Probabilités : TD 1

Exercice 1 Application immédiate du ~~corol~~ corollaire 3.1, en utilisant le fait que $\mathbb{N}$ est dénombrable

Exercice 2 $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^* = \mathbb{Q}_+^*$ On a vu en cours que

$$\varphi : \frac{p}{q} \longrightarrow (p,q) \quad \text{où } p/q \text{ est irréductible}$$

est une injection de $\mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Comme $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est dénombrable
De même on en conclut avec le corollaire 3.1 que $\mathbb{Q}_+^*$ est dénombrable.
De même $\mathbb{Q}_-^*$ est dénombrable (par $\varphi(s) = -s$ bijection de $\mathbb{Q}_-^* \to \mathbb{Q}_+^*$ et finalement $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+^* \cup \mathbb{Q}_-^* \cup \{0\}$ est dénombrable par la propriété de réunion (théorème 5).

Exercice 3

1) $\Omega = \{\underset{B_1}{(P)}, (F,P), (F,F,P), \dots, \underset{B_n}{(F,\dots,F,P)}\} \cup \{\underset{B_\infty}{(F,\dots,F)}\}$

Soit F_n on obtient face au n-ième lancé.

Soit B_n le 1er pile sort au lancé n. $\Rightarrow$ on cherche à calculer $P(B_n)$.

$p \in]0,1[$, $P(F_n) = 1-p$ et $P(F_n^c) = p$ $\forall n$ (les événements F_n sont indépendants)

$P(B_1) = P(F_1^c) = p$

$\forall n \geq 2$ $\quad P(B_n) = P(F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap F_n^c) = (1-p)^{n-1}.p$ (géométrique de raison p)

$$P(B_\infty) = \lim_{n\to+\infty} P(F_1 \cap \dots \cap F_n) = \lim_{n\to+\infty} (1-p)^n = 0$$

Si $p = 1 \to$ on peut appliquer la formule précédente

$p = 0 \to$ on a bien $P(B_n) = 0$ $\forall n$ et $P(B_\infty) = 1$.

2) $A_n = F_1 \cap \dots \cap F_n$

$P(A_n) = P(F_1 \cap \dots \cap F_n) = (1-p)^n$

3) $B_\infty = \{(F,\dots,F,\dots)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

A_n suite décroissante d'ensembles. D'après 8.b,

$$P(B_\infty) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \lim_{n\to+\infty} (1-p)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } p=0 \\ 0 & \text{si } p>0 \end{cases}$$

Exercice 4 On suppose que la pièce est équilibrée ($p=1/2$)

1) $\Omega = \{(1,B), (2,B), (2,N), (3,B), (3,N), \dots, (n,B), (n,N)\} \cup \{\infty\}$

2) Soit $\forall i \geq 1$, F_i = on obtient face au i-ème lancé de la pièce

$P(U_1) = P(F_1^c) = 1/2$

$P(U_n) = P(F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap F_n^c) = (1-p)^{n-1} p = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} p = \frac{1}{2^n}$

Soit U_∞ = "on obtient jamais pile" $= \{\infty\}$

$P(U_\infty) = \lim_{n\to+\infty} P(F_1 \cap \dots \cap F_n) = \lim_{n\to+\infty} (1-p)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

3) $P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P((n,B)) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n \cap B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_{U_n}(B) \cdot \underbrace{P(U_n)}_{1/2^n}$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2^n}$

Rappel : $x \in]-1,1[$ $\quad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$

$= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

$\Rightarrow P(B) = -\ln(1/2) = \ln(2)$.

