Equations élémentaires pour la méthode de Paul

	Équation (s)	inconnue (s)	fonction scilab
Type 1	$X.L_i=Y$	L_i	S=*solve_type_1*(X,Y)
Type 2	$X.\sin(A_i)+Y.\cos(A_i)=Z$	A_i	S=*solve_type_2*(X,Y,Z)
Type 3	$\begin{cases}[1]X_1.\sin(A_i)+Y_1.\cos(A_i)=Z_1\\ [2]X_2.\sin(A_i)+Y_2.\cos(A_i)=Z_2\end{cases}$	A_i	S=*solve_type_3*(X1,Y1,Z1,X2,Y2,Z2)
Type 4	$\begin{cases}[1]X_1.R_j.\sin(A_i)=Y_1\\ [2]X_2.R_j.\cos(A_i)=Y_2\end{cases}$	$[R_j,A_i]$	S=*solve_type_4*(X1,Y1,X2,Y2)
Type 5	$\begin{cases}[1]\ X_1.\sin(A_i)=Y_1+Z_1.R_j\\ [2]\ X_2.\cos(A_i)=Y_2+Z_2.R_j\end{cases}$	$[R_j,A_i]$	S=*solve_type_5*(X1,Y1,Z1,X2,Y2,Z2)
Type 6	$\begin{cases}[1]\ W.\sin(A_k)=X.\cos(A_i)+Y.\sin(A_i)+Z1\\ [2]\ W.\cos(A_k)=X.\sin(A_i)-Y.\cos(A_i)+Z2\end{cases}$	$[A_k,A_i]$	S=*solve_type_6*(W,X,Y,Z1,Z2)
Type 7 modifié	$\begin{cases}W2.\sin(A_k)+W1.\cos(A_k)=X.\cos(A_i)+Y.\sin(A_i)+Z1\\ W2.\cos(A_k)-W1.\sin(A_k)=X.\sin(A_i)-Y.\cos(A_i)+Z2\end{cases}$	$[A_k,A_i]$	S=*solve_type_7*(W1,W2,X,Y,Z1,Z2)
Type 8 modifié	$\begin{cases}X.\cos(A_i)+Y.\cos(A_k)=Z1\\ X.\sin(A_i)+Y.\sin(A_k)=Z2\end{cases}$	$[A_k,A_i]$	S=*solve_type_8*(X,Y,Z1,Z2)

Le tableau ci-avant liste les différentes équations de Paul, ainsi que les fonctions de résolution correspondantes, en langage scilab, dans le fichier : *equations_de_paul.sce*.

Ces fonctions renvoient les résultats dans une structure *S*, qui contient systématiquement les champs suivants :

S.well_posed *// %t(vrai) si l'équation est bien posée, %f (faux) sinon*
// par exemple une équation de type 1 avec X=Y=0 est mal posée)
S.nb_sols *// nombre de solutions de l'équation, n'est valable que pour une équation bien posée*
S.name *// chaîne de caractères rappelant le type, les inconnues et les paramètres de l'équation*

Les solutions sont stockées dans des vecteurs scilab dont les noms correspondent aux inconnues indiquées dans le tableau.
Par exemple, pour une équation de *type 5*, la structure *S* contiendra 2 tableaux, *S.Ai*(1..S.nb_sols) et *S.Rj*(1..nb_sols), correspondant aux couples de solution $[R_j,A_i]$

```
// exemple : programme de résolution et affichage des solutions pour une équation de type 5
// vous pouvez également visualiser toutes les infos contenues dans S5, en affichant S5 sous scilab :>> S5
 exec("equations_de_paul.sce") ; // chargement des fonctions, a executer une seule fois...
  X1=1;Y1=1;Z1=1;
  X2=2;Y2=-1;Z2=1;
  S5=solve_type_5(X1,Y1,Z1,X2,Y2,Z2);
  if ( S5.well_posed==%f ) then
    error("l equation est mal posee !..");
  end
  disp( "les "+string(S5.nb_sols)+" solutions de l equation : " + S5.name +" sont ");
  for i=1:S5.nb_sols,
    Ai=S5.Ai(i);
    Rj=S5.Rj(i);
    disp("solution "+string(i)+" [ Ai = " + string(Ai) + ", Rj =" + string(Rj) +"]");
  end
```

Sortie scilab correspondante :

>>les 2 solutions de l equation : equation de type 5 :[1]X1.sin(Ai)=Y1 +Z1 .Rj ;[2] X2. cos(Ai)=Y2 + Z2 . Rj sont
>>solution 1 [Ai = 3.1415927, Rj =-1]
>>solution 2 [Ai = 2.2142974, Rj =-0.2]

ANNEXE : DETAIL DES SOLUTIONS :

Dans cette partie, on utilisera la fonction **atan2**, qui est une fonction de 2 variables *Im* et *Re*.
Soit un nombre complexe z=Re+ j.Im , alors atan2(Im,Re) est la fonction qui renvoie l'argument de z, dans l'intervalle $]-\pi,+\pi]$.

