

Exercice 1

Application immédiate du corollaire 3.1, en utilisant le fait que $\mathbb{N}$ est dénombrable

Exercice 2

$\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^* = \mathbb{Q}_+^*$ On a vu en cours que

$$\varphi: \frac{p}{q} \mapsto (p, q) \text{ où } p/q \text{ est irréductible}$$

est une injection de $\mathbb{Q}_+^* \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Comme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable

De même on en conclut avec le corollaire 3.1 que $\mathbb{Q}_+^*$ est dénombrable.

De même $\mathbb{Q}_-^*$ est dénombrable (par $\psi(x) = -x$ bijection de $\mathbb{Q}_-^* \rightarrow \mathbb{Q}_+^*$ et finalement $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+^* \cup \mathbb{Q}_-^* \cup \{0\}$ est dénombrable par la propriété de réunion (théorème 5).

Exercice 3

$$1) \Omega = \{(P), (F, P), (F, F, P), \dots, (F, \dots, F, P)\} \cup \{(F, \dots, F)\}$$

Soit F_m on obtient face au m -ième lancer.

Soit B_m le 1^{er} pile sort au lancer m . $\Rightarrow$ on cherche à calculer

$$P(B_m).$$

$p \in]0, 1[$, $P(F_m) = 1-p$ et $P(F_m^c) = p \forall m$ (les événements F_m sont indépendants)

$$P(B_1) = P(F_1^c) = p$$

$$\forall m \geq 2 \quad P(B_m) = P(F_1 \cap \dots \cap F_{m-1} \cap F_m^c) = (1-p)^{m-1} \cdot p \quad (\text{géométrie de raison } p)$$

$$P(B_\infty) = \lim_{m \rightarrow +\infty} P(F_1 \cap \dots \cap F_m) = \lim_{m \rightarrow +\infty} (1-p)^m = 0$$

Si $p = 1 \rightarrow$ on peut appliquer la formule précédente

$p = 0 \rightarrow$ on a bien $P(B_m) = 0 \forall m$ et $P(B_\infty) = 1$.

$$2) A_m = F_1 \cap \dots \cap F_m$$

$$P(A_m) = P(F_1 \cap \dots \cap F_m) = (1-p)^m$$

$$3) B_\infty = \{(F, \dots, F, \dots)\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$$

A_m suite décroissante d'ensembles. D'après 8.b,

$$P(B_\infty) = P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} P(A_m) = \lim_{m \rightarrow +\infty} (1-p)^m = \begin{cases} 1 & \text{si } p=0 \\ 0 & \text{si } p>0 \end{cases}$$

Exercice 4 On suppose que la pièce est équilibrée ($p=1/2$)

1) $\Omega = \left\{ (1,B), (2,B), (2,N), (3,B), (3,N), \dots, (m,B), (m,N) \right\} \cup \{\infty\}$

2) Soit $\forall i \geq 1$, F_i = on obtient face au i -ème lancer de la pièce.

$$P(U_1) = P(F_1^c) = 1/2$$

$$P(U_m) = P(F_1^c \cap \dots \cap F_{m-1}^c \cap F_m^c) = (1-p)^{m-1} p = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} p = \frac{1}{2^m}$$

Soit U_∞ = "on obtient jamais pile" = $\{\infty\}$

$$P(U_\infty) = \lim_{m \rightarrow +\infty} P(F_1^c \cap \dots \cap F_m^c) = \lim_{m \rightarrow +\infty} (1-p)^m = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^m} = 0$$

$$\begin{aligned} 3) P(B) &= \sum_{m=1}^{+\infty} P((m,B)) = \sum_{m=1}^{+\infty} P(U_m \cap B) = \sum_{m=1}^{+\infty} P(U_m) \cdot \underbrace{P(B|U_m)}_{1/2} \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^m} \end{aligned}$$

Rappel: $x \in]-1, 1[$ $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x} + O(x^{m+1})$

$$\Rightarrow P(B) = -P_m(1/2) = P_m(2)$$

$$1) P_B(U_1) = \frac{P(U_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|U_1) \cdot P(U_1)}{P(B)} = \frac{1}{2 P_m(2)}$$

Exercice 5 Si on ne modifie pas le contenu de l'urne, alors

La probabilité de ne jamais tirer une boule blanche vaut

$$P(\bar{C}_R) = \left(\frac{3}{4}\right)^R$$

$$P\left(\bigcap_{R=1}^{\infty} \bar{C}_R\right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^R = 0$$

