Exercice Analyse 12/09

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

1) $\forall R \geq 1$, calculer $\int_1^R \frac{1}{x^\alpha} dx := I_R$

2) Discuter selon les valeurs de α de l'existence de $\lim_{R \mapsto +\infty} I_R$.

1) Pour $\alpha \neq 1$: $I_R = -\frac{1}{\alpha - 1} \left[\frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_1^R$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $= \frac{1}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{R^{\alpha-1}} - 1 \right)$

Pour $\alpha = 1$: $I_R = [\ln x]_1^R = \ln R$

2)

$$I_R \begin{cases} \ln(R) & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{R^{\alpha-1}} - 1 \right) & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Si $\alpha = 1$, $I_R = \ln(R) \xrightarrow[R \to +\infty]{} +\infty$ ~~quand R~~

Si $\alpha > 1$ alors $\frac{1}{R^{\alpha-1}} \xrightarrow{R \to \infty} 0$ de $\lim_{R \to +\infty} I_R = \frac{1}{\alpha - 1}$

Si $\alpha < 1$ alors $\frac{1}{R^{\alpha-1}} \xrightarrow{R \to \infty} 0$ de $\lim_{R \to +\infty} I_R = \frac{1}{\alpha - 1}$.

Exercice 1

1) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|u_n - l| < \varepsilon$

2) Soit $u_n = \frac{1}{2n^2}$, $l = 0$

On fixe $\varepsilon > 0$, $|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2n^2} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}}$. Il suffit donc de prendre $N > \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}}$

3) (u_n) bornée si $\exists M \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$

Supposons que (u_n) converge. En appliquant la définition avec $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq 1$: En particulier $\forall n \geq n_0$ $|u_n| \leq |\ell|$

TD - Analyse

Exercice 2

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n-\ell| < \varepsilon \ (*)$

On suppose que l'on a $(*)$ montrons que
$\lim\limits_{n\to+\infty} \overset{v_n}{u_{2n}} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \overset{w_n}{u_{2n+1}} = \ell$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists N_1, \ n \geq N_1, \ |v_n-\ell| \leq \varepsilon$
$\forall \varepsilon>0 \ \exists N_2, \ n \geq N_2, \ |w_n-\ell| \leq \varepsilon$
Si $n \geq N = N_1 \Rightarrow 2n \geq N$ et $* \Rightarrow |u_{2n}-\ell| \leq \varepsilon$
et $n \geq N = N_2 \Rightarrow 2n+1 \geq N$ et $* \Rightarrow |u_{2n}-\ell| \leq \varepsilon$

2) $\lim u_{2n} = \ell$ et $\lim u_{2n+1} = \ell$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N, \ n > N_1, \ |v_n-\ell| = |u_{2n}-\ell| \leq \varepsilon \ **$
$\forall \varepsilon>0 \ \exists N_2(\varepsilon), \ n > N_2 \ |w_n-\ell| = |u_{2n+1}-\ell| \leq \varepsilon \ ***$

$n \geq N_2 \Rightarrow 2n+1 \geq 2N_2+1$
$n \geq N_1 \Rightarrow 2n \geq 2N_2$
pour $k \geq \max(2N_2, 2N_1+1)$
$|u_k-\ell| \leq \varepsilon$

Donc $\forall \varepsilon>0, \exists N = \max(2N_2, 2N_1+1)$ tel que si $k \geq N$ alors $**$ et $*** \Rightarrow |u_k-\ell| \leq \varepsilon$

Exercice 3

Soit (u_n) est une suite telle que (u_{2n}) converge alors ~~$\cancel{\forall}$~~ que u_n converge.
~~donc $\forall \varepsilon>0 \ \exists N(\varepsilon)$, max~~ (u_n) converge vers ℓ
et u_n croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}$

$u_{2n} \leqslant u_{2n+1} \leqslant u_{2(n+1)}$ or $u_{2n} \to l$ et $u_{2(n+1)} \to l$

donc (Comparaison) $u_{2n+1} \to l$ donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) cv vers la ~~$u_{2n} \to l$~~ même limite $\Leftrightarrow (u_n)$ cv vers l.

Ou on sait $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N, n \geqslant N, |u_{2n} - l| \leqslant \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon), n \geqslant N, l - \varepsilon \leqslant u_{2n} \leqslant u_{2n+1} \leqslant l + \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N, n \geqslant N, l - \varepsilon \leqslant u_{2n} \leqslant u_{2n+1} \leqslant l + \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N, n \geqslant N, |u_{2n+1} - l| \leqslant \varepsilon$

<u>Exercice 4</u> $\quad u_{n+1} = u_n + \dfrac{a}{u_n} \qquad a > 0$

u_0 donnée

On suppose que $u_n \to l$, montrer que $l \neq 0$

Supposons que $(l = 0)$ $u_n \to 0 \Rightarrow \dfrac{a}{u_n} \to \infty$ on a $a > 0$

$\Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \to +\infty$

absurde car $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Si $u_n \mapsto l$ alors $u_{n+1} \to l$ comme $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$

$\longmapsto \dfrac{1}{2}\left(l + \dfrac{a}{l}\right) \Rightarrow \dfrac{l}{2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{l} \Rightarrow l^2 = a \Leftrightarrow l = \sqrt{a}$

<u>2)</u> <u>a)</u> On suppose que $u_0 > 0$

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a}$$

$$= \frac{1}{2u_n}\left(u_n^2 + a - 2u_n\sqrt{a}\right)$$

$$= \frac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2$$

Montrons que $u_n \geq 0$, $\forall n$

Par récurrence l'hypothèse est vraie pour $n=0$

car $u_0 > 0$

Supposons que $u_n \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}) = u_{n+1} \geq 0$

$\Rightarrow u_{n+1} - \sqrt{a} \geq 0$, $\forall n$

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}) - u_n$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}u_n^2 \qquad = -\frac{1}{2}(u_n - \sqrt{a})(u_n + \sqrt{a})$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{a}^2 - u_n^2)$ d'où $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc $(u_n) \searrow$

c) u_n est minorée car $u_n \geq \sqrt{a}$, u_n est décroissante donc u_n converge.

3) a) voir 2) a) $\qquad u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}u_n + \frac{a}{2u_n} - \sqrt{a}$

b) On a $u_n > \sqrt{a}$ $\qquad = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2$

$\frac{1}{2u_n} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$

$\frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2 < \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n - \sqrt{a})^2$

c) $(u_n - \sqrt{a}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} (u_0 - \sqrt{a})^{2^{n+1}}$

Par récurrence

I: $(u_0 - \sqrt{a}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)(u_0 - \sqrt{a})^2$

Ceci donne l'hypothèse de récurrence pour $n=1$

Supposons que

$(u_n - \sqrt{a}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} (u_0 - \sqrt{a})^{2^{n+1}}$

$(u_{n+1} - \sqrt{a}) \leq \frac{1}{2} (u_n - \sqrt{a})^2$ comme $(u_n - \sqrt{a})^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$

$\times \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} (u_0 - \sqrt{a})^{2^{n+1}}$ $(u_0 - \sqrt{a})^2$ $= \left(\frac{1}{2}\right)^2 (u_0 - \sqrt{a})^{2^{n+1}}$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}} (u_0 - \sqrt{a})^{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (u_0 - \sqrt{a})^2$

Exercice 5

On rappelle que $\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos(x)\sin(y)$

$\Rightarrow \sin(n+1) - \sin(n-1) = 2 \cos(n) \sin(1)$

Supposons que $\sin(n)$ CV vers l.

$\Rightarrow \sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\cos(n) \sin(1)$

$l - l = 2 \lim\limits_{n \to +\infty} \cos(n) \sin(1)$

$\Rightarrow$ ~~Com~~ $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n) = 0$

~~$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$~~

~~$\cos(n+1) + \cos(n-1)$~~

$\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos(n) \sin 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n+1) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sin n \cos(1) + l \sin 1$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n) = 0$ car si $\lim \neq 0$ on

a $\cos(1) = 1$ faux.

Si $\sin(n)$ CV elle CV ~~vers~~ vers 0 si $\cos(n)$ cv, converge

vers 0.

4) $\cos^2(n) + \sin^2(n) = 1 \Rightarrow 1 = 0 + 0$ absurde

donc $\cos(n)$ et $\sin(n)$ n'ont pas de

limite.

Exercice 6

On suppose que (u_m) converge vers ℓ.

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N, \ m \geq N, \ |u_m - \ell| \leq \varepsilon$. On pose

$$v_m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} u_k$$

Montrons que (v_m) converge vers ℓ.