4) $P_B(U_1) = \frac{P(U_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|U_1) \cdot P(U_1)}{P(B)} = \frac{1}{2\ln(2)}$

Exercice 5 Si on ne modifie pas le contenu de l'urne, alors

$$P(E_k) = (3/4)^k$$

La probabilité de ne jamais tirer une boule blanche vaut

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{n\to+\infty} (3/4)^k = 0$$

1) a) Pour $n > 1$, $\varphi(n) = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} g(k) = n+3$

b) $\varphi(n) = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+3)$

$= 4 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k + 3(n-1)$

$= 4 + n(n-1) + 3(n-1)$

$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

c) $\varphi(n) = 4 + 4\sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)$

$= 4 + 4n(n-1) + 4(n-1)$

$= 4n^2$

2) $P(E_k) = \prod_{i=1}^{k} \frac{\varphi(i)-1}{\varphi(i)} = \frac{3}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{6} \times \dots \times \frac{k+\cancel{3-1}}{k+3} = \frac{3}{k+3}$

$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to+\infty} P(E_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

proba

$$P(E_k) = \prod_{i=1}^{k} \frac{(1+i)^2-1}{(1+i)^2} = \prod_{i=1}^{k} \frac{i(i+2)}{(i+1)^2} = \prod_{i=1}^{k} \frac{i(i+2)}{(i+1)(i+1)} = \frac{\prod_{i=1}^{k} \frac{i+2}{i+1}}{\prod_{i=1}^{k} \frac{i+1}{i}}$$

$$= \frac{\frac{\cancel{3}}{2} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \times \cdots \times \frac{k+2}{\cancel{k+1}}}{2 \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \times \cdots \times \frac{k+1}{\cancel{k}}} = \frac{k+2}{2(k+1)}$$

P(jamais tirer de boule blanche) $= P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = \lim_{k \to +\infty} P(E_k) = 1/2$

$\varphi(n) = 4n^2$

1 2 3

$$P(E_k) = \prod_{n=1}^{k} \frac{\varphi(n)-1}{\varphi(n)} = \prod_{n=1}^{k} \frac{4n^2-1}{4n^2}$$

$$= \prod_{n=1}^{k} \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} = \prod_{n=1}^{k} \frac{(2n)^2(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2(2n)^2}$$

$$= \prod_{n=1}^{k} \frac{2n(2n-1)}{(2n)^2} \prod_{n=1}^{k} \frac{2n(2n+1)}{(2n)^2} = \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} \times \frac{(2k+1)!}{(2^k k!)^2}$$

4

$$= \frac{(2k+1)(2k)!^2}{2^{2k} k!^2 \, 2^{2k} k!^2}$$

$$= \frac{(2k+1)(2k)!^2}{4^{2k} k!^4}$$

<u>Rappel</u> : formule de Stirling

$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

$(2k)! \sim (2k)^{2k} e^{-2k} \sqrt{4\pi k}$

$2k+1 \sim 2k$

donc $P(E_k) \sim \dfrac{2k \, (2k)^{4k} e^{-4k} 4\pi k}{4^{2k} k^{4k} e^{-4k} (2\pi k)^2}$

$\sim \dfrac{2}{\pi} \dfrac{(2k)^{4k}}{2^{4k} k^{4k}} \sim$

TD2 - Probabilités

Exercice 2

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \\
&= P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \\
&= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) \\
&= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - [P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)] \\
&= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) \\
&+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)
\end{aligned}$$

Exercice 4

1) $\sum_{n \geq 0} P(\{n\}) \stackrel{?}{=} 1$

$$\sum_{n \geq 0} P(\{n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire.

$n = 10\, m + k$ avec $k \in \{0, \dots, 9\}$ (division euclidienne) k représente le chiffre des unités de l'entrée n.

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

$\forall\, 0 \leq k \leq 9$, $P_X(k) = P(X=k) = P(k) + P(10+k) + P(20+k) + \dots + P(10m+k)$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} P(\{10m+k\}) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{10m+k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} \sum \left(\frac{1}{2^{10}}\right)^m$$

$$= \frac{1}{2^{k+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{2^{10}}}$$

__En effet__ $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = \frac{1}{1-\frac{1}{2^{10}}} \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2^{10}}} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{2^k}$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2^{10}}} \frac{1}{2} \frac{1-\frac{1}{2^{10}}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

__question__ Comment définir $P(n)$ pour que la loi de X soit une loi uniforme discrète sur $[0, \dots, 9]$ ie $P(X=k) = \frac{1}{10}$ $\forall\, 0 \leq k \leq 9$