1a) Pour $m \geq 1$, $\varphi(m) = 4 + \sum_{R=1}^{m-1} g(R) = m+3$

$$\begin{aligned} b) \varphi(m) &= 4 + \sum_{R=1}^{m-1} (2R+3) \\ &= 4 + 2 \sum_{R=1}^{m-1} R + 3(m-1) \\ &= 4 + m(m-1) + 3(m-1) \\ &= m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \varphi(m) &= 4 + 4 \sum_{R=1}^{m-1} (2R+1) \\ &= 4 + 4m(m-1) + 4(m-1) \\ &= 4m^2 \end{aligned}$$

$$2) P(\bar{C}_R) = \prod_{i=1}^R \frac{\varphi(i)-1}{\varphi(i)} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{R+3-1}{R+3} = \frac{3}{R+3}$$

$$P\left(\bigcap_{R=1}^{\infty} \bar{C}_R\right) = \lim_{R \rightarrow +\infty} P(\bar{C}_R) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

$$P(\bar{E}_R) = \prod_{i=1}^R \frac{(1+i)^2 - 1}{(1+i)^2} = \prod_{i=1}^R \frac{i(i+2)}{(i+1)^2} = \prod_{i=1}^R \frac{i(i+2)}{(i+1)(i+1)} = \frac{\prod_{i=1}^R i+2}{\prod_{i=1}^R i+1} = \frac{R}{\prod_{i=1}^R \frac{i+1}{i}} = \frac{R}{2 \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{R+1}{R}} = \frac{R+2}{2(R+1)}$$

$$P(\text{jama'is tirer de boule blanche}) = P(\bigcap_{R=1}^{+\infty} \bar{E}_R) = \lim_{R \rightarrow +\infty} P(\bar{E}_R) = 1/2$$

$$\begin{aligned} \varphi(m) &= 4m^2 \quad (1) \\ P(\bar{E}_R) &= \prod_{m=1}^R \frac{\varphi(m)-1}{\varphi(m)} = \prod_{m=1}^R \frac{4m^2-1}{4m^2} = \prod_{m=1}^R \frac{(2m-1)(2m+1)}{(2m)^2} = \prod_{m=1}^R \frac{2m(2m-1)}{(2m)^2} \prod_{m=1}^R \frac{2m(2m+1)}{(2m)^2} \\ &= \frac{(2R+1)(2R)!}{2^{2R} R!^2} \quad (2) \\ &= \frac{(2R+1)(2R)!}{2^{2R} R!^4} \quad (3) \end{aligned}$$

Rappel: formule de Stirling

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

$$(2R)! \sim (2R)^{2R} e^{-2R} \sqrt{4\pi R}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } P(\bar{E}_R) &\sim \frac{2R (2R)^{2R} e^{-2R} \sqrt{4\pi R}}{2^{2R} R!^4} \\ &\sim \frac{2}{\pi} \frac{(2R)^{2R}}{2^{2R} R!^4} e^{-2R} (2\pi R)^2 \sim \end{aligned}$$

Exercice 2

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \\ &= P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - [P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)] \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

Exercice 4

$$1) \sum_{m \geq 0} P(\{m\}) \stackrel{?}{=} 1$$

$$\sum_{m \geq 0} P(\{m\}) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$m = 10m + R$ avec $R \in \{0, \dots, 9\}$ (division euclidienne) R représente le chiffre des unités de l'entier m .

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

$$\begin{aligned} \forall 0 \leq R \leq 9, P_X(R) &= P(X=R) = P(R) + P(10+R) + P(20+R) + \dots + P(10m+R) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} P(\{10m+R\}) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{10m+R+1}} = \frac{1}{2^{R+1}} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{10}}\right)^m \\ &= \frac{1}{2^{R+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{10}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{En effet } \sum_{R=0}^{+\infty} P(X=R) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{10}}} \sum_{R=0}^9 \frac{1}{2^{R+1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{10}}} \frac{1}{2} \sum_{R=0}^9 \frac{1}{2^R} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{10}}} \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \end{aligned}$$

question Comment définir $P(m)$ pour que la loi de X soit une loi uniforme discrète sur $\{0, \dots, 9\}$ i.e. $P(X=R) = \frac{1}{10}$ $\forall 0 \leq R \leq 9$