~~$v_m = \lim$~~

Fixons $\varepsilon > 0$ et montrons qu'il existe N_1 telle que si ~~x~~ $m \geq N_1$

$$|v_m - \ell| \leq \varepsilon$$

$$v_m - \ell = \left(\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m} u_k\right) - \ell$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} (u_k - \ell) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{N} (u_k - \ell) + \frac{1}{m} \sum (u_k - \ell)$$

$$|v_m - \ell| = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{N} |u_k - \ell| + \frac{1}{m} \sum_{k=N}^{m} |u_k - \ell|$$

② $\Leftrightarrow \frac{1}{m} \sum_{k=N+1}^{m} |u_k - \ell| \leq \frac{1}{m} \sum_{k=N+1}^{m} \varepsilon$

car pour $k \geq N+1$ on a

$|u_k = \ell| \leq \varepsilon$

② $\leq \frac{1}{m}(m - N)\varepsilon \leq \varepsilon$

car $\frac{m-N}{m} \leq 1$ pour $m \geq N$

On veut montrer qu'il existe N_2 tel que pour $m \geq N_2$

① $= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{N} |u_k - \ell| \leq \varepsilon$. Comme (u_m) CV alors $\exists M$

tel que $|u_m| \leq M = C$

$\Rightarrow |u_m - \ell| \leq |u_m| + |\ell| \leq m + |\ell| \ \forall \ m$

① $= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{N} |u_k - \ell| \leq \frac{C}{m} \sum_{k=1}^{N} 1 = C\frac{N}{n}$

On doit avoir $C\frac{N}{n} \leq \varepsilon \Rightarrow n \geq C\frac{N}{\varepsilon}$

On choisit $N_2(\varepsilon) \geq \frac{CN}{\varepsilon}$ pour $n \geq N_2$ on a

① $\leq \varepsilon$ donc pour $n \geq \max(N_2, N) = N_1$

$|v_n - l| \leq ① + ② \leq 2\varepsilon \Rightarrow \lim v_n = l$

Prenons $u_n = (-1)^n$

$v_n = \frac{1}{n}(-1 + 1 - 1 + \ldots \pm 1)$

donc $|v_n| \leq \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow v_n$ converge

<u>Exercice 7</u> On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$. Par hypothèse $v_n \to l$

D'après Cesaro : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k \to l$

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = \frac{1}{n}[(u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2})]$

$= \frac{1}{n}[(u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) = \frac{u_2}{n} \ldots \frac{u_1}{n}$

Donc $\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k\right) = \lim_{n \to +\infty}\left(\frac{u_n}{n} - \frac{u_1}{n}\right) = l$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty}\frac{u_n}{n} - \lim_{n \to \infty}\frac{u_1}{n} = l$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty}\frac{u_n}{n} = l$

Exercice 8

$$\sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k-1}) = n(u_n - u_{n-1}) + (n-1)(u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + \cancel{u_2 - u_1}\ 2(u_2 - u_1) + u_1 - u_0$$
$$= n u_n - u_{n-1} - u_{n-2} - u_1 - u_0$$
$$= n u_n - \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k(u_k - u_{k-1}) = u_n - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

On pose $v_k = k(u_k - u_{k+1})$ comme $\lim_{k \to \infty} v_k = 0$

D'après l'exo 6 : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k+1}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k-1}) = \lim_{n \to +\infty} \left[u_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} u_k \right] = 0$$

$$\Rightarrow \lim \cancel{v_n}\, u_n = \lim \frac{1}{n} \sum u_k = l$$

Séries numériques

Exercice 1 $\quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 2

a) $u_n = e^{in} = (e^i)^n$

donc $\sum_{j=0}^{n} u_j = \frac{1 - (e^i)^{n+1}}{1 - e^i}$ Montrons que $(e^i)^n$ n'a pas de limite. Supposons par l'absurde qu'il existe l tel que $\lim_{n \to +\infty} (e^i)^n = l$ on a alors $\lim_{n \to +\infty} (e^i)^{n+1}$

$= \lim_{n \to +\infty} (e^i)^n . e^i = l . e^i \neq l$. Donc c'est absurde.

Σu_n diverge.

b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$

c) $\sum_{k=0}^{n-1} \sin(k) = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Im}(e^{ik})$

$= \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik} = \operatorname{Im}\left(\frac{1-e^{in}}{1-e^{i}}\right)$

$= \cancel{\operatorname{Im}} \frac{1}{2} \left((1-e^{-i})(1-e^{in}) \right) \frac{1}{2(1-\cos(1))}$

$= \cancel{\frac{1}{2}} \left(-\sin(n) + \sin(1) + \sin(n-1)\right) \frac{1}{2(1-\cos(1))}$

Montrons que $\sin(n) - \sin(n-1)$ diverge

$\sin(a) - \sin(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\sin(n) - \sin(n-1) = 2 \cos\left(\frac{2n-1}{2}\right) \sin\left(\frac{1}{2}\right)$

d) $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)(k+2)} = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+2}\right)$

$= \frac{1}{3}\left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} - \sum_{p=4}^{n+2} \frac{1}{p}\right)$

$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \sum_{p=4}^{n-1} \frac{1}{p} - \sum_{p=4}^{n-1} \frac{1}{p} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

$= \frac{11}{18}$

e) $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2} \Rightarrow$ CV par riemann

$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln(n)$

$\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln(1) - 2\ln(2) + \ln(3) + \ln(2) - 2\ln(3)$
$+ \ln(4) + \dots + \ln(n-2) - 2\ln(n-1) +$
$+ \ln(n) + \ln(n-1) - 2\ln(n) + \ln(n+1)$

$= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln(2)$

Exercice 3

$\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \underbrace{\sum_{p=0}^{n} u_{2p}}_{CV} + \underbrace{\sum_{p=0}^{n} u_{2p+1}}_{DV} \Rightarrow$ la suite $\left(\sum_{k=0}^{2n+1} u_k\right)_n$ diverge

$\left(\sum_0^n u_k\right)$ ne cv pas. (S_{n+1}) est une suite extraite de (S_n).

Or tte suite extraite d'une suite cv est cv. Donc (S_n) ne CV pas.

Exercice 4

En particulier (u_n) est bornée, càd il existe $M>0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq M$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n^2 \leq M\, u_n$

$M_n \geq 0$

Donc $\sum_{n=0}^{N} u_n^2 \leq M \sum_{n=0}^{N} u_n$

$\leq M \sum_{n=0}^{+\infty} u_n < +\infty$

Exercice 5

On va montrer que $\lim_{n\to+\infty} n u_n = 0$

Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

$S_n - S_{[n/2]} = \sum_{k=[n/2]+1}^{n} u_k$

$\underbrace{l - l}_{0}$ Soit $R_n = \sum_{k=[n/2]+1}^{n} u_k$

$R_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$R_n \geqslant (n - [n/2] - 1)\, u_n$

$\geqslant n/2 \; u_n$

$n u_n \leqslant 2R_n \to 0$

Soit u_n défini par $u_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n = k^2,\ k\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On a $u_n \geqslant 0$ mais u_n n'est pas décroissante

$\lim\limits_{k\to+\infty} k^2 u_{k^2} = 1$ est une suite extraite de nu_n

donc nu_n ne tend pas vers 0.

Donc $nu_n \not\to 0$ est ce que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge ?

$$\sum_{k=1}^{K^2} u_k = \sum_{p=1}^{K} u_{p^2}$$

Or $\lim\limits_{K\to+\infty} \sum\limits_{p=1}^{K} \frac{1}{p^2} < +\infty$ donc $\sum\limits_{k=1}^{K^2} u_k \leqslant \sum\limits_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$

Pour $K \geqslant 1$ on a $K^2 \geqslant K$

Donc $S_K \leqslant S_{K^2_{+\infty}}$

Donc $S_K \leqslant \sum\limits_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$

<u>Exercice ~~6~~</u> : Série de Bertrand

Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$ converge ssi $\beta > 1$

$= \sum\limits_{n\geqslant 2} f(n)$, $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^{\beta}}$

TR de comparaison série / intégrale $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{m \geq 2} \frac{1}{m(\ln m)^\beta}$ est de même nature que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx$

Par changement de variable $u = \ln(x)$:

$\int_{\ln 2}^{\ln N} \frac{1}{u^\beta} du = \left[\frac{1}{1-\beta} u^{1-\beta} \right]_{\ln 2}^{\ln N} = \frac{1}{1-\beta} \ln(N)^{1-\beta} - \frac{1}{1-\beta} \ln(2)^{1-\beta}$

Cela converge ssi $\beta > 1$

Exercice 6

$I_N = \int_1^N x^a dx$

1) $I_N = \frac{1}{1+a}(N^{a+1} - 1)$. $(I_N)_N$ cv ssi $a < -1$

2) f cte $|f(x)| \leq C x^{-a}$ est ce que $\int_1^N f(x) dx$ cv ?

$- \int_1^N x^{-a} dx \leq \int_1^N f(x) dx \leq \int_1^N x^{-a} dx$

Rappel : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue. On suppose $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx$ converge. Alors $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge

Ici $|f(x)| \leq x^{-a}$ avec $a > 1$

Donc $\int_1^\infty |f(x)| dx$ converge $\Rightarrow \int_1^\infty f(x) dx$ cv

Exercice 7

$\forall m \geq 2, \quad \sqrt{m^3 - m - 1} \geq m^{3/2}$

donc $\frac{\ln(m)}{\sqrt{m^3+m-1}} \sim \frac{\ln(m)}{m^{3/2}}$ $\quad \varepsilon > 0$

$= \frac{\ln(m)}{m^{3/2-\varepsilon} \times m^\varepsilon}$ $\quad 3/2 - \varepsilon > 1$

$$\frac{\ln(c)}{n^{3/2-\varepsilon}} \underset{n}{\varepsilon} \leqslant \frac{c}{n^{3/2-\varepsilon}}$$ Par comparaison on a la convergence.

Convergence de $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\sin(1/\ln(n))}{n} \sim \sum \frac{1}{n\ln(n)}$ par Bertrand diverge car pour $n\geqslant 2$ on a $\sin\frac{1}{\ln(n)} > 0$ on a donc 2 séries positives

Par théorème de comparaison il vient $\sum \frac{\sin 1/\ln(n)}{n}$ diverge

2) Par d'Alembert $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{\sqrt{n!}} \times \frac{\sqrt{(n-1)!}}{n^2}$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \times \sqrt{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad CV$$

3) Par d'Alembert $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2 \times \frac{(2n)!}{(2n+2)!}$

$$= \frac{1}{4} \Rightarrow CV$$

4) Par cauchy : $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{2^n} \to 0$ donc CV

5) Par d'Alembert $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)! \times n^n}{(n+1)^{(n+1)} \times n!}$

$$= \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = e^{n[\ln(1)-\ln(1+1/n)]}$$

$$= e^{-1} \Rightarrow CV$$

6) Par d'Alembert $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{(n+1)}}{(2n+2)!} \frac{2n!}{n^n} = \frac{1}{2(2n+1)} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$\sim \frac{e}{4n} \to 0 \quad \text{donc CV}$$

e^x $e^x = e^{x\ln(e)}$ $3^x = e^{x\ln(3)}$

Exercice 11

$\sum e^{-n^2 \sin(1/n)} - 1$: $\quad \sin(1/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n + o(1/n)$

$e^{-n^2 \sin(1/n)} - 1 \sim e^{-n} - 1 \to -1 \not\to 0$ donc diverge.

