

Séries numériques

Exercice 1 : Étudier les séries suivantes :

① $\sum \cos(n)$

② $\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

③ $\sum \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

④ $\sum \frac{n}{n^2 + 4}$

⑤ $\sum \frac{n^2 + 4}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

⑥ $\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (discuter selon les valeurs de β)

Pour étudier une série $\sum u_n$:

• vérifier si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$: Si $u_n \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, on dit que $\sum u_n$ DV

• si $u_n \rightarrow 0$ on ne peut pas conclure
- utiliser le thm de comparaison
- utiliser les équivalents

① On rappelle que $\sin$ et $\cos$ n'ont pas de limite à l'infini : $\left(\sin(n\pi) = 0 \rightarrow 0\right)$
 $\left(\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 1\right)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(n)$ n'existe pas $\Rightarrow \sum \cos(n)$ DV

② Si $\sum u_n$ DV et $\sum v_n$ DV, on ne peut pas conclure par $\sum u_n + \sum v_n$

Remarque : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes ≥ 0 :

Si $\sum u_n$ ou $\sum v_n$ DV alors $\sum u_n + \sum v_n$ DV

$$\sum u_n \leq \sum u_n + \sum v_n$$

$$\sum v_n \leq \sum u_n + \sum v_n$$

$$\text{Ic} : \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1$$

$$\text{ou} : \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$$

$$\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \text{ et } \sum \frac{1}{n^2}$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ CV (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$) alors $\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ CV

$$\textcircled{3} \quad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$\sum u_n$ et $\frac{1}{2} \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ sont de même nature

$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{1/2}}$ D'après la série de Riemann : $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ DV ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$)

Donc $\sum u_n$ DV.

$$④ \quad \frac{n}{n^2+4} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

$\sum \frac{n}{n^2+4}$ et $\sum \frac{1}{n}$ sont de même nature

Donc $\sum \frac{n}{n^2+4}$ DV car $\sum \frac{1}{n}$ DV ($\alpha=1$ par la série de Riemann)

⑤ On rappelle que $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

$$x = \frac{1}{n^2} \quad (n \rightarrow +\infty \Rightarrow x \rightarrow 0) \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

$\sum \sin \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ sont de mêmes natures

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ CV alors $\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ CV

⑥ Si $\beta > 0$: $\frac{1}{n^\beta} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ donc $\sin\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \sim \frac{1}{n^\beta}$
 $\sum \sin \frac{1}{n^\beta}$ et $\sum \frac{1}{n^\beta}$ sont de même nature

Donc $\sum \frac{1}{n^\beta}$ CV si $\beta > 1$

$\sum \sin \frac{1}{n^\beta}$ CV si $\beta > 1$

$\sum \frac{1}{n^\beta}$ DV si $0 \leq \beta \leq 1$

$\sum \sin\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ DV si $\beta \in]0, 1[$

Si $\beta = 0$: $\sum_{k=0}^n \sin \frac{1}{k^0} = \sum_{k=0}^n \sin 1 \rightarrow +\infty$

Si $\beta < 0$: $\frac{1}{n^\beta} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$

Donc $\sin\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ n'a pas de limite et $\sum \sin\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ DV

Donc $\sum \sin\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ CV si $\beta > 1$

Exercice 2: Etudier la nature des séries suivantes:

① $\sum (\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1})$

② $\sum \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

③ $\sum \log\left(1 + \frac{1}{n^p}\right)$ (discuter selon les valeurs de p)

④ $\sum e^{-n}$

①
$$l_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1} = \frac{(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n^2}} = \frac{1}{2n}$$

$\sum l_n$ et $\frac{1}{2} \sum \frac{1}{n}$ sont de même nature

Donc d'après la série de Riemann : $\sum \frac{1}{n}$ DV ($\alpha=1$)

Donc $\sum l_n$ DV

② $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

$\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$ ($\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$)

$\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ sont de même nature

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ CV, alors $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ CV.

③ Pour $\beta > 0$: $\frac{1}{n^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\ln\left(1 + \frac{1}{n^\beta}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^\beta}$

Donc $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^\beta}\right)$ et $\sum \frac{1}{n^\beta}$ sont de même nature

Donc $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^\beta}\right)$ CVssi $\beta > 1$ (Si $\beta \in]0, 1[$, $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^\beta}\right)$ DV)

Pour $\beta = 0$: $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k^0}\right) = \sum_{k=1}^n \ln(2) = \sum_{k=1}^n \ln 2 = (\ln 2)n \rightarrow +\infty$

Donc pour $\beta = 0$, $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^\beta}\right)$ DV

Pour $\beta < 0$: $\frac{1}{n^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n^\beta}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

Donc $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^\beta}\right)$ DVssi $\beta < 0$

Col : $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^\beta}\right)$ CVssi $\beta > 1$

$$① \quad \forall \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow \infty} (x^\alpha e^{-x}) = 0$$

$$\Rightarrow |x^\alpha e^{-x}| \leq M \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow n^\alpha e^{-n} \leq M$$

$$\Rightarrow e^{-n} \leq \frac{M}{n^\alpha} = \frac{M}{n^{\alpha/2}}$$

$$\text{Pour } \alpha = 4: e^{-n} \leq \frac{M}{n^2}$$

$$\text{Comme } \sum \frac{1}{n^2} \text{ CV alors } \sum e^{-n} \text{ CV}$$

Exercice 1.

1) $u_n = \frac{1}{(1+\sqrt{n})^n}$

Critère de Cauchy : $\sum u_n$: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{1/n} = l$ $\begin{cases} \text{si } l < 1 : \sum u_n \text{ CV} \\ \text{si } l = 1 : \text{on ne peut pas conclure} \\ \text{si } l > 1 : \sum u_n \text{ DV} \end{cases}$

Ici, $\frac{1}{1+\sqrt{n}} \rightarrow 0 < 1$. Donc d'après le critère de Cauchy, la série $\sum \frac{1}{(1+\sqrt{n})^n}$ CV

OU : $(\sqrt{n}+1)^n \gg (\sqrt{n}+1)^x$ (on choisit une puissance x telle que $\frac{x}{2} > 1$)

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n \leq \left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^x \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^x = \frac{1}{n^{\frac{x}{2}}} \Rightarrow \sum \frac{1}{n^{\frac{x}{2}}} \text{ CV}$$

Col : $\sum \left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n$ est absolument CV

2) $v_n = \frac{n^2}{3^n}$ (> 0 donc si CV alors absolument CV)

Critère d'Alembert : $\sum u_n, u_n \geq 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ $\begin{cases} \text{si } l < 1, \sum u_n \text{ CV} \\ \text{si } l = 1, \text{on ne peut conclure} \\ \text{si } l > 1, \sum u_n \text{ DV} \end{cases}$

$$\text{Ici, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{3n^2} = \frac{1}{3} < 1 \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \right)$$

Donc d'après le critère d'Alembert, $\sum u_n$ CV.

3) $T_n = \frac{1}{a^{n+b}} - \frac{1}{n} \quad (a, b) \neq (a, 0)$

Remarque : Si P est un polynôme et $a \geq 0$. Alors la série $\sum \frac{P(n)}{a^n}$ $\begin{cases} \text{CV si } a > 1 \\ \text{DV si } a < 1 \end{cases}$

$$\frac{P(n+1)}{a^{n+1}} \frac{a^n}{P(n)} \rightarrow \frac{1}{a} \quad \text{car } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n+1)}{P(n)} = 1$$

$$\frac{1}{a} \begin{cases} < 1 \text{ si } a > 1 \\ > 1 \text{ si } a < 1 \end{cases}$$

Donc $\sum \frac{P(n)}{a^n}$ DV si $a = 1$ et $P(x)$ n'est pas le polynôme nul (car $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = +\infty$)

$$Ia, \quad \frac{1}{an+b} - \frac{1}{n} = \frac{n - (an+b)}{n(an+b)} = \frac{(1-a)n - b}{an^2 + bn} \sim \begin{cases} \frac{(1-a)n}{an^2} \sim \frac{1-a}{an} & \text{si } a \notin \{0, 1\} \\ -\frac{b}{n^2} & \text{si } a=1 \text{ et } b \neq 0 \\ \frac{(1-a)n}{bn} = \frac{1-a}{b} & \text{si } a=0 \text{ et } b \neq 0 \end{cases}$$

Donc si $a \notin \{0, 1\}$, $u_n \sim \frac{(1-a)}{a} \frac{1}{n} \Rightarrow \sum \frac{1}{n} \text{ DV} \Rightarrow \sum u_n \text{ DV}$

• si $a=1$ et $b \neq 0$, $u_n \sim -\frac{b}{n^2} \Rightarrow \sum \frac{1}{n^2} \text{ CV} \Rightarrow \sum u_n \text{ CV}$

$b=0$, $u_n = 0 \Rightarrow \sum u_n \text{ CV}$

• si $a=0$ et $b \neq 0$, $u_n \sim \frac{(1-a)}{b} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1-a}{b} \neq 0 \Rightarrow \sum u_n \text{ DV}$

$b=0$, la série n'est pas définie

5) $u_n = \frac{2\sqrt{n} + \cos(n)}{n^2 + \log(n)} = \frac{2\sqrt{n}}{n^2} \left(\frac{1 + \frac{\cos(n)}{2\sqrt{n}}}{1 + \frac{\log(n)}{n^2}} \right) \sim \frac{2\sqrt{n}}{n^2} = 2 \frac{1}{n^{3/2}}$

$\sum \frac{1}{n^{3/2}} \text{ CV car } \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ CV}$

4) $u_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{2n}{2n+1}$

• DL₂: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \left(x = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\right)$$

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2n}} = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{(2n)^2} + o\left(\frac{1}{(2n)^2}\right) \quad x = \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

• DL₃: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(Il faut faire à l'ordre 3 car à l'ordre 2, $u_n = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \sim 0$!)

Donc $u_n = \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{4n^2}\right)\right)$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{12} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$\Rightarrow u_n \sim \frac{1}{12n^2}$

Exercice 2:

1) $u_n = \frac{n^2+1}{5n^2+n} \sim \frac{1}{5}$

$$u_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum u_n \text{ DV}$$

5) $u_n = \sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \sim \frac{1}{n}$

$$\sum \frac{1}{n} \text{ DV} \Rightarrow \sum u_n \text{ DV}$$

8) $u_n = \frac{e^{-n}}{n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{-(n+1)}}{n+1} \cdot \frac{n}{e^{-n}} = e^{-1} \frac{n}{n+1} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$

D'après le critère d'Alembert, $\sum \frac{e^{-n}}{n}$ CV

7) $u_n = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1 = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/n} - 1$
 $= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{1/n} - 1$
 $= \exp\left[\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{1/n}\right] - 1$
 $= e^{\frac{1}{n} \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} - 1$

$$\text{DL: } \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$
$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\frac{1}{n} \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$\exp\left[\frac{1}{n} \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right] = \exp\left[-\frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)\right] = 1 - \frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$$
$$e^{-x} = 1 - x + o(x)$$

$$u_n = \exp\left[\frac{1}{n} \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right] - 1 = -\frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) \sim -\frac{1}{n(n+1)} \sim -\frac{1}{n^2}$$

Donc $\sum u_n$ CV car $\sum -\frac{1}{n^2}$ CV

$$2) \quad u_n = \frac{1}{n \sin^2 n}$$

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sin^2 n \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n \sin^2 n} \geq \frac{1}{n}$$

$$\text{D'où } \sum u_n \geq \sum \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{donc } \sum u_n \text{ DV}$$

$$3) \quad u_n = \frac{1}{(\sqrt[3]{2} + \ln(n))^{n^2}}$$

$$\left(\frac{\ln(n)}{\sqrt[3]{2} + \ln(n)} \right)^{n^2} \rightarrow 1. \quad \text{En effet, } \frac{(\ln n)^{n^2}}{(\ln n)^{n^2}} \left(\frac{1}{1 + \frac{\sqrt[3]{2}}{\ln n}} \right)^{n^2} = \left(\frac{\ln n}{\sqrt[3]{2} + \ln n} \right)^{n^2}$$

$$\left(\frac{1}{1 + \frac{\sqrt[3]{2}}{\ln n}} \right)^{n^2} = e^{n^2 \ln \left(\frac{1}{1 + \frac{\sqrt[3]{2}}{\ln n}} \right)}$$

$$= e^{-n^2 \ln \left(1 + \frac{\sqrt[3]{2}}{\ln n} \right)}$$

$$\sim e^{-n^2 \frac{\sqrt[3]{2}}{\ln n}}$$

$$a \sim b$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2} + \ln(n) \geq \sqrt[3]{2}$$

$$n \geq 3: \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2} + \ln(n)} \leq \frac{1}{2^{1/n}} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2} + \ln(n)} \right)^{n^2} \leq \frac{1}{2^{1/n n^2}} = \frac{1}{2^n}$$

$$\sum \frac{1}{2^n} \text{ CV} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} l^n = \frac{1}{1-l} \text{ si } |l| < 1$$

$$4) \quad u_n = \frac{1}{n^{\ln(n)}}$$

$$n \geq 5: \quad \ln(n) \geq \ln 5 > 1 \Rightarrow n^{\ln(n)} \geq n^{\ln 5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^{\ln(n)}} \leq \frac{1}{n^{\ln 5}}$$

$$\sum \frac{1}{n^{\ln 5}} \text{ CV car } \ln 5 > 1$$

$$\text{Donc } \sum \frac{1}{n^{\ln(n)}} \text{ CV}$$

Puissance $\rightarrow$ passer à l'exponentielle

OU: Cauchy

$$u_n^{1/n} = \frac{1}{n^{\frac{\ln(n)}{n}}} = \frac{1}{\exp\left[\ln(n) \frac{\ln(n)}{n}\right]} = \frac{1}{e^{\frac{\ln(n)}{n} \ln(n)}} = \frac{1}{e^{\frac{\ln^2(n)}{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