Soit $(p_m)_{m \geq 0}$ une suite de réels positifs tels que $\sum_{m=0}^{+\infty} p_m = 1$
 $\forall m \in \mathbb{N}$, on écrit la division euclidienne $m = 10m + R$ avec
 $m \geq 0$ et $R \in \{0, \dots, 9\}$, et on pose $P(m) = \frac{p_m}{10}$

Alors

$$1) \sum_{m \geq 0} P(m) = \sum_{m \geq 0} \sum_{R=0}^9 P(10m + R) = \sum_{m \geq 0} \sum_{R=0}^9 \frac{p_m}{10} = \frac{1}{10} \sum_{m=0}^9 10 p_m = 1$$

$$2) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{p_m}{10} = \frac{1}{10} \sum_{m=0}^{+\infty} p_m = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow X \sim \mathcal{U}(\{0, \dots, 9\})$$

Exercice 9 | Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $E(X) = \lambda$ et $\text{Var}(X) = \lambda$

1) On se donne l'hypothèse que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (Poi de Poisson de paramètre λ d'où $E(X) = \text{mbn voiture arrivant} = \lambda$)

$$2) Y + Z = X \Rightarrow Z = X - Y$$

3) On veut calculer $P(X=m, Y=k)$, $\forall k \leq m$

$$P(X=m, Y=k) = P(Y=k | X=m) P(X=m)$$

La Poi de Y sachant $X=m$ (ou conditionnellement à $X=m$) est une Poi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$

$$\text{D'où } P(Y=k | X=m) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k} \text{ et donc}$$

$$P(X=m, Y=k) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k} \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}$$

$$(P(X=m, Y=k) = 0 \quad \forall k > m)$$

Soit $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{ème voiture se présentant à la pompe prend du diesel} \\ 0 & \text{essence} \end{cases}$

On suppose que les v.a. $X_i, i \geq 1$ sont indépendantes. Elles sont donc i.i.d de la Poi $\mathcal{B}(p)$

D'où $\forall m \geq 0$, $X_1 + \dots + X_m$ suit la Poi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$

$$P(X=k | X=m) = \frac{P(Y=k, X=m)}{P(X=m)} = \frac{P(X_1 + \dots + X_m = k, X=m)}{P(X=m)}$$

on suppose que la v.a. X est indépendante de v.a.

$$X_i, i \geq 1 \text{ D'où } P(Y=k | X=m) = P(X_1 + \dots + X_m = k) \frac{P(X=m)}{P(X=m)}$$

$$= P(X_1 + \dots + X_m = k) = P(\mathcal{B}(m, p) = k) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k} \frac{P(X=m)}{P(X=m)}$$

Remarque : on peut écrire $Y = \sum_{R=0}^{+\infty} X_R \mathbb{1}_{\{X \geq R\}}$ (avec $X_0 = 0$)

$$P(X=m, Y=R) = P(Y=R | X=m) P(X=m) = C_m^R p^R (1-p)^{m-R} e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} \quad \begin{matrix} \text{Proba} \\ (R \leq m) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} 4) P(Y=R) &= \sum_{m=R}^{+\infty} P(X=m, Y=R) = \sum_{m=R}^{+\infty} \frac{\lambda^m}{R!(m-R)!} e^{-\lambda} p^R (1-p)^{m-R} \\ &= e^{-\lambda} \frac{p^R}{R!} \sum_{m=R}^{+\infty} \frac{\lambda^m}{(m-R)!} (1-p)^{m-R} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^R p^R}{R!} \sum_{m=R}^{+\infty} \frac{\lambda^{m-R} (1-p)^{m-R}}{(m-R)!} \end{aligned}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^R}{R!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^R}{R!} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^R}{R!} \quad \begin{matrix} \text{La loi de } Y \text{ est la loi de} \\ \text{Poisson } \mathcal{P}(\lambda p) \end{matrix}$$

Remarque : $E(Y) = \lambda p = E(X) \cdot p$

$$= E(X) \cdot E(X_1) \text{ avec } X_1 \sim \mathcal{B}(p)$$

On a $Z \sim \mathcal{P}(\lambda(1-p))$

$$5) P(Y=R, Z=m) \stackrel{?}{=} P(Y=R) \cdot P(Z=m)$$

$$P(Y=R, Z=m) = P(Y=R, X=m+R) = \frac{\lambda^{m+R}}{R!m!} e^{-\lambda} p^R (1-p)^m$$

$$P(Y=R) P(Z=m) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^R}{R!} \times e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{R!m!} \lambda^{m+R} p^R (1-p)^m$$

Exercice 5 Soit X la v.a. égale au nombre de pièces défectueuses parmi les n pièces.