lorsque z est à partie réelle strictement positive *: atan2(Im,Re)=* $\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}\right)$

lorsque z est à partie réelle strictement négative *:atan2(Im,Re)=* $\left[\pi+\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}\right)\right]$ modulo π

dans tous les cas :*atan2(Im,Re)=* $Arg(\mathrm{Re}+j.\mathrm{Im})$

Type 1 : on cherche L_i telle que : [1] $X.L_i=Y$

Solution : [1.1] $L_i=\frac{X}{Y}$

Type 2 : on cherche $\{A_i\}$ tels que : [2] $X.\sin(A_i)+Y.\cos(A_i)=Z$

Une personne habituée voit une équation du type $\sin(\alpha+A_i)=cte$ *, et la met en évidence en procédant comme suit :*

étape 1- elle multiplie l'équation [2] par $\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}}$, ce qui donne :

[2.1] $\underbrace{\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}}_{C}.\sin(A_i)+\underbrace{\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}}_{S}.\cos(A_i)=\underbrace{\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}}_{cte}$

dans cette équation, on peut poser $\begin{cases}\cos(\alpha)=C=\frac{X}{\sqrt{(X^2+Y^2)}}\\ \sin(\alpha)=S=\frac{Y}{\sqrt{(X^2+Y^2)}}\end{cases}$, car $C^2+S^2=1$, on obtient donc

[2.2] $\underbrace{\cos(\alpha).\sin(A_i)+\sin(\alpha).\cos(A_i)}_{\sin(\alpha+A_i)}=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}$

cette équation n'admet de solution que si $Z^2\leqslant X^2+Y^2$, qui sont alors :

$$\begin{cases}\text{solution 1 : } A_{i1}=\arcsin\left(\frac{Z}{\sqrt{(X^2+Y^2)}}\right)-\alpha\\ \text{solution 2 : } A_{i2}=\pi-\arcsin\left(\frac{Z}{\sqrt{(X^2+Y^2)}}\right)-\alpha\end{cases}\text{, où } \alpha=atan2(Y,X)=argument(X+j.Y)$$

Type 3 : On cherche $\{A_i\}$ tels que $\begin{cases}[1]X_1.\sin(A_i)+Y_1.\cos(A_i)=Z_1\\ [2]X_2.\sin(A_i)+Y_2.\cos(A_i)=Z_2\end{cases}$

On reconnaît 2 équations de type 2, il suffit donc de retenir l'intersection des solutions de chacune des équations(avec une tolérance donnée lors de la résolution numérique).

Type 4 : On cherche l'ensemble des couples $\{R_j,A_i\}$ tels que $\begin{cases}[1]X_1.R_j.\sin(A_i)=Y_1\\ [2]X_{2.}R_j.\cos(A_i)=Y_2\end{cases}$

On ne considère pas ici le cas où l'une des variables X_1 , X_2 est égale à 0, auquel cas on a une infinité de solutions en $\{R_j, A_i\}$, évidentes à trouver...

En multipliant l'équation 1 par X_2 , et l'équation 2 par X_1 , puis en sommant les carrés des 2 équations, on voit que l'on obtient 2 solutions en Rj

$$R_j = \pm\sqrt{\left(\frac{X_2^2 . Y_1^2 + X_1^2 . Y_2^2}{X_1^2 . X_2^2}\right)}$$

connaissant R_j , la solution en A_i est unique (le sinus et le cosinus étant simultanément imposés) :

$$A_i = arg\left(\frac{Y2}{X2 . R_j} + j . \frac{Y1}{X1 . R_j}\right) = atan2\left(Y1 . sign(X1 . R_j), Y2 . sign(X2 . R_j)\right)$$

remarque : ces équations sont "dangereuses" dans le cas où l'une des variables X_1 , X_2 est proche de zéro.

Type 5 : On cherche $\{R_j, A_i\}$ tels que $\begin{Bmatrix}[1] & X_1 . \sin(A_i) = Y_1 + Z_1 . R_j \\ [2] & X_{2.} \cos(A_i) = Y_2 + Z_2 . R_j\end{Bmatrix}$

On ne considère pas ici le cas où l'une des variables X_1 , X_2 est égale à 0, auquel cas on a une infinité de solutions en A_i, R_j, évidentes à trouver...

En multipliant l'équation 1 par X_2 , et l'équation 2 par X_1 , puis en sommant les carrés des 2 équations, on voit que l'on obtient une équation du second degré à une inconnue en R_j

$$a_0 + a_1 . R_j + a_2 . R_j^2 = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{Bmatrix} a_0 = X2^2 . Y1^2 + X1^2 . Y2^2 - X1^2 . X2^2 \\ a_1 = 2.\left(X2^2 . Y1.Z1 + X1^2 . Y2.Z2\right) \\ a_2 = X2^2 .Z1^2 + X1^2 .Z2^2 \end{Bmatrix}$$

si le discriminant $\Delta = a_1^2 - 4 . a_0 . a_2$ de cette équation est < 0 on n'a pas de solution,

sinon on obtient 2 solutions possibles en R_j : $\begin{Bmatrix} R_{j1} = \dfrac{-a_1 - \sqrt{(\Delta)}}{2. a_2} \\ R_{j2} = \dfrac{-a_1 + \sqrt{(\Delta)}}{2. a_2} \end{Bmatrix}$

