

**Projet 4**

Méthodes d'interpolation et d'intégration /  
Splines cubiques et interpolation de surface

**Groupe 2 - Equipe 8638**

Responsable : TALBI Anas

Secretary : PAU Marin

Coders : DELPEUCH Sébastien UPTON Benjamin

*Résumé:* Le profil aérodynamique se compose d'une liste de points qui peuvent être divisés en deux parties la surface supérieur de l'aile et sa surface inférieur. Le projet se décompose donc en trois parties, tout d'abord nous devons interpoler les points du profil aérodynamique en une courbe suffisamment lisse, nous utiliserons alors des splines cubiques. Une fois cela fait nous allons approximer la pression de part et d'autre du profil aérodynamique.

## 1 Interpolation

Dans cette première partie nous expliquons la méthode que nous avons utilisé pour réaliser une interpolation.

### 1.1 Elements théoriques sur l'interpolation par splines cubiques

Etant donné que le profil aérodynamique se compose d'une liste de points nous devons interpoler ces points en une courbes suffisamment lisse. Pour ce faire nous allons utiliser la méthode des splines cubiques. En effet lorsqu'on cherche à interpoler sur un segment  $[a, b]$  fonction  $f$  par un polynôme  $P$ , c'est à dire si on cherche un polynôme  $P$  tel qu'en certains points  $a_i$  on ait  $P(a_i) = f(a_i)$ , alors un des problèmes est le phénomène de Runge. Même en augmentant le nombre de points d'interpolation, l'approximation globale peut être mauvaise. En outre le calcul du polynôme  $P$  devient compliqué, pouvant donner lieu à des erreurs d'arrondi.

Vient alors une autre idée qui consiste à utiliser plusieurs polynômes de bas degré sur chaque intervalle  $[a_i, a_{i+1}]$ , et de recoller ces polynômes pour définir une fonction  $S$  sur un l'intervalle tout entier. Il faut évidemment que la fonction  $S$  possède certaines caractéristiques comme sa continuité et sa dérivabilité. Pour résoudre ce problème nous utilisons les splines cubiques.

Déterminer la spline cubique revient à trouver une fonction  $S$  qui coïncide sur chaque intervalle  $[x_i; x_{i+1}]$  avec un polynôme de degré inférieur ou égal à 3. Après quelques manipulation mathématiques, le problème se résume à l'établissement d'un système à résoudre.

En plus des conditions naturellement posée par le problème il faut penser à rajouter 2 conditions, dans notre cas nous prendrons  $S'(x_i) = S'(x_{i+1}) = 0$ , pour avoir un nombre d'inconnues et un nombre d'équation identique. A partir de cela nous pouvons mettre le problème sous forme matricielle, avec  $h_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $m_i = S''(i)$  et  $f_i = y_i$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} & -\frac{1}{h_i} & & & & & 0 \\ -\frac{1}{h_{i-1}} & \frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} & -\frac{1}{h_i} & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & -\frac{1}{h_{i-1}} & \frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} & -\frac{1}{h_i} & & \\ & & & -\frac{1}{h_{i-1}} & \frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} & -\frac{1}{h_i} & \\ & & & & \frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} & -\frac{1}{h_i} & \end{pmatrix}}_T \times \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 \\ \dots \\ m_{n-1} \end{pmatrix}}_m = \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}}_f \quad (1)$$

Nous venons de mettre en lumière la principale difficulté de notre algorithme, en effet nous venons de montrer comment établir  $Tm = f$  et nous cherchons  $m = fT^{-1}$ , nous savons que  $T$  est inversible puisque il n'y a que des membres sur la diagonale étendue. Nous utilisons alors l'algorithme tridiagonal proposé dans le chapitre 3 section 3 du *Numerical Recipes*, qui donnera une complexité linéaire en fonction du nombre de point à notre méthode des splines cubiques.

