ANALYSE

TD n°1

Suites numériques

Exercice 1 : Etudier les séries suivantes : ① $\sum \cos(n)$ ② $\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ ③ $\sum \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ ④ $\sum \frac{n}{n^2+4}$ ⑤ $\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ⑥ $\sum \sin\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ (discuter selon les valeurs de β)

Pour étudier une série $\sum u_n$:

- vérifier si $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$, on dit que $\sum u_n$ DV
- si $u_n \to 0$ on ne peut pas conclure
  - utiliser le thm de comparaison
  - utiliser les équivalents

① On rappelle que sin et cos n'ont pas de limite à l'infini : $\begin{cases}\sin(n\pi) = 0 \to 0 \\ \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \to 1\end{cases}$

$\lim_{n\to+\infty} \cos(n)$ n'existe pas $\Rightarrow \sum \cos(n)$ DV

② Si $\sum u_n$ DV et $\sum v_n$ DV, on ne peut pas conclure par $\sum u_n + \sum v_n$

Remarque : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes ≥ 0 :

Si $\sum u_n$ ou $\sum v_n$ DV alors $\sum u_n + \sum v_n$ DV
$\sum u_n \leq \sum u_n + \sum v_n$
$\sum v_n \leq \sum u_n + \sum v_n$

Ici : $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 1 + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{3}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n}} - \left(\cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{3}} + \dots + \frac{1}{n+1}\right)$

$= 1 - \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1$

OU : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$

$\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ et $\sum \frac{1}{n^2}$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ CV (série de Rieman avec $\alpha = 2 > 1$) alors $\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ CV

③ $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$

$\sum u_n$ et $\frac{1}{2} \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ sont de même nature

$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{1/2}}$. D'après la série de Rieman : $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ DV $\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$

Donc $\sum u_n$ DV.

4) $\frac{n}{n^2+4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$

$\sum \frac{n}{n^2+4}$ et $\sum \frac{1}{n}$ sont de même nature

Donc $\sum \frac{n}{n^2+4}$ DV car $\sum \frac{1}{n}$ DV ($\alpha = 1$ par la série de Rieman)

5) On rappelle que $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$

$x = \frac{1}{n^2}$ ($n \to +\infty \Rightarrow x \to 0$) $\Longrightarrow \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

$\sum \sin \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ sont de mêmes natures

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ CV alors $\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ CV

6) Si $\beta > 0$: $\frac{1}{n^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\sin\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \sim \frac{1}{n^\beta}$

$\sum \sin \frac{1}{n^\beta}$ et $\sum \frac{1}{n^\beta}$ sont de même nature

Donc $\sum \frac{1}{n^\beta}$ CV si $\beta > 1$

$\sum \sin \frac{1}{n^\beta}$ CV si $\beta > 1$

$\sum \frac{1}{n^\beta}$ DV si $0 \leq \beta \leq 1$

$\sum \sin\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ DV si $\beta \in]0, 1[$

Si $\beta = 0$: $\sum_{k=0}^{n} \sin \frac{1}{k^0} = \sum_{k=0}^{n} \sin 1 \longrightarrow +\infty$

Si $\beta < 0$: $\frac{1}{n^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Donc $\sin\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ n'a pas de limite et $\sum \sin\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ DV

Donc $\sum \sin\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ CV ssi $\beta > 1$

Exercice 2 : Etudier la nature des séries suivantes :

① $\sum \left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}\right)$

② $\sum \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

③ $\sum \log\left(1+\frac{1}{n^\beta}\right)$ (discuter selon les valeurs de β)

④ $\sum e^{-\sqrt{n}}$

① $u_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1} = \dfrac{\left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n^2}} = \frac{1}{2n}$$

$\sum u_n$ et $\frac{1}{2}\sum \frac{1}{n}$ sont de même nature

Donc d'après la série de Rieman : $\sum \frac{1}{n}$ DV $(\alpha = 1)$

Donc $\sum u_n$ DV

② $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ $\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x} \text{ et } \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{0}{\sim} x\right)$

$\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ sont de même nature

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ CV, alors $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ CV.

③ Pour $\beta > 0$: $\frac{1}{n^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\ln\left(1+\frac{1}{n^\beta}\right) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n^\beta}$

Donc $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^\beta}\right)$ et $\sum \frac{1}{n^\beta}$ sont de même nature

Donc $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^\beta}\right)$ CV ssi $\beta > 1$ $\left(\text{Si } \beta \in]0,1[, \sum \ln\left(1+\frac{1}{n^\beta}\right) \text{ DV}\right)$

Pour $\beta = 0$: $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k^\beta}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+1) = \sum_{k=1}^{n} \ln 2 = \ln(2)\, n \longrightarrow +\infty$

Donc pour $\beta = 0$, $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^\beta}\right)$ DV

Pour $\beta < 0$: $\frac{1}{n^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n^\beta}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Donc $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^\beta}\right)$ DV si $\beta < 0$

Ccl : $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^\beta}\right)$ CV ssi $\beta > 1$

4) $\forall \alpha > 0, \lim_{x \to +\infty} (x^\alpha e^{-x}) = 0$

$\Rightarrow |x^\alpha e^{-x}| \leq M \quad \forall x \geq 0$

$\Rightarrow \sqrt{n}^\alpha e^{-\sqrt{n}} \leq M$

$\Rightarrow e^{-\sqrt{n}} \leq \frac{M}{\sqrt{n}^\alpha} = \frac{M}{n^{\alpha/2}}$

Pour $\alpha = 4$: $e^{-\sqrt{n}} \leq \frac{M}{n^2}$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ CV alors $\sum e^{-\sqrt{n}}$ CV

TD n°1 (bis)

Suites numériques

Exercice 1 :

1) $u_n = \dfrac{1}{(1+\sqrt{n})^n}$

Critère de Cauchy : $\sum u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{1/n} = \ell$ $\begin{cases} \text{si } \ell < 1 : \sum u_n \text{ CV} \\ \text{si } \ell = 1 : \text{on ne peut pas conclure} \\ \text{si } \ell > 1 : \sum u_n \text{ DV} \end{cases}$

Ici, $\dfrac{1}{1+\sqrt{n}} \longrightarrow 0 < 1$. Donc d'après le critère de Cauchy, la série $\sum \dfrac{1}{(1+\sqrt{n})^n}$ CV

OU : $(\sqrt{n}+1)^n \geqslant (\sqrt{n}+1)^4$ (on choisit une puissance α telle que $\frac{\alpha}{2} > 1$)

$\Rightarrow \left(\dfrac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n \leq \left(\dfrac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^4 = \dfrac{1}{n^2} \Rightarrow \sum \dfrac{1}{n^2}$ CV

Ccl : $\sum \left(\dfrac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n$ est absolument CV

2) $v_n = \dfrac{n^2}{3^n}$ ($\geqslant 0$ donc si CV alors absolument CV)

Critère d'Alembert : $\sum u_n$, $u_n \geqslant 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ $\begin{cases} \text{si } \ell < 1, \sum u_n \text{ CV} \\ \text{si } \ell = 1, \text{on ne peut conclure} \\ \text{si } \ell > 1, \sum u_n \text{ DV} \end{cases}$

Ici, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \times \dfrac{3^n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^2}{3n^2} = \dfrac{1}{3} < 1$ $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2\right)$

Donc d'après le critère d'Alembert, $\sum u_n$ CV.

3) $T_n = \dfrac{1}{an+b} - \dfrac{1}{n}$ $(a,b) \neq (0,0)$

Remarque : Si P est un polynôme et $a \geqslant 0$. Alors la série $\sum \dfrac{P(n)}{a^n}$ $\begin{cases} \text{CV si } a > 1 \\ \text{DV si } a < 1 \end{cases}$

$\dfrac{P(n+1)}{a^{n+1}} \dfrac{a^n}{P(n)} \longrightarrow \dfrac{1}{a}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{P(n+1)}{P(n)} = 1$

$\dfrac{1}{a} \begin{cases} < 1 \text{ si } a > 1 \\ > 1 \text{ si } a < 1 \end{cases}$

Donc $\sum \dfrac{P(n)}{a^n}$ DV si $a = 1$ et $P(x)$ n'est pas le polynôme nul (car $\lim\limits_{n\to+\infty} P(n) = +\infty$)

Ici, $\frac{1}{an+b}-\frac{1}{n}=\frac{n-(an+b)}{n(an+b)}=\frac{(1-a)n-b}{an^2+bn}\sim\begin{cases}\frac{(1-a)n}{an^2}\sim\frac{1-a}{an} & \text{si } a\notin\{0,1\}\\ \frac{-b}{n^2} & \text{si } a=1 \text{ et } b\neq 0\\ \frac{(1-a)n}{bn}=\frac{1-a}{b} & \text{si } a=0 \text{ et } b\neq 0\end{cases}$

Donc • si $a\notin\{0,1\}$, $t_n\sim\left(\frac{1-a}{a}\right)\frac{1}{n}$ $\Rightarrow \sum\frac{1}{n}$ DV $\Rightarrow \sum t_n$ DV

• si $a=1$ et $\begin{cases} b\neq 0, & t_n\sim -\frac{b}{n^2} \Rightarrow \sum\frac{1}{n^2} \text{ CV} \Rightarrow \sum t_n \text{ CV}\\ b=0, & t_n=0 \Rightarrow \sum t_n \text{ CV}\end{cases}$

• si $a=0$ et $\begin{cases} b\neq 0, & t_n\sim\left(\frac{1-a}{b}\right) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} t_n=\frac{1-a}{b}\neq 0 \Rightarrow \sum t_n \text{ DV}\\ b=0, & \text{la série n'est pas définie}\end{cases}$

5) $k_n=\frac{2\sqrt{n}+\cos(n)}{n^2+\log(n)}=\frac{2\sqrt{n}}{n^2}\left(\frac{1+\frac{\cos n}{2\sqrt{n}}}{1+\frac{\log n}{n^2}}\right)\sim\frac{2\sqrt{n}}{n^2}=2\frac{1}{n^{3/2}}$

$\sum\frac{1}{n^{3/2}}$ CV car $\frac{3}{2}>1$ $\Rightarrow \sum k_n$ CV

6) $w_n=n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{2n}{2n+1}$

• DL_2 : $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+o(x^2)$

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ $\quad\left(x=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\right)$

$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$

$\frac{2n}{2n+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}=1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{(2n)^2}+o\left(\frac{1}{(2n)^2}\right)$ $\quad x=\frac{1}{2n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

• DL_3 : $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$

$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+o(x^2)$

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(Il faut faire à l'ordre 3 car à l'ordre 2, $w_n=n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)-\left(1-\frac{1}{2n}\right)\sim 0$!)