$u_n = O(1/n^k) \Rightarrow u_n = o(1/n^{k-1})$

$u_n = o(1/n^k) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} n^k u_k = 0$

$u_n = O(1/n^k) \Leftrightarrow |n^k u_n|$ bornée

$u_n = o(1/n^k) \Leftrightarrow O(1/n^k)$

$$\sum e^{-n^2 \sin(1/n^4)} - 1 = e^{-n^2(1/n^4 + o(1/n^4))}$$
$$= e^{-1/n^2 + o(1/n^2)}$$
$$= 1 + (-1/n^2 + o(1/n^2)) + o(1/n^2)$$
$\Rightarrow$ CV par Rieman

$$\sum \left(n \ln(1+1/n) - \frac{2n}{2n+1}\right)$$

$$n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\frac{2n}{2n+1} = \frac{2}{2+\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$n \ln(1+1/n) - \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow \text{CV par Riemann}$$

On utilise que $\sin\left(\frac{2k\pi}{n^3}\right) = \operatorname{Im} e^{\frac{2ik\pi}{n^3}}$

donc $\sum_0^{17} \sin \frac{2k\pi}{n^3} = \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{17} \left(e^{\frac{2i\pi}{n^3}}\right)^k = \operatorname{Im} \frac{1 - e^{2i\,18\pi/n^3}}{1 - e^{2i\pi/n^3}}$

Exercice 14

Par d'Alembert $\frac{a^n}{n!} : \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \quad \frac{n!}{a^n} = a \times \frac{1}{n+1}$

$\to 0 \Rightarrow CV$

Par d'Alembert $\frac{a^n}{n^\alpha} : \frac{a^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \quad \frac{n^\alpha}{a^n} = a \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \Rightarrow a$

$\Rightarrow$ CV si $a < 1$

DV si $a > 1$

Si $a = 1$ on a $\frac{1}{n^\alpha}$ si $\alpha > 1$ CV

sinon DV

Exercice 15

1) Par valeur absolue on a CV

~~2)~~

$\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \underset{\downarrow \text{ CV}}{\frac{(-1)^n}{n}} - \underset{\downarrow \text{ CV}}{\frac{1}{n^2+n(-1)^n}}$ CV

$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} - \frac{(-1)^n}{n}$

$= \frac{-1}{n^2+(-1)^n n}$

2) $u_n = \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$

$= \underset{\downarrow \text{ DV}}{\frac{1}{n}} + \underset{\downarrow \text{ CV}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$ donc diverge

3) $u_n = (-1)^n \sqrt{n} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$

$\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$

$= \frac{1}{n} + r_n + \frac{1}{n} - \tilde{r}_n$

$= \frac{2}{n} + r_n + \tilde{r}_n$

$u_n = (-1)\sqrt{n}\left(\frac{2}{n} + r_n + \tilde{r}_n\right)$

$= \frac{2(-1)^n}{\sqrt{n}} + (-1)^n \sqrt{n}\, r_n$

$\Downarrow$

cv par SA

On étudie $(-1)^n \sqrt{n}\, r_n$

- $r_n = \cancel{(-1)^n \sqrt{n}}\ o(1/n)$

$= o\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

$\downarrow$

pas SA $\cancel{\phi}$ car $n_i \geq 0$, $n_i \searrow$

- $r_n = \cancel{(-1)^n \sqrt{n}}\ O(1/n^2)$

$(-1)^n \sqrt{n}\ O(1/n^2) = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

Donc $\sum |(-1)^n \sqrt{n}\, r_n|$ cv par Riemann

4) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n - \ln(n)}$ $\begin{matrix} \geq 0 \\ \to 0 \end{matrix}$

$f(x) = x - \ln(x)$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \geq 0 \quad \forall x \geq 1$

Donc $\frac{1}{n - \ln(n)} \searrow \Rightarrow$ CCSA

5) $\sum \left(e - (1 + 1/n)^n\right)$

$u_n = e - \exp(n \ln(1 + 1/n))$

$\ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$

donc $\exp(n \ln(1 + 1/n)) = \exp(1 - 1/2n + o(1/n))$

$u_n = \exp(1 - (1 - 1/2n + o(1/n)))$

$= \frac{-e}{2n} + o(1/n)$

~~On pour n assez~~

On en déduit que pour $n \gg 1$, $u_n > 0$.

De plus $u_n \sim \frac{e}{2n}$ or $\sum \frac{e}{2n}$ diverge donc $\sum u_n$ diverge

6) $\ln(1 + \frac{(-1)^n}{n}) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{\text{par CCSA cv}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{cv}}$

7) $\sin \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

8) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{1+1/n}}$

Par csa $v_n = \dfrac{1}{n^{1+1/n}}$ > 0
$\to 0$

Soit $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$ on a $f(x) \nearrow$ donc $v_n \searrow$
donc cv.

Exercice 13

1) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ est $\searrow$ sur $[1, +\infty[$

Donc pour tout $k \geqslant 1$ on a :
$\forall x \in [k, k+1]$, $f(k) \geqslant f(x) \geqslant f(k+1)$
Donc $\forall x \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{k} \geqslant f(x) \geqslant \dfrac{1}{k+1}$

Donc $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \dfrac{1}{k}$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^n \frac{1}{x}\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$S_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant S_{n-1}$$

Ainsi $\left.\begin{array}{l} \ln + 1 \geqslant S_n \\ S_n \geqslant \ln(n+1) \end{array}\right\}$ on a bien l'inégalité.

2) $n+1 \geqslant n$
$\ln(n+1) \geqslant \ln(n)$
$-\ln(n+1) \leqslant -\ln(n)$

$S_n - \ln(n+1) \leqslant S_n - \ln(n)$
$v_n \leqslant u_n$

$$u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \longrightarrow 0$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1)) = \int_{n+1}^{n+2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\right) dt \geq 0$$

croissante

ainsi les suites sont adjacentes et donc elles convergent vers une limite commune γ.

Montrons que $\gamma \in [1/2, 1]$

$u_1 = 1 - \ln(1) = 1$

$v_1 = 1 - \ln(2) \quad \dots \quad v_6 = 0,50$

Exercice 16

On a $\frac{v_n}{u_n} \longrightarrow 1$ donc équivalent

$\frac{u_n}{(-1)^n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ par ccsa cv.

$\frac{v_n}{(-1)^n} = \frac{1}{(-1)^n + \sqrt{n}} > 0$ car $\sqrt{n} \pm 1 > 0$

$\to 0$

on ne peut pas conclure sur la décroissance

$$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$$

$$\text{par DL} = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\text{cv}} - \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{dv}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{\text{cv}}$$

Espaces vectoriels normés

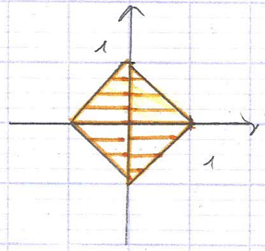
Exercice 1

$B_1(0,1) = \{(x,y) \mid \|(x,y)\|_1 < 1\}$

$\Leftrightarrow |x| + |y| < 1$

1^{er} cas si $x > 0$ et $y > 0$

alors $x + y < 1$



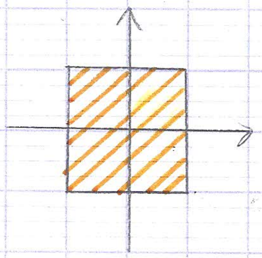
$2^{ème}$ cas si $x > 0$ et $y \leq 0$

alors $x - y < 1$

$B_\infty(0,1) = \{(x,y) \mid \|(x,y)\|_\infty < 1\}$

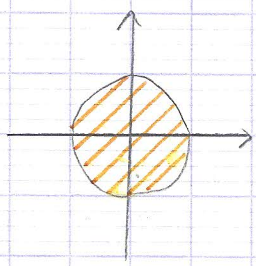
$\Leftrightarrow \max(|x|, |y|) < 1$

si $\begin{cases} |x| < 1 \\ |y| < 1 \end{cases}$ alors $B_\infty(0,1) = \{|x| < 1\} \cap \{|y| < 1\}$



$B_2(0,1) = \{(x,y) \mid \|(x,y)\|_2 < 1$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 < 1$



Exercice 3

$P = \sum_{k=0}^{K} a_k X^k$ $\qquad N(P) = \sup |a_k|$

$N(P) \geq 0$ comme sup d'une quantité ≥ 0

$N(P) = 0 \Rightarrow \sup |a_k| = 0$

Donc $|a_k| = 0 \quad \forall k = 0, \ldots, k$

donc $a_k = 0 \quad \forall k = 0, \ldots, k$

donc $P = 0$

$\lambda \in \mathbb{K} \quad P \in \mathbb{K}[X] \qquad P = \sum_0^K a_k X^k$

$\lambda P = \sum_0^K \lambda a_k X^k$

$N(\lambda P) = \sup \{ |\sum_0^K \lambda a_k X^k| \}$

$P = \sum_{k=0}^{K} a_k X^k \qquad Q = \sum_{k=0}^{L} b_L X^L$

Supposons $K \leq L$

$P = \sum_{k=0}^{L} a_k X^k$ avec $a_k = 0 \quad \forall k = K+1, \ldots, L$

$P + Q = \sum_{k=0}^{L} (a_k + b_k) X^k$

$N(P+Q) = \sup |a_k + b_k|$

$\leq \sup (|a_k| + |b_k|)$

$\leq \sup |a_k| + \sup |b_k|$

$N_q(P) = (\sum |a_k|^q)^{1/q}$

Exercice

① Sur $\mathbb{R}^d$ montrer que $\|\|_1, \|\|_2, \|\|_\infty$ sont équivalentes

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i| \leqslant \max |x_j| \quad j = 1 \dots d$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{d} \|x\|_\infty$$
$$\leqslant d \|x\|_\infty$$