### 1.2 Mise en place de tests sur la méthodes des splines cubiques

Maintenant que nous avons présenté la théorie et les principes d'implémentations de notre algorithme nous allons désormais contrôler que nous algorithme fournit quelque chose de cohérent. Pour cela nous définissons l'erreur relative entre la valeur connue de  $y$  et la valeur calculée par l'algorithme des splines cubiques  $\delta_1 = \frac{\|y_{reel} - y_{spline}\|}{y_{reel}}$ .

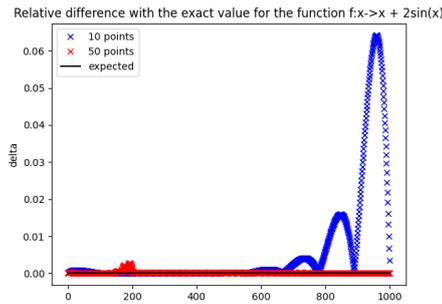


Figure 1: Erreur  $\delta_1$ , fonction  $y = x + 2\sin(x)$  avec l'algorithme des splines cubiques avec 10 et 50 points en fonction des itérations sur  $[0.1, 3]$

Nous voyons sur la figure 1 que la méthode des Splines cubiques arrive à une solution exacte très rapidement autant pour 50 points que pour 10 points. Il est remarquable que en utilisant 10 points parfois la configuration des points nous éloigne de la solution (à un maximum de 6%). Cependant de manière générale l'interpolation nous fournit un résultat correct. Nous pouvons alors passer à la partie suivante

## 2 Mise en place de méthodes d'intégration numérique

Maintenant que nous avons vu comment réaliser l'interpolation, ce qui nous permet de transformer un ensemble de point en une courbe assez lisse. Nous allons pouvoir maintenant passer à l'intégration numérique. L'idée est de réussir à approximer la pression de part et d'autre du profil aérodynamique, il faut pouvoir calculer les longueurs des splines précédemment présentées. Pour cela nous allons réaliser une intégrale spécifique qui dépend de la fonction  $f$ . Cette intégrale est la suivante

$$L([0, T]) = \int_0^T \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad (2)$$

Nous allons maintenant présenter des techniques pour calculer cette intégrale. Toutes les techniques procèdent toutes par trois phases : Décomposition du domaine en morceaux, intégration approchée de la fonction sur chaque morceau, sommation des résultats numériques ainsi obtenus.

Cette partie se décompose en deux phases, tout d'abord nous présentons les 3 méthodes que nous voulons implémenter puis réalisons des tests sur ces méthodes et en profitons pour les comparer entre elles.

### 2.1 Première approche : Méthode des Rectangles

Commençons par une première approche avec la méthode des rectangles, cette méthode, très élémentaire se base sur les sommes de Cauchy-Riemann et appliqué à un fonction  $f$  continue, permet le calcul approché d'intégrales en choisant une subdivision régulière de pas  $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$ . En faisant cela on obtient une succession de rectangles, approchant l'aire sous la courbe, la méthode peut être utilisée de 3 manières soit avec la méthode des milieux (le rectangle est placé au milieu du segment  $x_i, x_{i+1}$ ) avec la méthode gauche (le rectangle est placé sur  $x_i$ ) avec la méthode droite (le rectangle est placé sur  $x_{i+1}$ ). Une fois tous les rectangles positionnés on peut calculer la somme de leurs aires avec la formule  $S_n = h \times \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)$ . Avec  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $x_i = a + i.h$ ,  $c_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}$  si on utilise la méthode des rectangles milieux,  $c_i = x_i$  pour la méthode des rectangles gauche et  $c_i = x_{i+1}$  pour la méthode des rectangles droits. Le passage à la limite de  $S_n$  nous donnera alors l'intégrale cherchée.

Cependant il n'est pas difficile de voir que cette méthode est approximative, en effet les rectangles que nous allons positionner sur la courbe ne vont pas suivre précisément cette dernière, il y aura des zones en excès et des zones en défaut.