Donc $w_n=\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{4n^2}\right)\right)$

$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$=\frac{1}{12}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\Rightarrow w_n\sim\frac{1}{12n^2}$

Exercice 2 :

1) $u_n = \frac{n^2+1}{5n^2+n} \sim \frac{1}{5}$

$u_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow \sum u_n$ DV

5) $u_n = \sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

$\sum \frac{1}{n}$ DV $\Rightarrow \sum u_n$ DV

8) $u_n = \frac{e^{-n}}{n}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{-(n+1)}}{n+1} \frac{n}{e^{-n}} = e^{-1}\frac{n}{n+1} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$

D'après le critère d'Alembert, $\sum \frac{e^{-n}}{n}$ CV

7) $u_n = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1 = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/n} - 1$

$= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{1/n} - 1$

$= \exp\left[\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{1/n}\right] - 1$

$= e^{\frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} - 1$

DL : $\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(n^2)$

$\frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$

$\exp\left[\frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right] = \exp\left[-\frac{1}{n(n+1)} + o\frac{1}{n(n+1)}\right] = 1 - \frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$

$e^{-x} = 1 - x + o(x)$

$u_n = \exp\left[\frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right] - 1 = -\frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) \sim -\frac{1}{n(n+1)} \sim -\frac{1}{n^2}$

Donc $\sum u_n$ CV car $\sum -\frac{1}{n^2}$ CV

2) $u_n = \dfrac{1}{n\sin^2 n}$

$-1 \le \sin n \le 1 \iff 0 \le \sin^2 n \le 1 \iff \dfrac{1}{n\sin^2 n} \geqslant \dfrac{1}{n}$

D'où $\sum u_n \geqslant \sum \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\sum u_n$ DV

3) $u_n = \dfrac{1}{[\sqrt[n]{2} + \ln(n)]^{n^2}}$

$\left(\dfrac{\ln(n)}{\sqrt[n]{2}+\ln(n)}\right)^{n^2} \longrightarrow 1.$ En effet, $\dfrac{\cancel{(\ln n)^{n^2}}}{\cancel{(\ln n)^{n^2}}}\left(\dfrac{1}{1+\frac{2^{1/n}}{\ln n}}\right)^{n^2} = \left(\dfrac{\ln n}{\sqrt[n]{2}+\ln n}\right)^{n^2}$

$\left(\dfrac{1}{1+\frac{2^{1/n}}{\ln n}}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln\left(\frac{1}{1+\frac{2^{1/n}}{\ln n}}\right)}$

$= e^{-n^2\ln\left(1+\frac{2^{1/n}}{\ln n}\right)} \sim e^{-n^2 \frac{2^{1/n}}{\ln n}}$

$a \sim b$

$\Rightarrow \dfrac{a}{b} \xrightarrow[+\infty]{} 1$

$\Rightarrow \sqrt[n]{2} + \ln(n) \geqslant \sqrt[n]{2}$

$n \geqslant 3$ $(e^1 \simeq 2,7)$: $\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}+\ln(n)} \le \dfrac{1}{2^{1/n}} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}+\ln(n)}\right)^{n^2} \leqslant \dfrac{1}{2^{1/n \, n^2}} = \dfrac{1}{2^n}$

$\sum \dfrac{1}{2^n}$ CV $\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \ell^n = \dfrac{1}{1-\ell}$ si $|\ell| < 1$

4) $u_n = \dfrac{1}{n^{\ln(n)}}$

$n \geqslant 5$: $\ln(n) \geqslant \ln 5 > 1 \Rightarrow n^{\ln(n)} \geqslant n^{\ln 5}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{n^{\ln(n)}} \leqslant \dfrac{1}{n^{\ln 5}}$

$\sum \dfrac{1}{n^{\ln 5}}$ CV car $\ln 5 \geqslant 1$

Donc $\sum \dfrac{1}{n^{\ln(n)}}$ CV

Puissances → passer à l'exponentielle

OU : Cauchy

$u_n^{1/n} = \dfrac{1}{n^{\frac{\ln(n)}{n}}} = \dfrac{1}{\exp[\ln(n^{\frac{\ln(n)}{n}})]} = \dfrac{1}{e^{\frac{\ln(n)}{n}\ln(n)}} = \dfrac{1}{e^{\frac{\ln^2(n)}{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

On ne peut pas conclure

6) $u_n = \left(\frac{\sin^2 n}{n}\right)^n$

$$\left|\frac{\sin^2 n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$$

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{\sin^2 n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc $\sum u_n$ CV

Exercice 3 :

1) $\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k - 1 - \frac{1}{3}$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \ell^k \longrightarrow \frac{1}{1-\ell} \quad \text{si } |\ell| < 1$$

2) $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \longrightarrow +\infty$ car $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ DV

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{1/2}}$$

Exercice 4 :

$u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ CV $\Rightarrow \sum u_n$ CV

$$\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n}\left[\ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln(k)\right]$$

car $\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) = \ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln(k)$

$$\begin{aligned}
& \ln(1) + \cancel{\ln(3)} - 2\ln(2) \\
+\ & \ln(2) + \cancel{\ln(4)} - 2\cancel{\ln(3)} \\
+\ & \cancel{\ln(3)} + \ln(5) - 2\cancel{\ln(4)} \\
+\ & \vdots \\
+\ & \ln(n-2) + \cancel{\ln(n)} - 2\ln(n-1) \\
& \ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\cancel{\ln(n)}
\end{aligned}$$

$$= \ln(1) - \ln(2) - \ln(n) + \ln(n+1)$$

Donc $\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = -\ln(2) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(2)$

Exercice 5 :

1) $u_n = n!\, x^{n^2}$, $x > 0$

Critère d'Alembert : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)!\, x^{(n+1)^2}}{n!\, x^{n^2}} = \dfrac{(n+1)\, x^{n^2} x^{2n+1}}{x^{n^2}} = (n+1)\, x^{2n+1}$

$= (n+1) e^{(2n+1)\ln x} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}$

D'après le critère d'Alembert,

$\sum n!\, x^{n^2}$ DV si $x \geq 1$

$\sum n!\, x^{n^2}$ CV si $x \in]0,1[$

2) $u_n = \dfrac{x^n}{n^x}$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^x} \dfrac{n^x}{x^n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{x} x \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ (x fixé)

D'après le critère d'Alembert, $\sum \dfrac{x^n}{n^x}$ CV si $x \in]0,1[$

$\sum \dfrac{x^n}{n^x}$ DV si $x > 1$

Pour $x = 1$, $u_n = \dfrac{1}{n} \Rightarrow \sum \dfrac{1}{n}$ DV

Exercice :

On pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$

On admet que $\sum u_n$ CV

1. Prouver que $\sum v_n$ DV
2. Montrer que $u_n \sim v_n$
3. Que peut-on en déduire ?

① $\left.\begin{array}{l}\sum u_n \text{ CV} \\ \sum \frac{1}{n} \text{ DV}\end{array}\right\} \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \text{ DV}$

② $\frac{v_n}{u_n} = \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{1/n}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{1}{n} \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}(-1)^n} = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Donc $u_n \sim v_n$

③ En général, si $u_n \sim v_n \not\Rightarrow \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même natures

TD n° 2

Intégration

Exercice 1 :

$$g : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow g(x) = \int_0^{2\cos x} \sqrt{4-t^2}\, dt$$

1) Montrer que g est bien définie
2) Montrer que g est dérivable
3) Calculer $g'(x)$
4) En déduire $g(x)$

1) Pour $x \in [0, \pi]$, $-2 \leq 2\cos x \leq 2$

$t \to \sqrt{4-t^2}$ est continue sur $\{t \in \mathbb{R},\ 4-t^2 \geq 0\} = [-2, 2]$

$\Rightarrow t \to \sqrt{4-t^2}$ est continue entre 0 et $2\cos x$, $\forall x \in [0, \pi]$

$\Rightarrow g(x)$ est bien définie sur $[0, \pi]$

2) On définit $F(x) = \int_0^x \sqrt{4-t^2}\, dt$

F est dérivable pour $x \in [-2, 2]$ et $F'(x) = \sqrt{4-x^2}$ (cours)
car $t \to \sqrt{4-t^2}$ est continue sur $[-2, 2]$

$F(2\cos x) = \int_0^{2\cos x} \sqrt{4-t^2}\, dt = g(x) = F \circ \varphi(x)$ avec $\varphi(x) = 2\cos(x)$

φ est dérivable sur $[0, \pi]$
$\varphi'(x) = -2\sin(x)$

Donc $\left| \begin{array}{l} \varphi \text{ dérivable sur } [0, \pi] \\ f \text{ dérivable sur } \varphi([0, \pi]) = [-2, 2] \end{array} \right.$ $\Rightarrow g(x) = F \circ \varphi(x)$ est dérivable sur $[0, \pi]$

3) $g'(x) = \varphi'(x) \cdot F' \circ \varphi(x)$

$= \sqrt{4 - \varphi(x)^2} \times \varphi'(x)$

$= \sqrt{4 - 4\cos^2 x}\,(-2\sin x)$

$= -4\sqrt{\sin^2 x}\, \sin x$

$= -4|\sin x| \sin x$

$= -4 \sin^2 x$ car $x \in [0, \pi]$

4) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 1 - 2\sin^2 x \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

Donc $g'(x) = -4\left(\dfrac{1-\cos(2x)}{2}\right)$

$= -2 + 2\cos(2x)$

Donc $g(x) = \int -2 + 2\cos(2x) = -2x + \sin(2x) + \text{cste}$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow -2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi) + \text{cste} = 0 \Rightarrow \text{cste} = \pi$

Exercice 2 :

Soit $F(x) = \int_0^x \ln(1+e^{-2t})\,dt$

1) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$

2) Montrer que $\dfrac{a}{a+1} \leq \ln(1+a) \leq a$, $\forall a \geq 0$

3) En déduire que $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$

4) On définit $U_n = F(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que U_n converge

b) Montrer que $\dfrac{\ln 2}{2} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leq \dfrac{1}{2}$

1) $t \longrightarrow \ln(1+e^{-2t})$ est définie et est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $e^{-2t} \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$

et $t \longrightarrow 1+e^{-2t}$ est dérivable

Donc F est définie sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = \ln(1+e^{-2t})$

2) $\ln(1+a) = \int_0^a \dfrac{1}{1+t}\,dt$

$0 \leq t \leq a \Rightarrow 1 \leq 1+t \leq 1+a$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+a} \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1$

$\Rightarrow \int_0^a \dfrac{1}{1+a}\,dt \leq \int_0^a \dfrac{1}{1+t}\,dt \leq \int_0^a 1\,dt$

$\Rightarrow \dfrac{a}{a+1} \leq \ln(1+a) \leq a$

3) $\frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} \leq \ln(1+e^{-2t}) \leq e^{-2t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} dt \leq \int_0^x \ln(1+e^{-2t}) \leq \int_0^x e^{-2t} dt$$

$\forall x \geq 0$ $\Rightarrow \int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} dt \leq F(x) \leq \left[\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_0^x$

$$\Rightarrow \left[-\frac{1}{2}\ln(1+e^{-2t})\right]_0^x \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{e^{-2x}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{e^{-2x}}{2}$$

4) a) $U_{n+1} - U_n = \int_0^{n+1} \ln(1+e^{-2t}) dt - \int_0^n \ln(1+e^{-2t}) dt$

$$= \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-2t}) dt \geq 0$$

$\Rightarrow U_n$ est croissante

$U_n = F(n) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2n} \leq \frac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l} U_n \nearrow \\ U_n \text{ bornée} \end{array}\right\} \Rightarrow U_n$ converge

b) On a : $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2n}) \leq F(n) = U_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2n}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\ln(1+e^{-2n}) \leq \lim_{n\to+\infty} U_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} e^{-2n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(2) \leq \lim_{n\to+\infty} U_n \leq \frac{1}{2}$$

Exercice 3 :

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^3 \ln x$

2) $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$

3) $f(x) = xe^{x^2}$

4) $f(x) = \frac{x^3}{1+x^4}$

5) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$

3) $f(x) = x e^{x^2} = \frac{1}{2} u'(x) e^{u(x)}$ avec $u(x) = x^2$

$F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + cste$

4) $f(x) = \frac{x^3}{1+x^4} = \frac{1}{4} \frac{4x^3}{1+x^4} = \frac{1}{4} \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = 1+x^4$

$F(x) = \frac{1}{4} \ln(1+x^4) + cst$

5) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{1}{x^2+1}$ avec $u(x) = x^2+1$

$F(x) = \int f(t)\,dt = \ln|x^2+1| + \arctan(x) + cst$

1) $f(x) = x^3 \ln(x)$

On pose $u' = x^3 \quad u = \frac{1}{4}x^4$

$v = \ln x \quad v' = \frac{1}{x}$

$\int^x t^3 \ln t = \left[\frac{1}{4} t^4 \ln t\right]^x - \int^x \frac{1}{4} t^4 \frac{1}{t}\,dt$

$= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + cst$

2) $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$

$= \frac{a(x+2) + b(x-1)}{(x-1)(x+2)}$

$= \frac{ax + 2a + bx - b}{(x-1)(x+2)}$

$= \frac{(a+b)x + 2a - b}{(x-1)(x+2)}$

Donc $\begin{cases} a+b = 0 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -b \\ -3b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$

Ou : pour a : $(x-1) f(x) \Big|_{x=1}$

$= (x-1) \frac{1}{(x-1)(x+2)} \Big|_{x=1}$

$= \frac{1}{3}$

pour b : $(x+2) \frac{1}{(x-1)(x+2)} \Big|_{x=-2}$

$= -\frac{1}{3}$

Donc $f(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \frac{1}{x+2}$

$\int^x f(t)\,dt = \int^x \frac{1}{3} \frac{1}{t-1}\,dt - \int^x \frac{1}{3} \frac{1}{t+2}\,dt$

$= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + cst$

TD n° 2 (bis)

Intégration

Exercice 1 :

1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = x - \arctan(x) + c \quad (c\in\mathbb{R})$

2) $\displaystyle\int \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\int \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin'\left(\frac{x}{2}\right)dx = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (c\in\mathbb{R})$

4) $\displaystyle\int t^4(1+t^5)^5\,dt = \int \frac{1}{5}(1+t^5)'(1+t^5)^5\,dt = \frac{1}{30}(1+t^5)^6 + c \quad (c\in\mathbb{R})$

5) $\displaystyle\int \frac{\ln t}{t}\,dt = \int \frac{1}{t}\ln t = \int \ln(t)'\ln(t)\,dt = \frac{1}{2}(\ln t)^2 + c \quad (c\in\mathbb{R})$

10) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int \sin x(\cos x)^{-2}\,dx = \int -(\cos x)'(\cos x)^{-2} = (\cos x)^{-1} + c \quad (c\in\mathbb{R})$

11) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c \quad (c\in\mathbb{R})$

3) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{th}x}\,dx \qquad \operatorname{th}x = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \longrightarrow 1+\operatorname{th}x = 1+\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

$\displaystyle = \frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}$

$\displaystyle \longrightarrow \frac{1}{1+\operatorname{th}x} = \frac{e^x+e^{-x}}{2e^x} = \frac{1}{2} + \frac{e^{-2x}}{2}$

$\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{th}x}\,dx = \int\left(\frac{1}{2}+\frac{e^{-2x}}{2}\right)dx = \frac{1}{2}x - \frac{e^{-2x}}{4} + c \quad (c\in\mathbb{R})$

6) $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c \quad (c\in\mathbb{R})$

9) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{(\sin x\cos x)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)^2} = \frac{4}{(\sin(2x))^2} = 4\int \frac{1}{\sin^2(2x)}$

(car $\sin(2x) = 2\cos x\sin x$)

Changement de variable : $y = 2x \rightarrow dy = 2dx$

$\displaystyle 4\int^{x} \frac{1}{\sin^2(2x)}\,dx = 4\int^{2x} \frac{1}{\sin^2(y)}\frac{dy}{2} = 4\,\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos y}{\sin y}\right]^{2x} = -2\,\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} + c \quad (c\in\mathbb{R})$

8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{\cos x}{\sin x} + c = -\operatorname{cotan}(x) + c \quad (c\in\mathbb{R})$

car $\displaystyle \operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$ et $\displaystyle\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2 x}$

N.B : Lorsqu'on fait un changement de variable $y = \varphi(x)$ alors on remplace dy par $\varphi'(x)\,dx$ $\rightarrow dy = \varphi'(x)\,dx$

7) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(t)}\,dt = \tan t + c \quad (c \in \mathbb{R})$

12) $\displaystyle\int \frac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \int 2(2x+1)(x^2+x+1)^{-1/2}\,dx = 4\sqrt{x^2+x+1} + c \quad (c \in \mathbb{R})$

Exercice 2 :

$$\frac{1}{x+x^3} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

$$= \frac{a(x^2+1)+(bx+c)x}{x(x^2+1)}$$

$$= \frac{(a+b)x^2+cx+a}{x(x^2+1)} \iff \begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ a=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=0 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x+x^3}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \Big[\ln|x|\Big]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}\,dx \qquad = \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \Big[\ln|x|\Big]_1^2 - \frac{1}{2}\Big[\ln(x^2+1)\Big]_1^2 + c \qquad = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

$$= \ln|x| - \ln\sqrt{x^2+1}$$

$$= \ln 2 - \ln 1 - \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 2 \qquad = \ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\right) + c$$

$$= \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5$$

$$= \ln\left(\frac{2^{3/2}}{\sqrt{5}}\right) \qquad = \ln\frac{2}{\sqrt{5}} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \ln\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

Exercice 3.

1) $\int \frac{x-1}{x^2-2x+2} = \int \frac{1}{2} \frac{2x-2}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2} \ln|x^2-2x+2| + c$

La primitive $F(x)$ telle que $F(2)=0$ est $\begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| + c \\ F(2) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow F(2)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(4-4+2)+c = 0$

$\Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}\ln(2)$

Donc $F(x) = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| - \frac{1}{2}\ln(2)$

OU : $\int_2^x \frac{x-1}{x^2-2x+2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2|\right]_2^x = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| - \frac{1}{2}\ln(2)$

2) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx = \int \frac{1}{2}\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx = \int \frac{1}{2} u'(x)\,u(x)^{-1/2}\,dx$

$= u(x)^{1/2} + c$

$= \sqrt{x^2+2x+5} + c$

$F(-1)=0 \Rightarrow \sqrt{1-2+5} + c = 0 \Rightarrow c = -2$

Donc $F(x) = \sqrt{x^2+2x+5} - 2$

3) $\int_2^x \ln t \, dt$ IPP : $u'(t) = 1 \quad u(t) = t$

$v(t) = \ln(t) \quad v'(t) = \frac{1}{t}$

$= [t\ln t]_2^x - \int_2^x t \times \frac{1}{t}\,dt$

$= x\ln x - 2\ln 2 - x + 2$

4) $\int x^{4/3} = \int \frac{3}{7}\frac{7}{3}x^{4/3} = \frac{3}{7}x^{7/3} + c$

$F(1) = 0 \Rightarrow c = -\frac{3}{7}$

$F(x) = \frac{3}{7}x^{7/3} - \frac{3}{7}$

Exercice 4 :

On rappelle que $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$
$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y$

$\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2} = \cos x \cos y \quad (*)$

$\frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2} = \sin x \cos y \quad (**)$

1) $\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)\,dx \quad , \quad p, q \in \mathbb{N}^*$

On applique $(*)$ à $x \to px$, $y \to qx$

$\cos(px)\cos(qx) = \frac{\cos(p+q)x + \cos(p-q)x}{2}$

$\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(p+q)x + \cos(p-q)x}{2}\,dx = \left[\frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{\sin(p-q)x}{2(p-q)}\right]_0^{2\pi}$ si $p-q \neq 0$

$= 0$

Pour $p=q$: $\int_0^{2\pi} \cos^2 px\,dx = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos(2px)}{2} + \frac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{\sin(2px)}{4p}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{1}{2}x\right]_0^{2\pi}$

$= \pi$

Conclusion : $p, q \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \pi & \text{si } p = q \end{cases}$$

2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(2x)\sin(3x)\,dx$

On applique (**) à $x \longrightarrow 3x$, $y \longrightarrow 2x$: $\sin(3x)\cos(2x) = \dfrac{\sin(5x)+\sin x}{2}$

$$\int_0^{\pi} \cos(2x)\sin(3x)\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin(5x)+\sin x}{2}\,dx = \left[\frac{-\cos 5x}{10} - \frac{\cos x}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2}$$

$$= 2\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{6}{5}$$

Remarque : cet exercice est valable pour calculer les primitives de
$$\begin{cases} \cos(\beta x)\sin(\alpha x) \\ \sin(\beta x)\sin(\alpha x) \\ \cos(\beta x)\cos(\alpha x) \end{cases}$$

Exercice 5 :

1) $$\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2ix}+2+e^{-2ix}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$$

$$\int \cos^2 x = \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \int \frac{1}{2}\,dx = \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{1}{2}x + \text{cste}$$

2) $$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x$$

$$\int \cos^3 x = \frac{1}{4}\int \cos(3x) + \frac{3}{4}\int \cos x$$

$$= \frac{\sin(3x)}{12} + \frac{3\sin x}{4} + \text{cste}$$

3) $\cos^4 x = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^4 = \dfrac{1}{16}\left(e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}\right)$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + e^{-4ix} + 4\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right)\right) + \frac{6}{16}$$

$$= \frac{1}{16}\left(2\cos(4x) + 8\cos(2x)\right) + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\cos(4x) + 4\cos(2x)\right) + \frac{3}{8}$$

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{8}\int \left(\cos(4x) + 4\cos(2x)\right)dx + \int \frac{3}{8}\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{\sin(4x)}{4} + 2\sin(2x)\right) + \frac{3}{8}x$$

$$= \frac{\sin(4x)}{32} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{3}{8}x + cst$$

4) $\cos^5 x = \dfrac{1}{2^5}\left(e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}\right)$

$$= \frac{1}{2^4}\left(\frac{e^{5ix}+e^{-5ix}}{2} + 5\,\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} + 10\,\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2^4}\left(\cos 5x + 5\cos(3x) + 10\cos x\right)$$

$$\int \cos^5 x\,dx = \frac{1}{2^4}\int \cos 5x + \frac{1}{2^4}5\int \cos(3x) + \frac{10}{2^4}\int \cos x$$

$$= \frac{\sin(5x)}{80} + \frac{5\sin(3x)}{48} + \frac{5\sin x}{8} + cste$$

Exercice 6 :

1) $\displaystyle\int \mathrm{Arctan}(t)\,dt$ $\qquad \begin{cases} u'(t) = 1 & u(t) = t \\ v(t) = \mathrm{Arctan}(t) & v'(t) = \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$

$$= t\,\mathrm{Arctan}(t) - \frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt$$

$$= t\,\mathrm{Arctan}(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + cste$$

2) $\int \frac{t}{\cos^2(t)} dt$ $\quad u(t) = t \quad u'(t) = 1$

$v'(t) = \frac{1}{\cos^2 t} \quad v(t) = \tan t$

$= t\tan(t) - \int \tan(t)\, dt$

$= t\tan(t) - \int \frac{\sin(t)}{\cos(t)} dt$

$= t\tan(t) + \ln|\cos t| + cste$

3) $\int e^t \cos t\, dt = I$ $\quad \begin{cases} u(t) = \cos t & u'(t) = -\sin(t) \\ v'(t) = e^t & v(t) = e^t \end{cases}$

$I = e^t \cos t + \int e^t \sin t$ $\quad \begin{cases} u(t) = \sin t & u'(t) = \cos t \\ v'(t) = e^t & v(t) = e^t \end{cases}$

$I = e^t \cos t + e^t \sin t - \underbrace{\int e^t \cos t\, dt}_{=I}$

$\Leftrightarrow 2I = e^t \cos t + e^t \sin t$

$\Leftrightarrow I = \frac{e^t(\cos t + \sin t)}{2} + cste$

<u>OU</u> : $\int e^t \cos t\, dt = Re \int e^t e^{it} dt$ car $Re(e^{it}) = \cos t$

$= Re \int e^{(1+i)t} dt$

$= Re \left[\frac{e^{(1+i)t}}{1+i}\right]$

$= e^t Re\left(\frac{e^{it}}{1+i}\right) = e^t Re\left[\frac{(1-i)e^{it}}{2}\right] = \frac{e^t}{2} Re(e^{it}) + \frac{e^t}{2} Re(-ie^{it})$