On ne peut pas conclure

$$6) u_n = \left(\frac{\sin^2 n}{n} \right)^n$$

$$\left| \frac{\sin^2 n}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$$

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{\sin^2 n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Donc $\sum u_n$ CV

Exercice 3:

$$1) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^k - 1 - \frac{1}{3}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^k \rightarrow \frac{1}{1-e} \quad \text{si } |e| < 1$$

$$2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \rightarrow +\infty \quad \text{car } \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ DV}$$

$$\parallel$$

$$\sum \frac{1}{n^{1/2}}$$

Exercice 4:

$$u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2}$$

$$\sum \frac{1}{n^2} \text{ CV} \Rightarrow \sum u_n \text{ CV}$$

$$\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^n [\ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln(k)] \quad \text{car } \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right)$$

$$= \ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln(k)$$

$$\begin{aligned} &+ \ln(4) + \ln(3) - 2\ln(2) \\ &+ \ln(2) + \ln(4) - 2\ln(3) \\ &+ \ln(3) + \ln(5) - 2\ln(4) \\ &\vdots \\ &+ \ln(n-2) + \ln(n) - 2\ln(n-1) \\ &+ \ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln(n) \end{aligned}$$

$$= \ln(1) - \ln(2) - \ln(n) + \ln(n+1)$$

$$\text{Donc } \sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -\ln(2) + \ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\ln(2)$$

Exercice 5:

1) $u_n = n! x^{n^2}$, $x > 0$

Critère d'Alembert: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)! x^{(n+1)^2}}{n! x^{n^2}} = \frac{(n+1) x^{n^2} x^{2n+1}}{x^{n^2}} = (n+1) x^{2n+1}$
 $= (n+1) e^{(2n+1) \ln x} \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases}$

D'après le critère d'Alembert,

$$\sum n! x^{n^2} \text{ DV si } x > 1$$

$$\sum n! x^{n^2} \text{ CV si } x \in]0, 1[$$

2) $u_n = \frac{x^n}{n^x}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^x} \cdot \frac{n^x}{x^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^x x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \quad \begin{matrix} \text{(c.f. fixe)} \\ \nearrow \end{matrix}$$

D'après le critère d'Alembert, $\sum \frac{x^n}{n^x}$ CV si $x \in]0, 1[$

$$\sum \frac{x^n}{n^x} \text{ DV si } x > 1$$

Pour $x=1$, $u_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \sum \frac{1}{n} \text{ DV}$

Exercice :

On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$

On admet que $\sum u_n$ cv

① Prouver que $\sum v_n$ DV

② Montrer que $u_n \sim v_n$

③ Que peut-on en déduire ?

$$\textcircled{1} \left. \begin{array}{l} \sum u_n \, dv \\ \sum \frac{1}{n} \, dv \end{array} \right\} \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \, dv$$

$$\textcircled{2} \frac{V_n}{u_n} = \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{1/n}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{1}{n} \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}(-1)^n} = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Donc $u_n \sim V_n$

$\textcircled{3}$ En général, si $u_n \sim V_n \nRightarrow \sum u_n$ et $\sum V_n$ sont de même nature

Exercice 1:

$$g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = \int_0^{2\cos x} \sqrt{4-t^2} dt$$

- 1) Montrer que g est bien définie
- 2) Montrer que g est dérivable
- 3) Calculer $g'(x)$
- 4) En déduire $g(x)$

1) Pour $x \in [0, \pi]$, $-2 \leq 2\cos x \leq 2$

$t \mapsto \sqrt{4-t^2}$ est continue sur $\{t \in \mathbb{R}, 4-t^2 \geq 0\} = [-2, 2]$

$\Rightarrow t \mapsto \sqrt{4-t^2}$ est continue entre 0 et $2\cos x$, $\forall x \in [0, \pi]$

$\Rightarrow g(x)$ est bien définie sur $[0, \pi]$

2) On définit $F(x) = \int_0^x \sqrt{4-t^2} dt$

F est dérivable pour $x \in [-2, 2]$ et $F'(x) = \sqrt{4-x^2}$ (coeur)
car $t \mapsto \sqrt{4-t^2}$ est continue sur $[-2, 2]$

$$F(2\cos x) = \int_0^{2\cos x} \sqrt{4-t^2} dt = g(x) = F \circ \varphi(x) \quad \text{avec } \varphi(x) = 2\cos(x)$$

φ est dérivable sur $[0, \pi]$

$$\varphi'(x) = -2\sin(x)$$

Donc φ dérivable sur $[0, \pi]$

f dérivable sur $\varphi([0, \pi]) = [-2, 2]$

$\Rightarrow g(x) = F \circ \varphi(x)$ est dérivable sur $[0, \pi]$

3) $g'(x) = \varphi'(x) \cdot F' \circ \varphi(x)$

$$= \sqrt{4-\varphi(x)^2} \times \varphi'(x)$$

$$= \sqrt{4-4\cos^2 x} (-2\sin x)$$

$$= -4\sin^2 x \sin x$$

$$= -4|\sin x| \sin x$$

$$= -4 \sin^2 x \quad \text{car } x \in [0, \pi]$$

$$4) \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\text{Donc } g'(x) = -4 \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)$$

$$= -2 + 2\cos(2x)$$

$$\text{Donc } g(x) = \int -2 + 2\cos(2x) = -2x + \sin(2x) + cste$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow -2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi) + cste = 0 \Rightarrow cste = \pi$$

Exercice 2:

$$\text{Soit } F(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-2t}) dt$$

1) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$

2) Montrer que $\frac{a}{a+1} \leq \ln(1+a) \leq a$, $\forall a \geq 0$

3) En déduire que $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x}$

4) On définit $u_n = F(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que u_n converge

b) Montrer que $\frac{\ln 2}{2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \frac{1}{2}$

1) $t \mapsto \ln(1 + e^{-2t})$ est définie et est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $e^{-2t} > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$
et $t \mapsto 1 + e^{-2t}$ est dérivable

Donc F est définie sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = \ln(1 + e^{-2x})$

$$2) \ln(1+a) = \int_0^a \frac{1}{1+t} dt$$

$$0 \leq t \leq a \Rightarrow 1 \leq 1+t \leq 1+a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$$

$$\Rightarrow \int_0^a \frac{1}{1+a} dt \leq \int_0^a \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^a 1 dt$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+1} \leq \ln(1+a) \leq a$$

$$3) \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} \leq \ln(1+e^{-2t}) \leq e^{-2t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} dt \leq \int_0^x \ln(1+e^{-2t}) \leq \int_0^x e^{-2t} dt$$

$$\forall x \geq 0 \Rightarrow \int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} dt \leq F(x) \leq \left[\frac{e^{-2t}}{-2} \right]_0^x$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{1}{2} \ln(1+e^{-2t}) \right]_0^x \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{e^{-2x}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{e^{-2x}}{2}$$

$$4) a) u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} \ln(1+e^{-2t}) dt - \int_0^n \ln(1+e^{-2t}) dt \\ = \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-2t}) dt \geq 0$$

$\Rightarrow u_n$ est croissante

$$u_n = F(n) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2n} \leq \frac{1}{2}$$

$\left. \begin{array}{l} u_n \nearrow \\ u_n \text{ bornée} \end{array} \right\} \Rightarrow u_n \text{ converge}$

$$b) \text{ On a : } \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(1+e^{-2n}) \leq F(n) - u_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-2n}) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln(2) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \frac{1}{2}$$

Exercice 3:

Calculer les primitives des fractions suivantes :

1) $f(x) = x^3 \ln x$

2) $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$

3) $f(x) = x e^{x^2}$

4) $f(x) = \frac{x^3}{1+x^4}$

5) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$

$$3) f(x) = x e^{x^2} = \frac{1}{2} u'(x) e^{u(x)} \quad \text{avec } u(x) = x^2$$

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + \text{cte}$$

$$4) f(x) = \frac{x^3}{1+x^4} = \frac{1}{4} \frac{4x^3}{1+x^4} = \frac{1}{4} \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{avec } u(x) = 1+x^4$$

$$F(x) = \frac{1}{4} \ln(1+x^4) + \text{cte}$$

$$5) f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{1}{x^2+1} \quad \text{avec } u(x) = x^2+1$$

$$F(x) = \int f(t) dt = \ln|x^2+1| + \arctan(x) + \text{cte}$$

$$1) f(x) = x^3 \ln(x)$$

$$\text{On pose } u' = x^3 \quad u = \frac{1}{4} x^4$$

$$v = \ln x \quad v' = \frac{1}{x}$$

$$\int x^3 \ln x = \left[\frac{1}{4} t^4 \ln t \right] - \int \frac{1}{4} t^4 \frac{1}{t} dt$$

$$= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + \text{cte}$$

$$2) f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

$$= \frac{a(x+2) + b(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{ax + 2a + bx - b}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{(a+b)x + 2a - b}{(x-1)(x+2)}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} a+b=0 \\ 2a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-b \\ -3b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Donc } f(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \frac{1}{x+2}$$

$$\int f(t) dt = \int \frac{1}{3} \frac{1}{t-1} dt - \int \frac{1}{3} \frac{1}{t+2} dt$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + \text{cte}$$

$$\text{OU: pour a: } (x-1)f(x) \Big|_{x=1}$$

$$= (x-1) \frac{1}{(x-1)(x+2)} \Big|_{x=1}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$\text{pour b: } (x+2)f(x) \Big|_{x=-2}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

IntégrationExercice 1.

$$1) \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctan(x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$2) \int \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2 \int \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin'\left(\frac{x}{2}\right) dx = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$4) \int t^4 (1+t^5)^5 dt = \int \frac{1}{5} (1+t^5)' (1+t^5)^5 dt = \frac{1}{30} (1+t^5)^6 + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$5) \int \frac{\ln t}{t} dt = \int \frac{1}{t} \ln t = \int \ln(t)' \ln(t) dt = \frac{1}{2} (\ln t)^2 + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$10) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \sin x (\cos x)^{-2} dx = \int -(\cos x)' (\cos x)^{-2} = (\cos x)^{-1} + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$11) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$3) \int \frac{1}{1+\tanh x} dx \quad \text{Hmc} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \rightarrow 1 + \text{Hmc} = 1 + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x + e^x + e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}} \rightarrow \frac{1}{1+\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{2e^x} = \frac{1}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$$

$$\int \frac{1}{1+\tanh x} dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-x}}{2} \right) dx = \frac{1}{2} x - \frac{e^{-x}}{2} + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$6) \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$9) \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \frac{1}{(\sin x \cos x)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \sin(2x)\right)^2} = \frac{4}{(\sin(2x))^2} = 4 \int \frac{1}{\sin^2(2x)} dx \quad (\text{car } \sin(2x) = 2 \cos x \sin x)$$

Changement de variable: $y = 2x \rightarrow dy = 2dx$

$$4) \int \frac{1}{\sin^2(2x)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin^2(y)} \frac{dy}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin^2(y)} dy = -\frac{1}{2} \cot(y) + c = -\frac{1}{2} \cot(2x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$8) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{\cos x}{\sin x} + c = -\cotan(x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$\text{car } \cotan(x) = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{et } \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

N.B : lorsqu'on fait un changement de variable $y = \varphi(x)$ alors on remplace
deg par $\varphi'(x) dx \rightarrow deg = \varphi'(x) dx$

$$7) \int \frac{1}{\cos^2(t)} dt = \tan t + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$12) \int \frac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+1}} dx = \int 2(2x+1)(x^2+x+1)^{-1/2} dx = 4\sqrt{x^2+x+1} + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

Exercice 2 :

$$\frac{1}{x+x^3} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

$$= \frac{a(x^2+1) + (bx+c)x}{x(x^2+1)}$$

$$= \frac{(a+b)x^2 + cx + a}{x(x^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ a=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=0 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x+x^3} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$= \left[\ln|x| \right]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2x}{x^2+1} dx$$

$$= \left[\ln|x| \right]_1^2 - \frac{1}{2} \left[\ln(x^2+1) \right]_1^2 + c$$

$$= \ln 2 - \ln 1 - \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 2$$

$$= \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5$$

$$= \ln \left(\frac{2^{3/2}}{\sqrt{5}} \right)$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c$$

$$= \ln|x| - \ln \sqrt{x^2+1}$$

$$= \ln \left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} \right) + c$$

$$= \ln \frac{2}{\sqrt{5}} - \ln \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \ln \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

Exercice 3:

$$1) \int \frac{x-1}{x^2-2x+2} = \int \frac{1}{2} \frac{2x-2}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2} \ln|x^2-2x+2| + c$$

la primitive $F(x)$ telle que $F(2)=0$ est $\begin{cases} F(x) = \frac{1}{2} \ln|x^2-2x+2| + c \\ F(2) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow F(2)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln(4-4+2) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{1}{2} \ln(2)$$

$$\text{Donc } F(x) = \frac{1}{2} \ln|x^2-2x+2| - \frac{1}{2} \ln(2)$$

$$\text{ou: } \int_2^x \frac{x-1}{x^2-2x+2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln|x^2-2x+2| \right]_2^x = \frac{1}{2} \ln|x^2-2x+2| - \frac{1}{2} \ln(2)$$

$$2) \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}} dx = \int \frac{1}{2} \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}} dx = \int \frac{1}{2} u'(x) u(x)^{-1/2} dx$$

$$= u(x)^{1/2} + c$$

$$= \sqrt{x^2+2x+5} + c$$

$$F(-1)=0 \Rightarrow \sqrt{1-2+5} + c = 0 \Rightarrow c = -2$$

$$\text{Donc } F(x) = \sqrt{x^2+2x+5} - 2$$

$$3) \int_2^x \ln t \, dt \quad \text{IPP: } \begin{aligned} u'(t) &= 1 & u(t) &= t \\ v(t) &= \ln(t) & v'(t) &= \frac{1}{t} \end{aligned}$$

$$= \left[t \ln t \right]_2^x - \int_2^x t \times \frac{1}{t} dt$$

$$= x \ln x - 2 \ln 2 - x + 2$$

$$4) \int x^{4/3} = \int \frac{3}{7} \frac{7}{3} x^{4/3} = \frac{3}{7} x^{7/3} + c$$

$$F(1) = 0 \Rightarrow c = -\frac{3}{7}$$

$$F(x) = \frac{3}{7} x^{7/3} - \frac{3}{7}$$

Exercice 4:

On rappelle que $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$$

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y$$

$$\frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2} = \cos x \cos y \quad (*)$$

$$\frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2} = \sin x \cos y \quad (**)$$

$$1) \int_0^{2\pi} \cos(px) \cos(qx) dx, \quad p, q \in \mathbb{N}^*$$

On applique (*) à $x \rightarrow px, y \rightarrow qx$

$$\cos(px) \cos(qx) = \frac{\cos(p+q)x + \cos(p-q)x}{2}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(px) \cos(qx) dx = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(p+q)x + \cos(p-q)x}{2} dx = \left[\frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)} \right]_0^{2\pi} + \left[\frac{\sin(p-q)x}{2(p-q)} \right]_0^{2\pi} \quad \text{si } p-q \neq 0$$

$$= 0$$

$$\text{Pour } p=q : \int_0^{2\pi} \cos^2 px dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos(2px)}{2} + \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{\sin(2px)}{4p} \right]_0^{2\pi} + \left[\frac{1}{2} x \right]_0^{2\pi}$$

$$= \pi$$

Conclusion: $p, q \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^{2\pi} \cos(px) \cos(qx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \pi & \text{si } p = q \end{cases}$$

$$2) \int_0^{\pi} \cos(2x) \sin(3x) dx$$

On applique (*) à $\begin{matrix} x \rightarrow 3x \\ y \rightarrow 2x \end{matrix}$: $\sin(3x)\cos(2x) = \frac{\sin(5x) + \sin x}{2}$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos(2x) \sin(3x) dx &= \int_0^{\pi} \frac{\sin(5x) + \sin x}{2} dx = \left[\frac{-\cos 5x}{10} - \frac{\cos x}{2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \\ &= 2 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Remarque : cet exercice est valable pour calculer les primitives de

- $\begin{cases} \cos(\beta x) \sin(\alpha x) \\ \sin(\beta x) \sin(\alpha x) \\ \cos(\beta x) \cos(\alpha x) \end{cases}$

Exercice 5 :

$$\begin{aligned} 1) \cos^2 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} \right) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\int \cos^2 x = \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx + \int \frac{1}{2} dx = \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{1}{2} x + \text{cte}$$

$$\begin{aligned} 2) \cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos x$$

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x &= \frac{1}{4} \int \cos(3x) + \frac{3}{4} \int \cos x \\ &= \frac{\sin(3x)}{12} + \frac{3 \sin x}{4} + \text{cte} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 = \frac{1}{16} (e^{ix} + e^{-ix})^4 = \frac{1}{16} (e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}) \\
 &= \frac{1}{16} (e^{4ix} + e^{-4ix} + 4(e^{2ix} + e^{-2ix})) + \frac{6}{16} \\
 &= \frac{1}{16} (2\cos(4x) + 8\cos(2x)) + \frac{3}{8} \\
 &= \frac{1}{8} (\cos(4x) + 4\cos(2x)) + \frac{3}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{8} \int (\cos(4x) + 4\cos(2x)) \, dx + \int \frac{3}{8} \, dx \\
 &= \frac{1}{8} \left(\frac{\sin(4x)}{4} + 2\sin(2x) \right) + \frac{3}{8} x \\
 &= \frac{\sin(4x)}{32} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{3}{8} x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \cos^5 x &= \frac{1}{2^5} (e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}) \\
 &= \frac{1}{2^4} \left(\frac{e^{5ix} + e^{-5ix}}{2} + 5 \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + 10 \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2^4} (\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int \cos^5 x \, dx &= \frac{1}{2^4} \int \cos 5x + \frac{5}{2^4} \int \cos 3x + \frac{10}{2^4} \int \cos x \\
 &= \frac{\sin(5x)}{80} + \frac{5\sin(3x)}{48} + \frac{5\sin x}{8} + C
 \end{aligned}$$

Exercise 6

$$\begin{aligned}
 1) \int \operatorname{Arctan}(t) \, dt & \quad \begin{aligned} u'(t) &= 1 & u(t) &= t \\ v(t) &= \operatorname{Arctan}(t) & v'(t) &= \frac{1}{1+t^2} \end{aligned} \\
 &= t \operatorname{Arctan}(t) - \frac{1}{2} \int \frac{2t}{1+t^2} \, dt \\
 &= t \operatorname{Arctan}(t) - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + C
 \end{aligned}$$

$$2) \int \frac{t}{\cos^2(t)} dt \quad u(t) = t \quad u'(t) = 1$$

$$v'(t) = \frac{1}{\cos^2 t} \quad v(t) = \tan t$$

$$= t \tan(t) - \int \tan(t) dt$$

$$= t \tan(t) - \int \frac{\sin(t)}{\cos(t)} dt$$

$$= t \tan(t) + \ln|\cos t| + C$$

$$3) \int e^t \cos t dt = I \quad \begin{cases} u(t) = \cos t & u'(t) = -\sin t \\ v'(t) = e^t & v(t) = e^t \end{cases}$$

$$I = e^t \cos t + \int e^t \sin t dt \quad \begin{cases} u(t) = \sin t & u'(t) = \cos t \\ v'(t) = e^t & v(t) = e^t \end{cases}$$

$$I = e^t \cos t + e^t \sin t - \underbrace{\int e^t \cos t dt}_{=I}$$

$$\Leftrightarrow 2I = e^t \cos t + e^t \sin t$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{e^t (\cos t + \sin t)}{2} + C$$

OU: $\int e^t \cos t dt = \operatorname{Re} \int e^t e^{it} dt \quad \text{car } \operatorname{Re}(e^{it}) = \cos t$

$$= \operatorname{Re} \int e^{(1+i)t} dt$$

$$= \operatorname{Re} \left[\frac{e^{(1+i)t}}{1+i} \right]$$

$$= e^t \operatorname{Re} \left(\frac{e^{it}}{1+i} \right) = e^t \operatorname{Re} \left(\frac{(1-i)e^{it}}{2} \right) = \frac{e^t}{2} \operatorname{Re}(e^{it}) + \frac{e^t}{2} \operatorname{Re}(-ie^{it})$$

$$= \frac{e^t \cos t}{2} + \frac{e^t \sin t}{2}$$

$$5) \int x^n \ln x dx \quad u(x) = \ln x \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = x^n \quad v(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int \frac{1}{x} x^{n+1} dx$$

$$= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx$$

$$= \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right) + C$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x - 1) + C$$

$$8) \int \sin(\ln x) dx \quad \begin{cases} u(x) = \sin(\ln x) & u'(x) = \frac{1}{x} \cos(\ln x) \\ v'(x) = 1 & v(x) = x \end{cases}$$

$$= x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx \quad \begin{cases} u(x) = \cos(\ln x) & u'(x) = -\frac{1}{x} \sin(\ln x) \\ v'(x) = 1 & v(x) = x \end{cases}$$

$$= x \sin(\ln x) - \left(x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx \right)$$

$$I = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - I$$

$$2I = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)$$

$$I = x (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + \text{cte}$$

$$4) \int_0^{\pi/8} (x+2) \sin(4x) dx \quad \begin{cases} u(x) = (x+2) & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \sin(4x) & v = -\frac{1}{4} \cos(4x) \end{cases}$$

$$= \left[(x+2) \left(-\frac{\cos(4x)}{4} \right) \right]_0^{\pi/8} + \frac{1}{4} \int_0^{\pi/8} \cos(4x) dx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \left[\sin(4x) \right]_0^{\pi/8}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$$

$$= \frac{9}{16}$$

$$6) \int_0^1 2x \operatorname{Arctan} x dx \quad \begin{cases} u(x) = \operatorname{arctan}(x) & u'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ v'(x) = 2x & v(x) = x^2 \end{cases}$$

$$= \left[x^2 \operatorname{arctan} x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left[x - \operatorname{arctan} x \right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4}$$

$$= -1 + \frac{\pi}{2}$$

$$7) \int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/4} \tan x (\tan x)' dx$$

$$= \left[\frac{\tan x}{2} \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Exercice 13 :

$$1) \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

↗ n'admet pas de racines réelles donc ok

Pour a: $\frac{1}{x^2-x+1} = a + \frac{(bx+c)(x+1)}{x^2-x+1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = a \quad (x \rightarrow -1)$$

Pour b: $\frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{ax}{x+1} + \frac{(bx+c)x}{x^2-x+1}$

$$\Rightarrow 0 = a + b \quad (\text{quand } x \rightarrow +\infty)$$

$$\Rightarrow b = -a = -\frac{1}{3}$$

Pour c: $\frac{1}{x+1} = \frac{a(x^2-x+1)}{x+1} + bx + c$

$$\Rightarrow 1 = a + c \quad (x=0)$$

$$\Rightarrow c = \frac{2}{3}$$

Donc $\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{3} \frac{x-2}{x^2-x+1}$

$$2) * \int \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \int \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}}{x^2-x+1} dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-x+1} dx$$

$$\text{Or } \int \frac{1}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx = \frac{1}{\alpha A} \arctan\left(\frac{1}{A}\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)\right)$$

$$A = \frac{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}{2|\alpha|}$$

Pour $\alpha = 1$:

$$= \frac{2}{\sqrt{4\gamma - \beta^2}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{4\gamma - \beta^2}}\left(x + \frac{\beta}{2}\right)\right)$$

Ici, on applique pour $(\alpha=1, \beta=-1, \gamma=1) \Rightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{Donc } \int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) + \text{cte}$$

$$\text{OU: } I = \int \frac{1}{x^2+x+1}$$

$$x^2-x+1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left(\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right)$$

$$= \frac{3}{4} \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)$$

$$I = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx$$

$$\text{On pose } u = \frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(u + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$dx = \frac{\sqrt{3}}{2} du$$

$$I = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{4}{3} \int \frac{1}{u^2+1} du = \frac{2\sqrt{3}}{3} [\arctan u] = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\text{Donc } \int \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) + \text{cte}$$

$$= \int \frac{1}{x^3+1} dx$$

$$\textcircled{*} \int \frac{x^3}{x^3+1} dx = \int \frac{x^3+1-1}{x^3+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^3+1}\right) dx$$

$$= x - \frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) + \text{cte}$$

$$3) \int \frac{1}{x^2+\sqrt{x}} dx \quad t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2t} dx$$

$$\Rightarrow dx = 2t dt$$

$$= \int \frac{1}{t^4+t} 2t dt$$

$$= 2 \int \frac{1}{t^3+1} dt = 2 \left[\frac{1}{3} \ln|t+1| - \frac{1}{6} \ln|t^2-t+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t - \frac{1}{2}\right)\right) \right] + \text{cte}$$

$$= \frac{2}{3} \ln|\sqrt{x}+1| - \frac{1}{3} \ln|x-\sqrt{x}+1| + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)\right) + \text{cte}$$

Exercice 14:

$$1) \quad \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

$$\text{Pour } a: \quad \frac{1}{x^2+1} = a + \frac{(bx+c)(x+1)}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = a \quad (\text{pour } x=-1)$$

$$\text{Pour } b: \quad \frac{x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{ax}{x+1} + \frac{(bx+c)x}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow 0 = a+b \quad (x \rightarrow +\infty)$$

$$\Rightarrow b = -a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Pour } c: \quad 1 = a + c \quad (x=0)$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc} \quad \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$2) \quad \int_0^s \frac{e^x}{(1+e^x)(1+e^{2x})} dx \quad \text{On pose } u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ \Rightarrow dx = e^{-x} du$$

$$e^0 = 1 \text{ et } e^s$$

$$\text{Donc } I = \int_1^{e^s} \frac{1}{(1+u)(1+u^2)} du$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^{e^s} \frac{1}{u+1} du - \frac{1}{2} \int_1^{e^s} \frac{u-1}{u^2+1} du$$

$$= \frac{1}{2} [\ln|u+1|]_1^{e^s} - \frac{1}{4} [\ln(1+u^2) - 2 \arctan(u)]_1^{e^s}$$

$$= \frac{1}{2} (\ln(e^s+1) - \ln 2) - \frac{1}{4} (\ln(1+e^{2s}) - \ln 2) + \frac{1}{2} \arctan(e^s) - \frac{1}{4} \arctan(1)$$

Exercice 15.

$$1) F(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

$$a = (x-1)F(x) \Big|_{x \rightarrow 1} = \frac{1}{x^2+1} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$$

$$xF(x) = \frac{ax}{x-1} + \frac{bx^2+cx}{x^2+1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 0 = a+b \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$F(0) = -1 = -a+c \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

$$V'_{\text{ad}} F(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{x+1}{x^2+1}$$

$$2) \int_1^2 \frac{e^x}{(e^x-1)(e^{x^2}+1)} dx \quad \begin{array}{l} \text{On pose } u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ \Rightarrow dx = \frac{du}{u} \\ x=2 \Rightarrow u = e^2 \\ x=1 \Rightarrow u = e \end{array}$$

$$I = \int_e^{e^2} \frac{u}{(u-1)(u^2+1)} \times \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{2} \int_e^{e^2} \frac{1}{u-1} du - \frac{1}{2} \int_e^{e^2} \frac{u+1}{u^2+1} du$$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln|u-1| \right]_e^{e^2} - \frac{1}{4} \int_e^{e^2} \frac{2u}{u^2+1} - \frac{1}{2} \int_e^{e^2} \frac{1}{u^2+1}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(e^2-1) - \frac{1}{2} \ln(e-1) - \frac{1}{4} \ln(e^4+1) + \frac{1}{4} \ln(e^2+1) - \frac{1}{2} \arctan(e^2) + \frac{1}{2} \arctan(e).$$

Exercice 12.