#### 2.1.1 Evaluation de l'erreur commise

Une caractérisation de cette erreur peut facilement être réalisée. Si  $f'$  est bornée, c'est à dire  $\exists M_1 = \sup_{c \in [a,b]} |f'(x)|$  alors  $|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - hf(x_i)| \leq M_1 \frac{1}{2} (x_{i+1} - x_i)^2 = M_1 \frac{(b-a)^2}{2n^2}$ . En sommant nous obtenons

$$|\int_a^b f(x) dx - h \sum_{i=0}^{n-1} y_i| \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{2n} \quad (3)$$

En somme cela nous permet de montrer que l'erreur de la méthode des rectangles est en  $\frac{1}{n}$  et cela nous oriente dans notre choix de  $n$ . Pour avoir une précision  $\varepsilon_r$ , on prend  $n > M_1 \frac{(b-a)^2}{2\varepsilon_r}$ .

Même si la méthode des rectangles nous fournit une approximation correcte de l'intégrale, l'erreur en  $\frac{1}{n}$  n'est pas négligeable et cela pourrait être problématique sur une fonction d'ordre supérieur. Nous allons donc étudier d'autres méthodes nous permettant de préciser l'approximation de la valeur de l'intégrale.

## 2.2 Une première amélioration : Méthode des Trapèzes

La première amélioration est la méthode des trapèzes, elle est plus précise que la méthode élémentaire des rectangles. La méthode des trapèzes, remplace tout arc de courbe correspondant à  $[x_i, x_{i+1}]$  par le segment  $[M_i M_{i+1}]$  donc l'aire sous la courbe va être définie par le trapèze  $x_i M_i M_{i+1} x_{i+1}$ . Si nous voulons calculer l'intégrale d'une fonction  $f$  continue sur un intervalle  $[a, b]$  alors comme pour la méthode des rectangles nous choisissons une subdivision régulière de l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  sous-intervalles  $[x_i, x_{i+1}]$  avec  $i$  variant de 0 à  $n$ . Nous avons donc besoin de calculer la somme des aires des trapèzes, chaque trapèze à une hauteur de  $x_{i+1} - x_i$  et de bases respectives  $f(x_i)$  et  $f(x_{i+1})$ . Nous obtenons alors une approximation  $S$  de l'intégrale ainsi

$$S = \frac{b-a}{n} \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \quad (4)$$

### 2.2.1 Evaluation de l'erreur commise

Evaluons un majorant de l'erreur commise, supposons  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'intervalle  $[a, b]$ , l'erreur  $\varepsilon_{t_i}(h)$  sur  $[x_i, x_{i+1}]$  est, selon la formule de l'aire d'un trapèze  $\varepsilon_{t_i}(h) = \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})] - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$ . En sommant les erreurs pour  $i$  variant de 0 à  $n-1$  et en notant  $M_2 = \sup |f''(x)|$  nous obtenons  $\varepsilon_t \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \times M_2$ . Nous pouvons remarquer que contrairement à la méthode des rectangles l'erreur est en  $\frac{1}{n^2}$ , la méthode des trapèzes sera donc plus précise que la méthode élémentaire. Nous obtenons aussi une information sur notre choix de  $n$ , pour avoir une précision  $\varepsilon_t$  nous devons choisir  $n$  tel que  $n > \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon_t}}$

## 2.3 Utilisation de la méthode de Simpson

Le défaut évident du calcul approché d'une intégrale par la méthode des trapèzes est de remplacer grossièrement un arc de courbe  $M_i M_{i+1}$  par le segment  $[M_i M_{i+1}]$ . Ces méthodes fort simples à programmer restent cependant imprécises. Cette méthode apporte une correction très efficace correspondant à la méthode de Newton-Cotes. La méthode de Simpson consiste à grouper trois points consécutifs de la courbe  $M_i, M_{i+1}$  et  $M_{i+2}$  et de remplacer l'arc de courbe passant par ces trois points par un arc de parabole. L'arc de courbe  $C$  est remplacé par l'arc de parabole  $P$  passant par ces trois points. Pour une intégration sur un intervalle  $[a, b]$ , nous regroupons trois par trois les points d'une subdivision. Nous remarquons alors que le nombre  $n$  doit être pair. En utilisant la relation de Chasles pour les intégrales, nous obtenons