Pour chacune de ces solutions , on obtient une solution correspondante en A_i , puisque connaissant Rj, la solution en Ai est unique (le sinus et le cos sont simultanément imposés) :

$$A_{i1,2} = arg\left(\frac{Y2 + Z2 . R_{j1,2}}{X2} + j . \frac{Y1 + Z1 . R_{j1,2}}{X1}\right) = atan2\left(\frac{Y1 + Z1 . R_{j1,2}}{X1}, \frac{Y2 + Z2 . R_{j1,2}}{X2}\right)$$

remarque : cette équation est "dangereuse" dans le cas où l'une des variables X_1 , X_2 est proche de zéro.

Type 6 : On cherche $\{A_k, A_i\}$ tels que $\begin{Bmatrix}[1] & W . \sin(A_k) = X . \cos(A_i) + Y . \sin(A_i) + Z1 \\ [2] & W . \cos(A_k) = X . \sin(A_i) - Y . \cos(A_i) + Z2\end{Bmatrix}$

on somme les carrés des 2 équations, ce qui donne

$$\underbrace{W^2-Z1^2-Z2^2-X^2-Y^2}_{Z'}=\underbrace{[2.X.Z2+2.Y.Z1]}_{X'}.\sin(A_i)+\underbrace{[2.X.Z1-2.Y.Z2]}_{Y'}.\cos(A_i)$$

On est alors ramené à une équation de **type 2** en A_i : $X'.\sin(A_i)+Y'.\cos(A_i)=Z'$ qui au plus admet 2 solutions A_{i1}, A_{i2}

en posant $\begin{cases} I(A_i)=X.\cos(A_i)+Y.\sin(A_i)+Z1 \\ R(A_i)=X.\sin(A_i)-Y.\cos(A_i)+Z2 \end{cases}$

Pour chacune de ces solutions , il existe une seule solution en A_k , donnée par

$$A_{k1,2}=arg\left(\frac{R(A_{i1,2})}{W}+j.\frac{I(A_{i1,2})}{W}\right)=atan2\left(I(A_{i1,2}).sign(W),R(A_{i1,2}).sign(W)\right)$$

Type 7 (un peu modifié) : On cherche $\{A_k, A_i\}$ tels que

$$\begin{cases} W2.\sin(A_k)+W1.\cos(A_k)=X.\cos(A_i)+Y.\sin(A_i)+Z1 \\ W2.\cos(A_k)-W1.\sin(A_k)=X.\sin(A_i)-Y.\cos(A_i)+Z2 \end{cases}$$

En posant $\left\{\begin{array}{c} W=\sqrt{(W1^2+W2^2)} \\ \sin(\alpha)=\dfrac{W1}{\sqrt{(W1^2+W2^2)}} \\ \cos(\alpha)=\dfrac{W2}{\sqrt{(W1^2+W2^2)}} \end{array}\right\}$ soit encore , $\alpha=arg(W2+j.W1)=atan2(W1,W2)$

l'équation se réécrit alors

$$\left\{\begin{array}{l} W.\sin(\underbrace{\alpha+A_k}_{A_k'})=X.\cos(A_i)+Y.\sin(A_i)+Z1 \\ W.\cos(\underbrace{\alpha+A_k}_{A_k'})=X.\sin(A_i)-Y.\cos(A_i)+Z2 \end{array}\right\}$$, ce qui est une équation de *type 6* en A_k' et A_i

Type 8 (un peu modifié) : On cherche $\{A_k, A_i\}$ tels que

$$\begin{cases} X.\cos(A_i)+Y.\cos(A_k)=Z1 \\ X.\sin(A_i)+Y.\sin(A_k)=Z2 \end{cases}$$

on passe les termes en Ai à droite dans les équations,

$$\begin{cases} Y.\cos(A_k)=Z1-X.\cos(A_i) \\ Y.\sin(A_k)=Z2-X.\sin(A_i) \end{cases}$$

on somme les carrés des 2 équations, ce qui donne

$$\underbrace{Y^2-Z1^2-Z2^2-X^2}_{Z'}=\underbrace{[-2.X.Z2]}_{X'}.\sin(A_i)+\underbrace{[-2.X.Z1]}_{Y'}.\cos(A_i)$$,

On est alors ramené à une équation de **type 2** en A_i : $X'.\sin(A_i)+Y'.\cos(A_i)=Z'$ qui au plus admet 2 solutions A_{i1}, A_{i2}

en posant $\begin{cases} I(A_i)=Z2-X.\sin(A_i) \\ R(A_i)=Z1-X.\cos(A_i) \end{cases}$ pour chacune de ces solutions, on trouve la solution A_k , correspondante :

$$A_{k1,2}=arg\left(\frac{R(A_{i1,2})}{Y}+j.\frac{I(A_{i1,2})}{Y}\right)=atan2\left(I(A_{i1,2}).sign(Y),R(A_{i1,2}).sign(Y)\right)$$