$= \frac{e^t \cos t}{2} + \frac{e^t \sin t}{2}$

5) $\int x^n \ln x\, dx$ $\quad u(x) = \ln x \quad u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = x^n \quad v(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int \frac{1}{x} x^{n+1} dx$

$= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx$

$= \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} x^{n+1}\right) + c$

$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - 1\right) + c$

8) $\int \sin(\ln x)\,dx$ $\quad \begin{cases} u(x) = \sin(\ln x) & u'(x) = \frac{1}{x}\cos(\ln x) \\ v'(x) = 1 & v(x) = x \end{cases}$

$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx \quad \begin{cases} u(x) = \cos(\ln x) & u'(x) = -\frac{1}{x}\sin(\ln x) \\ v'(x) = 1 & v(x) = x \end{cases}$

$= x\sin(\ln x) - \left(x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\right)$

$I = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - I$

$2I = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)$

$I = x\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right) \quad + \text{cste}$

4) $\int_0 (x+2)\sin(4x)$ $\quad \begin{cases} u(x) = (x+2) & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \sin(4x) & v = -\frac{1}{4}\cos(4x) \end{cases}$

$= \left[(x+2)\left(\frac{-\cos(4x)}{4}\right)\right]_0^{\pi/8} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/8} \cos(4x)\,dx$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\left[\sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{8}}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$

$= \frac{9}{16}$

6) $\int_0^1 2x \,\text{Arctan}\, x\,dx$ $\quad \begin{cases} u(x) = \arctan(x) & u'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ v'(x) = 2x & v(x) = x^2 \end{cases}$

$= \left[x^2 \arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx$

$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$= \frac{\pi}{4} - \left[x - \arctan x\right]_0^1$

$= \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4}$

$= -1 + \frac{\pi}{2}$

7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,(\tan x)'\,dx$

$$= \left[\frac{\tan x}{2}\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Exercice 13 :

1) $\dfrac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$

↑ n'admet pas de racines réelles donc ok

Pour a : $\dfrac{1}{x^2-x+1} = a + \dfrac{(bx+c)(x+1)}{x^2-x+1}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3} = a \qquad (x \to -1)$

Pour b : $\dfrac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{ax}{x+1} + \dfrac{(bx+c)x}{x^2-x+1}$

$\Rightarrow 0 = a + b \qquad$ (quand $x \to +\infty$)

$\Rightarrow b = -a = -\dfrac{1}{3}$

Pour c : $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{a(x^2-x+1)}{x+1} + bx + c$

$\Rightarrow 1 = a + c \qquad (x=0)$

$\Rightarrow c = \dfrac{2}{3}$

Donc $\dfrac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{1}{3(x+1)} - \dfrac{1}{3}\,\dfrac{x-2}{x^2-x+1}$

2) ✱ $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3\times 2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \int \frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}|x^2-x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx$$

Or $\boxed{\displaystyle\int \frac{1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\,dx = \frac{1}{\alpha A}\arctan\left(\frac{1}{A}\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right) \qquad A = \frac{\sqrt{-\beta^2+2\alpha\gamma}}{2|\alpha|}}$

Pour $\alpha = 1$:

$$\boxed{= \frac{2}{\sqrt{4\gamma-\beta^2}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{4\gamma-\beta^2}}\left(x+\frac{\beta}{2}\right)\right)}$$

Ici, on applique pour $(\alpha = 1 \,;\, \beta = -1 \,,\, \gamma = 1)$ $\Longrightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + \text{cste}$

OU : $\displaystyle I = \int \frac{1}{x^2-x+1}$

$$x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1\right)$$
$$= \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)$$

$$I = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx$$

On pose $u = \frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}} \iff x = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(u+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,du$

$$I = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{4}{3}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\arctan u\right] = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{3}\right)$$

Donc $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + \text{cste}$

$\displaystyle = \int \frac{1}{x^3+1}\,dx$

⊛ $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^3+1}\,dx = \int \frac{x^3+1-1}{x^3+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^3+1}\right)dx$

$$= x - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + \text{cste}$$

3) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx \qquad t = \sqrt{x} \Longrightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2t}\,dx$

$\Longrightarrow dx = 2t\,dt$

$$= \int \frac{1}{t^4+t}\,2t\,dt$$

$$= 2\int \frac{1}{t^3+1}\,dt = 2\left[\frac{1}{3}\ln|t+1| - \frac{1}{6}\ln|t^2-t+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)\right] + \text{cste}$$
$$= \frac{2}{3}\ln|\sqrt{x}+1| - \frac{1}{3}\ln|x-\sqrt{x}+1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)\right) + \text{cste}$$

Exercice 14 :

1) $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$

Pour a : $\dfrac{1}{x^2+1} = a + \dfrac{(bx+c)(x+1)}{x^2+1}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} = a$ (pour $x=-1$)

Pour b : $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{ax}{x+1} + \dfrac{(bx+c)x}{x^2+1}$

$\Rightarrow 0 = a + b$ $(x \to +\infty)$

$\Rightarrow b = -a = -\dfrac{1}{2}$

Pour c : $1 = a + c$ $(x = 0)$

$\Rightarrow c = \dfrac{1}{2}$

Donc $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{x-1}{x^2+1}$

2) $\displaystyle\int_0^3 \frac{e^x}{(1+e^x)(1+e^{2x})}\,dx$. On pose $u = e^x$ $\Rightarrow du = e^x dx$
$\Rightarrow dx = e^{-x} du$

$e^0 = 1$ et e^3

Donc $I = \displaystyle\int_1^{e^3} \frac{1}{(1+u)(1+u^2)}\,du$

$= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^{e^3} \frac{1}{u+1}\,du - \frac{1}{2}\int \frac{u-1}{u^2+1}\,du$

$= \dfrac{1}{2}\Big[\ln|u+1|\Big]_1^{e^3} - \dfrac{1}{4}\Big[\ln(1+u^2) - 2\arctan(u)\Big]_1^{e^3}$

$= \dfrac{1}{2}\ln(e^3+1) - \ln\sqrt{2} - \dfrac{1}{4}\ln(1+e^{2\cdot 3}) + \dfrac{1}{2}\arctan(e^3) + \dfrac{1}{4}\ln(2) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{4}$

Exercice 15 :

1) $$F(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

$$a = (x-1)F(x)\Big|_{x\to 1} = \frac{1}{x^2+1}\Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$$

$$xF(x) = \frac{ax}{x-1} + \frac{bx^2+cx}{x^2+1} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} xF(x) = 0 = a+b \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$F(0) = -1 = -a+c \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

D'où $$F(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1}$$

2) $$\int_1^2 \frac{e^x}{(e^x-1)(e^{2x}+1)}\,dx$$ On pose $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$
$\Rightarrow dx = \frac{du}{u}$

$x=2 \Rightarrow u = e^2$
$x=1 \Rightarrow u = e$

$$I = \int_e^{e^2} \frac{u}{(u-1)(u^2+1)} \times \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{2}\int_e^{e^2} \frac{1}{u-1}\,du - \frac{1}{2}\int_e^{e^2}\frac{u+1}{u^2+1}\,du$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln|u-1|\right]_e^{e^2} - \frac{1}{4}\int_e^{e^2}\frac{2u}{u^2+1} - \frac{1}{2}\int_e^{e^2}\frac{1}{u^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(e^2-1) - \frac{1}{2}\ln(e-1) - \frac{1}{4}\ln(e^4+1) + \frac{1}{4}\ln(e^2+1) - \frac{1}{2}\arctan(e^2) + \frac{1}{2}\arctan(e).$$

Exercice 12 :

$$I = \left]\frac{\pi}{4} + k\pi\,;\, \frac{\pi}{4} + (k+1)\pi\right[$$

$\{x \in \mathbb{R},\ \cos x = \sin x\} = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \Rightarrow x \longrightarrow \frac{1}{\cos x - \sin x}$ est continue pour I

- $$I(x) + J(x) = \int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}\,dx = \int \frac{-u'(x)}{u(x)}\,dx$$

$$= -\ln|\cos x - \sin x| + \text{cste}$$

- $I(x) - J(x) = \displaystyle\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x \ \sin x} dx = \int 1 \, dx = x + cte$

- $I = \dfrac{I+J+I-J}{2} = \dfrac{x - \ln|\cos x - \sin x|}{2} + cte$

  $J = \dfrac{I+J-(I-J)}{2} = \dfrac{-x - \ln|\cos x - \sin x|}{2} + cte$

Exercice 11 :

1) $\displaystyle\int_0^1 t^p (1-t)^q \, dt = \int_0^1 t^q (1-t)^p \, dt$

On pose $u = 1-t \iff t = 1-u$ $\quad t=0 \Rightarrow u=1$
$du = -dt \iff dt = -du$ $\quad t=1 \Rightarrow u=0$

$J_{p,q} = \displaystyle\int_1^0 (1-u)^p u^q \times -du = \int_0^1 u^q (1-u)^p \, du = J_{q,p}$

2) $(q+1)\displaystyle\int_0^1 \underbrace{t^p}_{\text{dérivée}} \overbrace{(1-t)^q}^{\text{primitive}} dt = p \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q+1} \, dt$

IPP avec $u(t) = t^p \quad u'(t) = p t^{p-1}$
$v'(t) = (1-t) \quad v(t) = \dfrac{-(1-t)^{q+1}}{q+1}$

$\displaystyle\int_0^1 t^p (1-t)^q \, dt = \left[t^p \left(\frac{-(1-t)^{q+1}}{q+1} \right) \right]_0^1 + \int_0^1 p t^{p-1} \frac{(1-t)^{q+1}}{q+1} \, dt$

$= \dfrac{p}{q+1} \displaystyle\int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q+1} \, dt$

$\Rightarrow (q+1) J_{p,q} = p J_{p-1,q+1}$

3) $J_{0,p+q} = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{p+q} \, dt = \left[\frac{-(1-t)^{p+q+1}}{p+q+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+q+1}$

$(q+1) J_{p,q} = p J_{p-1,q+1} \Rightarrow J_{p,q} = \dfrac{p}{q+1} J_{p-1,q+1} = \dfrac{p}{q+1} \dfrac{p-1}{q+2} J_{p-2,q+2}$

$= \dfrac{p}{q+1} \dfrac{p-1}{q+2} \dfrac{p-3}{q+3} J_{p-3,q+3}$ $\qquad \left(J_{p-1,q+1} = \dfrac{p-1}{q+2} J_{p-2,q+2} \right)$

$J_{p-p,p+q} = \dfrac{p!}{(q+1)(q+2)\cdots(q+p)}$

$$J_{p-p,q+p} = \frac{p!}{(q+1)(q+2)\cdots(q+p)} J_{q,p+q}$$

$$= \frac{p!}{(q+1)\cdots(p+q)} \frac{1}{p+q+1}$$

(On multiplie en haut et en bas par $q!$)

$$J_{p,q} = \frac{(1\times\cdots\times q)\,p!}{1\cdots\times(q-1)q\times(q+1)\cdots(q+p+1)} = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!} \quad \forall p,q \in \mathbb{N}$$

Exercice 10 :

$$\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 2\int_0^x f(t)\,dt \quad \text{si } f \text{ est paire } (f(x) = f(-x))$$

2) $y = -t \Leftrightarrow t = -y$ $\qquad t = x \Rightarrow y = -x$
$dy = -dt \Leftrightarrow dt = -dy$ $\qquad t = -x \Rightarrow y = x$

$$\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = -\int_x^{-x} f(-y)\,dy = \int_{-x}^{x} f(-y)\,dy$$