Réciproquement $\|x\|_\infty = \max |x_i| \leqslant \sum |x_i| = \|x\|_1$

Donc $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant d\|x\|_\infty$

De même $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{d}\, \|x\|_\infty$

② ~~V/F~~ Est ce que c'est vrai sur $\mathbb{K}[X]$

Montrer qu'il existe une suite de polynômes (P_m) tel que

$N_1(P_m) = m$ et $N_\infty(P_m) = 1$

On définit $P_m(X) = \sum_{k=0}^{m} X^k$ donc $N_\infty(P_m) = 1$

$N_1(P_m) = m+1$

Ainsi il n'existe pas de constante $c > 0$ tel que

$\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $N(P) \leqslant c N_\infty(P)$

Exercice 2

$$N(u) = \sup_{t \in [0,1]} |x + ty|$$

$N(u)$ est clairement positive (car sup de valeur absolue)

$N(u) = 0 \Leftrightarrow \sup |x + ty| = 0$

$\Rightarrow |x + ty| = 0 \quad \forall t \in [0,1]$

$t = 0 \Rightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$t = 1 \Rightarrow |y| = 0 \Leftrightarrow y = 0$

donc $u = (0,0)$

Soit $w = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$N(u + w) = \sup |(x + x_2) + t(y + y_2)|$

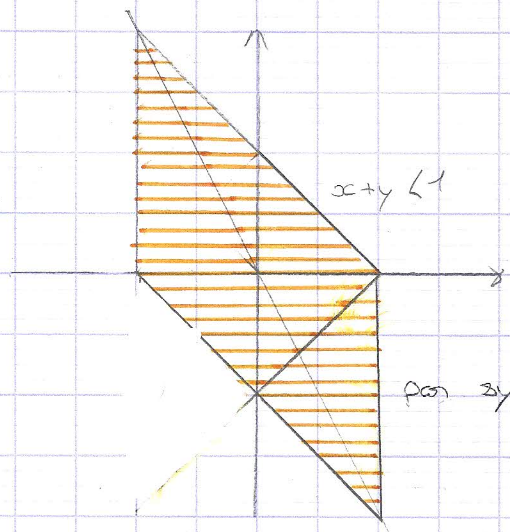
$= \sup |(x + ty) + (x_2 + ty_2)|$

$\leqslant \sup |x + ty| + \sup |x_2 + ty_2| = N(u) + N(w)$

donc N est une norme.

$N(x,y) < 1 \Leftrightarrow \sup_{t\in[0,1]} |x+ty| < 1$

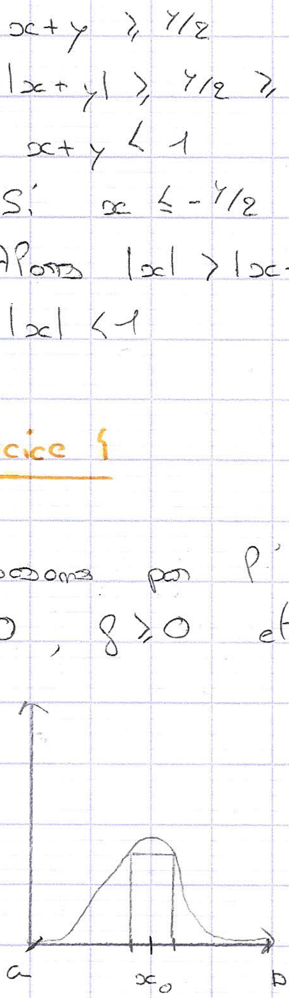
- $x, y \geq 0$ alors $x+ty = |x+ty|$ donc $N(y,x) = \sup_{t\in[0,1]} x+ty$
$= x+y$ (sup en $t=1$)
donc $N(x,y) < 1 \Leftrightarrow x+y < 1$



- $y \geq 0$, $x < 0$. La fonction
$t : x+ty$ est croissante donc
$x \leq x+ty \leq x+y$
$|x+ty| \leq \max(|x|, |x+ty|)$
  - Si $x \geq -y/2$
  $x+y \geq y/2$
  $|x+y| \geq y/2 \geq |x|$
  $x+y < 1$
  - Si $x \leq -y/2$ 94 école - rue Jean Jaurès
  Alors $|x| > |x+y|$
  $|x| < 1$

Exercice 1

Supposons par l'absurde que $f \in \mathcal{C}([a,b])$ vérifie $\int f = 0$, $f \geq 0$ et $f(x_0) > 0$ pour un certain x_0.



D'après la continuité de f en x_0 avec $\varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2} > 0$
Il existe $\delta > 0$ tel que
$\forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$
$|f(x) - f(x_0)| < \frac{|f(x_0)|}{2}$

Par suite $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\quad f(x) \geq \frac{|f(x_0)|}{2}$

Par suite $\int_a^b f = \int_a^{x_0-\delta} f + \underbrace{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f}_{\geq 2\delta \frac{|f(x_0)|}{2}} + \int_{x_0+\delta}^{b} f$

Exercice 6

Pour tout ensemble A, $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Montrons que $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r) = \{\|x-a\| \leq r\}$

$\overline{B}(a,r) \supset B(a,r)$

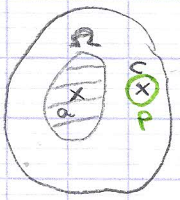
$\overline{B}(a,r)$ est fermé

$\Rightarrow \overline{B(a,r)} \subset \overline{B}(a,r)$

↳ l'adhérence est le plus petit fermé

Montrons que $\overline{B}(a,r)$ est fermée, il faut montrons que $E \setminus \overline{B}(a,r)$ est ouvert.

On doit montrer que $\forall c \in \Omega$, $\exists \rho > 0$ tel que $B(c,\rho) \subset \Omega$



Comme $c \notin \overline{B}(a,r)$ alors $\|c-a\| > r$

Soit $\rho = \frac{\|c-a\|-r}{4} > 0$

Soit $x \in B(c,\rho)$ alors

$\|x-a\| \geq \|a-c\| - \|x-c\| \geq \|a-c\| - \rho$

$\geq \|c-a\| - \frac{\|c-a\|-r}{4} \geq \frac{3}{4}\|c-a\| + \frac{r}{4}$

$> \frac{3r}{4} + \frac{r}{4} = r$ on a donc $\overline{B}(a,r)$ fermée.

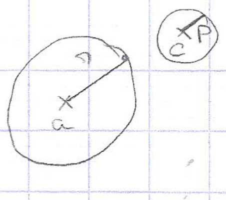
On doit montrer que $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$

Réciproquement montrons que $\overline{B}(a,r) \subset \overline{B(a,r)}$

Soit $c \in \overline{B}(a,r)$ ie $\|c-a\| \leq r$

Supposons par l'absurde que $c \notin \overline{B(a,r)}$ c'est à dire $c \in E \setminus \overline{B(a,r)}$ qui est ouvert par définition

Donc il existe $\rho > 0$ tel que $B(c,\rho) \subset E \setminus \overline{B(a,r)}$



$\|c-a\| \geq r+p > r$ qui contredit $\|c-a\| \leq r$

Exercice 7

1) Sur $\mathbb{R}^2$

Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes alors:

U ouvert pour $N_1 \Leftrightarrow U$ ouvert pour N_2

F fermé pour $N_1 \Leftrightarrow U$ fermé pour N_2

preuve: Soit $a \in U$, il existe $r > 0$ tq $B_N(a,r) \subset U$

Or N_1 équivalente à $N_2 \Rightarrow$ il existe $c > 0$

tel que $N_1 \leq c N_2$

Alors $B_{N_2}(a, \frac{r}{c}) \subset B_{N_1}(a, r)$

$N_2(x-a) < \frac{r}{c}$

$N_1(x-a) < r$. $\square$

• $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x>0, y>0\} = \{x>0\} \cap \{y>0\}$

et $\{x>0\}$ et $\{y>0\}$ sont ouverts

Soit $a \in \{x>0\}$. On cherche $r>0$ tel que $B(a,r) \subset \{x>0\}$

$a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$

On prend $r = \frac{a_1}{2} > 0$

$B(a,r) \subset \{x>0\}$

Soit $X \in B(a,r)$ alors $\begin{cases} |x-a_1| < \Omega \\ |y-a_2| < \Omega \end{cases}$

$x = a_1 + x - a_1$

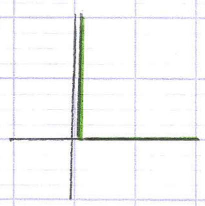
$\geq a_1 - |x-a_1| > a_1 - \frac{a_1}{2} = \frac{a_1}{2} > 0$

• $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x>0, y \geq 0\}$ n'est ni ouvert ni fermé

il n'est pas ouvert car $a = (1,0) \in U_2$

mais $\forall r > 0$, $B(a,r) \cap U_2^c \neq \emptyset$

en effet $(1, r/2) \in B(a,r) \cap U_2^c$



~~Exercice 8~~

U_2 n'est pas fermé car U_2^c n'est pas ouvert par le même raisonnement.

$U_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0\} = \{x \geq 0\} \cap \{y \geq 0\}$

U_3 est fermé donc U_3^c est ouvert

$U_3^c = \{x < 0\} \cup \{y < 0\}$

Or $\{x < 0\}$ et $\{y < 0\}$ sont des ouverts.

Donc U_3^c est ouvert d'où U_3 est un fermé.

2) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq y \leq 1\} = \{y \geq 0\} \cap \{y \leq 1\}$

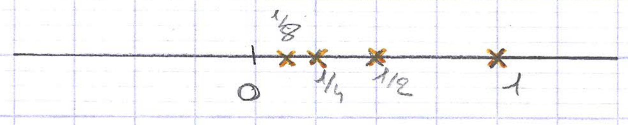
donc fermé.