$$I = \left] \frac{\pi}{4} + k\pi ; \frac{\pi}{4} + (k+1)\pi \right]$$

$$\{x \in \mathbb{R}, \cos x = \sin x\} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \Rightarrow x \mapsto \frac{1}{\cos x - \sin x} \text{ est continue pour } I$$

$$\bullet I(x) + J(x) = \int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{-u'(x)}{u(x)} dx$$

$$= -\ln|\cos x - \sin x| + cste$$

$$\bullet I(x) - J(x) = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x \sin x} dx = \int 1 dx = x + c_1$$

$$\bullet I = \frac{I+J+I-J}{2} = \frac{x - \ln|\cos x - \sin x|}{2} + c_1$$

$$J = \frac{I+J-(I-J)}{2} = \frac{-x - \ln|\cos x - \sin x|}{2} + c_2$$

Exercice 11:

$$1) \int_0^1 t^p (1-t)^q dt = \int_0^1 t^q (1-t)^p dt$$

$$\text{On pose } u = 1-t \Leftrightarrow t = 1-u \quad t=0 \Rightarrow u=1 \\ du = -dt \Leftrightarrow dt = -du \quad t=1 \Rightarrow u=0$$

$$J_{p,q} = \int_1^0 (1-u)^p u^q (-du) = \int_0^1 u^q (1-u)^p du = J_{q,p}$$

$$2) (q+1) \int_0^1 \underbrace{t^p (1-t)^q}_{\text{dérivée}} dt = p \int_0^1 \underbrace{t^{p-1} (1-t)^{q+1}}_{\text{primitive}} dt$$

$$\text{IPP avec } u(t) = t^p \quad u'(t) = p t^{p-1} \\ v(t) = (1-t) \quad v'(t) = -(1-t)^{q+1}$$

$$\int_0^1 t^p (1-t)^q dt = \left[t^p \frac{-(1-t)^{q+1}}{q+1} \right]_0^1 + \int_0^1 p t^{p-1} \frac{(1-t)^{q+1}}{q+1} dt \\ = \frac{p}{q+1} \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q+1} dt$$

$$\Rightarrow (q+1) J_{p,q} = p J_{p-1,q+1}$$

$$3) J_{0,p,q} = \int_0^1 (1-t)^{p+q} dt = \left[-\frac{(1-t)^{p+q+1}}{p+q+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+q+1}$$

$$(q+1) J_{p,q} = p J_{p-1,q+1} \Rightarrow J_{p,q} = \frac{p}{q+1} J_{p-1,q+1} = \frac{p}{q+1} \frac{p-1}{q+2} J_{p-2,q+2}$$

$$= \frac{p}{q+1} \frac{p-1}{q+2} \frac{p-2}{q+3} J_{p-3,q+3}$$

$$(J_{p-1,q+1} = \frac{p-1}{q+2} J_{p-2,q+2})$$

$$J_{p,p,q} = \frac{p!}{(q+1)(q+2)\dots(q+p)}$$

$$J_{p+p, q+q} = \frac{p!}{(q+1)(q+2)\dots(q+p)} J_{q, p+q}$$

$$= \frac{p!}{(q+1)\dots(q+p)} \frac{1}{p+q+1}$$

(On multiplie en haut et en bas par $q!$)

$$J_{p,q} = \frac{(1 \times \dots \times q) p!}{1 \times \dots \times (q-1) q \times (q+1) \dots (q+p+1)} = \frac{p! q!}{(p+q+1)!} \quad \forall p, q \in \mathbb{N}$$

Exercice 10:

$$\int_{-x}^x f(t) dt = 2 \int_0^x f(t) dt \quad \text{si } f \text{ est paire } (f(x) = f(-x))$$

$$2) \quad \begin{aligned} g = -t &\Leftrightarrow t = -g & t=x &\Rightarrow g=-x \\ dg = -dt &\Leftrightarrow dt = -dg & t=-x &\Rightarrow g=x \end{aligned}$$

$$\int_{-x}^x f(t) dt = - \int_x^{-x} f(-g) dg = \int_{-x}^x f(-g) dg$$

$$\text{Si } f(-g) = -f(g) : \int_{-x}^x f(t) dt = - \int_{-x}^x f(g) dg \Rightarrow 2 \int_{-x}^x f(t) dt = 0$$

$$1) \quad \int_{-x}^x f(t) dt = - \int_x^{-x} f(-g) dg = - \int_{-x}^x f(g) dg \quad \text{si } f \text{ est pair}$$

$$g=t; dg=dt$$

$$= \int_{-x}^0 f(g) dg$$

$$\begin{aligned} \int_{-x}^x f(t) dt &= \int_0^x f(t) dt + \int_{-x}^0 f(t) dt \\ &= \int_0^x f(t) dt + \int_0^x f(t) dt \\ &= 2 \int_0^x f(t) dt \end{aligned}$$

$$3) \quad f \text{ est } T\text{-périodique si } f(t+T) = f(t) \quad \forall t$$

$$\int_x^{x+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

Changement de variable $y = t-x; t = x+T \Rightarrow y = x+T-x = T$
 $dy = dt$

$$\int_x^{x+T} f(t) dt = \int_0^T f(g+x) dg \rightarrow \text{ne marche pas}$$

Soit
$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \int_x^{x+T} f(t) dt \\ G(x) &= \int_0^T f(t) dt \end{aligned} \right\} \text{ On veut montrer que } F(x) = G(x), \forall x$$

$\Updownarrow$
 $F'(x) = G'(x) \text{ et } F(0) = G(0)$

$$G'(x) = 0 \quad (\text{ne dépend pas de } x)$$

$$F(x) = \int_0^{x+T} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt$$

$$\text{Donc } F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0 \quad \text{car } f \text{ est } T\text{-périodique}$$

$$\left. \begin{aligned} F'(x) &= G'(x) = 0 \\ F(x) &= \int_0^T f(t) dt = G(x) \end{aligned} \right\} F(x) = G(x) \quad \forall x$$

Exercice 9:

1)
$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$$

$$\frac{1}{x^2 + \beta x + \delta} \longrightarrow \frac{2}{\sqrt{4\delta - \beta^2}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{4\delta - \beta^2}} \left(x + \frac{\beta}{2}\right)\right)$$

$\beta = \delta = 2$

$$\text{Donc } I = \left[\arctan(x+1) \right]_0^1 = \arctan(2) - \frac{\pi}{4}$$

Exercice 8:

1)
$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx \quad y = \frac{x}{a} \quad dy = \frac{dx}{a}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{a^2 + a^2 y^2} a dy &= \frac{a}{a^2} \int \frac{1}{1 + y^2} dy \\ &= \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \text{cte} \end{aligned}$$

$$2) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad y = \frac{x}{a} \quad dy = \frac{dx}{a}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - ay^2}} a dy = \frac{a}{|a|} \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{a}{|a|} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + cte$$

Remarque: Pour $a \neq 0$:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + cte$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \frac{a}{|a|} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + cte \\ &= \arcsin\left(\frac{x}{|a|}\right) + cte \end{aligned}$$

Révision calcul intégral

19

Exercice 1

$$(1) \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx$$

$$= x - \text{Arctan}(x) + cfe$$

$$(2) \int t^4(1+t^5) dt = \frac{1}{30} (1+t^5)^6 + cfe$$

$$(3) \int \frac{1}{\cos^2(t)} = \tan(t)$$

$$(4) \int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = - \int \frac{1}{u^2} = \frac{1}{u} = \sec(x)$$

$$u = \cos(x)$$

$$x = \arccos(u)$$

$$dx = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(5) \int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int \sin(x) dx = -\frac{\cos(x)}{2} + cfe$$

$$(6) \int \frac{P_n(t)}{t} dt = P_n^2(t) + cfe$$

$$(7) \int \frac{1}{\sin^2(t)} dt = -\frac{1}{\tan(t)} + cfe$$

$$(8) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{Arcsin}(x) + cfe$$

$$\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$(9) \int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{1+1-e^{-2x}} dx = \int \frac{e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2} dx$$

$$= -\frac{1}{4} e^{-2x} + \frac{x}{2} + cfe$$

$$(10) \quad \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \quad \text{on pose } u = \cos x$$

$$= - \int \frac{1}{u} \, du = - \ln |u| + cte = - \ln |\cos x| + cte$$

$$(11) \quad \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1 - \cos(4x)}{8}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \, dx = \int \frac{8}{1 - \cos(4x)} \, dx$$

$$u = 4x$$

$$v = \tan\left(\frac{u}{2}\right)$$

$$= 8 \int \frac{1}{1 - \cos u} \, du$$

$$u = 2 \operatorname{Arctan}(v)$$

$$= 8 \int \frac{1}{1 - \cos(2 \operatorname{Arctan}(v))}$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{2}{1+v^2}$$

$$= 8 \int \frac{1}{1 - \cos(2 \operatorname{Arctan}(v))} \cdot \frac{2}{1+v^2} \, dv$$

$$= 8 \int \frac{1}{\frac{v^2}{2}}$$

$$= - \frac{2}{v} + cte = - \frac{2}{\tan\left(\frac{u}{2}\right)} + cte = - \frac{2}{\tan(2x)} + cte$$

$$(12) \quad \int \frac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+1}} \, dx = \int \frac{4x}{\sqrt{x^2+x+1}} \, dx + \int \frac{2}{\sqrt{x^2+x+1}} \, dx$$

$$(12.1) \quad 4 \int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} \, dx = 4 \int \frac{x}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} \, dx \quad u = x + \frac{1}{2}$$

$$= 4 \int \frac{2u-1}{\sqrt{4u^2+3}} \, du = 4 \left(\int \frac{2u}{\sqrt{4u^2+3}} \, du - \int \frac{1}{\sqrt{4u^2+3}} \, du \right)$$

$$= 4 \left(\frac{1}{2} \sqrt{4u^2+3} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2}{\sqrt{3}} u + \sqrt{1 + \frac{4}{3} u^2} \right| \right)$$

On peut se voir a vue: $\frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{x^2+x+1}$

$$(12.2) \int \frac{2}{\sqrt{x^2+x+1}} = 4 \int \frac{1}{\sqrt{4u^2+3}} du \quad u = x + \frac{1}{2} \quad I10$$

$$= 2\sqrt{3} \int \frac{1}{\sqrt{3\tan^2(v)+3} \cos^2(v)} dv$$

$$= 2 \int \frac{1}{\cos(v)} dv$$

$$= 2 \ln |\tan(v) + \frac{1}{\cos(v)}|$$

Exercise 2

$$\frac{1}{1+x^2} = a + \frac{(bx+c)x}{1+x^2}$$

$$S: x=0$$

$$a=1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1+x^2}{x} + bx+c$$

$$1 = 2 + b+c \quad b+c = -1$$

$$S: x=2$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{2} + 2b+c$$

$$2b+c = -2$$

$$b = -1$$

$$c = 0$$

$$\text{dome} \quad \frac{1}{x+x^3} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

$$\text{Dome} \quad \int_1^2 \frac{1}{x+x^3} = \left[\ln(x) \right]_1^2 - \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_1^2$$

$$= \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(5/2)$$

Exercice 3

$$(1) \int (1) = \frac{1}{2} P_m(x^2 - 2x + 2) + cte = \int_2^x \frac{t-1}{t^2-2t+2} dt$$

$$x=2 \Rightarrow \int(1)=0$$

$$cte = -\frac{P_m(2)}{2}$$

$$(2) \int(2) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 2x + 5} + cte$$

$$x=-1 \Rightarrow \int(2)=0$$

$$cte = -\frac{1}{2}$$

$$(3) \text{IPP: } \int u'v = [uv] - \int uv'$$

$$u'=1$$

$$u=x$$

$$v=P_m x$$

$$v'=1/x$$

$$\int(3) = x P_m x - x + cte$$

$$cte = -2 P_m 2 + 2$$

$$(4) \int(4) = \frac{3}{7} x^{7/3} + cte \Rightarrow cte = -3/7$$

Exercice 4

$$(1) \int_0^{2\pi} \cos(px) \cos(qx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((p+q)x) + \cos((p-q)x)$$

$$= \left[\frac{1}{2(p+q)} \sin((p+q)x) \right]_0^{2\pi} + \left[\frac{1}{2(p-q)} \sin((p-q)x) \right]_0^{2\pi} + cte = 0$$

$$(2) = \left[\frac{1}{10} \sin(5x) \right]_0^{\pi} + \left[-\frac{1}{2} \sin(-x) \right]_0^{\pi} + cte$$

$$= 0$$

Exercice 4

341

$$(1) \quad \int_0^{2\pi} \cos(px) \cos(qx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((p+q)x) \cos((q-p)x) dx \\ = 0$$

$$\text{pour } p=q \\ = 2\pi/2 = \pi$$

$$(2) \quad \int_0^{\pi} \cos(2x) \sin(3x) dx \\ = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(5x) + \cos(x) dx \\ = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{5} \cos(5x) - \cos(x) \right]_0^{\pi} \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} + 1 + \frac{1}{5} + 1 \right) = \frac{1}{5} + 1$$

Exercice 5

$$(1) \quad \int \cos^2 x dx = \int \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2} dx \\ = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$$

$$\int \cos^{2p+1} x dx = \int \cos x (\cos^2 x)^p dx \\ = \int \cos x (1 - \sin^2 x)^p dx \\ = F(\sin(x)) + cte \\ \text{avec } F(t) = (-1)^p \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (x^2)^k (-1)^{p-k}$$

$$(2) \quad \int \cos^3 x dx = \sum_{k=0}^p \frac{x^{2k+1}}{2k+1} (-1)^k \binom{p}{k} \\ = \sum_{k=0}^1 \frac{x^{2k+1}}{2k+1} (-1)^k \binom{1}{k} \\ = x + \frac{x^3}{3} (-1) = x - \frac{x^3}{3} \\ = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int \cos^4(x) dx &= \int \frac{\cos^2(x) \cos^2(x)}{1 + \cos(2x)} dx \\
 &= \frac{1}{4} \int 1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x) dx \\
 &= \frac{1}{4} \int 1 + 2\cos(2x) + \frac{1 + \cos(4x)}{2} dx \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{2x}{2} + \sin(2x) + \frac{\sin(4x)}{4} \right) \\
 &= \frac{1}{32} \sin(4x) + \frac{3x}{8} + \frac{\sin(2x)}{4} \\
 (4) \quad \int \cos^5 x &= \frac{5}{8} \sin x - \frac{5 \sin^3 x}{48} + \frac{\sin^5 x}{80}
 \end{aligned}$$