Soit $(p_m)_{m\geq 0}$ une suite de réels positifs tels que $\sum_{m=0}^{+\infty} p_m = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$, on écrit la division euclidienne $n = 10m + k$ avec

$m \geq 0$ et $k \in \{0, \dots, 9\}$, et on pose $P(n) = \frac{p_m}{10}$

Alors

1) $\sum_{n\geq 0} P(n) = \sum_{m\geq 0} \sum_{k=0}^{9} P(10m + k) = \sum_{m\geq 0} \sum_{k=0}^{9} \frac{p_m}{10} = \frac{1}{10} \sum_{m=0}^{9} 10\, p_m = 1$

2) $= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{p_m}{10} = \frac{1}{10} \sum_{m=0}^{+\infty} p_m = \frac{1}{10}$

$\Rightarrow X \sim \mathcal{U}(\{0, \dots, 9\})$

Exercice 9 | Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $E(X) = \lambda$ et $Var(X) = \lambda$

1) On fera l'hypothèse que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (loi de Poisson de paramètre λ d'où $E(X) =$ nbr voiture arrivant $= \lambda$)

2) $Y + Z = X \Rightarrow Z = X - Y$

3) On veut calculer $P(X = n, Y = k)$, $\forall k \leq n$

$P(X = n, Y = k) = P(Y = k \mid X = n) P(X = n)$

La loi de Y sachant $X = n$ (ou conditionnellement à $X = n$) est une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

D'où $P(Y = k \mid X = n) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}$ et donc

$P(X = n, Y = k) = C_k^n\, p^k (1-p)^{n-k} \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$

$(P(X = n, Y = k) = 0 \;\forall k > n)$

Soit $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{ème voiture se présentant à la pompe va à l'essence} \\ 0 & \text{diesel} \end{cases}$

On suppose que les v.a. X_i, $i \geq 1$ sont indépendantes. Elles sont donc i.i.d de la loi $\mathcal{B}(p)$

D'où $\forall n \geq 0$, $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

$P(X = k \mid X = n) = \frac{P(Y = k, X = n)}{P(X = n)} = \frac{P(X_1 + \dots + X_n = k, X = n)}{P(X = n)}$

on suppose que la v.a. X est indépendante de v.a X_i, $i \geq 1$. D'où $P(Y = k \mid X = n) = P(X_1 + \dots + X_n = k) \frac{P(X=n)}{P(X=n)}$

$= P(X_1 + \dots + X_n = k) = P(\mathcal{B}(n,p) = k) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}$

Remarque : on peut écrire $Y = \sum_{k=0}^{+\infty} X_k \mathbb{1}_{\{X \geq k\}}$ (avec $X_0 = 0$)

$P(X=n, Y=k) = P(Y=k \mid X=n)\, P(X=n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ $(k \leq n)$

4) $P(Y=k) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(X=n, Y=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{k!(n-k)!} e^{-\lambda} p^k (1-p)^{n-k}$

$= e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-k)!} (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!}$

$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}$

$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}$ La loi de Y est la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$

Remarque : $E(Y) = \lambda p = E(X) . p$

$= E(X) . E(X_1)$ avec $X_1 \sim \mathcal{B}(p)$

On a $Z \sim \mathcal{P}(\lambda(1-p))$

5) $P(Y=k, Z=m) \overset{?}{=} P(Y=k) . P(Z=m)$

$P(Y=k, Z=m) = P(Y=k, X=m+k) = \frac{\lambda^{m+k}}{k!\,m!} e^{-\lambda} p^k (1-p)^m$

$P(Y=k)\, P(Z=m) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \times e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!}$

$= \frac{e^{-\lambda}}{k!\,m!} \lambda^{m+k} p^k (1-p)^m$

Exercice 5 Soit X la v.a. égale au nombre de pièces défectueuses parmi les 100 remises.