Pourquoi $[0, +\infty[$ est fermé ?

1) car $]-\infty, 0[$ ouvert

2) $(u_n) \in [0, +\infty[$ il existe une suite $u_n \to l$.

4) $A = \{2^{-n}, n \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}$



A n'est pas ouvert car la ~~toute~~ $B(1, r) \cap A^c \neq \emptyset$ $\forall r > 0$

A n'est pas fermé car A^c n'est pas ouvert

En effet $0 \in A^c$ et $\forall r > 0$ $B(0, r) \cap A \neq \emptyset$

car $2^{-n} \to 0$.

5) $B = \{2^n, n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{2^n\}$

$B^c =]-\infty, 1[\cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}}]2^n, 2^{n+1}[\right)$ est ouvert comme réunion d'ouvert.

a) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est à dire
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$
On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ tel que $x_n \to x$
Cela implique que $\mathbb{Q}$ n'est pas fermé. En effet $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des rationnels tel que $x_n \to \sqrt{2}$.

- Supposons $x \in \mathbb{Q}$

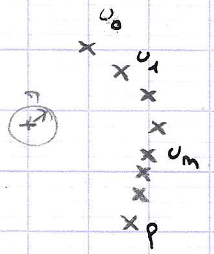
  $x_n = x + \frac{\sqrt{2}}{n} \notin \mathbb{Q}$ et $x_n \to x$

- Supposons $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

  $x_n = x$

Donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas fermé
Finalement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas fermés
Donc ils ne sont pas ouverts.

Exercice 8



Montrons que $G = \{u_1, \dots, u_n\}$
Soit $x \in G^c$, soit $r = \frac{1}{2} \min(\|x - u_i\|_{i=1,\dots,N})$
$r > 0$ car $x \notin G$
Alors $B(x, r) \subset G^c$ donc G est fermé.

Soit $r = \|x - P\| > 0$ $\quad B(x, \frac{r}{4}) \cap B(P, \frac{r}{4}) \neq \emptyset$
~~Alors $x \notin B(P, r/2)$~~
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = P$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$
tel que $\forall n > N, \|u_n - P\| \leq \frac{r}{4}$
En particulier

$$\forall n \geq N, \|u_n - x\| \geq \frac{r}{4} \quad (*)$$

Soit $r' = \min(\|x - u_n\|_{n=0,\dots,N})$ alors $r' > 0$. Soit $r'' = \min(r, r')$ alors $B(x, r'') \cap F \neq \emptyset$.

Exercice 10

$x \in \overline{F}$ ssi $\exists (x_n)$ suite de F tel que $x_n \to x$

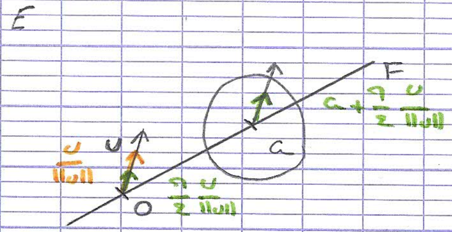
1) Soient x et $y \in \overline{F}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

$x_n \to x \in \overline{F}$

$y_n \to y \in \overline{F}$

$\underbrace{x_n + \lambda y_n}_{\in F \text{ car sev}} \to x + \lambda y \Rightarrow x + \lambda y \in \overline{F}$

2)



Supposons par l'absurde $\exists\ a \in \mathring{F}$ tel que $B(a,r) \subset F$

$F \neq E$ donc il existe $u \in E \setminus F$

en particulier $u \neq 0$

Soit $x = a + \frac{r}{2}\frac{u}{\|u\|}$ $\quad \|x - a\| = \frac{r}{2} \Rightarrow x \in B(a,r)$

Donc $x \in \mathring{F}$, comme $a \in \mathring{F}$ alors $u = \frac{2\|u\|}{r}(x-a) \in \mathring{F}$

ce qui est absurde par définition. $\Rightarrow u \in F$

Exercice 12

$A \in M_n(\mathbb{K})$

$A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ linéaire

$$\begin{cases} \|x\|_\infty = \max(|x_i|, i = 1, \dots, n) \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \end{cases}$$

$A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1,\dots,n}}$ $\qquad A(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)_{i=1\dots n}$

$\|Ax\|_\infty = \max \left(|(Ax)_i| \right)_{i=1,\dots,m}$

$= \max \left(|\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j|_{i=1,\dots,m} \right)$

$|\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j| \leq \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}||x_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \right) \|x\|_\infty$

donc $\|A\|_{\mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m} \leq \max \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \right) := K$

On prend i_0 tel que $|\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}||$

2) $\mathbb{K}^m$ $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$

$A = (a_{ij})_{i,j=1\dots m}$ $Ax = ((Ax)_i)_{i=1,\dots m}$

$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j$

$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^{m} |\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j|$

$\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right) |x_j|$

$\leq \max_{k=1,\dots,m} \sum_{i=1}^{m} |a_{ik}| \times \|x\|_1$

Donc $|||A||| \leq \max_{k=1,\dots,m} \sum_{i=1}^{m} |a_{ik}|$

Montrons l'égalité, soit k_0 tel que
$\sum_{i=1}^{m} |a_{ik_0}| = \max \sum_{i=1}^{m} |a_{ik}|$

$\begin{cases} \|x\|_1 = \sup_{\|y\|_\infty = 1} |\langle x, y \rangle| \\ x \in \mathbb{R}^m \end{cases}$ où $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$

<u>démonstration</u> $|\langle x,y\rangle| = |\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i|$

$\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1$

$\|Ax\|_1 = \sup_{\|y\|_\infty = 1} |\langle Ax, y\rangle|$ $\quad \langle Ax, y\rangle = \langle x, {}^tAy\rangle$

Pour tout y tel que $\|y\|_\infty = 1$ et tout x on a

$|\langle Ax, y\rangle| = |\langle x, {}^tAy\rangle|$

$|||A||| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_1 = \sup_{\|x\|_1=1} \sup_{\|y\|_\infty=1} |\langle x, {}^tAy\rangle|$

${}^tAy = (\sum_{j=1}^{n} a_{ji} y_j)_i$

$\langle x, {}^tA\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_i y_j$ $\quad j_0$ tel que $\max \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij_0} y_i$

On prend $y = (sg(a_{j_0}) \dots sg(a_{nj_0})) = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij_0}|$

3) $\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |(Ax)_i|^2$

$= \sum_{i=1}^{n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j|^2$

On Cauchy Schwarz $\Rightarrow |\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j| \leq (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)^{1/2} (\sum_{k=1}^{n} x_k^2)^{1/2}$

$\|x\|_2 = (\sum_{j=1}^{n} x_j^2)^{1/2}$ Par suite $\sum_{i=1}^{n} (Ax)_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2 \|x\|_2^2$

<u>Exercice 20</u> fin page 17.

1) Soit x et y tels que $\begin{cases} f(x) = x \\ f(y) = y \end{cases}$

donc $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x-y\|$

$\|x-y\| \leq k\|x-y\|$

or $k \neq 1$ donc $\|x-y\| = 0$ donc $x=y$, x est unique.

2) On veut montrer que $\|f^p(x) - f^p(y)\| \leq k\|x-y\|$

On fait par récurrence sur p.

- $p=1$ hypothèse de f.
- $\|f^{p+1}(x) - f^{p+1}(y)\| = \|f(f^p(x)) - f(f^p(y))\|$

$$\leq k\|f^p(x) - f^p(y)\|$$

$$\leq k \times k^p \|x-y\|$$

$$\leq k^{p+1}\|x-y\|$$

3) $x_n = f^n(x_0)$

$x_{n+1} = f^n(x_1)$

$$\|x_{n+p} - x_n\| = \|f^{n+p}(x_0) - f^n(x_0)\|$$

$$= \|f^n(f^p(x_0)) - f^n(x_0)\|$$

$$\leq k^n \|f^p(x_0) - x_0\| \quad *$$

$$f^p(x_0) - x_0 = \sum_{j=0}^{n} f^{j+1}(x_0) - f^j(x_0)$$

$$= \sum_{j=0}^{p-1} f^j(x_1) - f^j(x_0)$$

$$\|f^p(x_0) - x_0\| \leq \sum_{j=0}^{p-1} \|f^j(x_1) - f^j(x_0)\|$$

$$\leq \sum_{j=0}^{p-1} k^j \|x_1 - x_0\| \leq \frac{1-k^p}{1-k}\|x_1 - x_0\|$$

$$\leq \frac{1}{1-k}\|x_1 - x_0\| \quad **$$

c) Ceci montre que la suite est de Cauchy

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{R}\ \|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$

On $\lim_{n \to +\infty} k^n = 0$ car $|k| < 1$

Donc $\exists N$ tel que $\forall n \geq N$ $\frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\| < \varepsilon$

Comme E est complet, la suite de Cauchy (x_n) admet une limite $x \in E$.

Comme F est fermé alors $x \in F$

Comme f est continue on a $f(x) = x$

Exercice 19

Montrons que $\exists r > 0$ tel que $B_F(0,r) \subset u(B_E(0,1))$ *
$B_E(0,1)$ est un ouvert de E. Donc $u(B_E(0,1))$ est un ouvert de F.
u est linéaire donc $u(0_E) = 0_F$
Donc $0_F \in u(B_E(0,1))$ est ouvert donc il existe $r > 0$ tel que $B_F(0,r) \subset u(B_E(0,1))$
* équivaut à $\forall y \in F$, $\|y\| < r \Rightarrow \exists x \in E$ tel que $\|x\| < 1$ et $u(x) = y$

Soit $y \in F$
- si $y = 0$ alors $y = u(0)$
- si $y \neq 0$, $\frac{r}{2} \frac{y}{\|y\|} \in B_F(0,r)$

Donc d'après étoile, il existe $x \in B_E(0,1)$ tel que
$\frac{r}{2} \frac{y}{\|y\|} = u(x)$ $\quad y = \frac{2\|y\|}{r} u(x)$

$y = u\left(\frac{2\|y\|}{r} x\right)$ donc surjectif.

