho^2 = \dfrac{2mE}{\hbar^2}$

idem en région 3.

En région 2 : $-a/2 < x < a/2$

$-\dfrac{\hbar^2}{2m}\varphi'' - V_0\varphi = E\varphi$

$\Leftrightarrow \varphi'' + \dfrac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}\varphi = 0$

$\Leftrightarrow \varphi'' + K^2\varphi = 0$ avec $K^2 = \dfrac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}$

2) $x < -a/2$

$\varphi_1(x) = \underbrace{Ae^{\rho x}}_{\text{onde évanescente}} + \underbrace{\cancel{Ce^{-\rho x}}}_{\text{diverge quand } x \to -\infty}$

pas de propagation car il y a conservation de l'énergie donc $E < 0$ or si $x < -a/2$ on a $E_p = 0$ donc $E_c < 0 \Rightarrow v \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

$\varphi_3(x) = \underbrace{Ae^{\rho x}}_{\text{diverge}} + Ce^{-\rho x}$ par symétrie $C = A$.

$\varphi_2(x) = B\cos(kx) + D\sin(kx)$

4) $\rho(x) = |\varphi_3(x)|^2 = |Ce^{-\rho x}|^2 = C^2 e^{-2\rho x}$

$$P(x > a/2, t) = \int_{a/2}^{+\infty} \rho(x)\,dx$$

$$= |C|^2 \int_{a/2}^{+\infty} e^{-2\rho x}\,dx$$

$$= |C|^2 \frac{1}{2\rho} e^{-\rho a} = \frac{|C|^2 \hbar \exp\left(-\frac{a\sqrt{2m|E|}}{\hbar}\right)}{2\sqrt{2m|E|}}$$

Cela ne dépend pas de la "profondeur" du puit mais de l'énergie de la particule.

Partie 1 : Recherche des états stationnaires pairs

5) Conditions aux limites $\begin{cases} \varphi_p(a/2) = \varphi_3(a/2) \\ \varphi_p'(a/2) = \varphi_3'(a/2) \end{cases}$

$$\begin{cases} (1) & B\cos(ka/2) = C e^{-\rho a/2} \\ (2) & B\sin(ka/2)\,\rho = C\rho e^{-\rho a/2} \end{cases}$$

(2)/(1) : $k\tan\left(k\frac{a}{2}\right) = \rho \Rightarrow \tan(k\,a/2) = \frac{\rho}{k}$ (*)

6) $\tan\left(\frac{a\sqrt{2m(E+V_0)}}{2\hbar}\right) = \sqrt{\frac{-E}{E+V_0}}$

$\Rightarrow 1 + \tan^2(ka/2) = 1 + \frac{\rho^2}{k^2} = \frac{k^2+\rho^2}{k^2}$

$$= \frac{2m(E+V_0) - 2mE}{\hbar^2 k^2} = \frac{2mV_0}{\hbar^2 k^2} = \frac{K_0^2}{k^2}$$

~~tan~~

8) $\tan(ka/2) = \rho/K$

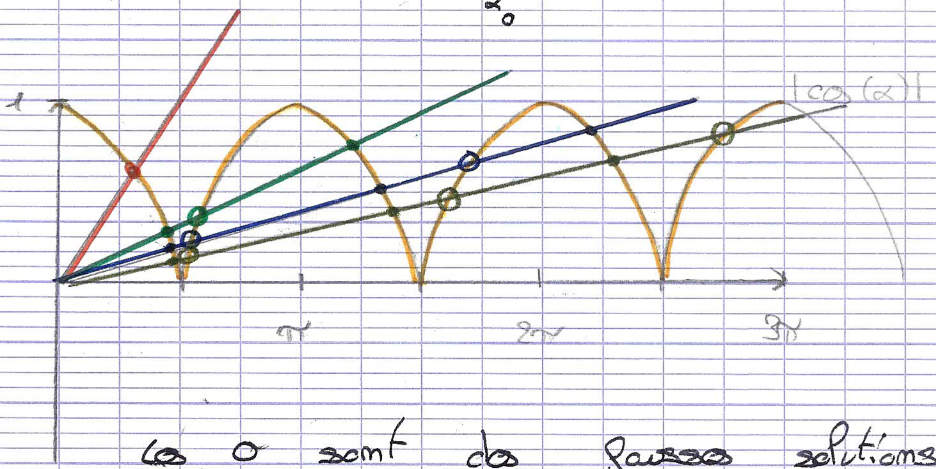
$1+\tan^2(ka/2) = 1+(\rho/k)^2$

$1+\tan^2(\alpha) = \left(\frac{\alpha_0}{\alpha}\right)^2$

$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \left(\frac{\alpha_0}{\alpha}\right)^2$

$\cos^2\alpha = (\alpha/\alpha_0)^2 \Leftrightarrow |\cos\alpha| = \frac{\alpha}{\alpha_0} > 0$ et $\tan\alpha > 0$

9)



Les O sont des fausses solutions car $\tan\alpha < 0$ or $\tan\alpha = \frac{\rho}{k} > 0$.

10) • V_0 augmente donc α_0 augmente donc la pente diminue et ainsi le nombre d'état stationnaire augmente

• $\frac{\alpha}{\alpha_0}$ est positif donc $\frac{\alpha}{\alpha_0}$ coupe toujours $|\cos\alpha|$. Donc il existe toujours au moins un état stationnaire

• $\alpha = \frac{a\sqrt{2m(E+V_0)}}{2\hbar}$ $\quad \alpha_0 = \frac{a\sqrt{2mV_0}}{\hbar}$

dépend donc de la profondeur du puit

• $\alpha_1 = \frac{a\sqrt{2m(E_1+V_0)}}{2\hbar}$

$\Rightarrow E_1 = \frac{(2\alpha_1\hbar)^2}{2am} - V_0$

Partie 2 : Recherche des énergies des états stationnaires impairs

11) $\cos x = \frac{a}{2}$

$$\varphi_1(a/2) = \varphi_3(a/2)$$

$$D\sin(ka/2) = Ce^{-\rho a/2}$$

$$kD\cos(ka/2) = -\rho Ce^{-\rho a/2}$$

$$-\frac{k}{\rho} = \frac{Ce^{-\rho a/2}}{D\cos(ka/2)} = \tan(ka/2)$$

12) $$\tan\left(\frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}\frac{a}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\sqrt{2m|E|}}$$

$$= -\sqrt{\frac{E+V_0}{-E}}$$

13) Montrons que $$1+\frac{1}{\tan^2(ka/2)} = 1+\frac{1}{\left(-\frac{k}{\rho}\right)^2}$$

$$= 1+\frac{\rho^2}{k^2}$$

$$= 1+\frac{|E|}{E+V_0} = 1-\frac{E}{E+V_0}$$

$$= \frac{V_0}{E+V_0}$$

On $$\frac{k_0}{k} = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\sqrt{2m(E+V_0)}} = \sqrt{\frac{V_0}{E+V_0}}$$

$$1+\frac{1}{\tan^2\left(\frac{ka}{2}\right)} = \frac{k_0^2}{k^2}$$

1.1) $\alpha = \frac{ka}{2}$ $\alpha_0 = \frac{k_0 a}{2}$

$$1 + \frac{1}{\tan^2(\alpha)} = \frac{1}{\sin^2(\alpha)} = \frac{\alpha_0^2}{4} \Rightarrow \frac{1}{|\sin(\alpha)|} = \frac{\alpha_0}{\alpha}$$

$$\Rightarrow |\sin(\alpha)| = \frac{\alpha}{\alpha_0}$$