Exercise 6

$$\begin{aligned}
 (1) \quad u' &= 1 & v' &= \frac{1}{1+t^2} \\
 u &= t & v &= \arctan t \\
 & & &= t \arctan t - \frac{1}{2} \ln(1+t^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad u' &= \frac{1}{\cos^2 t} & v &= t \\
 u &= \tan t & v' &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= t \cdot \tan(t) - \int \tan t \\
 &= t \cdot \tan(t) + \ln|\cos t|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad u' &= \cos(t) & I &= \int \cos(t) e^t \\
 u &= \sin(t) & &= \sin(t) e^t - \int \sin(t) e^t \\
 & & &= \sin(t) e^t + \cos(t) e^t - \int \cos(t) e^t \\
 & & &= \frac{e^t}{2} (\sin(t) + \cos(t))
 \end{aligned}$$

Exercice 9

I 12

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \text{Arctan}(x+1)$$

Exercice 8

$$\begin{aligned} x &= au \\ u &= \frac{x}{a} \\ dx &= a \end{aligned} \quad \frac{1}{a} \int \frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{a} \text{Arctan}(x/a)$$

Exercice 11

113

$$(1) \quad J_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt = \int_0^1 t^q (1-t)^p dt$$

$$t=1-y \quad J_{p,q} = \int_1^0 (1-y)^p y^q dy = \int_0^1 (1-y)^p y^q dy$$

$$dt = -1$$

$$(2) \quad p \geq 1$$

$$(q+1) J_{p,q} = p J_{p-1, q+1}$$

$$(q+1) \int_0^1 t^p (1-t)^q dt = p \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q+1} dt$$

$$u(t) = t^p \quad u'(t) = p t^{p-1}$$

$$v'(t) = (1-t)^q \quad v(t) = -\frac{(1-t)^{q+1}}{q+1}$$

$$(q+1) J_{p,q} = \left[-t^p \frac{(1-t)^{q+1}}{q+1} \right]_0^1 + p \int_0^1 t^{p-1} \frac{(1-t)^{q+1}}{q+1} dt$$

$$= \frac{p}{q+1} \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q+1} dt$$

$$(3) \quad J_{0, p+q} = \int_0^1 (1-t)^{p+q} dt$$

$$= \left[-\frac{(1-t)^{p+q+1}}{p+q+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+q+1}$$

$$J_{p,q} (q+1) = p J_{p-1, q+1}$$

$$\int_0^1 t^p (1-t)^q dt = \int_0^1$$

$$J_{p-1, q+1} = \frac{p-1}{q+2} J_{p-2, q+2}$$

$$\vdots$$

$$\prod_{k=0}^{p-1} (p-k)$$

$$\prod_{k=1}^p (q+k)$$

$$J_{p-p, q+p}$$

$$= \frac{p!}{\prod_{k=1}^p (q+k)} J_{0, p+q}$$

$$= \frac{p! (q)(q-1) \dots \times 1}{(p+q+1)!}$$

$$= \frac{p! q!}{(p+q+1)!}$$

Exercice 10

(1) Si f paire : $\int_{-\infty}^{\infty} f = 2 \int_0^{\infty} f$

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$

donc $\int_0^x f(x) + \int_{-\infty}^0 f(x)$
 $= \int_{-\infty}^x f(x) dx$

$\int_{-\infty}^0 f(x) = -\int_0^{-\infty} f(x) dx$

$x = -x$
 $= + \int_0^x f(-x) dx$

$= \int_0^x f(x) dx$

donc $\int_{-\infty}^x f(x) dx = 2 \int_0^x f(x) dx$

$f(x)$ paire

$f(-x) = f(x)$

$\int_0^x f(x) + \int_{-\infty}^0 f(x)$

$\int_0^x f(x) - \int_0^{-\infty} f(x) dx$

$x = -x$

$dx = -1$

$-\int_0^x f(-x) = -\int_0^x f(x)$

$= 2 \int_0^x f(x)$

$\int_0^x f(x) + \int_0^{-\infty} f(x)$

(2) $\int_0^x f(x) - \int_0^{-x} f(x)$

$x = -x$

$+ \int_0^x f(-x) = -\int_0^x f(x)$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0$

$x = -x$

$\int_0^x f(x) + \int_0^x f(-x)$

$= \int_0^x f(x) - \int_0^x f(x)$

$= 0$

$\int_x^{x+T} f(x)$

$x =$

(3) $F(x) - G(x) = 0$

$F'(x) - G'(x) = 0$

$F(0) = F(0)$

$F(x) = \int_x^{x+T} f(t) dt = \int_0^{x+T} f(t) - \int_0^x f(t)$

$F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$

$G'(x) = 0$

$\Rightarrow F(x) = G(x)$

Exercice 13

I 19

$$(1) \quad \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

$$a = (x+1)F(x) \Big|_{x=-1} = 1/3$$

$$x = 0$$

$$\cancel{a=2/3} \quad 1 = a+c \Rightarrow c = \frac{2}{3}$$

$$x = 1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{2} + 2b + c \Rightarrow b = -1/3$$

$$(1) = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{-1x+2}{3(x^2-x+1)}$$

$$\int (1) = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \int \frac{2/3 - 1/6}{x^2-x+1} dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \int \frac{1}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) + cte$$

$$(2) \quad \int \frac{x^3}{x^3+1} = \int 1 - \frac{1}{x^3+1} dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$(3) \quad t = \sqrt{x}$$

$$dx = 2t$$

$$x = t^2$$

$$\int \frac{1}{x^2+\sqrt{x}} = 2 \int \frac{1}{t^3+1} \quad \text{voir (2)}$$

Exercice 14

$$(1) \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$(2) \quad \mathcal{I}_3 = \frac{1}{2} \left[\ln|t+1| \right]_1^{e^3} - \left[\frac{1}{4} \ln(t^2+1) - 2 \operatorname{Arctan}(t) \right]_1^{e^3} + cte$$

Exercice 15

$$(1) \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2(x-1)} + \frac{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2+1}$$

$$x=1$$

$$\frac{1}{2} = a$$

$$x=0$$

$$-1 = -a + c$$

$$-\frac{1}{2} = c$$

$$x=2$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{2} + \frac{2b - \frac{1}{2}}{5}$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

On pose $t = e^x$

$$\int_1^2 \frac{e^x}{(e^x-1)(e^{2x}+1)} dx = \int \frac{1}{e(t-1)(t^2+1)} dt$$

$$= \frac{1}{2} \ln(e^2-1) - \frac{1}{2} \ln(e-1) - \frac{1}{4} \ln(e^4+1) + \frac{1}{4} \ln(e^2+1) - \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(e^4) + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(e)$$

Exercice 12

$$u'v + uv'$$

$$-\sin x \sin x + \cos x \cos x$$

$$I+J = \int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} dx = -\ln|\cos x - \sin x| + cte$$

$$I-J = \int dx = x + cte$$

$$\begin{cases} I+J = -\ln|\cos x - \sin x| + cte \\ I-J = x + cte \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}I = x - \ln|\cos x - \sin x| \\ \frac{1}{2}J = \ln|\cos x - \sin x| - x \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} u' &= x+2 \sin(4x) & v &= x+2 \\ u &= x^2 - \frac{1}{4} \cos(4x) & v' &= 1 \end{aligned}$$

I 45

$$= \left(-\frac{1}{4} \cos(4x)(x+2) + \frac{1}{16} \sin(4x) \right) \Big|_0^{\pi/8} = \frac{9}{16}$$

$$(5) \quad \begin{aligned} \int x^m P_m x \\ u' &= x^m & v &= P_m x \\ u &= \frac{x^{m+1}}{m+1} & v' &= 1/x \end{aligned}$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} P_m x - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$$

$$(6) \quad \begin{aligned} u' &= 2x & v &= \arctan x \\ u &= x^2 & v' &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} - \frac{P_m}{1+x^2} = \arctan 1 - [1 - \arctan 1] = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$= \frac{\pi}{4} - P_m(2)$$

$$(7) \quad \begin{aligned} u' &= \frac{1}{\cos^2 x} & v &= \tan x \\ u &= \tan x & v' &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \tan x / \cos^2 x \\ &= \tan^2 x - \int \tan x / \cos^2 x \\ &= \frac{\tan^2 x}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(8) \quad \begin{aligned} u' &= 1 & v &= \sin(P_m(x)) \\ u &= x & v' &= \frac{1}{x} \cos(P_m(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= x \sin(P_m x) - \int \cos(P_m(x)) \\ &= x \sin(P_m x) - x \cos(P_m(x)) - \sin(P_m(x)) \\ 2I &= x \sin(P_m x) - x \cos(P_m(x)) \end{aligned}$$

Exercice 7

(1) On pose $u = 1 + \ln(x)$

$$x = \exp(1-u)$$

$$dx = -\exp(1-u)$$

$$\frac{1}{x(1+\ln x)^3} = \frac{1}{u^3 \cdot e^{1-u}} \cdot -e^{1-u}$$

$$= -\frac{1}{u^3} \Rightarrow \int -\frac{1}{u^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(1+\ln(x))^2}$$

$$\begin{array}{l} u^{-3} \\ \downarrow \\ u^{-2} \end{array}$$

$$x^{-1} = -3$$

$$x = -2$$

Exercice 5

Rappel Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\cdot \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

Remarque $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{(b-a)}{n}\right)$

Cas particulier: Si $a = 0$

$$\cdot \frac{b}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{bk}{n}\right) \rightarrow \int_0^b f(x) dx \quad \text{on cherche } f(x)$$

tel que notre somme = $\frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{bk}{n}\right)$

$$f(a) + \frac{b-a}{n} f(b) \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

$$\begin{aligned} (a) \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k \sqrt{n^2 - k^2}}{n^3} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k n \sqrt{1 - (k/n)^2}}{n^3} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{avec } f(x) = x \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

On applique la formule du cas à $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = x \sqrt{1 - x^2}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k \sqrt{n^2 - k^2}}{n^3} \rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x \sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{m^2 - k^2}} = \frac{1}{m \sqrt{1 - \left(\frac{k}{m}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^m \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{k}{m}\right)^2}} \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\rightarrow \int_0^1 f(x) dx = [\text{Arctg} x]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{m^2 - k^2}} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{k}{m}\right)^2}} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(x)$$

$$\text{où } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\rightarrow \int_0^1 f(x) dx = [\text{Arctg} x]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 3

Rappel: Formule de Taylor avec reste intégral $\hat{x}$:

l'ordre n de $f(x) = \ln(1+x)$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + \int_0^1 \frac{(1+t)^{n-2}}{(n-1)!} f^{(n)}(tx) dt x^n$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{(-1)^2 2!}{(1+x)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{(-1)^3 3!}{(1+x)^4}$$

$$f^{(R)}(x) = \frac{(-1)^{R-1} (R-1)!}{(1+x)^R}$$

Montrons par récurrence que

$$f^{(R)}(x) = \frac{(-1)^{R-1} (R-1)!}{(1+x)^R} \quad R \geq 1$$

$$R = 1 \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

Vraie pour $R=1$ montrons pour R

$$g^{(R+1)}(x) = \frac{(-1)^{R-1} (R-1)! (-R)}{(1+x)^{R+1}} = \frac{(-1)^R R!}{(1+x)^{R+1}}$$

$\Rightarrow$ * Vrai pour $R=1$

$$g^{(R)}(0) = (-1)^{R-1} (R-1)!$$

$$P_m(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{m-2} (m-2)! x^{m-1}}{(m-1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{(-1)^{m-1} (m-1)!}{(1+tx)^{m+1}} dt x^m$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^m \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + (-1)^{m-1} \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(1+tx)^{m+1}} dt x^m$$

Pour $x=1$

$$P_m(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^m}{m-1} + (-1)^{m-1} \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(1+t)^{m+1}} dt$$

$$P_m(2) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = (-1)^{m-1} \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(1+t)^{m+1}} dt$$

$$\frac{1}{(1+t)^{m+1}} \leq 1 \quad \forall t \geq 0$$

$$\Rightarrow |P_m(2) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}| \leq \int_0^1 (1-t)^{m-1} dt = \left[-\frac{(1-t)^m}{m} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{m}$$

Exercice 1

$$(1) \quad P_m(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^m}{m-1} x^{m-1} + (-1)^{m+1}$$

$$\int_0^1 (-1-t)^{m-1} \frac{1}{(1+tx)^m} dt \quad x^m$$

Pour $m=3$:

$$P_m(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \int_0^1 (-1-t)^2 \frac{1}{(1+tx)^3} dt \quad x^3$$

montrons que pour $x \geq 0$

$$\frac{x^3}{3(1+x)^3} \leq \int_0^1 (-1-t)^2 \frac{1}{(1+tx)^3} dt \quad x^3$$

pour $x \geq 0$

soit $0 \leq t \leq 1$
 $1+tx \leq 1+x$
 $\Rightarrow \left(\frac{1}{1+x}\right)^3 \leq \frac{1}{(1+tx)^3}$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{(1+x)^3} \leq \frac{x^3}{(1+tx)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{(1+x)^3} \int_0^1 (-1-t)^2 dt \leq \int_0^1 (-1-t)^2 \frac{1}{(1+tx)^3} dt \quad \text{par } (*)$$

montrons que $P_m(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

il suffit de montrer que $\int_0^1 (-1-t)^2 \frac{1}{(1+tx)^3} dt \leq \frac{x^3}{3}$

$$\frac{1}{1+tx} \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{1+tx}\right)^3 \leq 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (-1-t)^2 \frac{1}{(1+tx)^3} dt \leq \int_0^1 (-1-t)^2 dt \leq \frac{x^3}{3}$$