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \times (f(x_0) + 4 \sum_{i \text{ impair}} f(x_i) + 2 \sum_{i \text{ pair}} f(x_i) + f(x_n)) \quad (5)$$

### 2.3.1 Evaluation de l'erreur commise

Comme précédemment l'erreur commise  $\varepsilon_s$  par l'approximation de Simpson est  $\varepsilon_{s_i}(h) = \frac{h}{3} \times [f(x_i - h) + 4f(x_i) + f(x_i + h)] - \int_{x_i-h}^{x_i+h} f(x) dx$ . En utilisant la formule de Taylor Lagrange nous pouvons simplifier et obtenir  $\varepsilon_{s_i}(h) = h^5 \left[ \frac{1}{72} f^{(4)}(u_i) + \frac{1}{72} f^{(4)}(v_i) - \frac{1}{60} f^{(4)}(w_i) \right]$ . Avec  $u_i, v_i, w_i \in [x_i - h, x_i + h]$ . En notant  $M_3 = \sup_{x \in [a, b]} f^{(4)}(x)$ , en somme l'erreur globale peut s'exprimer via l'inégalité suivante

$\varepsilon_s \leq M_3 \frac{(b-a)^5}{45n^4}$ . Ainsi, l'erreur théorique est en  $\frac{1}{n^4}$ , ce qui est fort précis en comparaison à la méthode des trapèzes ou à la méthode des rectangles. Cela nous renseigne aussi sur notre choix de  $n$ , pour une précision  $\varepsilon_s$ , nous devons choisir  $n > \sqrt[4]{\frac{M_3(b-a)^5}{45\varepsilon_s}}$

Nous pouvons remarquer que la complexité des trois méthodes dépend de la complexité de  $f$  puisque chaque méthode demande  $n$  appels à  $f$ .

## 2.4 Test et comparaison des trois méthodes

Maintenant que nous avons mis en place nos différentes méthodes nous vérifions leur ordre et nous allons valider les hypothèses sur l'erreur commises pour ces méthodes. Tout d'abord nous calculons les intégrales de fonctions d'ordre 0  $f_0 : x \mapsto 1$ , d'ordre 1  $f_1 : x \mapsto 2x + 1$  et d'ordre 2  $f_2 : x \mapsto 6 \times x^2 - 3 \times x + 1$  sur l'intervalle  $[0, 10]$  avec 10 itérations, l'objectif étant de vérifier l'ordre des différentes méthodes. Nous utilisons l'erreur relative  $\delta_2 = \|I_{\text{reel}} - I_{\text{trouvee}}\|$ , les résultats de ces tests sont disponibles en exécutant notre fichier de test. Ils montrent que globalement les 5 méthodes arrivent à la solution correcte. Nous avons voulu réaliser l'intégrale d'une fonction plus complexe d'ordre 4  $f_4 = x \mapsto 5 \times x^4 - 36 \times x^3 + 6 \times x^2 + 4 \times x + 1$  pour montrer les différences entre les méthodes.

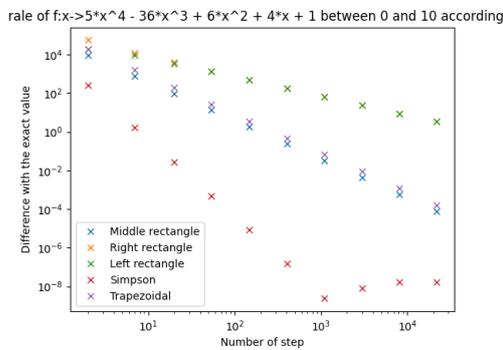


Figure 2: Erreurs relatives  $\delta_2$  sur le calcul de l'intégrale de la fonction  $f_4$  en utilisant les 5 méthodes au bout de 20 000 itérations

Tout d'abord les méthodes des rectangles et du trapèze n'arrivent pas à atteindre la précision demandée en moins de 20 000 itérations, les méthodes des rectangles droits et gauches sont très loin de la précision ( $10^{-4}$ ), la méthode des rectangles milieux et des trapèze obtient des résultats plus satisfaisants.