La loi de X est la loi hypergéométrique

Loi hypergéométrique : Soit une urne contenant N boules, dont M boules blanches (et $N-M$ boules noires). On effectue des tirages sans remise $\forall\, 1 \leq i \leq n$, on pose $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{ème boule est blanche} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ le nombre de boules blanches tirées (les X_i ne sont pas indé)

Alors $S_n \leq n$ et $S_n \leq M \Rightarrow S_n \leq \min(n, M)$

$S_n \geq 0$ et $n - S_n \leq N - M \Leftrightarrow S_n \geq n - (N-M) \Rightarrow$

$S_n \geq \max(0, n-(N-M))$

$\forall k \in [\max(0, n-(N-m)), \min(\cancel{n} n, m)]$

$$P(S_n = k) = \frac{C_m^k \; C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}$$

$$E(S_n) = n \cdot \frac{M}{N} = n \cdot p \;,\; Var(S_n) = n \cdot \frac{M}{N}\left(\frac{N-M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1} = np(1-p)$$

Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale

On suppose qu'on fait tendre N vers l'infini, mais que $p = \frac{M}{N}$ reste constant on peut écrire $M = pN$

Alors $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{C_{Np}^k \; C_{N(1-p)}^{n-k}}{C_N^n} = C_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k} = P(\mathcal{B}(n,p) = k)$

En pratique, on admet habituellement que $P(H(N, n, M) = k)$ $= P(\mathcal{B}(n,p) = k)$ avec $p = \frac{M}{N}$ dès que $\frac{n}{M} \leq 0,1$

1) La loi de $X \Rightarrow$ la loi hypergéométrique

$H(1000, 100, 30)$

$$P(X=5) = \frac{\binom{30}{5}\binom{970}{95}}{\binom{1000}{100}} = 0,1024$$

2) La loi binomiale $\mathcal{B}(100, 0,03)$ $\quad P(X=5) = C_{100}^5 \, 0,03^5 \, 0,97^{95} = 0,1013$

Nous sommes en condition d'application de l'approximation de la loi binomiale par la loi de poisson.

$n > 30$ $\quad P(\mathcal{B}(n,p) = k) \simeq P(\mathcal{P}(np) = k)$

$p < 0,1$

$np \leq 15$ $\quad k=5,\ n=100,\ p=0,03 \Rightarrow P(\mathcal{P}(3)=5) = e^{-3}\frac{3^5}{5!} = 0,1008$

$\boxed{\text{Exercice 3}}$

A : "le joueur qui commence gagne"

B : "l'autre joueur gagne"

X = numéro du lancé de dé on obtient "6" pour la première fois $\quad X \sim \mathcal{G}(1/6) \quad P(X=n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}$

$$P(A) = P(X=1) + P(X=3) + P(X=5) + \dots + P(X=2k+1) + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=2k+1) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k}\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{1-\frac{25}{36}} = \frac{6}{11}$$

C = "On n'obtient jamais 6" $\quad P(C) = P(X=+\infty) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(X>n)$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$$

$A \cup B \cup C = \Omega \Rightarrow P(A) + P(B) + P(C) = 1$

D'où $P(B) = 1 - P(A) = \frac{5}{11}$

Exercice 8 $\forall\, n \geq 1,\ m \geq 1 \qquad P(X=n, Y=m) = \frac{C}{2^{n+m+1}}$

1) On a $\sum_{\substack{n\geq 1\\ m\geq 1}} P(X=n, Y=m) = 1 \Leftrightarrow C \cdot \sum_{n,m} \frac{1}{2^{n+m+1}} = 1$

$\Leftrightarrow C \cdot \frac{1}{2} \sum_{n,m} \frac{1}{2^{n+m}} = 1 \Leftrightarrow \frac{C}{2}\left(\frac{1}{2} \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{2} \sum_{m\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^m \right) = 1$

$\Leftrightarrow C = 2.$

2) $P(X=n) = \sum_{m\geq 1} P(X=n, Y=m)$

$= \sum_{m\geq 1} \frac{2}{2^{n+m+1}}$

$= \sum_{m\geq 1} \frac{1}{2^{n+m}} = \frac{1}{2^n} \sum_{m\geq 1} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^n}$