Exercice 2

$$e^x = 1 + \dots + \frac{x^m}{m!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!} e^{tx} dt x^{m+1} \quad \text{748}$$

$$= \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!} e^{tx} dt x^{m+1}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!} e^{tx} dt x^{m+1} &\leq \frac{|x|^{m+1} e^{|x|}}{m!} \\ \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!} dt x^{m+1} &\leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \quad \left. \begin{array}{l} (m+1)! \\ e^{tx} \leq e^{|x|} \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(m+1)m!} x^{m+1} &\leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \\ x^{m+1} &\leq |x|^{m+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{m+1} &\leq |x|^{m+1} \\ \frac{1}{m!(m+1)} x^{m+1} &\leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \\ \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!} dt x^{m+1} &\leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \\ \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!} e^{tx} dt x^{m+1} &\leq \frac{|x|^{m+1} e^{|x|}}{(m+1)!} \quad \left. \begin{array}{l} \text{car } e^{tx} \leq e^{|x|} \\ \forall x \in \mathbb{R}, t \in [0,1] \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$m=4, \quad x=-1$$

$$(1) \left| e^{-1} - \sum_{k=0}^4 \frac{-1^k}{k!} \right| \leq \frac{|-1|^{5}}{5!} e^{-1}$$

$$e^{-1} \approx 0,365$$

$$(2) \frac{u_{m+1}}{u_m} = \frac{e^{|x|} |x|}{(m+2)!} \frac{(m-1)!}{e^{|x|} |x|^{m+1}} = \frac{|x|}{m+2} \rightarrow 0$$

$$\sum u_m(x) \text{ CV} \Rightarrow \lim u_m = 0$$

$$\Rightarrow \lim \left| e^x - \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!} \right| \leq \lim \frac{e^{|x|} |x|^{m+1}}{(m+1)!} = 0$$

Exercice 4

$$(1) \quad \begin{aligned} f^{(2k)}(x) &= (-1)^k \cos x \\ f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^{k+1} \sin x \end{aligned}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^{2m}}{(2m)!} f^{(2m+1)}(tx) dt x^{2m+1}$$

$$f(x) = \sum_{p=0}^m \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{2m}}{(2m)!} (-1)^{m+1} \sin(tx) dt x^{2m+1}$$

$$\rightarrow \cos x - \sum_{p=0}^m \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} = \int_0^1 \frac{(1-t)^{2m}}{(2m)!} (-1)^{m+1} \sin(tx) dt x^{2m+1}$$

$$\rightarrow \left| \cos x - \sum_{p=0}^m \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} \right| = \left| \int_0^1 \frac{(1-t)^{2m}}{(2m)!} (-1)^{m+1} \sin(tx) dt x^{2m+1} \right|$$

$$\bullet \quad \left| \cos x - u_m \right| = \frac{1}{(2m+1)!} \frac{|x|^{2m+1}}{\int_0^1 \frac{(1-t)^{2m}}{(2m)!} dt} \leq |x|^{2m+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^{2m}}{(2m)!} dt$$

Arcs paramétrés

Dans un repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j})$ du plan on considère la courbe C :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{1-t^2} \\ y(t) = \frac{t^3}{1-t^2} \end{cases} \quad \begin{matrix} t^2 t \\ \hline t^2(\frac{1}{1-t^2} - 1) \end{matrix}$$

définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

- (1) Déterminer les symétries de C
- (2) Déterminer le tableau de variation des fonctions $x(t)$ et $y(t)$
- (3) Déterminer points singuliers et nœuds
- (4) " tangentes
- (5) Étudier branches infinies
- (6) Tracer C

$$(1) \quad \forall t \in \mathbb{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \{-1, 1\}$$

$$x(-t) = x(t)$$

A19

$$y(-t) = -y(t)$$

symétrie par rapport à
Rapport à l'axe (Ox)

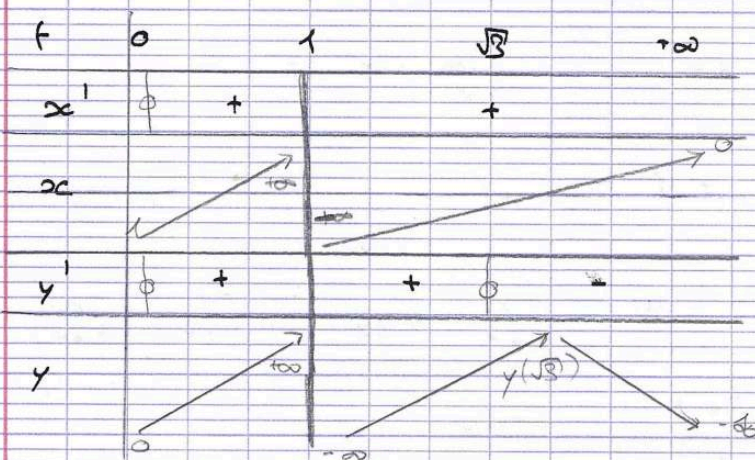
$$\frac{x'(t)}{2t}$$

$$2) \quad x'(t) = \frac{2t}{(1-t^2)^2}$$

$$y'(t) = \frac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} x(t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} x(t) = -\infty$$



$$(3) \quad x'(t_0) = y'(t_0) \Leftrightarrow t=0$$

Donc en $M(0)$, on a un point singulier.

On détermine la nature de $M(0)$ on cherche le plus petit $p \geq 1$ / $(x^{(p)}(0), y^{(p)}(0)) \neq (0, 0)$

On cherche le + petit $q > p$ tel que les $(x^{(p)}(0), y^{(p)}(0)) \neq (0, 0)$ et $(x^{(q)}(0), y^{(q)}(0))$ pas colinéaires

$$\begin{aligned} x(0) &= 1, & x'(0) &= 0, & x''(0) &= 2, & x^{(3)}(0) &= 0, & x^{(4)}(0) &= 24 \\ y(0) &= 0, & y'(0) &= 0, & y''(0) &= 0, & y^{(3)}(0) &= 6, & y^{(4)}(0) &= 120 \\ & & & & & & y^{(5)}(0) &= 5! \end{aligned}$$

$$p=2$$

$$q=3$$

On a un point de rebroussement de première espèce.

Au point $M(t_0)$ la tangente a pour direction $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0))$ avec p le plus petit entier non nul tel que $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0)) \neq (0, 0)$
 Si $x^{(p)}(t_0) = 0$, alors on a une tangente verticale
 Si $y^{(p)}(t_0) = 0$, alors " " " " horizontale

à $(x''(0), y''(0)) = (2, 0)$ tangente horizontale,
 en $M(0)$ "

$$\lim_{t \rightarrow 1} x(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow 1} y(t) = \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{y(t)}{x(t)} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1} y(t) - x(t) &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2}{1-t^2} - \frac{1}{1-t^2} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 1}{1-t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} -\frac{t^2 + t + 1}{1+t} = -3/2 \end{aligned}$$

La droite d'équation $y(t) - x(t) = -3/2$ est une asymptote à la courbe quand $t \rightarrow 1$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{1-t^2} \\ y(t) = \frac{t^2}{1-t^2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{signe de } y(t) - x(t) + 3/2 \\ \text{quand } t \rightarrow 1 \end{array}$$

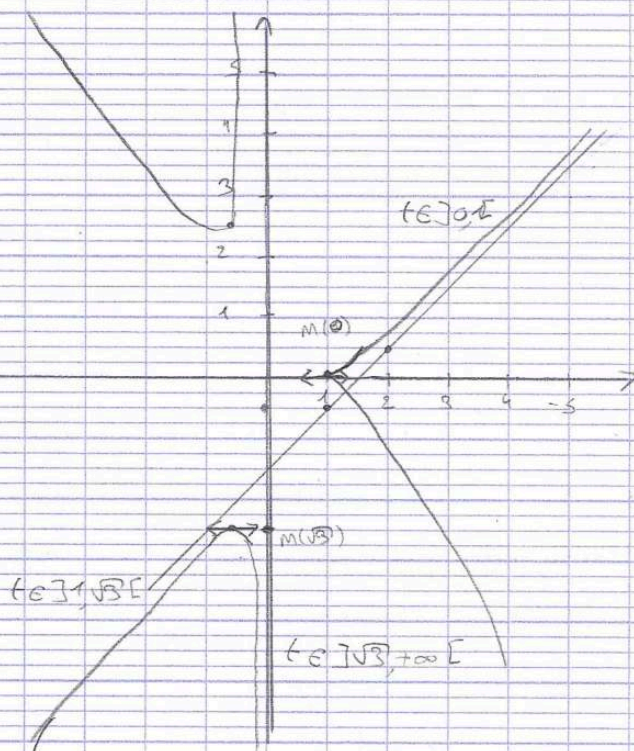
$$\begin{aligned} y(t) - x(t) + 3/2 &= -\frac{t^2 + t + 1}{1+t} + 3/2 \\ &= \frac{3(1+t) - 2(t^2 + t + 1)}{2(1+t)} = \frac{1+t-t^2}{2(1+t)} \sim (1-t) \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Si $t > 1$

$y(t) - x(t) + \frac{3}{2} \sim \frac{3}{4} (1-t) < 0 \Rightarrow$ la courbe est en dessous de l'asymptote quand $t \rightarrow 1$

Si: $t < 1$, $y(t) - x(t) + \frac{3}{2} \sim \frac{3}{4} (1-t) > 0$
 $\Rightarrow$ la courbe est au dessus de l'asymptote
 quand $t \rightarrow 1^-$

Donc $y = x - 3/2$ est une asymptote à la
 courbe.



$$y(t) - 2x(t) - 3/2 = \frac{t^2 - 2t - 3}{t-2} - \frac{3}{2} \quad @ 20$$

$$= \frac{2(t^2 - 2t - 3) - 3(t-2)}{2(t-2)} = \frac{2t^2 - 7t}{2(t-2)} = \frac{(2t-7)t}{2(t-2)} \sim \frac{7}{4} \cdot t$$

$$P = 2L + 2P$$

$$A = L \times P$$

S' $t \rightarrow 0^+$ la courbe est au dessus de son asymptote
S' $t \rightarrow 0^-$ " " " en dessous " " " " "

$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases} \quad t_1 \neq t_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{t_1^2 - 2t_1} = \frac{3}{t_2^2 - 2t_2} \\ \frac{t_1^2 - 3}{t_1} = \frac{t_2^2 - 3}{t_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1^2 - 2t_1 = t_2^2 - 2t_2 \\ \frac{t_1^2 - 3}{t_1} = \frac{t_2^2 - 3}{t_2} \end{cases}$$

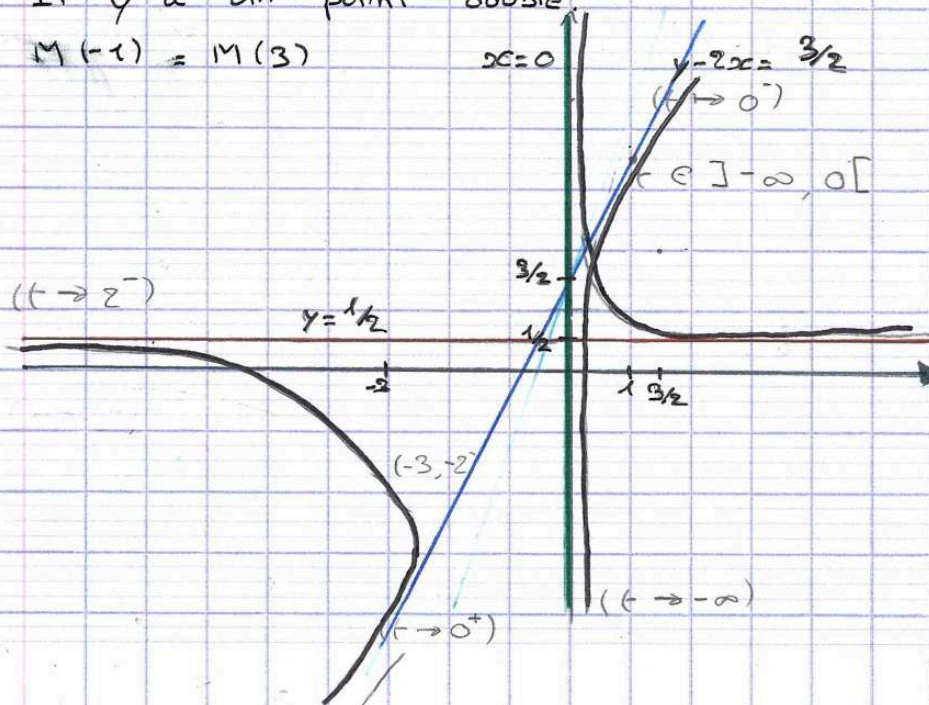
$$\Rightarrow \begin{cases} t_2^2 - t_1^2 = 2t_2 - 2t_1 \\ t_1^3 t_2 - t_2^3 t_1 = 3t_2 - 3t_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (t_2 - t_1)(t_2 + t_1) = 2(t_2 - t_1) \\ t_1 t_2 (t_1 - t_2) = 3(t_2 - t_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_2 + t_1 = 2 \\ t_1 t_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = 3 \end{cases}$$

$$y = 2x + 3/2$$

Il y a un point double

$$M(-1) = M(3)$$



(3) Domaine de définition : $[-\pi, \pi] \ni t$

Symétrie: $\left. \begin{array}{l} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{array} \right\} \text{ par rapport à } Ox$

$$\sin(t+\pi) = -\sin(t)$$

$$\cos(t+\pi) = -\cos(t)$$

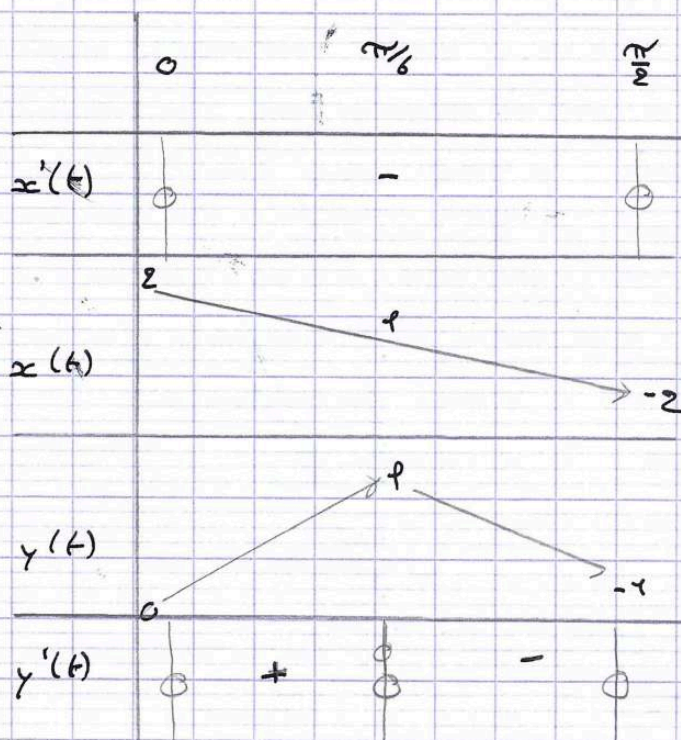
$$x(\pi-t) = 2\cos(2(\pi-t)) = x(t)$$

$$y(\pi-t) = y(t)$$

$$\Rightarrow M(\pi-t) = M(t)$$

On étudie donc sur $t \in [0, \pi/2]$ pour $t \in [\pi/2, \pi]$ on a la même courbe que pour $t \in [0, \pi/2]$

