

Projet 6

Résolution approchée d'équations différentielles /
Modélisation de systèmes dynamiques

Groupe 4 - Equipe 1

Responsable : DECOU Nathan
Secretary : BAHHOU Houssam
Codiers : DELPEUCH Sébastien (AGTAIB Badre idine)
RIDACKER Vincent

Résumé : Le but de ce projet est de programmer des méthodes de résolution d'équations différentielles linéaires. Dans un premier temps, elles devront résoudre des équations différentielles ordinaires, puis, nous appliquerons ces méthodes à des systèmes dynamiques. Les systèmes que nous avons choisi d'étudier sont : le modèle des biologies des populations, dit de Lotka-Volterra, et le problème à trois corps.

1 Méthodes numériques de résolution d'équations différentielles

Le but de cette section est d'implémenter les fonctions nécessaires à approximer la solution d'une équation différentielle.

1.1 Element théoriques de résolutions

Le principe de l'algorithme est le suivant : étant donné l'intervalle $[t_0, t_f]$ sur lequel nous voulons approximer la solution ainsi que la valeur de y_0 et t_0 , l'idée est de calculer les valeurs des points y_n en t_n avec la relation $y_{n+1} = step_methode(y_n, t_n, h, f)$ où h est la valeur du pas, c'est à dire $t_{n+1} - t_n$, f est la fonction vérifiant $f(y, t) = y'(t)$ et $methode$ est la méthode de calcul utilisée (nous en utiliserons 4 dans ce projet, la méthode d'Euler, du point milieu, de Heun, de Runge-Kutta d'ordre 4). Ainsi pour un nombre N de divisions de l'intervalle donné et donc un pas $h = \frac{t_f - t_0}{N}$, il est alors possible de calculer les points y_0, y_1, \dots, y_f . La courbe obtenue à partir de ces points est une approximation de la solution de l'équation différentielle. Maintenant, le but est de faire en sorte d'obtenir une approximation qui soit suffisamment proche de la solution. En nommant la fonction implémenté précédemment $meth_n_step(y_0, t_0, N, f, methode)$.

L'algorithme $meth_epsilon(y_0, t_0, t_f, N, eps, f, meth)$ nous permettant de calculer une solution approchée à une précision ϵ fonctionne comme suit. Tout d'abord nous calculons via $meth_n_step$ une solution et nous initialisons la norme à 1, ensuite vient la boucle principale de l'algorithme qui permet d'affiner la précision. Pour commencer nous doublons N et nous divisons le pas h par deux puis nous réutilisons $meth_n_step$ avec ses paramètres, la nouvelle norme est donc la norme entre les appels de la fonction $meth_n_step$ et nous répétons l'opération tant que la norme est supérieure à ϵ et que le nombre d'itérations maximale n'est pas atteinte.

Comme nous pouvons le voir, l'algorithme double le nombre points sur lesquels la solution est approximée tant que la précision voulue n'est pas atteinte. L'augmentation du nombre de points permet en effet de mieux approcher la solution car la pente de la courbe est rectifiée en chacun des points, permettant de mieux représenter la solution. Cependant, en fonction de la méthode utilisée et entre autre de l'ordre de cette méthode, le nombre de points nécessaire à l'obtention d'une courbe approchée selon une précision donnée variee.

Comme dit précédemment nous allons utiliser 4 méthodes différentes pour la résolution d'équations différentielles, la méthode d'Euler (d'ordre 1), du point milieu (d'ordre 2), de Heun (d'ordre 2) et de Runge Kutta (d'ordre 4).

1.1.1 Test numériques

Nous allons maintenant comparer ces quatre méthodes numériquement pour mettre en évidence les différences induites par les différents ordres et pour discriminer laquelle est la plus efficace pour résoudre le problème. Cette discrimination nous permettra de sélectionner la meilleure pour résoudre les différentes application. Nous traçons alors la **Figure 1**. Cette figure analyse le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir une précision donnée sur l'**Equation 2**.

$$\begin{cases} y(0) &= 1 \\ y'(t) &= \frac{y(t)}{1+t^2} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y(0) &= (1, 0) \\ y'(t) &= (-y_2(t), y_1(t)) \end{cases} \quad (2)$$

Nous pouvons observer sur la **Figure 1** que la méthode de Runge Kutta 4 est la plus efficace puisqu'elle nécessite le moins grand nombre de pas avant de trouver la solution pour n'importe quelle précision voulue. Les méthodes de Heun et du milieu (confondues sur la figure) talonnent RK4 et parfois sont aussi performante. En revanche la méthode d'Euler demande largement plus d'itérations pour avoir la précision demandée.