De même $P(Y=m) = \frac{1}{2^m}$

La loi de X est la loi géométrique de paramètre $p = 1/2$

$P(X=n) = (1-p)^{n-1} \cdot p = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$. Y également

De plus $P(X=n, Y=m) = \frac{1}{2^{n+m}} = \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2^m} = P(X=n) \times P(Y=m)$

donc X et Y sont indépendants

Exercice 7 $\{X=k\} = \{X \leq k\} \setminus \{X < k\} = \{X \leq k\} \setminus \{X \leq k-1\}$

$= \{X \geq k\} \setminus \{X > k\}$

$= \{X > k-1\} \setminus \{X > k\}$

Donc $P(X=k) = P(X\leq k) - P(X \leq k-1) = F_X(k) - F_X(k-1)$

TD3

Exercice 1

X_1 : n° du tirage du 1^{er} "pile"

X_2 : n° du tirage du $2^{ème}$ "pile"

$X_1 \sim \mathcal{G}(1/2)$ On veut calculer

$X_2 \sim Pa(2, 1/2)$ $P(X_1 = k, X_2 = n) = ?$ $\forall n > k$

$P(X_1 = k, X_2 = n) = P(X_1 = k, X_2 - X_1 = n - k)$

$X_2 - X_1 \sim G(1/2)$ et X_1 et $X_2 - X_1$ sont indépendant

$$P(X_1 = k, X_2 = n) = P(X_1 = k)\, P(X_2 - X_1 = n - k)$$
$$= \frac{1}{2^k}\,\frac{1}{2^{n-k}} = \frac{1}{2^n}$$

Si la pièce n'est pas équilibrée $P(\text{"pile"}) = p$

$X_1 \sim G(p)$ $X_2 \sim Pa(2, p)$, $X_2 - X_1 \sim G(p)$ indépendants de X_1

Donc $P(X_1 = k, X_2 = n) = P(X_1 = k) . P(X_2 - X_1 = n - k) = (1-p)^{k-1} \times (1-p)^{n-k-1} . p$

$= (1-p)^{n-2} p^2$

Exercice 2

Soit $X \sim P(\lambda)$

$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\, P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$
$$= e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

on pose $\gamma = k - 1$

$$E(X) = e^{-\lambda} \lambda \sum_{\gamma=0}^{+\infty} \frac{\lambda^\gamma}{\gamma!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda$$

Soit $X \sim G(p)$

$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$ $\forall k \geq 1$

Donc $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k (1-p)^{k-1} p$

$= p \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1}$ avec $q = 1 - p$

Soit la série entière $\sum |z|^n$. Son rayon de convergence est $R = 1$ d'où $\forall z$ tq que $|z| < 1$ on peut dériver la série terme à terme donc $\sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} q^k\right)' = \left(\frac{1}{1-q}\right)'$

$\Rightarrow E(X) = p \frac{1}{(1-q)^2} = p \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$

$p = 1 \Rightarrow p(X=1) = 1$ et $\forall k \geq 2$, $P(X=k)=0 \Rightarrow E(X)=1$

$\Rightarrow p = 0 \Rightarrow P(X=+\infty) = 1 \Rightarrow E(X) = +\infty$

Soit $X_n \sim Pa(n,p)$ On a $X_n = X_1 + (X_2 - X_1) + \ldots + (X_n - X_{n-1})$

avec $\forall i$, $X_i - X_{i-1} \sim G(p)$

Donc $E(X_n) = \underbrace{E(X_1)}_{1/p} + \underbrace{E(X_2 - X_1)}_{1/p} + \ldots + \underbrace{E(X_n - X_{n-1})}_{1/p} = n/p$

Soit $X \sim P(\lambda)$ Calculer $E(1/1+X)$

$$E(1/1+X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+k} P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{1}{\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}}_{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda} - 1}$$

$$= \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda} (e^{\lambda} - 1) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$$

Exercice 5 Rappel : $\forall A \in F$, $1\!\!1_A : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto 1\!\!1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$