Variation:



En $t = \pi/2$ on

a un point singulier

$$x'(\pi/2) = y'(\pi/2) = 0$$

$$x(t) = 2\cos(2t)$$

$$x'(t) = -4\sin(2t) = 0$$

$$x^{(2)}(t) = -8\cos(2t) = 8$$

$$x^{(3)}(t) = 16\sin(2t) = 0$$

$$x^{(4)}(t) = 32\cos(2t) = -32$$

$$y(t) = 3\sin(3t)$$

$$y'(t) = 9\cos(3t) = 3$$

$$y^{(2)}(t) = -9\sin(3t) = 9$$

$$y^{(3)}(t) = -27\cos(3t) = 0$$

$$y^{(4)}(t) = 81\sin(3t) = -81$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3}{t^2 - 2t} \\ y(t) = t^2 - 3/t \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

Rappel: Symétrie $\Leftrightarrow$ trouver une transformation $t \rightarrow q(t)$ qui lie les points $M(q(t)) = (x(q(t)), y(q(t)))$ et $M(t) = (x(t), y(t))$
 $\Rightarrow$ Pas de symétrie

$$x'(t) = -6 \frac{(t-1)}{(t^2 - 2t)^2}$$

$$y'(t) = 1 + \frac{3}{t^2}$$

Remarque: Pour calculer $x^{(2)}(t), x^{(3)}(t) \dots$

$$x(t) = \frac{3}{t^2 - 2t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-2}$$

$$x^{(m)}(t) = \frac{A(-1)^m m!}{t^{m+1}} + \frac{B(-1)^m m!}{(t-2)^{m+1}}$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = -\infty$$

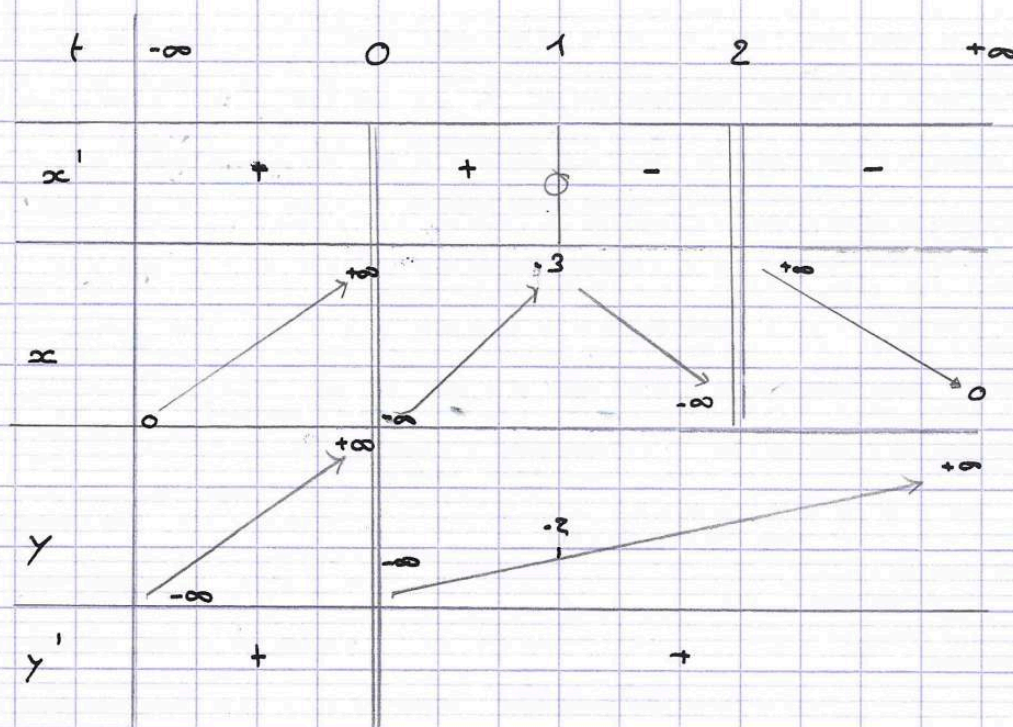
$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} x(t) = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow 2^+} x(t) = +\infty$$



$x'(1) = 0$ et $y'(1) = 4 \Rightarrow$ tangente verticale au point $M(1)$

$$\lim_{t \rightarrow 2} x(t) = \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} y(t) = 1/2$$

$y = 1/2$ est asymptote

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

$x = 0$ est asymptote

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t^2 - 3)(t - 2)}{3} = 2$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) - 2x(t) = \frac{t(t^2 - 2t - 3)}{t(t - 2)} \rightarrow \frac{3}{2}$$

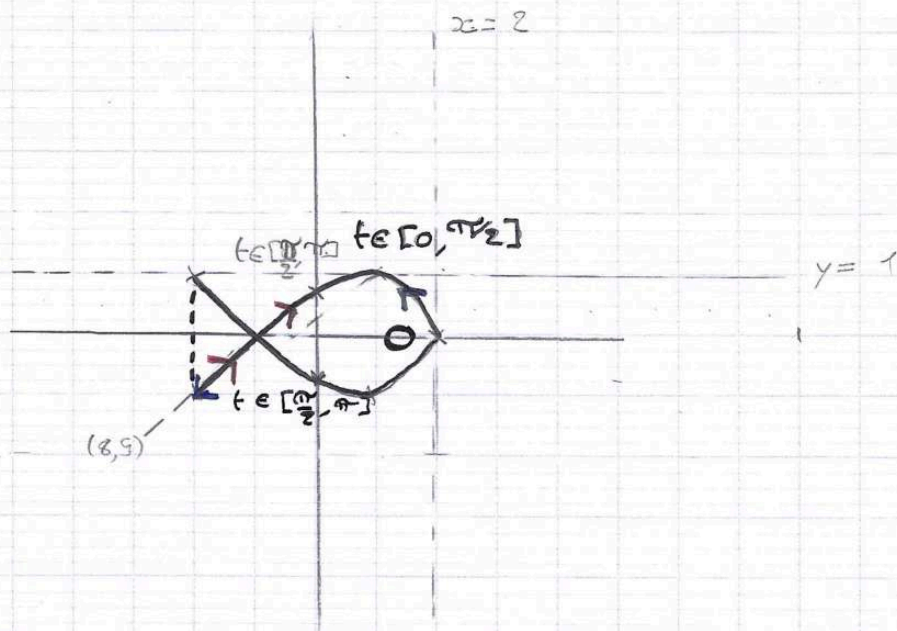
La droite d'équation $y - 2x - 3/2 = 0$ est une asymptote à la courbe

Les vecteurs $(x^{(2)}(\pi/2), y^{(2)}(\pi/2)) \neq (0,0)$ A22
 pas colinéaires avec $(x^{(4)}(\pi/2), y^{(4)}(\pi/2))$

Rebroussement de second espèce.

Au point M_6 $\left. \begin{array}{l} x'(0) = 0 \\ y'(0) \neq 0 \end{array} \right\}$ tangente verticale.

Au point $M(\pi/2)$ tangente horizontale



Dénombrement

A23

Exercice 1

(1) Pas de Répétition
Ordre non important

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pas de Répétition} \\ \text{Ordre non important} \end{array} \right\} C_{52}^5 = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5!}$$
$$= \frac{m!}{p! (m-p)!}$$
$$= 2\,598\,960$$

(2) $\left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ as} \\ 48 \text{ autres} \end{array} \right.$

$\Rightarrow$ 52 cartes avoir un as il y a 4 possibilités : $C_4^1 = 4$

$\Rightarrow$ On veut un seul as $\Leftrightarrow$ tirer une carte parmi les 4 as et 4 parmi les 48

$$\Rightarrow C_4^1 C_{48}^4 = 4 \cdot \frac{48!}{4!(48-4)!}$$
$$= 378\,320$$

(3) $\left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ valets} \\ 48 \text{ autres} \end{array} \right.$

$\Rightarrow$ On veut ^{au moins} un seul as donc on tire 1 carte parmi les 4 et 4 parmi les 51

$\Rightarrow$ Soit (plusieurs comptage)

- Avoir au moins un valet $\Leftrightarrow$ avoir exactement deux valets ou avoir exactement 3 valets ou avoir exactement 4 valets.

- Avoir au moins un valet c'est le complémentaire de n'avoir aucun valet.

$$\text{card}(A) + \text{card}(\Omega \setminus A) = \text{card}(\Omega)$$

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

$$- \text{card}(A \cap B) = \text{card}(A \cup B) - \text{card}(A) - \text{card}(B)$$

$$\text{card}(A \cap B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cup B)$$

- A_R = avoir exactement R valets $R = 1, 2, 3, 4$

$$\text{card}(A_1) = C_4^1 C_{48}^4$$

$$\text{card}(A_2) = C_4^2 C_{48}^3$$

$$\text{card}(A_3) = C_4^3 C_{48}^2$$

$$\text{card}(A_4) = C_4^4 C_{48}^1$$

$$\Rightarrow \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \text{card}(A_3) + \text{card}(A_4)$$

- B = IP n'y a aucun valet = on retire les 5 cartes parmi les 48. $\text{card}(B) = C_{48}^5$

C = la complémentarité de B = IP y'a au moins un valet. $\text{card}(C) + \text{card}(B) = C_{52}^5 \Rightarrow \text{card}(C) =$

$$C_{52}^5 - C_{48}^5$$

(4) A = avoir au moins une dame ou un Roi

$\bar{A}$ = complémentarité de A = avoir 0 dame ou 0 Roi = $B \cup C$

avec B = 0 dame et C = 0 Roi

1 dame 1 Roi 3 autres $\Rightarrow C_4^1 C_4^1 C_{44}^3$

2 dames 1 Roi 2 autres $\Rightarrow C_4^2 C_4^1 C_{44}^2$

3 dames 1 Roi 1 autre $\Rightarrow C_4^3 C_4^1 C_{44}^1$

4 dames 1 Roi $\Rightarrow C_4^4 C_4^1$

2 Rois 1 dame 2 autres $\Rightarrow C_4^2 C_4^1 C_{44}^2$

2 Rois 2 dames 1 autre $\Rightarrow C_4^2 C_4^2 C_{44}^1$

2 Rois 3 dames $\Rightarrow C_4^2 C_4^3$

3 Rois 1 dame 1 autre $\Rightarrow C_4^3 C_4^1 C_{44}^1$

3 Rois 2 dames $\Rightarrow C_4^3 C_4^2$

4 Rois 1 dame $\Rightarrow C_4^4 C_4^1$

C = avoir au moins une dame

$$\text{card}(C) = \sum_{j=1}^4 \text{card}(D_j R_j)$$

$$\text{card}(B) = C_{48}^5$$

$$\text{card}(C) = C_{48}^5$$

$$\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(B \cup C) = \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(B \cap C)$$

$$B \cap C = \text{avoir 0 dames et 0 roi} = C_{44}^5$$

$$\Rightarrow \text{card}(\bar{A}) = \text{card}(B \cup C) = \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(B \cap C) \\ = 2C_{48}^5 - C_{44}^5$$

$$\text{card}(A) = C_{52}^5 - \text{card}(\bar{A}) \\ = C_{52}^5 - 2C_{48}^5 + C_{44}^5$$

Exercice 2

$$E = \{1, 2, 3, \dots, 18\}$$

Le nombre d'applications bijectives de E dans E .