La loi de X est la loi hypergéométrique

Loi hypergéométrique : Soit une urne contenant N boules, dont M boules blanches (et $N-M$ boules noires). On effectue des tirages sans remise $\forall 1 \leq i \leq n$, on pose $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{ème boule est blanche} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ le nombre de boules blanches tirées (les X_i ne sont pas indépendants).

$$\text{Alors } S_n \leq n \text{ et } S_n \leq M \Rightarrow S_n \leq \min(n, M)$$

$$S_n \geq 0 \text{ et } n - S_n \leq N - M \Rightarrow S_n \geq n - (N - M) \Rightarrow$$

$$S_n \geq \max(0, n - (N - M))$$

$$\forall k \in [\max(0, m - (N-m)), \min(m, m)]$$

$$P(S_m = k) = \frac{C_m^k C_{N-m}^{m-k}}{C_N^m}$$

$$E(S_m) = m \cdot \frac{M}{N} = m \cdot p, \quad \text{Var}(S_m) = m \cdot \frac{M}{N} \left(\frac{N-M}{N} \right) \frac{N-m}{N-1} = mp(1-p)$$

Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale

On suppose qu'on sait tirer N vers l'ingini, mais que $p = \frac{M}{N}$

reste constant on peut écrire $M = pN$

$$\text{Alors } \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{C_m^k C_{N-M}^{m-k}}{C_N^m} = C_m^k p^k (1-p)^{m-k} = P(\mathcal{B}(m, p) = k)$$

En pratique, on admet habituellement que $P(H(N, m, M) = k)$

$$= P(\mathcal{B}(m, p) = k) \quad \text{avec } p = \frac{M}{N} \quad \text{dès que } \frac{m}{N} \leq 0,1$$

1) La loi de $X \Rightarrow$ la loi hypergéométrique

$$H(1000, 100, 30)$$

$$P(X=5) = \frac{\binom{30}{5} \binom{970}{95}}{\binom{1000}{100}} = 0,1025$$

2) La loi binomiale $\mathcal{B}(100, 0,03)$ $P(X=5) = C_{100}^5 0,03^5 0,97^{95} = 0,1013$

Nous sommes en condition d'application de l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson.

$$m > 30$$

$$p < 0,1$$

$$mp \leq 15$$

$$P(\mathcal{B}(m, p) = k) \approx P(\mathcal{P}(mp) = k)$$

$$k=5, m=100, p=0,03 \Rightarrow P(\mathcal{P}(3) = 5) = e^{-3} \frac{3^5}{5!} = 0,1008$$

Exercice 3

A: "Le joueur qui commence gagne"

B: "L'autre joueur gagne"

X = nombre de lance de dé on obtient "G" pour la première fois $X \sim G(1/6)$ $P(X=m) = \left(\frac{5}{6}\right)^{m-1} \frac{1}{6}$

$$P(A) = P(X=1) + P(X=3) + P(X=5) + \dots + P(X=2k+1) + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=2k+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2k} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2k} = \frac{1}{6} \frac{1}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{6}{11}$$

C: "On n'obtient jamais G"

$$P(C) = P(X=+\infty) = \lim_{m \rightarrow +\infty} P(X > m)$$

$$= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^m = 0$$

$$A \cup B \cup C = \Omega \Rightarrow P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

$$D'où P(B) = 1 - P(A) = \frac{5}{11}$$

Exercice 8 $\forall m \geq 1, n \geq 1$

$$P(X=m, Y=m) = \frac{C}{2^{m+n+1}}$$

$$1) \text{ On a } \sum_{\substack{m \geq 1 \\ n \geq 1}} P(X=m, Y=m) = 1 \Leftrightarrow C \cdot \sum_{m, n} \frac{1}{2^{m+n+1}} = 1$$

$$\Leftrightarrow C \cdot \frac{1}{2} \sum_{m, n} \frac{1}{2^{m+n}} = 1 \Leftrightarrow \frac{C}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_{m \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^m \right) \left(\frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow C = 2$$

$$2) P(X=m) = \sum_{n \geq 1} P(X=m, Y=m) \\ = \sum_{n \geq 1} \frac{2}{2^{m+n+1}}$$

$$= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^{m+n}} = \frac{1}{2^m} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^m}$$