$E(1\!\!1_A) = 1 \cdot P(1\!\!1_A = 1) + 0 \cdot P(1\!\!1_A = 0) = P(1\!\!1_A = 1) = P(A)$ (car $1\!\!1_A(\omega) = 1$ ssi $\omega \in A$

$$Z = Z\, 1\!\!1_{\{Z \geq a\}} + Z\, 1\!\!1_{\{Z < a\}}$$

$$\geq a\, 1\!\!1_{\{Z \geq a\}} + Z\, 1\!\!1_{\{Z < a\}}$$

$$\geq a\, 1\!\!1_{\{Z \geq a\}} \Rightarrow E(Z) \geq a\, E(1\!\!1_{\{Z \geq a\}})$$

Exercice 3 $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (loi de poisson) on sait que $E(X) = \lambda$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 p(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (k^2 = k(k-1) + k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + \lambda$$

$= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$

$\Rightarrow Var(X) = \lambda$

$X \sim G(p)$ (loi géométrique)

$E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(X=k)$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1) P(X=k) + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} k P(X=k)}_{= E(X) = 1/p}$

$= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) p(1-p)^{k-1} + 1/p$

$= p(1-p) \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) q^{k-2} + \frac{1}{p} \quad (q = 1-p)$

$= \sum_{k=2}^{+\infty} k^2(k-1) q^{k-2} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} q^k\right)''$

$= \left(\frac{1}{1-q}\right)'' = \left(\frac{1}{(1-q)^2}\right)'$

$= \frac{2}{(1-q)^3}$ Donc $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

$X_n \sim Pa(n, p)$

$X_n = \underbrace{X_1}_{G(n)} + \underbrace{(X_2 - X_1)}_{G(n)} + \dots + \underbrace{(X_n - X_{n-1})}_{G(n)}$

De plus, les variables aléatoires sont isolées

$\Rightarrow Var(X_n) = n \cdot \frac{(1-p)}{p^2}$

Exercice 6 Soit $\forall i \geq 1$, $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on tire une boule blanche au tirage} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$(X_i)_{i \geq 1}$ i.i.d de la $\mathcal{B}(p)$

$E(X_i) = P(X_i = 1) = p$ et $Var(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2$
$= p - p^2 = p(1-p)$

Posons $S_m = \sum_{i=1}^{m} X_i$ et $\overline{X}_m = \frac{S_m}{m}$
$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i$ (moyennage d'échantillon)

Remarque : $S_m \sim \mathcal{B}(m, p)$, $E(S_m) = mp$ et $Var(S_m) = mp(1-p)$

$E(\overline{X}_m) = \frac{1}{m} E(S_m) = p$

$Var(\overline{X}_m) = \frac{1}{m^2} Var(S_m) = \frac{p(1-p)}{m}$

D'après B.T

$P(|\overline{X}_m - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{m\varepsilon^2}$

$\Leftrightarrow P(p - \varepsilon < \overline{X}_m < p + \varepsilon) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{m\varepsilon^2}$

Maximum de $p(1-p)$ sur $[0,1]$ atteint pour $p = 1/2$ et vaut $1/4$

$(p(1-p) = p - p^2 = -(p^2 - p + 1/4) + 1/4$
$= -(p - 1/2)^2 + 1/4$

Donc $P(p - \varepsilon < \overline{X}_m < p + \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4m\varepsilon^2}$

$\Leftrightarrow P(\underbrace{\overline{X}_m}_{= k/m} - \varepsilon < p < \underbrace{\overline{X}_m}_{= k/m} + \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4m\varepsilon^2}$

On dit que l'intervalle $]\overline{X}_n - \varepsilon, \overline{X}_n + \varepsilon[$ est un intervalle de confiance de niveau $\geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$ pour le paramètre p.