Si $f(-y) = -f(y)$: $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = -\int_{-x}^{x} f(y)\,dy \Rightarrow 2\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 0$

1) $$\int_0^x f(t)\,dt = -\int_0^{-x} f(-y)\,dy = -\int_0^{-x} f(y)\,dy \quad \text{si } f \text{ est pair}$$
$y = t\ ;\ dy = -dt$

$$= \int_{-x}^{0} f(y)\,dy$$

$$\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt + \int_{-x}^{0} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt$$

$$= 2\int_0^x f(t)\,dt$$

3) f est T-périodique ssi $f(t+T) = f(t)\ \forall t$

$$\int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$$

Changement de variable $y = t - x$; $t = x + T \Rightarrow y = x + T - x = T$
$dy = dt$

$$\int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(y+x)\,dy \longrightarrow \text{ne marche pas}$$

Soit $F(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,dt$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^T f(t)\,dt$. On veut montrer que $F(x) = G(x)$, $\forall x$

$$\Updownarrow$$

$$F'(x) = G'(x) \text{ et } F(0) = G(0)$$

$G'(x) = 0$ (ne dépend pas de x)

$$F(x) = \int_0^{x+T} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt$$

Donc $F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$ car f est T-périodique

$$\left.\begin{array}{l} F'(x) = G'(x) = 0 \\ F(0) = \displaystyle\int_0^T f(t)\,dt = G(0) \end{array}\right\} F(x) = G(x) \quad \forall x$$

Exercice 9 :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$

$$\frac{1}{x^2+\beta x+\gamma} \longrightarrow \frac{2}{\sqrt{4\gamma-\beta^2}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{4\gamma-\beta^2}}\left(x+\frac{\beta}{2}\right)\right)$$

$\beta = \gamma = 2$

Donc $I = \Big[\arctan(x+1)\Big]_0^1 = \arctan(2) - \dfrac{\pi}{4}$

Exercice 8 :

1) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx \qquad y = \frac{x}{a} \qquad dy = \frac{dx}{a}$

$$\int \frac{1}{a^2+a^2y^2}\, a\,dy = \frac{a}{a^2}\int \frac{1}{1+y^2}\,dy$$

$$= \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \text{cste}$$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \qquad y = \frac{x}{a} \qquad dy = \frac{dx}{a}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-a^2y^2}}\,a\,dy = \frac{a}{|a|}\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \frac{a}{|a|}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + cste$$

<u>Remarque:</u> Pour $a \neq 0$:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + cste$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{a}{|a|}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + cste$$

$$= \arcsin\left(\frac{x}{|a|}\right) + cste$$

Révision calcul intégral

Exercice 1

(1) $$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx$$

$$= x - \text{Arctan}(x) + cte$$

(2) $$\int t^4(1+t^5)\,dt = \frac{1}{30}(1+t^5)^6 + cte$$

(3) $$\int \frac{1}{\cos^2(t)} = \tan(t)$$

(4) $$\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = -\int \frac{1}{u^2} = \frac{1}{u} = \sec(x)$$

$u = \cos(x)$

$x = \arccos(u)$

$dx = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(5) $$\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(x)\,dx = -\frac{\cos(x)}{2} + cte$$

(6) $$\int \frac{\ln(t)}{t}\,dt = \ln^2(t) + cte$$

(7) $$\int \frac{1}{\sin^2(t)}\,dt = -\frac{1}{\tan(t)}\cancel{dt} + cte$$

$-\dfrac{\cos x}{\sin x}$

(8) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{Arcsin}(x) + cte$$

$-\dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$

(9) $$\int \frac{1}{1+th(x)} = \int \frac{1}{1+\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}}\,dx = \int \frac{e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{x}{2} + cte$$

(10) $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ on pose $u = \cos x$

$= -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + cte = -\ln|\cos x| + cte$

(11) $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1 - \cos(4x)}{8}$

$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{8}{1 - \cos(4x)} dx$

$u = 4x$ $\qquad v = \tan(u/2)$

$= 2\int \frac{1}{1 - \cos u} du$ $\qquad u = 2\,\mathrm{Arctan}(v)$

$du = \frac{2}{1+v^2} dv$

$= 2\int \frac{1}{1 - \cos(2\,\mathrm{Arctan}(v))} \cdot \frac{2}{1+v^2} dv$

$= 2\int \frac{1}{v^2}$

$= -\frac{2}{v} + cte = -\frac{2}{\tan(u/2)} + cte = \left[-\frac{2}{\tan(2x)} + cte \right]$

(12) $\int \frac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+1}} dx = \int \frac{4x}{\sqrt{x^2+x+1}} + \int \frac{2}{\sqrt{x^2+x+1}}$

(12.1) $4\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} dx = 4\int \frac{x}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}} dx$ $\qquad u = x + \frac{1}{2}$

$= 4\int \frac{2u-1}{\sqrt{4u^2+3}} du = 4\left(\int \frac{2u}{\sqrt{4u^2+3}} - \int \frac{1}{\sqrt{4u^2+3}} \right)$

$= \left[4\left(\frac{1}{2}\sqrt{4u^2+3} - \frac{1}{2} \ln\left| \frac{2}{\sqrt{3}} u + \sqrt{1 + \frac{4}{3}u^2} \right| \right) \right]$

*

On peut le voir a vue: $\frac{4}{\cancel{4}} \sqrt{x^2+x+1}$

(12.2) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{x^2+x+1}} = 4\int \frac{1}{\sqrt{4u^2+3}}\,du$ $\quad u = x + \frac{1}{2}$ I10

$$= 2\sqrt{3}\int \frac{1}{\sqrt{3\tan^2(v)+3}\,\cos^2(v)}\,dv$$

$$= 2\int \frac{1}{\cos(v)}\,dv$$

$$= 2\ln\left|\tan(v) + \frac{1}{\cos(v)}\right|$$

Exercice 2

$$\frac{1}{1+x^2} = a + \frac{(bx+c)x}{1+x^2}$$

Si $x = 0$

$a = 1$

$$\frac{1}{x} = \frac{1+x^2}{x} + bx + c$$

si $x = 1$ $\qquad b+c = -1$

$1 = 2 + b + c$

si $x = 2$

$\frac{1}{2} = \frac{5}{2} + 2b + c$ $\qquad 2b+c = -2$

$b = -1$ $\qquad$ donc $\quad \frac{1}{x+x^3} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$

$c = 0$

Donc $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x+x^3} = \left[\ln(x)\right]_1^2 - \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^2$

$$= \ln(2) - \frac{1}{2}\ln(5/2)$$

Exercice 3

(1) $\int_{(1)} = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 2) + cte = \int_2^x \frac{t-1}{t^2-2t+2} dt$

$x = 2 \Rightarrow \int_{(1)} = 0$

$cte = -\frac{\ln(2)}{2}$

(2) $\int_{(2)} = \frac{1}{\cancel{4}} \sqrt{x^2 + 2x + 5} + cte$ $\frac{1}{2}$ $2x+2$

$x = -1 \Rightarrow \int_{(2)} = 0$

$cte = \cancel{-1} - 2$

(3) IPP : $\int u'v = [uv] - \int uv'$

$u' = 1$

$u = x$ $\int_{(3)} = x \ln x - x + cte$

$v = \ln x$ $cte = -2\ln 2 + 2$

$v' = 1/x$

(4) $\int_{(4)} = \frac{3}{7} x^{7/3} + cte \Rightarrow cte = -3/7$

α u $\uparrow$ $\alpha-1$ $\alpha u u$ $\alpha - 1 = 1/2$ $\alpha = 1/2$

α x $\uparrow$ $\alpha-1$ αx $\alpha - 1 = 4/3$ $\alpha = 7/3$

Exercice 4

(1) $\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((p+q)x) + \cos((p-q)x)$

$= \left[\frac{1}{2(p+q)} \sin((p+q)x)\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{1}{2(p-q)} \sin((p-q)x)\right]_0^{2\pi} + cte = 0$

~~(2)~~ $= \left[\frac{1}{10} \sin(5x)\right]_0^{\pi} + \left[-\frac{1}{2} \sin(-x)\right]_0^{\pi} + cte$

$= 0$

Exercice 4

(1) $\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((p+q)x)\cos((-q+p)x)dx$

$= 0$

pour $p = q$

$= 2\pi/2 = \pi$

(2) $\int_0^{\pi} \cos(2x)\sin(3x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cancel{\cos(} \sin(5x) + \sin(x))$

$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5}\cos(5x) - \cos(x)\right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} + 1 + \frac{1}{5} + 1\right) = \frac{1}{5} + 1$

Exercice 5

(1) $\int \cos^2 x\,dx = \int 1/2 + \cos(2x)/2\,dx$

$= \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$

$\int \cos^{2p+1} x\,dx = \int \cos x\,(\cos^2 x)^p\,dx$

$= \int \cos x\,(1 - \sin^2 x)^p\,dx$

$= F(\sin(x)) + cte$

avec $F(t) = (-1)^p \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (x^2)^k (-1)^{p-k}$

(2) $\int \cos^3 x\,dx = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}(-1)^k \binom{p}{k}$

$= \sum_{k=0}^{1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}(-1)^k \binom{1}{k}$

$= x + \frac{x^3}{3}(-1) = x - \frac{x^3}{3}$

$= \sin x - \frac{\sin x^3}{3}$

(3) $\int \cos^4(x)\,dx = \int \cos^2(x)\cos^2(x)\,dx$

$$= \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,\frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1 + 2\cos(2x) + \frac{1+\cos(4x)}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2} + \sin(2x) + \frac{\sin(4x)}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{3x}{8} + \frac{\sin(2x)}{4}$$

(4) $\int \cos^5 x = \frac{5}{8}\sin x - \frac{5\sin^3(3x)}{48} + \frac{\sin^5(5x)}{80}$

Exercice 6

(1) $u' = 1 \qquad v' = 1/1+t^2$

$u = t \qquad v = \text{Arctan } t$

$$= t\arctan t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$$

(2) $u' = \frac{1}{\cos^2 t} \qquad v = t$

$u = \tan t \qquad v' = 1$

$$= t.\tan(t) - \int \tan t$$

$$= t.\tan(t) + \ln|\cos t|$$

(3) $u' = \cos(t)$

$u = \sin(t)$

$$I = \int \cos(t)e^t$$

$$= \sin(t)e^t - \int \sin(t)e^t$$

$$= \sin(t)e^t + \cos(t)e^t - \int \cos(t)e^t$$

$$= \frac{e^t}{2}(\sin(t) + \cos(t)).$$

Exercice 9

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \operatorname{Arctan}(x+1)$$

Exercice 8

$x = au$ $\qquad \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arctan}(x/a)$

$u = \frac{x}{a}$

$dx = a$

Exercice 11

(1) $J_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q \, dt = \int_0^1 t^q (1-t)^p$

$t = 1-y$ $\quad J_{p,q} = \int_1^0 -(1-y)^p y^q \, dy = \int_0^1 (1-y)^p y^q \, dy$

$dt = -1$

(2) $p \geq 1$ $\quad (q+1) J_{p,q} = p J_{p-1, q+1}$

$(q+1) \int_0^1 t^p (1-t)^q \, dt = p \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q+1} \, dt$

$u(t) = t^p \qquad u'(t) = p t^{p-1}$

$v'(t) = (1-t)^q \qquad v(t) = -\frac{(1-t)^{q+1}}{q+1}$

$(q+1) J_{p,q} = \left[-t^p \frac{(1-t)^{q+1}}{q+1}\right]_0^1 + p \int_0^1 t^{p-1} \frac{(1-t)^{q+1}}{q+1} \, dt$

$= \frac{p}{q+1} \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q+1} \, dt$

(3) • $J_{0, p+q} = \int_0^1 (1-t)^{p+q} \, dt$

$= \left[-\frac{(1-t)^{p+q+1}}{p+q+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+q+1}$