Exercice 16

$\varphi_A(x) = \langle a, x \rangle$ est linéaire par ~~rapport~~ linéarité du produit scalaire
u est continue ssi $\exists C > 0$ tel que $\forall x \in E$ $\|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E$
$|\varphi_A(x)| = |\langle a, x \rangle| \leq \|a\| \|x\|$
Donc φ_A est continue et $\|\varphi_A\|_{E \to \mathbb{R}} \leq \|a\|_E$
De plus $|\varphi_A(A)| = \langle a, a \rangle = \|a\| \|a\|$

Montrons que $\sup_{\|x\|=1} |\varphi_A(x)| \geq \|a\|$

Soit $x_0 = \frac{a}{\|a\|}$, $|\varphi_A(x_0)| = \langle a, \frac{a}{\|a\|} \rangle = \|a\|$.

$a^\perp = \{ x \in E , \langle a, x \rangle = 0 \}$
$= \{ x \in E , \varphi_A(x) = 0 \}$
$= \varphi_A^{-1}(\{0\})$

Or $\{0\}$ fermé de $\mathbb{R}$ et φ_A continue donc $a^\perp$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

Exercice 17

$\varphi(f) = \int_{-1}^{0} f(t)\,dt - \int_{0}^{1} f(t)\,dt$

$|\varphi(f)| \leq \int_{-1}^{0} |f(t)|\,dt + \int_{0}^{1} |f(t)|\,dt$

$\leq \int_{-1}^{1} |f(t)|\,dt \leq \int_{-1}^{1} \sup|f|\,dt$

$\leq 2\|f\|$

Exercice 12 - Sim

$\|Ax\|_2^2 \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{m} |a_{ij}|^2\right) \|x\|_2^2$

Si $\|x\|_2 = 1$ alors $\|Ax\|_2 \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{m} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$

donc $|||A||| \leqslant \left(\sum_{i,j=0}^{m} (a_{ij})^2\right)^{1/2}$

Exercice 13

$tr : (\mathcal{M}_m(\mathbb{R}), \|.\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}, |.|)$

$\|A\|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^2\right)^{1/2}$

$|tr(A)| = \left|\sum_{i=1}^{m} a_{ii}\right| \underset{CS}{\leqslant} \left(\sum_{i=1}^{m} (a_{ii})^2\right)^{1/2} \sqrt{m}$

$\leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{m} (a_{ij})^2\right)^{1/2} \sqrt{m}$

$|tr(A)| \leqslant \sqrt{m}\, \|A\|_2$ donc $|||tr||| \leqslant \sqrt{m}$

Soit $A = I_m$ $tr(A) = m$ $\|A\|_2^2 = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{m} 1^2$

$= m$

Exercice

$E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$

Soit E on munit $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 \, dt\right)^{1/2}$

$\langle f, g \rangle = \int_a^b fg$

Soit $\varphi \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \int_a^b u(t)\,dt \end{cases}$

$|\varphi(u)| = \left|\int_a^b u(t)\,dt\right| = |\langle u, 1 \rangle|$

$\leqslant \left(\int_a^b |u(t)|^2 dt\right)^{1/2} (b-a)^{1/2}$

$\varphi(u) = \int_a^b u(t)dt$

$[-t]_0^1$

$+1$

$\|u\|_E = \int_a^b |u(t)|dt$

$|\varphi(u)| = |\int_a^b u(t)dt| \leq \int_a^b |u(t)|dt = \|u\|_E$

$\Rightarrow |||\varphi(u)||| \leq 1$

Pour $u(t)=1$

$\varphi(u) = b-a$ $\quad \|u\| = b-a \neq \emptyset$

$|||\varphi||| = \sup \frac{|\varphi(u)|}{\|u\|} \geq \frac{|\varphi(1)|}{\|1\|} = \frac{b-a}{b-a} = 1$

$\Rightarrow |||\varphi||| = 1$

- $\sup\limits_{t\in[a,b]}(|u(t)|)$
- $\int_a^b t^2|u(t)|dt$

- $\leq (b-a)\|u\|_E$

$|||\varphi||| \leq b-a$

$u = 1 \Rightarrow \|u\| = 1$

$|\varphi(u)| = b-a$

Exercice 5

$\forall f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ $\quad C_1\|f\|_\infty \underset{(1)}{\leq} \|f\|_1 \underset{(2)}{\leq} C_2\|f\|_\infty$

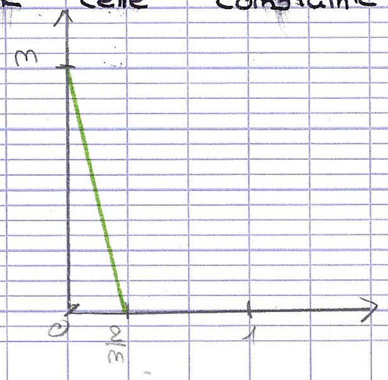
(2) est vraie avec $C_2 = b-a$

En effet $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt \leq \int_a^b \|f\|_\infty dt = (b-a)\|f\|_\infty$

(1) n'est pas vérifiée. En effet il existe une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Les fonctions (f_n) sont continues et $\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = n \to +\infty$

donc cette constante n'existe pas.



Retour exercice

$\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) = E$ $\quad a < b$

$\|f\| = \int_a^b t^2 |f(t)| \, dt$

$\varphi : (E, \|.\|) \to (\mathbb{R}, |.|)$

φ continue $\Leftrightarrow \exists c > 0, \forall f \in E, \ |\varphi(f)| \leq c\|f\|$

$\Leftrightarrow \exists c > 0, \forall f \in E, \ \left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq c \int_a^b t^2 |f(t)| dt$

$\Leftrightarrow \left|\int_a^b f(t) dt\right| \leq \int_a^b |f(t)| dt \leq \int_a^b \frac{t^2}{t^2} |f(t)| dt$

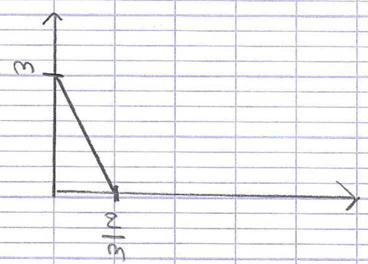
$$\leq \frac{1}{a^2} \int_a^b t^2 |f(t)| dt \leq \frac{1}{a^2} \|f\|$$

φ continue $\Leftrightarrow \exists c > 0$ tel que $\frac{|\varphi(f)|}{\|f\|} \leq c$

$\forall f \neq 0$

On cherche une suite une suite de fonction (f_n) tel que $\frac{|\varphi(f_n)|}{\| f_n \|} \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$

On choisit $f_n =$



$\varphi(f_n) = \int_0^1 f_n(t) \, dt$

$= 1$

$\|f_n\| = \int_0^1 t^2 |f_n(t)| dt$

$= \int_0^{2/n} t^2 |f_n(t)| dt \leq \frac{4}{n^2} \int_0^{2/n} |f_n(t)| \, dt = \frac{4}{n^2}$

$\frac{\varphi(f_n)}{\|f_n\|} \geq \frac{n^2}{4} \longrightarrow +\infty$

Montrons que $\{x>0\}$ est ouvert

Soit (a,b) , $a>0$

$B = B((a,b),\varepsilon) \subset \{x>0\}$

$a-\varepsilon>0$

$(x,y)\in B$ $\quad |x-a|^2+|y-b|^2<\varepsilon^2$

$|x-a|<\varepsilon$

$x>0$

Feuille 4 : suites et série de fonctions

Exercice 1

Chaque fonction f_n est croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}$
on a $a \leq b \Rightarrow f_n(a) \leq f_n(b)$
Montrons que f est croissante
Soient a et b tel que $a \leq b$
alors $f_n(a) \leq f_n(b) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice 2

1) $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+a/n)} \longrightarrow e^a$

2) $f_n(x) \begin{cases} (1-x/n)^n & x \in [0,n] \\ 0 & x > n \end{cases}$

Montrons que (f_n) est convergente simplement vers la fonction $x \mapsto e^{-x}$ c'est à dire
$\forall x \in \mathbb{R}_+, \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = e^{-x}$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et soit N_0 entier $N_0 \geq x$
$\forall n \geq N_0, f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$
On ~~passe~~ à la limite, il vient $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = e^{-x}$
comme $f_n \xrightarrow{cs} f$ alors $f_n(a) \to f(a)$
$f_n(b) \to f(b)$

d'où $f(a) \leq f(b)$
Montrons que (f_n) converge uniformément vers la fonction $x \mapsto e^{-x}$
c'est à dire $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$

$$f_n(x) - e^{-x} = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x > n \\ \left(1-\frac{x}{n}\right)^n - e^{-x} & \text{si } x \in [0,n] \end{cases}$$

$$\sup_{x\geq 0} |f_n(x) - e^{-x}| \leq \sup_{x\geq n} |e^{-x}| + \sup_{[0,n]} \left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n - e^{-x}\right|$$

$$\leq e^{-n} + \sup_{[0,n]} \left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n - e^{-x}\right|$$

$$\leq e^{-n} + \sup_{[0,A]} \left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n - e^{-x}\right| + \sup_{[A,n]} \left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n - e^{-x}\right|$$

$$\sup_{[A,n]} \left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n - e^{-x}\right| \leq \sup_{[A,n]} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n + \sup_{[A,n]} e^{-x}$$

$$\leq \left(1-\frac{A}{n}\right)^n + e^{-A}$$

$$\cancel{\sup_{[0,A]}} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n - e^{-x} = e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} - e^{-x}$$
$$= e^{n\left(-\frac{x}{n} + O\left(\frac{x^2}{n^2}\right)\right)} - e^{-x}$$
$$= e^{-x + O\left(\frac{x^2}{n}\right)} - e^{-x}$$
$$= e^{-x}\left(e^{O(x^2/n)} - 1\right)$$
$$= e^{-x}\, O\left(\frac{x^2}{n}\right)$$

$$\sup_{[0,A]} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n - e^{-x} \leq \sup_{[0,A]} \left|e^{-x} O\left(\frac{x^2}{n}\right)\right|$$