Exercice 4 | $Var(X) = 0$

1)

On déduit du résultat de la question 1 que
$P(|X - E(X)| > 0) = \lim_{n \to +\infty} P(|X - E(X)| \geq 1/n) = 0$
(car $\{|X - E(X)| > 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \{|X - E(X)| \geq 1/n\}$)

Autre raisonnement Soit X une va discrète. Supposons qu'il existe au moins 2 valeurs $a \neq b$ avec
$P(X = a) = \alpha > 0$ et $P(X = b) = \beta > 0$

$$Var(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 P(X = x)$$
$$\geq (a - E(X))^2 \alpha + (b - E(X))^2 \beta \geq 0$$
$$> \min[(a - E(X))^2 \alpha, (b - E(X))^2 \beta] > 0$$

8 proba

Exercice 3

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

$$P(X=m) = \frac{1}{\cosh(x)} \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

$$G_X(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} P(X=m) z^m$$

$$= \frac{1}{\cosh(x)} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{2m} z^m}{(2m)!}$$

$$= \frac{1}{\cosh(x)} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(x\sqrt{z})^{2m}}{(2m)!}$$

$$= \frac{1}{\cosh(x)} \cosh(x\sqrt{z}) \quad (z \in \mathbb{C})$$

$z>0$, $G_X(z) = \frac{1}{\cosh(x)} (x\sqrt{z})$

$$G'_X(z) = \frac{1}{\cosh(x)} \frac{x}{2\sqrt{z}} \sinh(x\sqrt{z})$$

$$\Rightarrow G'_X(1) = \frac{1}{\cosh x} \frac{x}{2} \sinh(x)$$

$$= \frac{1}{2} x \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{1}{2} x \tanh(x$$

$z<0$, $z = -|z| \Rightarrow G_X(z) = \frac{1}{\cosh(x)} \times \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{2m}(-|z|)^m}{(2m)!}$

$$= \frac{1}{\cosh(x)} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m (x\sqrt{|z|})^{2m}}{(2m)!}$$

$$= \frac{1}{\cosh(x)} \cos(x\sqrt{|z|})$$

Autre méthode : $G_X(z) = \frac{1}{\cosh(x)} \cosh(xi\sqrt{|z|})$

$$\cosh(iy) = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} = \cos(y)$$

Exercice 4

$X \sim U([2,\dots,12])$

1) $P(X=k) = \frac{1}{11} \quad \forall\ 2 \leq k \leq 12$

Alors $U = X-2 \sim U([0,\dots,10])$

$P(U=k) = \frac{1}{11}, \quad \forall\ 0 \leq k \leq 10$

$G_U(z) = \frac{1}{11} \sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{11} \frac{1-z^{11}}{1-z}$

$$G_X(z) = G_{U+2}(z) = E(z^U).z^2$$

$$= z^2 . \frac{1}{11} \frac{1-z^{11}}{1-z}$$

$$= \frac{1}{11}(z^2+\dots+z^{12})$$

$$= \frac{1}{11} z^2[1+\dots+z^{10}]$$

Racine de $G_X(z)$: • 0 d'ordre 2

• les racines 11^e de l'unité (sauf 1)

$z_k = \exp(i\frac{2k\pi}{11}) \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

2) Soit $p_m = P(X_1 = m) \quad 1 \leq m \leq 6$

$q_m = P(X_2 = m) \quad 1 \leq m \leq 6$

$$G_{X_1}(z) = \sum_{m=1}^{6} p_m z^m = z \underbrace{\sum_{m=1}^{6} p_m z^{m-1}}_{Q_1(z)}$$

$$G_{X_2}(z) = \sum_{m=1}^{6} q_m z^m = z \underbrace{\sum_{m=1}^{6} q_m z^{m-1}}_{Q_2(z)}$$

$$G_{X_1+X_2}(z) = G_{X_1}(z)\, G_{X_2}(z)$$
$$= z^2 Q_1(z)\, Q_2(z)$$

- si $p_1 = 0$ ou $q_1 = 0$, alors on peut factoriser par z^3 dans $G_{X_1+X_2}$ (0 racine d'ordre 3 au numérateur) donc $G_{X_1+X_2} = G_X$

- si $p_6 = 0$ ou $q_6 = 0$ alors $Q_1 Q_2$ serait un polynôme de ~~degrés~~ ≤ 5 et donc on ne peut pas avoir $G_X = G_{X_1+X_2}$

On suppose $q_1 > 0$ $p_1 > 0$ $q_6 > 0$ $p_6 > 0$

$Q_1(z)$, $Q_2(z)$ polynôme de degré 5 ne s'annulant pas en 0.