• $J_{p,q} (q+1) = p \, J_{p-1, q+1}$ $\qquad \int_0^1 t^p (1-t)^q = \int_0^1$

$J_{p-1, q+1} = \frac{p-1}{q+2} J_{p-2, q+2}$

$\vdots$

$\frac{\prod_{k=0}^{p-1} (p-k)}{\prod_{k=1}^{p} (q+k)} J_{p-p, q+p} = \frac{p!}{\prod_{k=1}^{p} (q+k)} J_{0, p+q}$

$= \frac{p! (q)(q-1) \times \ldots \times 1}{(p+q+1)!}$

$= \frac{p! q!}{(p+q+1)!}$

Exercice 10

(1) Si f paire : $\int_{-x}^{x} f = 2\int_0^x f$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$

donc $\int_0^x f(x) + \int_{-x}^0 f(x)$

$= \int_{-x}^x f(x)\,dx$

$\int_{-x}^0 f(x) = -\int_0^{-x} f(x)\,dx$

$x = -x$

$= +\int_0^x f(-x)\,dx$

$= \int_0^x f(x)\,dx$

donc $\int_{-x}^x f(x)\,dx = 2\int_0^x f(x)\,dx$

(2) $\int_0^x f(x) - \int_0^{-x} f(x)$

$x = -x$

$+\int_0^x f(-x) = -\int_0^x f(x)$

$\int_{-x}^x f(x)\,dx = 0$

(3) $F(x) - G(x) = 0$

$F'(x) - G'(x) = 0$

$F(0) = F(0)$

$F(x) = \int_x^{\cancel{x+T}} f(t)\,dt = \int_0^{x+T} f(t) - \int_0^x f(t)$

$F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$

$G'(x) = 0$

$\Rightarrow F(x) = G(x)$

$f(x)$ paire

$f(-x) = f(x)$

$\int_0^x f(x) + \int_{-x}^0 f(x)$

$\int_0^x f(x) - \int_0^{-x} f(x)\,dx$

$x = -x$

$dx = -1$

$-\int_0^x f(-x) = -\int_0^x f(x)$

$= 2\int_0^x f(x)$

$\int_0^x f(x) - \int_0^{-x} f(x)$

$x = -x$

$\int_0^x f(x) + \int_0^x f(-x)$

$= \int_0^x f(x) - \int_0^x f(x)$

$= 0$

$\int_x^{x+T} f(x)$

$x =$

Exercice 13

(1) $$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

$$a = (x+1)F(x)\Big|_{x=-1} = 1/3$$

$x = 0$

~~c = a~~ $\quad 1 = a + c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{2}{3}$

$x = 1$

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{2} + 2b + c \quad \Rightarrow \quad b = -1/3$$

$$(1) = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{-1x+2}{3(x^2-x+1)}$$

$$\int (1) = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \int \frac{2/3 - 1/6}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \int \frac{1}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + cte$$

(2) $$\int \frac{x^3}{x^3+1} = \int 1 - \frac{1}{x^3+1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$$

(3) $t = \sqrt{x}$

$dx = 2t \qquad \int \frac{1}{x^2+\sqrt{x}} = 2\int \frac{1}{t^3+1}$ voir (2)

$x = t^2$

Exercice 14

(1) $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{x-1}{x^2+1}$

(2) $J_3 = \dfrac{1}{2}\left[\ln|t+1|\right]_1^{e^3} - \left[\dfrac{1}{4}\ln(t^2+1) - 2\operatorname{Arctan}(t)\right]_1^{e^3} + cte$

Exercice 15

(1) $\dfrac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$

$= \dfrac{1}{2(x-1)} + \dfrac{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2+1}$

$x=1$

$\frac{1}{2} = a$

$x=0$

$-1 = -a + c$

$-\frac{1}{2} = c$

$x=2$

$\frac{1}{5} = \frac{1}{2} + \frac{2b - \frac{1}{2}}{5}$

$\frac{1}{5} - \frac{1}{2}$

$\frac{2}{10} - \frac{5}{10}$

On pose $t = e^x$

$\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{(e^x-1)(e^{2x}+1)}\,dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{(t-1)(t^2+1)}\,dt$

$= \frac{1}{2}\ln(e^2-1) - \frac{1}{2}\ln(e-1) - \frac{1}{4}\ln(e^4+1) + \frac{1}{4}\ln(e^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(e^2)$
$+ \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(e)$

$b = -\frac{1}{2}$

Exercice 12

$u'v + uv'$

$\sin x \quad \sin x + \cos x$

$I + J = \displaystyle\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}\,dx = -\ln|\cos x - \sin x| + cte$

$I - J = \displaystyle\int dx = x + cte$

$\begin{cases} I + J = -\ln|\cos x - \sin x| + cte \\ I - J = x + cte \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{1}{2}I = x - \ln|\cos x - \sin x| \\ \frac{1}{2}J = \ln|\cos x - \sin x| - x \end{cases}$

(4) $u' = \cancel{x+2}\ \sin(4x)$ $v = x+2$ I 15

$u = \cancel{x}\ -\frac{1}{4}\cos(4x)$ $v' = 1$

$$= \left(-\frac{1}{4}\cos(4x)(x+2) + \frac{1}{16}\sin(4x)\right)_0^{\pi/8} = \frac{9}{16}$$

(5) $\int x^n \ln x$

$u' = x^n$ $v = \ln x$

$u = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $v' = 1/x$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

(6) $u' = 2x$ $v = \operatorname{Arctan} x$

$u = x^2$ $v' = 1/1+x^2$

$\cancel{= x^2 \operatorname{Arctan} x \quad \ln(1+x^2)} = \arctan 1 - [1 - \arctan 1] = \frac{\pi}{2} - 1$

$\cancel{= \frac{\pi}{4} - \ln(2)}$

(7) $u' = 1/\cos^2 x$ $v = \tan x$

$u = \tan x$ $v' = 1/\cos^2 x$

$$I = \int \tan x/\cos^2 x$$

$$= \tan^2 x - \int \tan x/\cos^2 x$$

$$= \frac{\tan^2 x}{2} = \frac{1}{2}$$

(8) $u' = 1$ $v = \sin(\ln(x))$

$u = x$ $v' = \frac{1}{x}\cos(\ln(x))$

$$I = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln(x))$$

$$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln(x)) - \sin(\ln(x))$$

$$2I = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln(x))$$

Exercice 7

(1) On pose $u = 1 + \ln(x)$

$x = \exp(1-u)$

$dx = -\exp(1-u)$

$$\frac{1}{x(1+\ln x)^3} = \frac{1}{u^3 \cdot e^{1-u}} \cdot -e^{1-u}$$

$$= -\frac{1}{u^3} \Rightarrow \int -\frac{1}{u^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^2}$$

$$= \frac{1}{2} \quad \frac{1}{(1+\ln(x))^2}$$

u^{-3}

u^{α}

$\alpha u^{\alpha-1}$

$\alpha - 1 = -3$

$\alpha = -2$

Formules de Taylor - Somme de Riemann

Exercice 5

Rappel Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

- $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \to \int_a^b f(x)\,dx$

Remarque $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \frac{(b-a)}{n}\right)$

Cas particulier : Si $a = 0$

- $\frac{b}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{bk}{n}\right) \to \int_0^b f(x)\,dx$ on cherche $f(x)$

tel que notre somme $= \frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{bk}{n}\right)$

$$f(a) + \frac{b-a}{n} f(b) \to \int_a^b f(x)\,dx$$

(1) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k\sqrt{n^2-k^2}}{n^3} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{kn\sqrt{1-(k/n)^2}}{n^3}$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{avec } f(x) = x\sqrt{1-x^2}$$

On appliq la formule du cours à $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k\sqrt{n^2-k^2}}{n^3} \to \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \frac{1}{n\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-(k/n)^2}} \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = [\text{Arcsin } x]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

(2) $$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-(k/n)^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x)$$

où $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = [\text{Arcsin } x]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 3

Rappel: Formule de Taylor avec reste intégral ~~à~~: l'ordre n de $f(x) = \ln(1+x)$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(tx)\,dt\, x^n$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f^{(3)}(x) = \frac{(-1)^2\, 2!}{(1+x)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \qquad f^{(4)}(x) = \frac{(-1)^3\, 3!}{(1+x)^4}$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

Montrons par récurrence que

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1-x)^k} \qquad k \geq 1$$

$k = 1$ $$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

Vraie pour $k=1$, montrons pour k T47

$$f^{(k+1)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!\,(-k)}{(1+x)^{k+1}} = \frac{(-1)^{k}k!}{(1+x)^{k+1}}$$

$\Rightarrow$ * Vrai pour $k+1$

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

$$P_n(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!\,x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$+ \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+tx)^{n}}\,dt\,x^n$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n\frac{x^{n-1}}{(n-1)} + (-1)^{n-1}\int_0^1 (1-t)^{n-1}\frac{1}{(1+tx)^{n}}\,dt\,x^n$$

Pour $x=1$

$$P_n(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{n-1} + (-1)^{n-1}\int_0^1 (1-t)^{n-1}\frac{1}{(1+t)^{n+1}}\,dt$$

$$P_n(2) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = (-1)^{n-1}\int_0^1 (1-t)^{n-1}\frac{1}{(1+t)^{n}}\,dt$$

$$\frac{1}{(1+t)^{n}} \leq 1 \quad \forall t \geq 0$$

$$\Rightarrow \left|P_n(2) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| \leq \left|\int_0^1 (1-t)^{n-1}\,dt\right| = \left[\frac{-(1-t)^n}{n}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n}$$

Exercice 1

(1) $P_n(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n-1} x^{n-1} + (-1)^{n+1}$

$\int_0^1 (1-t)^{n-1} \frac{1}{(1+tx)^n} dt \; x^n$

Pour $n = 3$:

$P_n(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \int_0^1 (1-t)^2 \frac{1}{(1+tx)^3} dt \; x^3$

montrons que pour $x \geq 0$

$\frac{x^3}{3(1+x)^3} \leq \int_0^1 (1+t)^2 \frac{1}{(1+tx)^3} dt \; x^3$

pour $x \geq 0$, $0 \leq t \leq 1$

$1+tx \leq 1+x$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{1+x}\right)^3 \leq \frac{1}{(1+tx)^3}$

$\Rightarrow \frac{x^3}{(1+x)^3} \leq \frac{x^3}{(1+tx)^3}$

$\Rightarrow \frac{x^3}{(1+x)^3} \int_0^1 (1-t)^2 dt \leq \int_0^1 (1-t)^2 \frac{1}{(1+tx)^3} dt \; x^3$

montrons que $P_n(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

il suffit de montrer que $\int_0^1 (1-t)^2 \frac{1}{(1+tx)^3} dt \, x^3 \leq x^3/3$

$\frac{1}{1+tx} \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{1+tx}\right)^3 \leq 1$

$\Rightarrow \int_0^1 (1-t)^2 \frac{1}{(1+tx)^3} dt \; x^3 \leq \int_0^1 (1-t)^2 dt \; x^3 = x^3/3$

Exercice 2 $\quad e^x = 1 + \dots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^{tx} \, dt \, x^{n+1}$ **T18**

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^{tx} \, dt \, x^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^{tx} \, dt \, x^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!} \quad e^{tx} \leq e^{|x|}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} dt \, x^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)\,n!} x^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$x^{n+1} \leq |x|^{n+1}$$

$$x^{n+1} \leq |x|^{n+1}$$

$$\frac{1}{n!(n+1)} x^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} dt \, x^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

car $e^{tx} \leq e^{|x|}$ $\forall x \in \mathbb{R}, t \in [0,1]$

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^{tx} \, dt \, x^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$$