$$\text{De même } P(Y=m) = \frac{1}{2^m}$$

La loi de X est la loi géométrique de paramètre $p=1/2$

$$P(X=m) = (1-p)^{m-1} \cdot p = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^m} \quad \text{et également}$$

$$\text{De plus } P(X=m, Y=m) = \frac{1}{2^{m+m}} = \frac{1}{2^m} \times \frac{1}{2^m} = P(X=m) \times P(Y=m)$$

donc X et Y sont indépendants

Exercice 7 $\{X=R\} = \{X \leq R\} \setminus \{X < R\} = \{X \leq R\} \setminus \{X \leq R-1\}$

$$= \{X \geq R\} \setminus \{X > R\}$$

$$= \{X > R-1\} \setminus \{X > R\}$$

$$\text{Donc } P(X=R) = P(X \leq R) - P(X \leq R-1) = F_X(R) - F_X(R-1)$$

Exercice 1

 X_1 : n° du tirage du 1^{er} "pile" X_2 : n° du tirage du 2^{ème} "pile" $X_1 \sim G(1/2)$ On veut calculer $X_2 \sim Pa(2, 1/2)$ $P(X_1=R, X_2=m) = ? \quad \forall m > R$

$$P(X_1=R, X_2=m) = P(X_1=R, X_2-X_1=m-R)$$

 $X_2-X_1 \sim G(1/2)$ et X_1 et X_2-X_1 sont indépendants

$$P(X_1=R, X_2=m) = P(X_1=R) P(X_2-X_1=m-R)$$

$$= \frac{1}{2^R} \frac{1}{2^{m-R}} = \frac{1}{2^m}$$

Si la pièce n'est pas équilibrée $P(\text{"pile"}) = p$ $X_1 \sim G(p)$ $X_2 \sim Pa(2, p)$, $X_2-X_1 \sim G(p)$ indépendants de X_1

$$\begin{aligned} \text{Donc } P(X_1=R, X_2=m) &= P(X_1=R) \cdot P(X_2-X_1=m-R) = \frac{(1-p)^{R-1}}{p} \times \frac{(1-p)^{m-R}}{p} \cdot p \\ &= (1-p)^{m-2} p^2 \end{aligned}$$

Exercice 2

Soit $X \sim P(\lambda)$

$$P(X=R) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^R}{R!}$$

on pose $\gamma = R-1$

$$\zeta(X) = e^{-\lambda} \lambda \sum_{\gamma=0}^{+\infty} \frac{\lambda^\gamma}{\gamma!} = e^{-\lambda} \lambda e^\lambda = \lambda$$

Soit $X \sim G(p)$

$$P(X=R) = (1-p)^{R-1} p \quad \forall R > 1$$

$$\text{Donc } \zeta(X) = \sum_{R=1}^{+\infty} R (1-p)^{R-1} p$$

$$= p \sum_{R=1}^{+\infty} R q^{R-1} \quad \text{avec } q=1-p$$

Soit la série entière $\sum |z|^m$. Son rayon de convergence est $R=1$ d'où $\forall z$ tel que $|z| < 1$, on peut dériver la série terme

$$\text{à terme donc } \sum_{R=1}^{+\infty} R p^{R-1} = \left(\sum_{R=0}^{+\infty} q^R \right)' = \left(\frac{1}{1-q} \right)'$$

$$\Rightarrow \zeta(X) = p \frac{1}{(1-q)^2} = p \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$p=1 \Rightarrow P(X=1)=1 \text{ et } \forall R \geq 2, P(X=R)=0 \Rightarrow F(x)=1$$

$$\Rightarrow p=0 \Rightarrow P(X=+\infty)=1 \Rightarrow F(x)=+\infty$$

Soit $X_n \sim Pa(n, p)$ On a $X_n = X_1 + (X_2 - X_1) + \dots + (X_n - X_{n-1})$

avec $\forall i, X_i - X_{i-1} \sim G(p)$

Donc $F(X_n) = \underbrace{F(X_1)}_{1/p} + \underbrace{F(X_2 - X_1)}_{1/p} + \dots + \underbrace{F(X_n - X_{n-1})}_{1/p} = n/p$

Soit $X \sim P(\lambda)$ Calculer $F(1/(1+x))$

$$F(1/(1+x)) = \sum_{R=0}^{+\infty} \frac{1}{1+R} P(X=R)$$

$$= \sum_{R=0}^{+\infty} \frac{1}{1+R} e^{-\lambda} \frac{\lambda^R}{R!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{R=0}^{+\infty} \frac{\lambda^R}{(R+1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{1}{\lambda} \sum_{R=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{R+1}}{(R+1)!}$$

$$\sum_{R=1}^{+\infty} \frac{\lambda^R}{R!} = e^{\lambda} - 1$$

$$= \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda} (e^{\lambda} - 1) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$$