Nous pouvons donc conclure de ce test numérique que la méthode de Runge Kutta 4 semble être la plus efficace et que la méthode de Euler la moins performante. Nous allons effectuer des tests visuels pour étayer cette supposition.

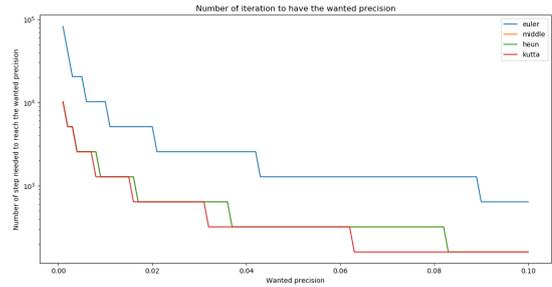
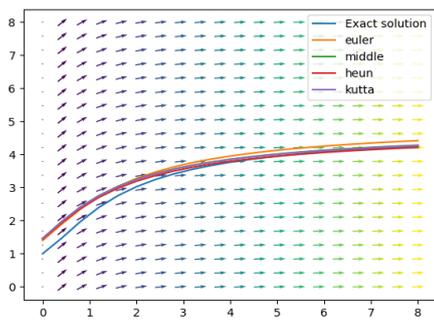


FIGURE 1 – Nombre d'itération nécessaire en fonction de la précision demandée pour les 4 méthodes sur l'équation différentielle (2)

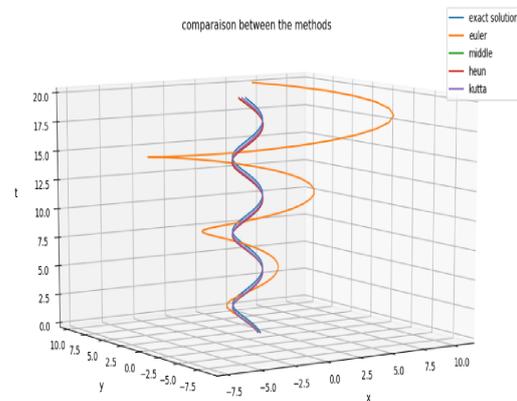
1.1.2 Affichage de l'approximation de la solution

Une fois que nous avons réalisé des tests sur la méthode nous réalisons un test plus visuel, tout d'abord en dimension 2 puis en dimension 3. Nous commençons tout d'abord par l'affichage de la courbe et du champ des tangentes autour de cette dernière en dimension 2. Nous prenons l'équation différentielle décrite dans l'Équation 1 et utilisons les 4 méthodes. Nous pouvons remarquer dans la Figure 2a que les cinq méthodes arrivent à approcher la solution en suivant le champ des vecteurs. En revanche nous pouvons remarquer que la méthode d'Euler est la méthode qui approxime le moins bien la solution.

Ensuite nous réalisons le traçage en dimension 3 pour cela nous appliquons les 4 algorithmes sur l'Équation 2 cela nous permet d'obtenir la courbe de la Figure 2b cette figure nous permet de confirmer notre intuition. Nous pouvons remarquer en effet que trois méthodes suivent exactement la courbe représentant le solution, nous pouvons même distinguer que la méthode la plus proche de la solution est la méthode de RK4. En revanche la méthode d'Euler qui n'est que de premier ordre s'éloigne de plus en plus de la solution au cours du temps.



(a) Sur $y(0) = 1, y'(t) = \frac{y(t)}{1+t^2}$ avec le champ des tangentes



(b) Sur $y(0) = (1, 0), y'(t) = (-y_2(t), y_1(t))$

FIGURE 2 – Affichage de l'approximation de la solution en dimension 2 et 3

En somme nous avons mis en place des tests sur les différentes méthodes de résolution d'équations différentielles. Ces dernières ont pu mettre en lumière les différents ordres des différentes méthodes de résolution, plus particulièrement les tests ont mis en évidence la précision de Runge Kutta et la faible performance de la méthode d'Euler.