$n = 4 \quad , \quad x = -1$

(1) $\left| e^{-1} - \sum_{k=0}^{4} \frac{-1^k}{k!} \right| \leq \frac{|-1|^{n+1} e^{|-1|}}{5!}$

$e^{-1} \simeq 0,395$

(2) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{|x|}|x|}{(n+2)!} \frac{(n-1)!}{e^{|x|}|x|^{n+1}} = \frac{|x|}{n+2} \to 0$

$\sum u_n(x)$ CV $\Rightarrow \lim u_n = 0$

$\Rightarrow \lim \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} x^k/k! \right| \leq \lim \frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$

Exercice 4

(1) $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x$

$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin x$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^{2n}}{(2n!)} f^{(2n+1)}(tx)\, dt\, x^{2n+1}$$

$$f(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2p}}{(2p)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{2n}}{(2n)!} (-1)^{n+1} \sin(tx)\, dt\, x^{2n+1}$$

$$\Rightarrow \cos x - \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} = \int_0^1 \frac{(1-t)^{2n}}{(2n)!} (-1)^{n+1} \sin(tx)\, dt\, x^{2n+1}$$

$$\Rightarrow \left| \cos x - \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} \right| = \left| \int_0^1 \frac{(1-t)^{2n}}{(2n)!} (-1)^{n+1} \sin(tx)\, dt\, x^{2n+1} \right|$$

$$\leq |x|^{2n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^{2n}}{(2n)!}\, dt$$

$$\bullet\ |\cos x - u_n| = \frac{1}{(2n+1)} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n)!}$$

Arcs paramétrés

Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan on considère la courbe C :

$$\begin{cases} x(t) = 1/(1-t^2) \\ y(t) = t^3/(1-t^2) \end{cases}$$

$$\frac{\cancel{t^2 t}}{t^2\left(\frac{1}{t^2}-1\right)}$$

définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

(1) Déterminer les symétrie de C

(2) Déterminer le tableau de variation des fonctions $x(t)$ et $y(t)$

(3) Déterminer points singulier et nature

(4) " tangentes

(5) Étudier branches infinies

(6) Tracer C

(1) $\forall t \in D = \mathbb{R}^2 \setminus \{-1, 1\}$ $\qquad x(-t) = x(t)$ $\qquad$ A19

$y(-t) = -y(t)$

symétrie par rapport à rapport à l'axe (Ox)

~~$x'(t) = 2t$~~

(2) $x'(t) = \dfrac{2t}{(1-t^2)^2}$ $\qquad \lim\limits_{t \to 1^-} x(t) = +\infty$

$y'(t) = \dfrac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2}$ $\qquad \lim\limits_{t \to 1^+} = -\infty$

t	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x'	0	$+$	‖		$+$		
x	1 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$		↗		0
y'	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	0 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$y(\sqrt{3})$	↘	$-\infty$

(3) $x'(t_0) = y'(t_0) \Leftrightarrow t = 0$

Donc en $M(0)$, on a un point singulier.
On détermine la nature de $M(0)$ on cherche le plus petit $p \geq 1$ / $(x^{(p)}(0), y^{(p)}(0)) \neq (0,0)$
on cherche le + petit $q > p$ tel que les $(x^{(p)}(0), y^{(p)}(0))$ ~~$\neq (0,0)$~~ et $(x^{(q)}(0), y^{(q)}(0))$ pas colinéaire

$x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 2$, $x^{(3)}(0) = 0$, $x^{(4)}(0) = 24$
$y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y^{(3)}(0) = 6$, $y^{(4)}(0) = 240$
, $y^{(5)}(0) = 5!$

$p = 2$
$q = 3$ $\qquad$ On a un point de rebroussement de première espèce.

Au point $M(t_0)$ la tangente a pour direction $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0))$ avec p le plus petit entier non nul tel que $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0)) \neq (0,0)$

Si $x^{(p)}(t_0) = 0$, alors on a une tangente verticale

Si $y^{(p)}(t_0) = 0$, alors " " " horizontale

à $(x''(0), y''(0)) = (2, 0)$ tangente horizontale,

en $M(\mathbb{B}')$ "

$$\lim_{t\to 1} x(t) = \infty \quad , \quad \lim_{t\to 1} y(t) = \infty$$

$$\lim_{t\to 1} \frac{y(t)}{x(t)} = 1$$

$$\lim_{t\to 1} y(t) - x(t) = \lim_{t\to 1} \frac{t^3}{1-t^2} - \frac{1}{1-t^2} = \lim_{t\to 1} \cdot \frac{t^3-1}{1-t^2}$$

$$= \lim_{t\to 1} - \frac{t^2+t+1}{1+t} = -3/2$$

La droite d'équation $y(t) - x(t) = -3/2$ est une assymptote à la courbe quand $t \to 1$

$$\begin{cases} x(t) = 1/1-t^2 \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1-t^2} \end{cases}$$ signe de $y(t) - x(t) + 3/2$ quand $t \to 1$

$$y(t) - x(t) + 3/2 = - \frac{t^2+t+1}{1+t} + 3/2$$

$$= \frac{3(1+t) - 2(t^2+t+1)}{2(1+t)} = \frac{1+t-2t^2}{2(t+1)} \sim (1-t)\frac{3}{4}$$

Si $t > 1$

$y(t) - x(t) + \frac{3}{2} \sim \frac{3}{4}(1-t) < 0 \Rightarrow$ la courbe est en dessous de l'asymptote quand $t \to 1$

Si $t < 1$, $y(t) - x(t) + \frac{3}{2} \sim \frac{3}{4}(1-t) > 0$

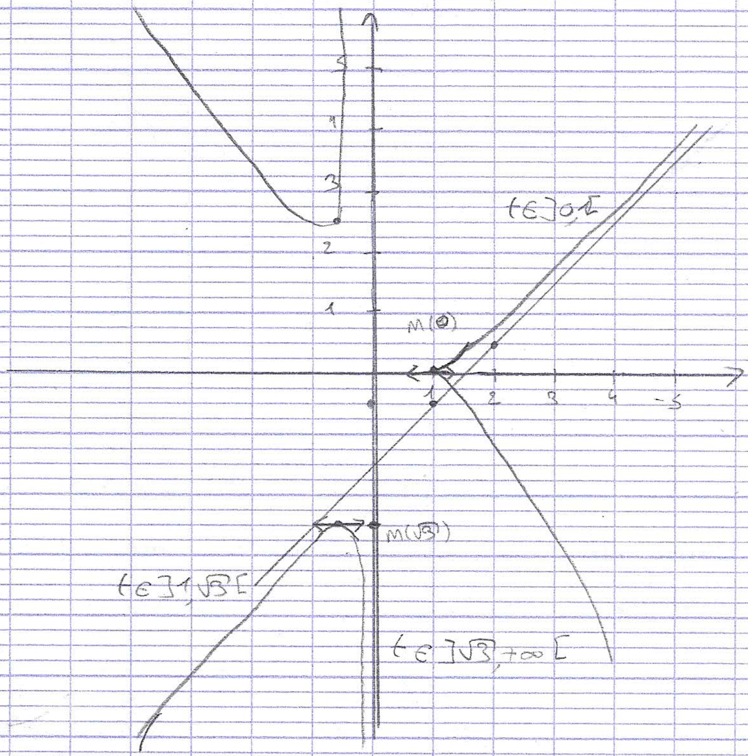
$\Rightarrow$ la courbe est au dessus de l'assymptote quand $t \to 1^-$

Donc $y = x - 3/2$ est une asymptote à la courbe.

$2 - \frac{3}{2}$

$\frac{4}{2} - \frac{3}{2}$

$1/2$



$P = 2L + 2l$

$A = L \times l$

$$y(t) - 2x(t) - 3/2 = \frac{t^2-2t-3}{t-2} - \frac{3}{2}$$ @20

$$= \frac{2(t^2-2t-3)-3(t-2)}{2(t-2)} = \frac{2t^2-7t}{2(t-2)} = \frac{(2t-7)t}{2(t-2)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{7}{4}\cdot t$$

Si $t \to 0^+$ la courbe est au dessus de son asymptote

Si $t \to 0^-$ " " " en dessous " " "

$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases} \quad t_1 \neq t_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{t_1^2-2t_1} = \dfrac{3}{t_2^2-2t_2} \\ \dfrac{t_1^2-3}{t_1} = \dfrac{t_2^2-3}{t_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1^2-2t_1 = t_2^2-2t_2 \\ \dfrac{t_1^2-3}{t_1} = \dfrac{t_2^2-3}{t_2} \end{cases}$$

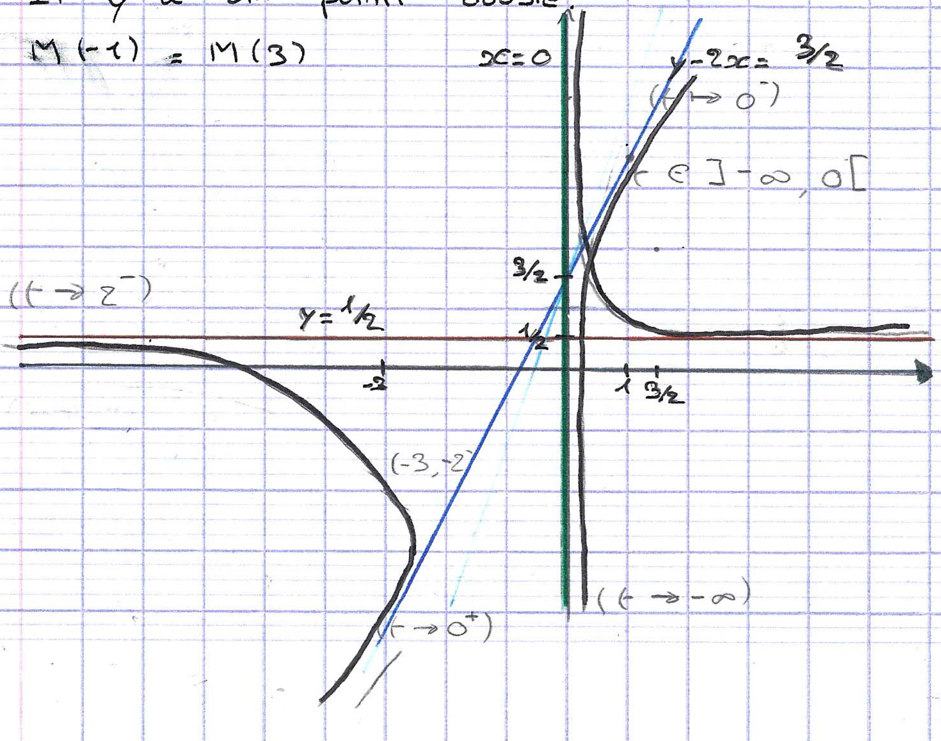
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_2^2-t_1^2 = 2t_2-2t_1 \\ t_1^2t_2 - t_2^2t_1 = 3t_2-3t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{(t_2-t_1)}(t_2+t_1) = 2\cancel{(t_2-t_1)} \\ t_1t_2(t_1-t_2) = 3(t_2-t_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_2+t_1 = 2 \\ t_1t_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = 3 \end{cases}$$

$y = 2x + 3/2$

Il y a un point double

$M(-1) = M(3)$



(3) <u>Domaine de définition</u> : $[-\pi, \pi] \ni t$

<u>Symétrie</u> :
$$\left.\begin{array}{l} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{array}\right] \text{ par rapport à } Ox$$

$$\sin(t+\pi) = -\sin(t)$$
$$\cos(t+\pi) = -\cos(t)$$
$$x(\pi - t) = 2\cos(2(\pi - t)) = x(t)$$
$$y(\pi - t) = y(t)$$
$$\Rightarrow M(\pi - t) = M(t)$$