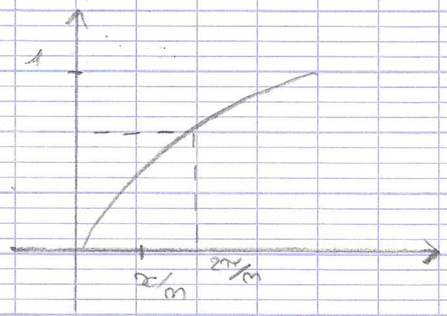
$$\leq \frac{A^2}{n}$$

On obtient $\sup_{\mathbb{R}_+} |f_n(x) - e^{-x}| \leq e^{-n} + \frac{A}{n} + \left(1-\frac{A}{n}\right)^n + e^{-A}$

$e^{-n} \to 0 < \varepsilon$, $\frac{A}{n} \to 0 < \varepsilon$, $\left(1-\frac{A}{n}\right)^n \to e^{-A} < e^{-A}+\varepsilon$, $e^{-A} < \varepsilon$

$\exists A$ tel que $e^{-A} < \varepsilon$ donc $< 5\varepsilon$

Exercice Montrons que la suite de fonctions $f_n(x) = \sin(x/n)$ converge uniformément vers 0 sur $[0, 2\pi]$



Supposons $n \geq 4$

Alors $\forall x \in [0, 2\pi]$, $\frac{x}{n} \in [0, \pi/2]$

donc

$$\left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leq \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Donc $\sup\limits_{x \in [0, 2\pi]} \left|\sin \frac{x}{n}\right| \leq \sin \frac{2\pi}{n}$

Rappel : Théorème des accroissements finis

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Soient $x, y \in [a,b]$

Alors $|f(x) - f(y)| \leq |x-y| \sup\limits_{t \in [x,y]} f'(t)$

$\forall x, y, \exists c \in [x,y]$ tel que $f(y) - f(x) = f'(x)(y-x)$

Montrons sur $\frac{x}{n} \longrightarrow 0$ uniformément sur $[0, 2\pi]$

D'après le TAF

$$\left|\sin\left(\frac{x}{n}\right) - \sin(0)\right| \leq \left|\frac{x}{n}\right| \sup_{[0, x/n]} |\cos(t)|$$

$$\leq \left|\frac{x}{n}\right| \leq \frac{2\pi}{n} \longrightarrow 0.$$

Même question pour $x \in \mathbb{R}$

$\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| = 1 \not\to 0$

Donc la convergence n'est pas uniforme.

Exercice 3

On a $g_n(x) = \sin(x) + nxe^{-nx}$

Montrons que g_n converge simplement vers 0 sur $[0, +\infty[$

On doit montrer que $\forall x \geq 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n(x) = 0$

- 1er cas : Si $x = 0$, alors $g_n(0) = 0 \longrightarrow 0$
- 2nd cas : Si $x > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} nx = +\infty$

Par ailleurs on a $\lim\limits_{u \to +\infty} ue^{-u} = 0$

Notons $g(u) = ue^{-u}$ alors $g_n(x) = g(nx)$

Par théorème de composition des limites on a

$\lim\limits_{n \to +\infty} g_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} g(u) = 0$

Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n(x) = \sin x$

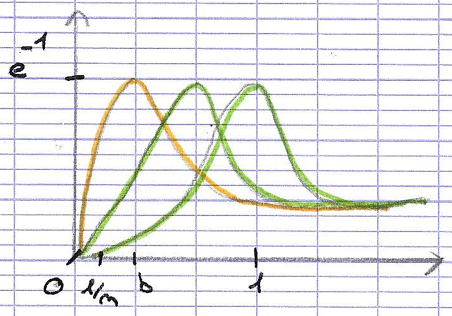
On doit calculer $\sup\limits_{x \geq 0} |g_n(x)| = \sup\limits_{x \geq 0} g_n(x)$ car $g_n(x) \geq 0$

$(nxe^{-nx})' = (n - n^2x)e^{-nx} = 0$ pour $x = 1/n$

$g_n(1/n) = n \frac{1}{n} e^{-n 1/n} = e^{-1} > 0$

$\Rightarrow \sup |g_n| = e^{-1}$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup |g_n| \neq 0$. donc pas uniformément



$\forall n > 1/b$

la fonction g_n est $\searrow$ sur $[b, +\infty[$

Donc $\sup\limits_{[b, +\infty[} |g_n(x)| = g_n(b)$

$= nbe^{-nb} \to 0.$

Exercice 5

Calculons $\sup_{[0,1]} x(1-x)$

On a $\sup_{[0,1]} x(1-x) = \frac{1}{4}$

Donc $\sup_{[0,1]} x^n(1-x)^n = \frac{1}{4^n}$

Comme $x^n(1-x)^n \geq 0$, il vient $\sup_{[0,1]} |x^n(1-x)^n| = \frac{1}{4^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc (f_n) cvu vers 0 sur $[0,1]$

On a $f_n \to 0$ uniformément sur $[0,1]$

Donc $\int_0^1 f_n(t)\,dt \to \int_0^1 0\,dt$

Exercice 6

$f_n(x) = n^2 x^n (1-x)$

On a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$ par croissance comparée

donc f_n cvs vers 0.

Calculons $\sup_{[0,1]} |f_n|$ comme $f_n \geq 0$ alors

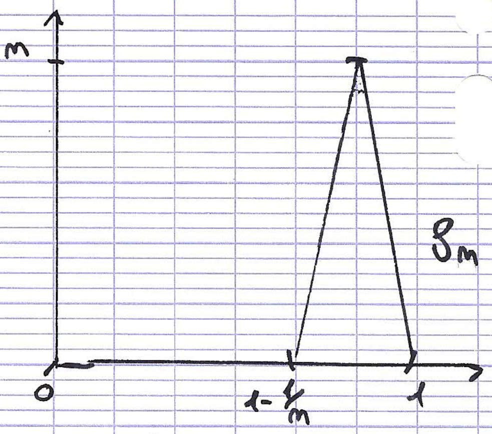
$\sup_{[0,1]} |f_n| = \sup_{[0,1]} f_n$

$f_n' = n^2 [n x^{n-1}(1-x) - x^n]$

$= n^2 x^{n-1} [-(1+n)x + n]$ s'annule quand $x = \frac{n}{1+n}$

x	0		$n/n+1$		1
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$		↗		↘	

$$\sup_{[0,1]} f_n(x) = f_n\left(\frac{n}{1+n}\right)$$
$$= \left(\frac{n}{1+n}\right)^n \left(\frac{n^2}{1+n}\right)$$
$$= \exp\left(n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) \frac{n^2}{1+n}$$
$$= \frac{n^2}{1+n} \exp\left(-\frac{n}{n+1} + o(1)\right)$$



$f_n \xrightarrow{cvs} 0 \quad \int f_n = 1/2$

donc $\sup_{[0,1]} |f_n| \to +\infty$

On a f_n cvs vers 0 : $\int_0^1 f_n(x)\,dx$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n^2 (x^n - x^{n+1})\,dx$$
$$= \lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right) = 1$$

Exercice 4

1) $x \in \mathbb{R}$ fixé

$\lim_{n\to+\infty} (x-n)^2 = +\infty$

Donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+(x-n)^2} = 0$

Calculons $M_n = \sup f_n$ donc $\sup_{\mathbb{R}} f_n = 1$

2) • Tableau de variation

• $|f_n(x)| = \frac{1}{1+(x-n)^2} \leq 1$

Donc $\sup |f_n| \leq 1$

Par ailleurs $f_n(n) = 1$

3) Soient $a < b < \infty$

Pour $n \geq b$ on a

$\sup f_n = f_n(b)$

Non

4) Soit $[a,b]$ intervalle de $\mathbb{R}$

Pour $n \geq b$ on a $\sup f_n = f_n(b)$

$= \frac{1}{1+(b-n)^2} \to 0$ donc cu

Exercice 7

1) Montrons $0 \leq \int_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^{1} |f_n(x)|\, dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$$\int_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^{1} 1\, dx = \left(1 - 1 + \frac{1}{2}\varepsilon\right) = \frac{\varepsilon}{2}$$

2) Montrons que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$ $\int_0^1 |f_n(x)|\, dx < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$

comme (f_n) converge vers 0 sur $[0, 1-\frac{\varepsilon}{2}]$

donc $(|f_n|)$ converge vers 0 sur $[0, 1-\frac{\varepsilon}{2}]$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{2}} |f_n| = \int 0 = 0$

Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$

$\int_0^{1-\frac{\varepsilon}{2}} |f_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(*)$

Par suite $\int_0^1 |f_n| = \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{2}} |f_n| + \int_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^1 |f_n|$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

3) $f_n(x) = e^{-n \sin(x)}$ $\quad x \in [0,1]$

$f_n(0) = 1$ $\forall n$

$\forall x \in]0,1]$, $\sin(x) > 0$ donc $\forall x \in]0,1]$ $f_n(x) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

Donc $f_n \to f$ avec $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}$

On remarque que f_n est pas continue en 0.