Exercice 5 Rappel: $\forall A \in \mathcal{F}, 1_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\omega \mapsto 1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

$$F(1_A) = 1 \cdot P(1_A=1) + 0 \cdot P(1_A=0) = P(1_A=1) = P(A) \text{ (car } 1_A(\omega)=1 \text{ si } \omega \in A)$$

$$Z = Z \cdot 1_{\{Z \geq a\}} + Z \cdot 1_{\{Z < a\}}$$

$$\geq a \cdot 1_{\{Z \geq a\}} + Z \cdot 1_{\{Z < a\}}$$

$$\geq a \cdot 1_{\{Z \geq a\}} \Rightarrow F(Z) \geq a \cdot F(1_{\{Z \geq a\}})$$

Exercice 8 $X \sim P(\lambda)$ (loi de poisson) on sait que $F(x) = \lambda$

$$F(X^2) = \sum_{R=0}^{+\infty} R^2 P(X=R)$$

$$= \sum_{R=0}^{+\infty} R^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^R}{R!} \quad (R^2 = R(R-1) + R)$$

$$= \sum_{R=1}^{+\infty} R(R-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^R}{R!} + \sum_{R=0}^{+\infty} R e^{-\lambda} \frac{\lambda^R}{R!}$$

$$= \sum_{R=2}^{+\infty} R(R-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^R}{R!} + \lambda$$

$$= \sum_{R=2}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^R}{(R-2)!} + \lambda$$

$$= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

7
Pois

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = \lambda$$

$X \sim G(p)$ (loi géométrique)

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(X=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1) P(X=k) + \sum_{k=1}^{+\infty} k P(X=k)$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) p(1-p)^{k-1} + 1/p$$

$$= p(1-p) \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) q^{k-2} + \frac{1}{p} \quad (q=1-p)$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} k^2(k-1) q^{k-2} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 q^k \right)''$$

$$= \left(\frac{1}{1-q} \right)'' = \left(\frac{1}{(1-q)^2} \right)'$$

$$= \frac{2}{(1-q)^3}$$

$$\text{Donc } \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

$$X_n \sim Pa(n, p)$$

$$X_n = X_1 + (X_2 - X_1) + \dots + (X_n - X_{n-1})$$

$$\underbrace{G(n)}_{G(n)} \quad \underbrace{G(n)}_{G(n)} \quad \dots \quad \underbrace{G(n)}_{G(n)}$$

De plus, les variables aléatoires sont indépendantes

$$\Rightarrow \text{Var}(X_n) = n \cdot \frac{1-p}{p^2}$$

Exercice 6 Soit $\forall i \geq 1$, $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on tire une boule blanche au tirage} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$(X_i)_{i \geq 1}$ i.i.d de la $\mathcal{B}(p)$

$$E(X_i) = P(X_i=1) = p \quad \text{et} \quad \text{Var}(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

$$\text{Posons } S_m = \sum_{i=1}^m X_i \quad \text{et} \quad \bar{X}_m = \frac{S_m}{m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i \quad (\text{moyennage d'échantillon})$$

Remarque: $S_m \sim \mathcal{B}(m, p)$, $E(S_m) = mp$ et $\text{Var}(S_m) = mp(1-p)$

$$E(\bar{X}_m) = \frac{1}{m} E(S_m) = p$$

$$\text{Var}(\bar{X}_m) = \frac{1}{m^2} \text{Var}(S_m) = \frac{p(1-p)}{m}$$

D'après B.T

$$P(|\bar{X}_m - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{m\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow P(p - \varepsilon < \bar{X}_m < p + \varepsilon) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{m\varepsilon^2}$$

Maximum de $p(1-p)$ sur $[0, 1]$ atteint pour $p = 1/2$ et vaut $1/4$

$$\begin{aligned} p(1-p) &= p - p^2 = -(p^2 - p + 1/4) + 1/4 \\ &= -(p - 1/2)^2 + 1/4 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } P(p - \varepsilon < \bar{X}_m < p + \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4m\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow P(\bar{X}_m - \varepsilon < p < \bar{X}_m + \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4m\varepsilon^2}$$

On dit que l'intervalle $]\bar{x}_m - \varepsilon, \bar{x}_m + \varepsilon[$ est un intervalle de confiance de niveau $\geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$ pour le paramètre μ .