Seule la méthode de Simpson trouve la solution avec une précision de  $10^{-13}$ . Cela nous ce que nous avons trouvé théoriquement, la méthode de Simpson trouve la solution à la précision demandée plus rapidement que les autres méthodes, là où elle a eu besoin de  $10^3$  itérations, les autres méthodes auraient besoin de  $4 \times 10^{13}$  pour la méthode des rectangles et  $7 \times 10^6$  pour la méthode des trapèzes. Si nous devons trouver la valeur d'une intégrale à une précision  $\epsilon$  près, la méthode de Simpson sera utilisée pour limiter le nombre d'itérations.

Nous avons donc dans cette partie, présenté trois méthodes d'intégration numérique, compte tenu de ses résultats nous pouvons voir que la Méthode de Simpson est la méthode la plus efficace pour réaliser une intégrale, nous réutiliserons donc cette méthode dans la suite du projet.

Nous voyons alors un résultat qui se dégage sur la figure 2, les méthodes des rectangles droits et gauches sont plutôt approximative, au bout de 20 000 itérations elles trouvent un résultat avec une précision de  $10^1$ , les méthodes des rectangles milieux et des trapèzes sont plus précises, elles trouvent le résultat avec une précision de  $10^{-4}$  ce qui commence à être acceptable. La méthode la plus efficace est la méthode de Simpson qui trouve en 100 itérations la solution avec une précision de  $10^{-9}$ .

Il est également possible de demander la calcul de l'intégrale sur une fonction non polynomiale. Par exemple sur la fonction sinus sur l'intervalle  $[0, 3]$  avec 20 000 itérations, la figure 3 calcule l'erreur relative en fonction des itérations.

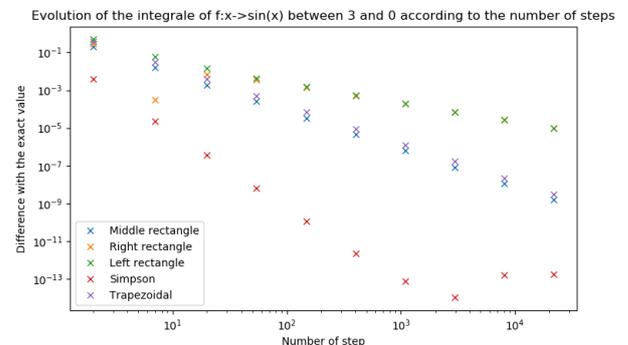


Figure 3: Vitesse de convergence du calcul de l'intégrale de la fonction sinus

### 3 Application à la Modélisation du flux d'air

Maintenant que nous avons défini des méthodes pour interpoler puis pour intégrer des fonctions nous pouvons appliquer ces dernières sur la modélisation du flux d'air. Le but est de dessiner la carte de la pression de l'air autour de l'aile. Nous allons donc dans un premier temps dessiner la forme de l'aile, le flux d'air sera modélisé autour de la partie supérieure et inférieure. Nous supposons que l'aile vole actuellement dans les airs, le flux d'air sera alors laminaire, c'est à dire qu'il peut être divisé en tranches. Nous supposons que le flux d'air n'est perturbé par l'aile que dans un intervalle vertical  $[3h_{\min}, 3h_{\max}]$ . En dehors de cet intervalle, l'air s'écoule de façon rectiligne. Soit  $y = f(x)$  la courbe représentant la surface supérieur de l'aile obtenue par interpolation. La famille de courbe décrivant le flux d'air au dessus de l'aile est donnée par l'équation

$$y = f_{\lambda}(x) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda \times 3h_{\max} \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad (6)$$

Celui au dessous de l'aile est obtenu par

$$y = f_{\lambda}(x) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda \times 3h_{\min} \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad (7)$$

Pour un  $\lambda$  fixe, cette équation définit une courbe située entre le côté supérieur de l'aile et l'altitude maximale au-delà de laquelle l'air n'est pas perturbé par l'aile.