2 Système proie-prédateur de Lotka-Volterra

Plusieurs systèmes d'équations différentielles ont été définis afin de modéliser le problème proie prédateur. Les principaux modèles sont les modèles de Malthus, Verlhust et Lotka-Volterra. Nous

noterons dans les systèmes d'équations de cette partie N et P les deux fonctions du temps représentant les nombres de proies et de prédateurs. Commençons par énoncer les différents systèmes.

L'équation qui régit le modèle de population de Malthus est la suivante

$$\frac{dN(t)}{dt} = \gamma N(t) \quad (\text{Malthus})$$

Ce modèle considère que la variation de population est proportionnelle à la population. La solution de cette équation différentielle est donc une exponentielle.

Quant à lui le modèle de Verlhust est un modèle auto-limitant. Si $N(t)$ est grand devant κ , la variation de population va être négative. Dans ce modèle, N converge vers κ . L'équation qui décrit le modèle de Verlhust est

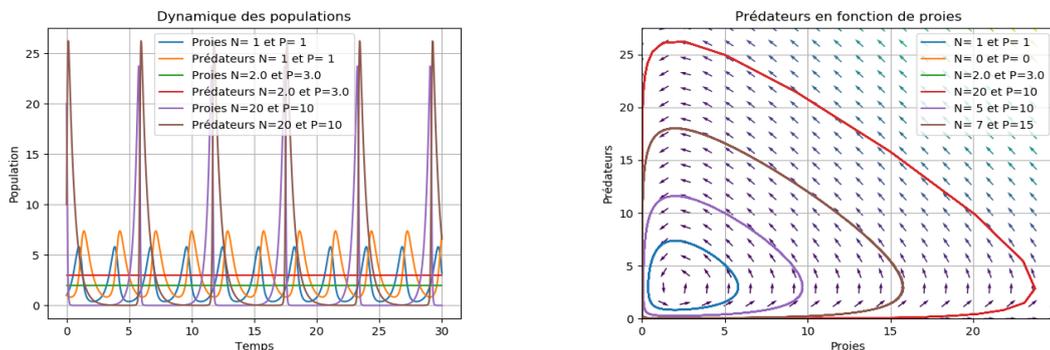
$$\frac{dN(t)}{dt} = \gamma N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{\kappa}\right) \quad (\text{Verlhust})$$

Le modèle qui nous intéresse est celui de Lokta-Volterra qui introduit le nombre de proies. Le modèle est le suivant

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = N(t)(a - bP(t)) \\ \frac{dP(t)}{dt} = P(t)(cN(t) - d) \end{cases} \quad (\text{Lokta-Volterra})$$

Dans le système d'équations, les variables a, b, c et d représentent respectivement le taux de reproduction intrinsèque des proies, le taux de mortalité des proies dû aux prédateurs rencontrés, le taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies mangées et le taux de mortalité intrinsèque des prédateurs.

En posant ce système nous pouvons le résoudre avec les méthodes de la [section 1](#) et donc tracer l'évolution du nombre de proies et de prédateur en fonction du temps étant donné une condition initiale variable, nous pouvons aussi tracer la variation du couple $(N(t), P(t))$ en fonction du temps. Cela est résumé dans la [Figure 3a](#) et la [Figure 3b](#).



(a) Nombres de proies et de prédateurs en fonction du temps

(b) Variation du couple $(N(t), P(t))$ en fonction du temps

FIGURE 3 – Evolution des populations en utilisant le modèle de Lokta Volterra en utilisant des conditions initiales différentes

Nous pouvons réaliser alors une analyse des courbes de la [Figure 3](#). Nous pouvons voir sur la [Figure 3b](#) que les solutions sont représentées par des cercles concentriques. Le champ des vecteurs nous indique le sens de circulation des courbes. Nous pouvons voir aussi que toutes les solutions sont périodiques. Cela est particulièrement visible sur la [Figure 3a](#) où l'on voit plusieurs fois un motif se répéter.

Ces deux figures nous permettent de vérifier un théorème¹, en effet on voit bien que pour n'importe quelle conditions initiales nous avons une succession de 3 phases : le nombre de proies augmente puis le nombre de prédateurs augmente et le nombre de proies diminue. Finalement lorsqu'il n'y a presque plus de proies le nombre de prédateurs diminue radicalement. Et ainsi de suite. Les solutions sont donc périodiques.