Exercice 1 $V_{\text{on}}(X) = 0$

1)

On déduit du résultat de la question 1 que

$$P(|X - E(X)| > 0) = \lim_{m \rightarrow +\infty} P(|X - E(X)| > 1/m) = 0$$

$$(\text{car } \{|X - E(X)| > 0\} = \bigcup_{m \geq 1} \{|X - E(X)| > 1/m\})$$

Autre raisonnement Soit X une va. discrète. Supposons qu'il existe au moins 2 valeurs $a \neq b$ avec

$$P(X=a) = \alpha > 0 \quad \text{et} \quad P(X=b) = \beta > 0$$

$$V_{\text{on}}(X) = \sum_{x \in X(\omega)} (x - E(X))^2 P(X=x)$$

$$> (a - E(X))^2 \alpha + (b - E(X))^2 \beta > 0$$

$$> \min[(a - E(X))^2 \alpha, (b - E(X))^2 \beta] > 0$$

Exercice 3

$$\cosh(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

$$P(X=m) = \frac{1}{\cosh(x)} \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

$$G_X(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} P(X=m) z^m$$

$$= \frac{1}{\cosh(x)} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} z^m$$

$$= \frac{1}{\cosh(x)} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(x\sqrt{z})^{2m}}{(2m)!}$$

$$= \frac{1}{\cosh(x)} \cosh(x\sqrt{z}) \quad (z \in \mathbb{C})$$

$$z > 0, \quad G_X(z) = \frac{1}{\cosh(x)} (x\sqrt{z})$$

$$G'_X(z) = \frac{1}{\cosh(x)} \frac{x}{2\sqrt{z}} \sinh(x\sqrt{z})$$

$$\Rightarrow G'_X(1) = \frac{1}{\cosh(x)} \frac{x}{2} \sinh(x)$$

$$= \frac{1}{2} x \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{1}{2} x \tanh(x)$$

$$z < 0, \quad z = -|z| \Rightarrow G_X(z) = \frac{1}{\cosh(x)} \times \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{2m} (-|z|)^m}{(2m)!}$$

$$= \frac{1}{\cosh(x)} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m (x\sqrt{|z|})^{2m}}{(2m)!}$$

$$= \frac{1}{\cosh(x)} \cosh(x\sqrt{|z|})$$

Autre méthode : $G_X(z) = \frac{1}{\cosh(x)} \cosh(x\sqrt{|z|})$

$$\cosh(iy) = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \cos(y)$$

Exercice 4

$$X \sim U([2, \dots, 12])$$

$$1) \quad P(X=k) = \frac{1}{11} \quad \forall \quad 2 \leq k \leq 12$$

Alors $U = X - 2 \sim U([0, \dots, 10])$

$$P(U=k) = \frac{1}{11}, \quad \forall \quad 0 \leq k \leq 10$$

$$G_U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{11} z^k = \frac{1}{11} \frac{1-z^{11}}{1-z}$$

$$G_X(z) = G_{U+2}(z) = \zeta(z^U) \cdot z^2$$

$$= z^2 \cdot \frac{1}{11} \frac{1-z^{11}}{1-z}$$

$$= \frac{1}{11} (z^2 + \dots + z^{12})$$

$$= \frac{1}{11} z^2 [1 + \dots + z^{10}]$$

Racine de $G_X(z)$: 0 d'ordre 2 ;
 les racines 11^{es} de l'unité (sauf 1)
 $z_k = \exp(i \frac{2k\pi}{11}) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$2) \quad \text{Soit } p_m = P(X_1 = m) \quad 1 \leq m \leq G$$

$$q_m = P(X_2 = m) \quad 1 \leq m \leq G$$

$$G_{x_1}(z) = \sum_{m=1}^6 p_m z^m = z \sum_{m=1}^6 p_m z^{m-1}$$

$$G_{x_2}(z) = \sum_{m=1}^6 q_m z^m = z \sum_{m=1}^6 q_m z^{m-1}$$

$$G_{x_1+x_2}(z) = G_{x_1}(z) G_{x_2}(z) = z^2 Q_1(z) Q_2(z)$$

• si $p_1 = 0$ ou $q_1 = 0$, alors on peut factoriser par z^3 dans $G_{x_1+x_2}$ (0 racine d'ordre 3 au minimum) donc $G_{x_1+x_2} \neq G_x$

• si $p_6 = 0$ ou $q_6 = 0$ alors $Q_1 Q_2$ serait un polynôme de degré ≤ 5 et donc on ne peut pas avoir $G_x = G_{x_1+x_2}$

On suppose $q_1 > 0$ $p_1 > 0$ $q_6 > 0$ $p_6 > 0$

$Q_1(z)$ polynôme de degré 5 ne s'annulant pas en 0.