Si E est un ensemble fini et $f: E \rightarrow E$ alors

f est bijective si f est injective si f est surjective

si f est injective $E = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$

Comme f est injective alors si $x_i \neq x_j$ on a $f(x_i) \neq f(x_j)$

$$\Rightarrow \text{card} \{f(x_1), \dots, f(x_m)\} = \text{card } f(E)$$

$$\text{comme } f(E) \subset E \Rightarrow f(E) = E$$

$$\text{card}(f(E)) = \text{card } E$$

$$\text{card} = C_{52}^5 = 2$$

Soit E et F deux ensembles tels que $\text{card}(E) = m$
et $\text{card}(F) = p$

$$f: E \rightarrow F$$

pour que f soit injective il est nécessaire que

$$m = \text{card}(F) \geq \text{card}(E) = p$$

Le nombre d'applications injectives de E dans $F = A_m^p$

En particulier si $p = m$ le nombre d'applications injectives de E dans $E = A_m^m = m!$

Donc le nombre d'applications bijectives de $\{1, 2, 3, \dots, 18\}$ dans $\{1, 2, \dots, 18\} = 18!$

(11) L'ensemble d'applications bijectives de $\{1, 2, \dots, 12\}$
dans $\{1, 2, \dots, 12\}$ tel que $g(\{2, 4, 6, 8, 10, 12\})$
 $= \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ et donc $g(\{1, 3, 5, 7, 9, 11\})$
 $= \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
 $\Rightarrow 6!^2$

(12) $\{1, 3, 6, 9, 12\} = \{3, 6, 9, 12\}$
 $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$
 $4! \cdot 8!$

Exercice 3

$$E = \{1, 2, \dots, m\}$$

$$A = \{1, 2, \dots, p\} \quad p \leq m$$

Soit B une partie de E qui
contient exactement 1 élément de A

$$\Leftrightarrow B = \{k\} \cup C \quad k = 1, 2, \dots, p$$

avec C une partie de $E \setminus A = \{p+1, \dots, m\}$
car $|E \setminus A| = m - p$

Donc il y a 2^{m-p} parties C de $(E \setminus A)$

Le nombre de parties de E contenant exactement
un élément de A

$$= 2^{m-p} + 2^{m-p} + \dots + 2^{m-p}$$

$$= p \cdot 2^{m-p}$$

Exercice 4

14 P. V. A. 4 M 3 P

5 L 2 A

(1) Il y a $14!$ façons de les ordonner

(2) $2!$ pour A $4!$ pour M

$5!$ pour L $3!$ pour P

Il y a $2! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 3!$ façons

(3) On peut $4!$ façons d'ordonner les matières

$$\Rightarrow 4! \cdot 2! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 3!$$

$$A_m^p = \frac{m!}{(m-p)!}$$

Exercice 5

A24

1) $C_4^3 C_2^2$

2) $C_8^3 C_{24}^2$

Exercice 7

(1) 8 boules

$$\frac{5}{8} b \quad \frac{3}{8} R$$

Urne SB 3R

$$R = R_1 R_2 R_3$$

$$N = B \quad R \quad P_m = 3$$

$$N_1 = B \quad B \quad B$$

$$N_2 = B \quad B \quad B$$

(1) nombre de cas possible A est $A_8^3 = 336$

(2) $m_1 = 10 \quad R \quad B \quad 6 \left(\frac{m!}{m_1! m_2!} A_{N_1}^{m_1} A_{N_2}^{m_2} \right)$ d'avoir 3 boules rouges

$$m_2 = 3 \quad B \quad R$$

$$B \quad B \quad B$$

(3) $m_1 = 1 \quad 30 \quad d'avoir \quad 2 \quad Rouges$

$$m_2 = 2$$

(4) 0

3) $2 C_{16}^3 C_{16}^2$

On tire 3 rouges parmi

$$16 R \Rightarrow C_{16}^3$$

On tire 2 rouges parmi

$$16 N \Rightarrow C_{16}^2$$

Et on tire 3 rouges parmi

$$16 N \Rightarrow C_{16}^3$$

on tire 2 rouges parmi

$$16 R \Rightarrow C_{16}^2$$

A B C

A B C

A B

A C B

A est $A_8^3 = 336$

d'avoir 3 boules rouges

B A C

B A

B Rouges

B C A

B C

B C

C A B

C A

C A

C B A

C B

C B

Exercice 8

Successivement

Remise

SR 4N 3V

$$R = 3$$

$$N = 12$$

$$m = 3$$

$$N_1 = 5$$

$$N_2 = 9$$

$$N_3 = 3$$

$$(1) \quad 12^3 = 1728$$

$$(2) \quad m_R = 3$$

$$m_N = 0$$

$$m_V = 0$$

IP y a 125 possibilités

Exercice 7

P25

0,03 defect

hasard + remise

10 pièce

$X = \text{nbr pièce defectueuse}$

$A = \text{Pièce defect}$

$$p = 3/100$$

$B = \text{Pièce ok}$

$$1-p = 97/100$$

On répète cette épreuve 10 fois, de façon inde

$$P(X=R) = C_{10}^R \left(\frac{3}{100}\right)^R \left(\frac{97}{100}\right)^{10-R}$$

$$P(X=0) = C_{10}^0 \left(\frac{97}{100}\right)^{10} = 0,73$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 0,27$$

$$E(X) = np = 0,3$$

$$V(X) = np(1-p) = \frac{279}{1000}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 0,528$$

Exercice 8

$$A \rightarrow 10\% \rightarrow 3,5\%$$

$$P(A) = 1/40$$

$$B \rightarrow 40\% \rightarrow 1,5\%$$

$$P(B) = 4/40$$

$$C \rightarrow 50\% \rightarrow 2,2\%$$

$$P(C) = 1/2$$

$$P_A(D) = 0,035$$

$$P_B(D) = 0,015$$

$$P_C(D) = 0,022$$

$$P(D|C) = P_C(D) \times P(C) = 0,011$$

$$P(D) = P(D|C) + P(D|A) + P(D|B) = 0,0205$$

$$P_D(C) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = 0,54$$

$$P(X \geq 0) = C_{10}^0 (1-p)^{10} = 0,81$$

$$\Rightarrow P(X \geq 1) = 0,19$$

N_1	1 R	successivement	
N_2	2 R	sans remise	$\text{card}(\Omega)$
N_3	3 V	$n=2$	$= 30$

① Probabilité de A, B, C ?

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 2 V 2 R 2 Boles f

② succès avec Rem

③ simultanément

④

$$m_{1/2} = 0$$

$$m_3 = 2$$

$\downarrow$ 1/5

$$\frac{m!}{m_{1/2}! m_3!} P_{N_1/N_2}^{m_{1/2}} P_{N_3}^{m_3} = 6$$

$$m_{1/3} = 1$$

$$m_2 = 1$$

1/5

$$m_{1/3} = 0$$

$$m_2 = 2$$

1/5

$\rightarrow \frac{2}{5}$

$$m_{1/3} = 2$$

$$m_2 = 0$$

$$m_1 = 0$$

$$m_2 = 0$$

$$m_3 = 2$$

1/5

$$m_1 = 0$$

$$m_2 = 2$$

$$m_3 = 0$$

1/5

Une urne contient 6 boules rouges, 3 boules noires et 3 boules blanches.

(1) On tire simultanément 4 boules de l'urne
Soit X la va "nombre de boules rouges"
Déterminer la loi de X , $E(X)$ et $V(X)$

(2) On tire successivement 3 boules de l'urne
Soit X la va "nombre de boules blanches tirées"
Déterminer la loi de X , $E(X)$ et $V(X)$

(1) l'univers Ω = l'ensemble des résultats possibles.

$$\text{card}(\Omega) = C_{12}^4$$

• B_0 l'événement "avoir 0 boule rouge"

$$\text{card}(B_0) = C_6^4$$

$$p(B_0) = \frac{\text{card}(B_0)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_6^4}{C_{12}^4}$$

$$p(X=0) = p(A) = \frac{C_6^4}{C_{12}^4} = \frac{\frac{6!}{4!2!}}{\frac{12!}{4!8!}} = \frac{6!8!}{2!12!} = \frac{1}{33}$$

• B_1 l'événement "avoir exactement 1 boule rouge"

$$\text{card}(B_1) = C_6^1 C_6^3$$

$$p(B_1) = \frac{\text{card}(B_1)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_6^1 C_6^3}{C_{12}^4} = \frac{8}{33}$$

• B_R l'événement "avoir R boules rouges"

$$\text{card}(B_R) = C_6^R C_6^{4-R}$$

$$p(B_2) = \frac{15}{33}$$

$$p(B_3) = \frac{8}{33}$$

$$p(B_4) = \frac{1}{33}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^R X_i p(X=x_i)$$

$$= 0 p(X=0) + 1 p(X=1) + 2 p(X=2) + 3 p(X=3) + 4 p(X=4)$$

$$= 2$$

$$E(X^2) = 0^2 p(X=0) + 1^2 p(X=1) + 2^2 p(X=2) + 3^2 p(X=3) + 4^2 p(X=4)$$

$$= \frac{52}{11}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{8}{11}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

(2) 3 boules

6 rouges

Remise

3 noires

3 blanches

$n=3$ soit X le nombre de boules blanches tirées

$$p = \frac{n}{\text{tot}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow p(X=k) = C_3^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{3-k}$$

$$\Rightarrow E(X) = np = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow V(X) = np(1-p) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$$

Pour le 1^{er} tirage, soit Y_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la boule tirée est blanche et zéro si non.

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

$$p(X_i=1) = \frac{1}{4}$$

Donc $Y_i \sim \mathcal{B}(1, \frac{1}{4})$ les tirages sont indépendants
donc $Y \sim \mathcal{B}(3, \frac{1}{4})$

$$p(Y=R) = C_3^R \left(\frac{1}{4}\right)^R \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{3-R}$$

$$R = 0, 1, 2, 3$$

P29

$$E(Y) = \frac{3}{4} = mp$$

$$V(Y) = mp(1-p) = \frac{9}{16}$$

Une urne contient 5 boules rouges, 1 noire, 3 vertes.
Tirage de 3 boules avec remise

(1) proba 3 rouges

(4) 2 vertes + 1 noire

(2) 2 rouges

(5) 3 boules identiques

(3) au moins 1

(6) 3 boules $\neq$

$$\text{card}(\Omega) = 12^3$$

A = 3 boules rouges

$$\text{card}(A) = 125$$

$$p(A) = \frac{125}{12^3}$$

B = avoir 2 rouges

$$\text{card}(B) = 525$$

$$p(B) = \frac{525}{12^3}$$

C = au moins 1 rouge

$$\text{card}(C) = 12^3 - 343, \quad p(C) = 1 - \frac{343}{12^3}$$

D = avoir 2 boules vertes et une noire

$$\text{card}(D) = 108$$

$$p(D) = \frac{1}{16}$$

E = 3 boules de couleur $\neq$

$$\Rightarrow 3! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

$$p(E) = \frac{360}{12^3}$$

Exercice 2

Il s'agit d'une épreuve binomiale de paramètre

$$n=2, p=1/2$$

En effet, la première lance est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=1/2$

La seconde épreuve est aussi de Bernoulli de paramètre $p=1/2$ qui est indé.

$$X \sim \mathcal{B}(2, 1/2)$$

$$P(X=k) = C_2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2-k}$$

$$k = 0, 1, 2$$

$$E(X) = np = 1$$

$$V(X) = np(1-p) = 1/2$$

A	B	C
1B	2N	3B
3N	2B	1N

Exercice 3

Soit X le nbr de boules blanches

l'univers Ω = l'ensemble des résultats

$$\text{card}(\Omega) = 4^3$$

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad C = 0,008$$

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$E = C = 0,2$$

$$P(X=0) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{32} = 0,09375$$

$$P(X=1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8} = 0,375$$

$DM = 3PI$

$$P(X=1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{13}{32}$$

$4PI = 0,2$

$$P(X=2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{13}{32}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{32}$$

$X = k$	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{3}{32}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{3}{32}$

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{3}{32} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{16}{32} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{29}{32} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

Exercice 4

D_1						
D_2	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$$E(Z) = \frac{10}{36} + \frac{16}{36} + \frac{18}{36} + \frac{16}{36} + \frac{6}{36} = \frac{35}{18}$$

$$E(Z^2) = \frac{10}{36} + 2^2 \frac{8}{36} + 3^2 \frac{6}{36} + 4^2 \frac{4}{36} + 5^2 \frac{2}{36} = \frac{35}{6}$$

$$V = \frac{65}{324}$$

Z peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5

$$P(Z=0) = \frac{1}{6}$$

$$P(Z=1) = \frac{10}{36}$$

$$P(Z=2) = \frac{8}{9}$$

$$P(Z=3) = \frac{1}{6}$$

$$P(Z=4) = \frac{1}{9}$$

$$P(Z=5) = \frac{1}{18}$$

$Z = k$	0	1	2	3	4	5
$P(Z=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

$$F(x) = P(Z \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{6} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{9} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{3} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

Exercice 5

20 sujets

3 ans Remise

3 livres

→ 12 Révisés

→ 8 non Révisés

$$\text{card}(\Omega) = C_{20}^3 = 1140$$

$$\text{card}(X=0) = C_{12}^0 C_8^3 = 56$$

$$\frac{11}{285}$$

$$\text{card}(X=1) = C_{12}^1 C_8^2 = 336$$

$$\frac{28}{95}$$

$$\text{card}(X=2) = C_{12}^2 C_8^1 = 528$$

$$\frac{44}{95}$$

$$\text{card}(X=3) = C_{12}^3 C_8^0 = \frac{11}{5} 220$$

$$\frac{11}{57}$$

Exercice 6

10 livres

5 Am

5 livres

2 AP

X = Russie

3 R

$$\text{card}(\Omega) = C_{10}^5 = 252$$

$$\text{card}(0) = C_5^5 C_7^0 = 21$$

$$\Rightarrow \frac{1}{12}$$

$$\text{card}(1) = C_5^1 C_7^4 =$$

$$\Rightarrow \frac{5}{12}$$

$$\text{card}(2) = C_5^2 C_7^3 =$$

$$\Rightarrow \frac{5}{12}$$

$$\text{card}(3) = C_5^3 C_7^2 =$$

$$\Rightarrow \frac{1}{12}$$

$$X = k \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$$

$$p(X=k) \quad \frac{1}{12} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{1}{12}$$

$$g(x) = p(X \leq x) =$$

0	$x < 0$
$\frac{1}{12}$	$0 \leq x < 1$
$\frac{1}{2}$	$1 \leq x < 2$
$\frac{11}{12}$	$2 \leq x < 3$
1	$x \geq 3$