Nous pouvons aussi remarquer sur la [Figure 3](#) qu'il apparaît certains points sont des points singuliers (au centre des cercles concentriques et proche de $(0, 0)$). Ce sont les solutions d'équilibre facilement retrouvables en posant

$$\begin{cases} N(t)(a - bP(t)) = 0 \\ P(t)(cN(t) - d) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

1. Toutes les solutions de Lotka Volterra sont périodiques

Cette équation a deux solutions $(N(t), P(t)) = (0, 0)$ et $(N(t), P(t)) = (d/c, a/b)$. c'est solutions d'équilibres traduisent le fait qu'aucune des deux population n'évolue avec ces solutions. Nous le voyons particulièrement sur la Figure 3a que l'évolution des population en prenant $(d/c, a/b)$ comme condition initiale reste constante.

3 Modélisation du problème à trois corps

Afin de modéliser correctement un système à n corps, il est important d'avoir bien défini un système d'équations différentielles. Pour bien cerner le problème nous allons commencer par une modélisation à deux corps.

3.1 Mise en équation

Soient A et B deux corps de masses respectives M_A et M_B positionnées aux coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) . La force qu'exerce A sur B s'écrit donc

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = \frac{GM_A M_B}{\|AB\|^3} \vec{AB} \tag{4}$$

Prenons maintenant le référentiel centré en $(0, 0)$ en deux dimensions (\vec{e}_x, \vec{e}_y) usuel. En décomposant \vec{AB} dans ce référentiel nous obtenons alors pour la force ci dessous

$$\begin{cases} F_{\vec{e}_x} &= -\frac{GM_A M_B (x - x_A)}{((x - x_A)^2 + (y - y_A)^2)^{3/2}} \\ F_{\vec{e}_y} &= -\frac{GM_A M_B (y - y_A)}{((x - x_A)^2 + (y - y_A)^2)^{3/2}} \end{cases} \tag{5}$$

3.2 Application avec 2 corps

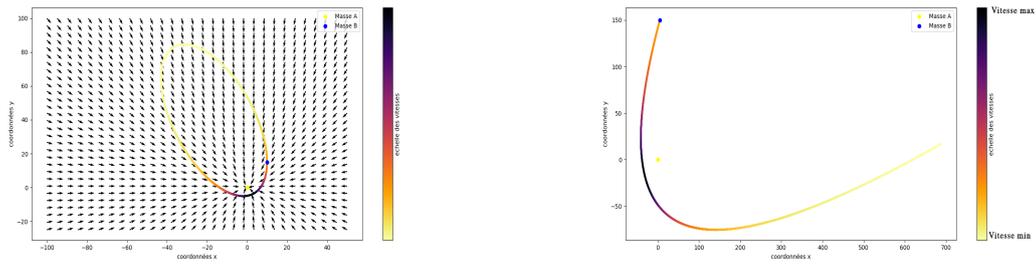
En supposant que $M_A \gg M_B$ nous pouvons dire que A est donc immobile et seul B est en mouvement grâce à la force $\vec{F}_{A \rightarrow B}$. Il suffit d'appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique sur B , nous obtenons alors le systèmes d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} F_1(x) &= M_B \ddot{x} = -\frac{GM_A M_B (x - x_A)}{((x - x_A)^2 + (y - y_A)^2)^{3/2}} \\ F_2(y) &= M_B \ddot{y} = -\frac{GM_A M_B (y - y_A)}{((x - x_A)^2 + (y - y_A)^2)^{3/2}} \end{cases} \tag{6}$$

A partir de ce système nous pouvons poser $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ d'où $Y' = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = F(t, Y)$ avec $F : (t, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}) \mapsto$

$\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \\ F_1(\alpha) \\ F_2(\beta) \end{pmatrix}$. Nous pouvons utiliser des méthodes de résolutions d'équations différentielles pour résoudre ce système, compte tenu des résultats de la sous-section 1.1 nous utiliserons la méthode de Runge-Kutta avec comme conditions initiales $M_A = 1, M_B = 0.01, G = 1, A$ en $(0, 0)$ et B en $(2, 2)$ avec une vitesse initiale $\dot{x} = 1$ et $\dot{y} = 0$. A partir de cela nous pouvons tracer la trajectoire de B autour de A ainsi que la variation de vitesse sur cette trajectoire (en remarquant que $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$), cela est effectué dans la Figure 4