Or $Q_1(z)$ a nécessairement une racine réelle non nulle. En effet G_x est de degré impair, et si z_0 sont les racines de Q , alors $\bar{z}_0$ l'est également.

Donc $G_{x_1+x_2}$ a (au moins)

1 racine réelle non nulle donc on ne peut pas avoir $G_x = G_{x_1+x_2}$

Exercice 2

1) Sans modifier l'énoncé

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U, V) &= \text{Cov}(\alpha X + \beta, \gamma X + \delta) = E[(\alpha X + \beta - E(\alpha X + \beta))(\gamma X + \delta - E(\gamma X + \delta))] \\ &= E[\alpha(X - E(X)) \gamma(X - E(X))] = \alpha \gamma \text{Var}(X) \end{aligned}$$

$$\frac{\sigma_U}{\sigma_V} = \frac{|\alpha| \sigma_X}{|\gamma| \sigma_X} \Rightarrow \rho(U, V) = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sigma_U \sigma_V} = \frac{\alpha \gamma}{|\alpha \gamma|} = \text{signe de } \alpha \gamma$$

2) Supposons $V = \gamma Y + \delta$ $\sigma_U = |\alpha| \sigma_X$ $\sigma_V = |\gamma| \sigma_Y$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U, V) &= \text{Cov}(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \alpha \gamma \text{Cov}(X, Y) + \alpha \text{Cov}(X, \delta) + \gamma \text{Cov}(\beta, Y) + \text{Cov}(\beta, \delta) \\ &= \alpha \gamma \text{Cov}(X, Y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho(U, V) = \frac{\alpha \gamma}{|\alpha \gamma|} \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Exercice 1 On pose $\forall m \geq 1$, $X_m = \begin{cases} 1 & \text{si } p_m \text{ satisfait } m \text{ et r\u00e9ussi} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$P(X_m=1) = 1/m, \quad P(X_m=0) = 1 - 1/m$$

$$X_m \sim \mathcal{B}(1/m)$$

Remarque $P(X_1=1) = 1 \rightarrow P(X_1=0) = 0$

Soit X le nombre de sauts r\u00e9ussi

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad (\text{Mais } P(X=0) = P(X_1=0) = 0)$$

$$\begin{aligned} \forall m \geq 1, \quad P(X=m) &= P(X_1=1, X_2=1, \dots, X_m=1, X_{m+1}=0) \\ &= P(X_1=1) \times P(X_2=1) \times \dots \times P(X_m=1) \times P(X_{m+1}=0) \\ &= 1 \times 1/2 \times \dots \times 1/m \times (1 - 1/(m+1)) \\ &= \frac{1}{m!} - \frac{1}{(m+1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(X) &= \sum_{m=1}^{+\infty} m P(X=m) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} m \left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{(m+1)!} \right) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(m-1)!} - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m+1}{(m-1)!} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(m+1)!} \\ &= e^1 - (e^1 - 1) + (e^1 - 2) \\ &= e - (e - 1) + (e - 2) \\ &= e - 1 \end{aligned}$$

Autre m\u00e9thode

$$\Gamma(X) = \sum_{m \geq 1} P(X \geq m)$$

$$\text{On } P(X \geq m) = P(X_1=1, \dots, X_m=1) = 1/m!$$

$$\Rightarrow \Gamma(X) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} = e - 1$$

Exercice 2 $P(X=m) = \frac{1}{2m(m+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right)$

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} P(Z=m) = \frac{1}{2} \sum_{m \leq -2} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) + \frac{1}{2} \sum_{m \geq 1} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} [(-1/2 + 1) + (-1/3 + 1/2) + (-1/4 + 1/3) + \dots] + 1/2 [1 - 1/2 + 1/2 - 1/3 + \dots]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$E(|X|) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |m| P(X=m)$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} m P(X=m) + \sum_{m \in \mathbb{Z}} -m P(X=m)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m+1} + \frac{1}{2} \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m+1}$$

$$= +\infty$$