Commençons par tracer la forme et de l'aile et les différents flux d'air, pour ce faire nous réalisons une interpolation avec les données à notre disposition, nous calculons ensuite les  $f_{\lambda}$  au dessus et au dessous, à la fin nous obtenons la figure 4.

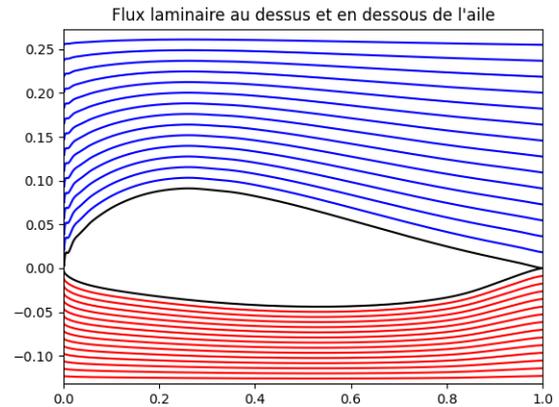


Figure 4: Dessin de l'aile et du flux d'air laminaire autour de l'aile

Nous pouvons voir que le dessin de l'aile et des différents flux laminaire est cohérent, nous pouvons donc continuer notre modélisation, l'idée maintenant est de calculer la pression sur chaque tranche. L'air est censé circuler le long des courbes  $f_{\lambda}$  sur chaque partie de l'aile. Nous supposons alors que l'air est un fluide qui s'applique à la loi de Bernoulli et que  $P$  est constant sur toute la zone donc que les variations seront uniquement liées aux variations de vitesse de l'air

$$P = P_s + P_d$$

$$P_d = \frac{1}{2}\rho \times V^2$$

Résumons la situation nous avons une série de courbe représentant l'aile et les différents flux laminaires, nous voulons calculer la pression, pour ce faire nous calculons la longueur de la courbe avec l'équation (2), une fois la longueur obtenue nous pouvons la dériver et obtenir la vitesse associée à ce flux laminaire. Le calcul de la pression est alors faisable en prenant comme paramètre  $\rho = 0.605$  (densité moyenne de l'air à 20 C), nous pouvons alors tracer une carte de la pression autour de l'aile

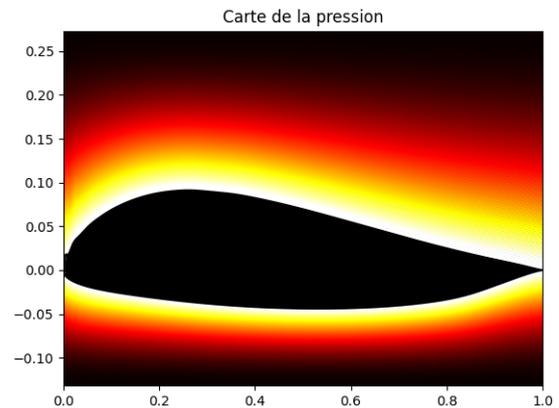


Figure 5: Carte de la pression autour de l'aile

Nous avons donc sur la figure 5 la répartition de la pression autour de l'aile. Cela nous montre que l'air circule plus vite sur l'extrados que sur l'intrados ce qui est normal parce que l'air doit parcourir un chemin plus long. La vitesse plus élevée au dessus de l'aile crée alors une dépression qui participe à la portance de l'aile.