Nous obtenons une figure correcte puisque nous avons une trajectoire elliptique. De plus la vitesse de B augmente lorsqu'elle approche de A ce qui est conforme à la réalité. La figure 4b nous montre l'important des conditions initiales, en effet, la figure possède les mêmes caractéristiques que l'autre mais une vitesse initiale plus élevée. Cela a pour effet de lui faire rapidement quitter son orbite et de quitter le système.



(a) Trajectoire de la masse B autour de la masse A avec une orbite stable et la variation de la vitesse (b) Trajectoire de la masse B autour de la masse A avec une orbite instable et la variation de la vitesse

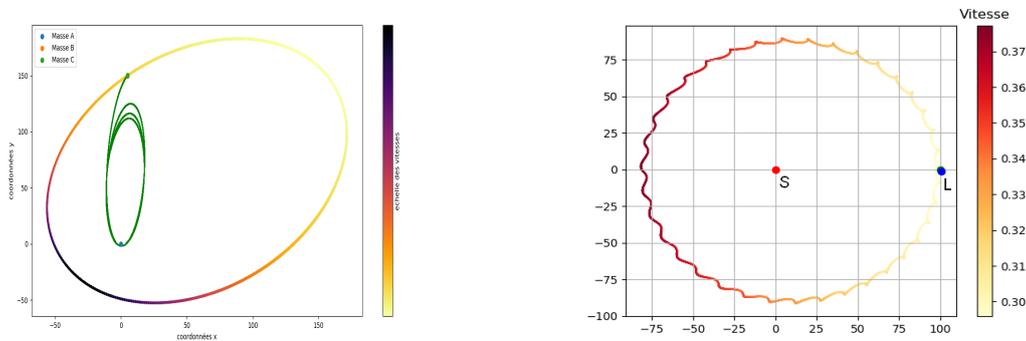
FIGURE 4 – Résolution du système à 2 corps

3.3 Le système à trois corps

Maintenant que nous avons initié le problème à deux corps nous pouvons passer au système à trois corps. Pour simplifier le problème nous supposons que $m_A \gg m_B \gg m_C$ ainsi cela suppose que A est immobile et n'est soumis à aucune force, de plus B est soumis aux forces $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ et $\vec{F}_{C \rightarrow B}$. Finalement C est soumis aux forces $\vec{F}_{A \rightarrow C}$ et $\vec{F}_{B \rightarrow C}$.

Pour fixer les conditions initiales nous avons testé plusieurs conditions jeu de conditions initiales. Cela nous permet de tracer la Figure 5a représentant une execution avec trois corps. Nous pouvons voir que nous avons une trajectoire elliptique pour la masse B autour de A et une trajectoire de C qui semble être élliptique à la fois attiré par A et par B .

Nous avons aussi essayé de recréer la trajectoire de la lune autour du soleil, cependant nous n'avons pas réussi à trouver les conditions initiales (les équations sont justes mais les conditions initiales sont dures à trouver). La Figure 5b nous montre ce que nous aurions du avoir.



(a) Trajectoire de la masse C et B autour de la masse A et vitesse de B sur sa trajectoire (b) Trajectoire théorique de la Terre et de la Lune autour du Soleil

FIGURE 5 – Résolution du système à 3 corps

4 Conclusion

En somme ce projet nous a permis d'approfondir nos connaissances dans la résolution approchée d'équations différentielles et la modélisation de systèmes dynamiques. Tout d'abord nous avons étudié quatre méthodes de résolution des équations différentielles pour mettre en évidence la plus efficace celle de Runge Kutta. Nous avons ensuite appliqué cette méthodes dans deux applications, celle de la modélisation de l'évolution des proies-prédateurs à travers le modèle de Lokta-Volterra. Puis la methode de Runge Kutta a été utilisée pour obtenir les trajectoires de trois corps ayant des masses différentes analogie avec le système Lune Terre Soleil et les différents points de Lagrange. Tous les résultats de ce projet sont concluants.