Or $Q_1(z)$ a nécessairement une racine réelle non nulle. En effet Q_1 est de degré impair, et si z_0 ~~sont~~ est racine de Q_1 alors $\bar{z}_0$ l'est également.

Donc $G_{X_1+X_2}$ a (au moins)
1 racine réelle non nulle donc on ne peut pas avoir $G_X = G_{X_1+X_2}$

Exercice 2

1) Sans modifier l'énoncé

$$Cov(U,V) = Cov(\alpha X + \beta, \gamma X + \delta) = E[(\alpha X + \beta - E(\alpha X + \beta))(\gamma X + \delta - E(\gamma X + \delta))]$$
$$= E[\alpha(X - E(X))\, \gamma(X - E(X))] = \alpha\gamma\, Var(X)$$

$\sigma_U = |\alpha|\sigma_X$
$\sigma_V = |\gamma|\sigma_X$ $\Rightarrow \rho(U,V) = \dfrac{Cov(U,V)}{\sigma_U \sigma_V} = \dfrac{\alpha\gamma}{|\alpha\gamma|}$ = signe de $\alpha\gamma$

2) Supposons $V = \gamma Y + \delta$ $\sigma_U = |\alpha|\sigma_X$ $\sigma_V = |\gamma|\sigma_Y$

$$Cov(U,V) = Cov(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \alpha\gamma \underbrace{Cov(X,Y)}_{\neq 0} + \alpha \underbrace{Cov(X,\delta)}_{=0} + \gamma \underbrace{Cov(\beta, Y)}_{=0} + \underbrace{Cov(\beta,\delta)}_{=0}$$
$$= \alpha\gamma\, Cov(X,Y)$$

$$\Rightarrow \rho(U,V) = \frac{\alpha\gamma}{|\alpha\gamma|} \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

TD 5

Exercice 1 On pose $\forall n \geq 1$, $X_n = \begin{cases} 1 & \text{si le saut } n \text{ est réussi} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$P(X_n = 1) = 1/n$, $P(X_n = 0) = 1 - 1/n$

$X_n \sim \mathcal{B}(1/n)$

<u>Remarque</u> $P(X_1 = 1) = 1 \rightarrow P(X_1 = 0) = 0$

Soit X le nombre de sauts réussi

$X(\Omega) = \mathbb{N}$ (Mais $P(X=0) = P(X_1 = 0) = 0$)

$\forall n \geq 1$, $P(X = n) = P(X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_n = 1, X_{n+1} = 0)$

$$= P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) \times \dots \times P(X_n = 1) \times P(X_{n+1} = 0)$$

$$= 1 \times 1/2 \times \dots \times 1/n \times (1 - 1/(n+1))$$

$$= \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n P(X=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= e^1 - (e^1 - 1) + (e^1 - 2)$$

$$= e - (e-1) + (e-2)$$

$$= e - 1$$

<u>Autre méthode</u>

$$E(X) = \sum_{n \geq 1} P(X \geq n)$$

Or $P(X \geq n) = P(X_1 = 1, \dots, X_n = 1) = 1/n!$

$$\Rightarrow E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - 1$$

Exercice 2 $P(X = n) = \dfrac{1}{2n(n+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} P(Z = n) = \frac{1}{2} \sum_{n \leq -2} (1/n - 1/(n+1)) + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (1/n - 1/(n+1))$$

$$= \frac{1}{2} [(-1/2 + 1) + (-1/3 + 1/2) + (-1/4 + 1/3) + \dots] + 1/2 [(1 - 1/2) + (1/2 - 1/3)]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$E(|X|) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |m| \, P(X = m)$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} m \, P(X = m) + \sum_{m \leq -2} -m \, P(X = m)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m+1} + \frac{1}{2} \sum - \frac{1}{m+1}$$

$$= +\infty$$