Comme les f_n sont continues, la convergence ne peut pas être uniforme sur $[0,1]$

On a $|f_m(x)| = |e^{-m\sin(x)}| \leq 1$ car $\sin(x) \geq 0$

- Soit $a > 0$ alors $\sup_{[a,1]} |f_m(x)| \leq e^{-m\sin(a)} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$

D'après 1) 2) on a $\lim_{m\to+\infty} \int_0^1 f_m = 0$

Exercice 8

a) Montrer que la série de fonction $\sum \frac{1}{\sqrt{x^2+m^3}}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$

$\sum_{m\in\mathbb{N}} f_m$ converge normalement ssi $\sum_{m\in\mathbb{N}} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_m(x)|$ cv

$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_m(x)| = m^{-3/2}$ et $\sum_{m=1}^{\infty} m^{-3/2}$ cv par Riemann

de plus $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (m^3+x^2)^{-1/2}$ est continue car les (f_m) sont continues et la série cv normallement

$f_m(x) = (m^3+x^2)^{-1/2}$

$f'_m(x) = -x(x^2+m^3)^{3/2}$

$$\left|\frac{x}{(x^2+m^3)^{3/2}}\right| = \left|\frac{x}{(x^2+m^3)(x^2+m^3)^{1/2}}\right|$$

or $\frac{|x|}{(x^2+m^3)^{1/2}} \leq 1$ donc $\left|\frac{x}{(x^2+m^3)^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{(x^2+m^3)}$

donc $\sum_{m\geq 1} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x}{(x^2+m^3)^{3/2}}\right| \leq \sum_{m\geq 1} \sup \frac{1}{x^2+m^3}$

$\leq \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^3}$

1) $f_m(x) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{x^2+m^2}}$

$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_m| = |f_m(0)| = 1/m$ or $\sum 1/m$ diverge par Riemann or $\sum \frac{1}{n}$ diverge par ~~cft~~ critère de Rieman. donc ne converge pas normallement.

2) $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+x^2}}$ cv par cssa donc converge simplement.

3) $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+n^2}}$ on veut montrer que $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ definit par

$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ cvu vers S.

$$\left| \sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n v_n \right| \leqslant |v_n|$$

$$|S_N(x) - S(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+n^2}} \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x^2+(N+1)^2}}$$

Par suite $\sup_{x\in\mathbb{R}} |S_N(x) - S(x)| \leqslant \frac{1}{N+1} \to 0$ donc converge uniformément

Exercice 10

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\sin(2^n x)}{n^n} \right)^{(k)}$$

$$= \frac{(-1)^k 2^{nk} \cos(2^n x + k\pi/2)}{n^n}$$

$|f^{(k)}(x)| \leqslant \frac{2^{nk}}{n^n}$ $\quad$ $\sum u_n$ cvn $\Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x)|$ cv

$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n^{(k)}(x)| = \frac{2^{nk}}{n^n}$ $\quad$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n^{(k)}(x)| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^{nk}}{n^n}$

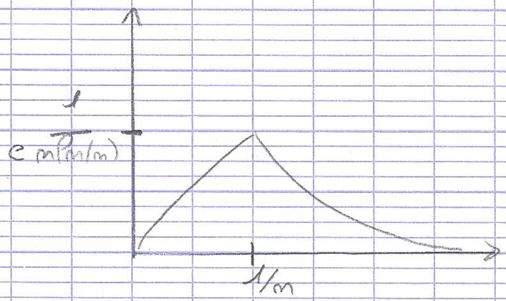
$\sqrt[n]{2^{nk}/n^n} = \frac{2^k}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\quad$ par cauchy converge.

donc $f(x) \in C^\infty$

Exercice 12

$$\sup_{x\geq a} \left|\frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}\right| \qquad f_n'(x) = \left(\frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}\right)' = \frac{1}{\ln(n)}(1-nx)e^{-nx}$$

x	0		$1/n$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{n\ln(n)}$	$\searrow$	



Sur $[a,+\infty[$, $a>0$ $\qquad \forall n > 1/a$

$$\sup |f_n(x)| = |f_n(a)| = \frac{ae^{-na}}{\ln(n)}$$

Par croissance comparé, on a $e^{-na} = O(1/n^2)$ pour $a>0$
donc $\sum \sup_{a,+\infty} |f_n(x)|$ cv par Riemann

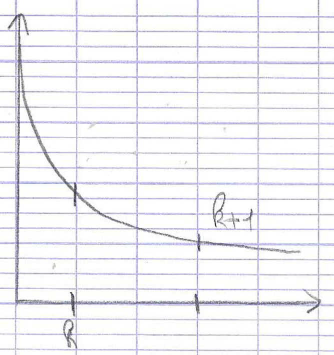
Il n'y a pas cvn sur $\mathbb{R}^+$ car $\sum \sup_{\mathbb{R}^+} |f_n| = \sum \frac{1}{en\ln(n)}$
qui diverge par bertrand

Montrons que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{xe^{-kx}}{\ln(k)} \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{xe^{-tx}}{\ln(t)}\,dt$

On fixe $x>0$: on regarde la fonction

$$g: \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{xe^{-tx}}{\ln(t)} \end{cases}$$

g est positive décroissante et continue.



$$g(k) \geqslant \int_k^{k+1} g(t)\,dt$$

$$g(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} g(t)\,dt$$

$$\sum_{k=n}^{+\infty} g(k) \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} g(t)\,dt$$

$$\leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{x e^{-tx}}{P_n(t)}\,dt$$

$$\int_{n-1}^{+\infty} \frac{x e^{-tx}}{P_n(t)}\,dt \leqslant \frac{1}{P_n(n-1)} \int_{n-1}^{+\infty} x e^{-tx}\,dt$$

$$\leqslant \frac{1}{P_n(n-1)} \left[-e^{-tx}\right]_{n-1}^{+\infty} = \frac{e^{-(n-1)x}}{P_n(n-1)}$$

La série cv uniformément sur $\mathbb{R}_+$ donc f continue.

Fixons $a>0$

Montrons que C^1 sur $[a,+\infty[$

On sait $\sum f_n$ cv normalement sur $[a,+\infty[$

il suffit de montrer que $\sum f_n'$ cvn

$$f_n'(x) = e^{-nx}\left(\frac{1-nx}{P_n(n)}\right)$$

$$\sup_{[a,+\infty[} |f_n'| \leqslant \sup_{[a,+\infty[} \frac{e^{-nx}}{P_n\, n} + \sup_{[a,+\infty[} \left|\frac{nx\, e^{-nx}}{P_n\, n}\right|$$

$$\leqslant \frac{e^{-na}}{P_n\, n} + \frac{n}{P_n\, n} \sup_{[a,+\infty[} |x e^{-nx}|$$

$$\leqslant \frac{e^{-na}}{P_n(n)} + \frac{na}{P_n(n)}\, e^{-na}$$

$\leqslant \dfrac{(1+na)}{\ln(n)} e^{-na}$ or $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1+na}{\ln(n)} e^{-na}$

cv car $a>0$

Remarque : si $a=0$ $\sum \dfrac{1}{\ln(n)}$ diverge

Montrons que $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-tx}}{\ln t}$ $\geqslant 0$, $\searrow$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{e^{-kx}}{\ln k} \geqslant \int_2^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\ln t}\,dt$$
$$\geqslant \int_2^{1/x} \frac{e^{-tx}}{\ln t}\,dt$$
$$\geqslant \frac{1}{e} \underbrace{\int_2^{1/x} \frac{1}{\ln t}\,dt}_{=+\infty}$$

Exercice 11 $I = [-\ln(2), +\infty[$

1) $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(1-e^{-x})^n}{n^2}$. Soit $f_n(x) = \dfrac{(1-e^{-x})}{n^2}$

$\forall x \in [-\ln(2), +\infty[$ donc $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$

$0 < e^{-x} \leqslant 2$

$-1 < 1-e^{-x} \leqslant 1$ donc $\sum_{n\geqslant 1} \sup_{x\in I} |f_n(x)| = \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$

cv par Riemann

donc $\sum f_n$ cvn $\begin{cases} \text{bien définie (cvs)} \\ \text{continue} \end{cases}$

$$\lim_{n \to +\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-e^{-x})^n}{n^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{(1-e^{-x})^n}{n^2}$$ par théorème de la double limite

$$= \frac{\pi^2}{6}$$ (voir analyse de Fourier)

2) $$f_n'(x) = \frac{n e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}}{n^2}$$

donc $\sup_{x\in I} |f_n'(x)| = \frac{2}{n}$ or $\sum \frac{2}{n}$ diverge

Supposons que $-\ln(2) < a < b < +\infty$

Soit $x \in [a,b]$ alors $|f_n(x)| \leq e^{-a}$

$e^{-b} \leq e^{-x} \leq e^{-a}$

alors $|f_n(x)| \leq \frac{e^{-a}}{n} (\max(|1-e^{-a}|, |1-e^{-b}|))^n$

< 1

$\Rightarrow$ on a cvn donc f est C^1 sur $[a,b]$

TD4 - Séries entière

$R = \sup\{ r \geq 0$ tel que $a_n r^n$ bornée$\}$

$\forall |z| < R$, la série cv

Théorème
- $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ alors $R = 1/l$
- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ alors $R = 1/l$

Exercice 1

- $R = 0$
- $R = 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{\ln(n+1)!}{\ln n!}\right)^2 = \left(1 + \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n!)}\right)\right)^2$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!\,(n+1)!} \times \frac{n!\,n!}{(2n)!} \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \underbrace{\frac{(2n+2)\,(2n+1)}{(n+1)\,(n+1)}}_{4} \quad \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{e^{-1}} \quad \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{0} \to 0$$

$\Rightarrow R = +\infty$

Exercice 2

- $\sum_{n=0}^{+\infty} n\,x^n \qquad R = 1 \qquad \forall |x| < 1$

$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = f(x) = \frac{1}{1-x}$ somme des termes d'une suite géo.

$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,x^{n-1}$ on multiplie par x

$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$

- $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\,x^{n-2}$

$\quad \| \quad \frac{2}{(1-x)^3}$

On multiplie par x^2 $\quad \frac{2x^2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} (n^2-n)\,x^n$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2-n)\,x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n - \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\frac{2x^3}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$$