On étudie donc sur $t \in [0, \pi/2]$ pour $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ on a la même courbe que pour $t \in [0, \pi/2]$

<u>Variation</u> :

t	0		$\pi/6$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0		$-$		0
$x(t)$	2	$\searrow$	1	$\searrow$	-2
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$	0

En $t = \pi/2$ on a un point singulier $x'(\frac{\pi}{2}) = y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

$x(t) = 2\cos(2t)$
$x'(t) = -4\sin(2t) = 0$
$x^{(2)}(t) = -8\cos(2t) = 8$
$x^{(3)}(t) = 16\sin(2t) = 0$
$x^{(4)}(t) = 32\cos(2t) = -32$

$y(t) = \sin 3t$
$y'(t) = 3\cos 3t = 0$
$y^{(2)}(t) = -9\sin 3t = 9$
$y^{(3)}(t) = -27\cos(3t) = 0$
$y^{(4)}(t) = 81\sin(3t) = -81$

Exercice 1

$$\begin{cases} x(t) = 3/t^2-2t \\ y(t) = t^2-3/t \end{cases} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

Rappel: symétrie $\Leftrightarrow$ trouver une transformation $t \to \varphi(t)$ qui lie les points $M(\varphi(t)) = (x(\varphi(t)), y(\varphi(t)))$ et $M(t) = (x(t), y(t))$

$\Rightarrow$ Pas de symétrie

$$x'(t) = -6 \frac{(t-1)}{(t^2-2t)^2} \qquad y'(t) = 1 + \frac{3}{t^2}$$

Remarque: Pour calculer $x^{(2)}(t)$, $x^{(3)}(t)$ ...

$$x(t) = \frac{3}{t^2-2t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-2}$$

$$x^{(n)}(t) = \frac{A(-1)^n n!}{t^{n+1}} + \frac{B(-1)^n n!}{(t-2)^{n+1}}$$

$\lim_{t \to -\infty} y(t) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$

$\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{t \to -\infty} x(t) = 0$

$\lim_{t \to 0^+} y(t) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{t \to 0^+} x(t) = -\infty$

$\lim_{t \to 0^-} y(t) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{t \to 0^-} x(t) = +\infty$

$\lim_{t \to 2^-} x(t) = -\infty$

$\lim_{t \to 2^+} x(t) = +\infty$

t	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x'		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
x	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$
y'		$+$	||			$+$			

$x'(1) = 0$ et $y'(1) = 4 \Rightarrow$ tangente verticale au point $M(1)$

$\lim\limits_{t \to 2} x(t) = \infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{t \to 2} y(t) = 1/2$

- $y = 1/2$ est assymptote

$\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = \infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$

- $x = 0$ est assymptote

$\lim\limits_{t \to 0} x(t) = \infty$ et $\lim\limits_{t \to 0} y(t) = \infty$

$$\lim_{t \to 0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{(t^2-3)(t-2)}{3} = 2$$

$$\lim_{t \to 0} y(t) - 2x(t) = \frac{\cancel{t}(t^2-2t-3)}{\cancel{t}(t-2)} \xrightarrow[t \to 0]{} 3/2$$

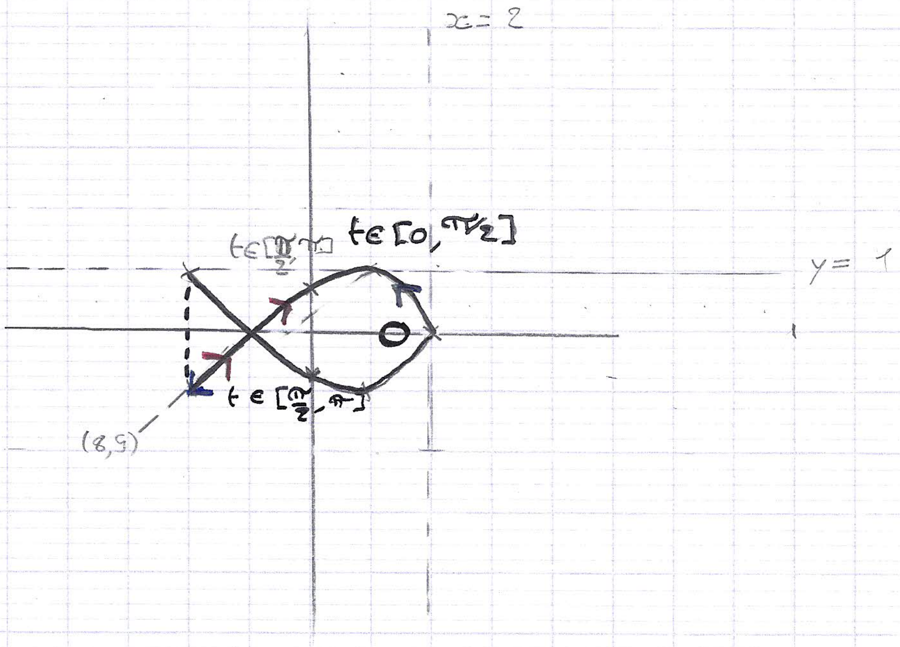
La droite d'équation $y - 2x - 3/2 = 0$ est une asymptote à la courbe

Les vecteurs $(x^{(2)}(\pi/2), y^{(2)}(\pi/2))$ $\begin{cases} \neq (0,0) \\ \text{pas colinéaires avec } (x^{(4)}(\pi/2), y^{(4)}(\pi/2)) \end{cases}$ A22

Rebroussement de second espèce.

Au point $M(0)$ $\left.\begin{array}{l} x'(0) = 0 \\ y'(0) \neq 0 \end{array}\right\}$ tangente verticale.

Au point $M(\pi/2)$ tangente horizontale



Dénombrement

A23

Exercice 1

(1) Pas de Répétition
Ordre non important

$$C_{52}^{5} = \frac{52.51.50.49.48}{5!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = 2\ 598\ 960$$

(2) 4 as
48 autres

⇒ 52 cartes avoir un as il y a 4 possibilités : $C_4^1 = 4$

⇒ On veut un seul as ⇔ tirer une carte parmi les 4 as et 4 parmi les 48

$$\Rightarrow C_4^1\, C_{48}^4 = 4 . \frac{48!}{4!(48-4)!}$$

$= 778\ 320$

(3) 4 valets
48 autre

⇒ On veut au moins un ~~seul~~ as donc on tire 1 carte parmi les 4 et 4 parmis les 51

⇒ faux (plusieur comptage)

- Avoir au moins un valet ⇔ avoir exactement deux valets ou avoir exactement 3 valets ou avoir exactemment 4 valets.

- Avoir au moins un valet c'est le complémentaire de n'avoir aucun valet.

$$card(A) + card(\Omega \setminus A) = card(\Omega)$$

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$
$$-\text{card}(A \cap B) = \text{card}(A \cup B) - \text{card}(A) - \text{card}(B)$$
$$\text{card}(A \cap B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cup B)$$

- A_k = avoir exactement k valets $k = 1, 2, 3, 4$

$\text{card}(A_1) = C_4^1 C_{48}^4$

$\text{card}(A_2) = C_4^2 C_{48}^3$ $\Rightarrow \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \text{card}(A_3)$

$\text{card}(A_3) = C_4^3 C_{48}^2$ $+ \text{card}(A_4)$

$\text{card}(A_4) = C_4^4 C_{48}^1$

- B = Il n'y a aucun valet = on retire les 5 cartes parmi les 48. $\text{card}(B) = C_{48}^5$

C = le complementation de B = Il y a au moins un valet. $\text{card}(C) + \text{card}(B) = C_{52}^5 \Rightarrow \text{card}(C) = C_{52}^5 - C_{48}^5$

(4) A = avoir au moins une dame ou un roi

$\bar{A}$ = complementaire de A = avoir 0 dame ou 0 roi $= B \cup C$

avec B = 0 dame et C = 0 roi

1 dame 1 roi 3 autres $\Rightarrow C_4^1 C_4^1 C_{44}^3$

2 dames 1 roi 2 autres $\Rightarrow C_4^2 C_4^1 C_{44}^2$

3 dames 1 roi 1 ~~roi~~ autres $\Rightarrow C_4^3 C_4^1 C_{44}^1$

4 dames 1 roi $\Rightarrow C_4^4 C_4^1$

2 rois 1 dame 2 autres $\Rightarrow C_4^2 C_4^1 C_{44}^2$

2 rois 2 dames 1 autre $\Rightarrow C_4^2 C_4^2 C_{44}^1$

2 rois 3 dames $\Rightarrow C_4^2 C_4^3$

3 rois 1 dames 1 autre $\Rightarrow C_4^3 C_4^1 C_{44}^1$

3 rois 2 dames $\Rightarrow C_4^3 C_4^2$

4 rois 1 dame $\Rightarrow C_4^4 C_4^1$

C = avoir au moins une dame

$$\text{card}(C) = \sum_{\substack{k=1 \\ j=1}} \text{card}(D_k R_j)$$

$card(B) = C_{48}^{5}$ $\quad$ $card(C) = C_{48}^{5}$

$card(\bar{A}) = card(B \cup C) = card(B) + card(C) - card(B \cap C)$

$B \cap C$ = avoir 0 dames et 0 roi $= C_{44}^{5}$

$\Rightarrow card(\bar{A}) = card(B \cup C) = card(B) + card(C) - card(B \cap C)$

$= 2C_{48}^{5} - C_{44}^{5}$

$card(A) = C_{52}^{5} - card(\bar{A})$

$= C_{52}^{5} - 2C_{48}^{5} + C_{44}^{5}$

Exercice 2 $\quad E = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$

le nombre d'applications bijectives de E dans E.

Si E est une ensemble fini et $f : E \to E$ alors

f est bijective ssi f est injective si f est injective

si f est injective $E = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$

Comme f est injective alors si $x_i \neq x_j$ on a $f(x_i) \neq f(x_j)$

$\Rightarrow card\{f(x_1), \dots, f(x_m)\} = card\, f(E)$

comme $f(E) \subset E$
$\quad$ $card(f(E)) = card\, E$ $\Big] \Rightarrow f(E) = E$

~~$card = C_{52}^{5} - c$~~

Soit E et F deux ensembles tels que $card(E) = m$ et $card(F) = p$

$f : E \to F$

pour que f soit injective il est nécessaire que

$m = card(F) \geq card(E) = p$ le nombre d'applications injective de E dans $F = A_m^p$

En particulier si $p = m$ le nombre d'applications injectives de E dans $E = A_m^m = m!$

Donc le nombre d'applications bijectives de $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$ dans $\{1, 2, \dots, 12\} = 12!$

(1) L'ensemble d'applications bijectives de $\{1, 2, \dots, 12\}$ dans $\{1, 2, \dots, 12\}$ tel que $f(\{2, 4, 6, 8, 10, 12\})$
$= \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ et donc $f(\{1, 3, 5, 7, 9, 11\})$
$= \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
$\Rightarrow 6!^2$

(2) $\{\cancel{1}, 3, 6, 9, 12\} = \{3, 6, 9, 12\}$
$\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$
$4!\,8!$

<u>Exercice 3</u> $E = \{1, 2, \dots, n\}$
$A = \{1, 2, \dots, p\}$ $p \leq n$
Soit B une partie de E qui contient exactement 1 élément de A

$\Leftrightarrow B = \{k\} \cup C$ $k = 1, 2, \dots, p$
avec C une partie de $E \setminus A = \{p+1, \dots, n\}$
car $(E \setminus A) = n - p$
Donc il y 2^{n-p} parties C de $(E \setminus A)$
le nombre de parties de E contenant exactement un élément de A
$= 2^{n-p} + 2^{n-p} + \dots + 2^{n-p}$
$= p\,2^{n-p}$

<u>Exercice 4</u> 14 livres 4 M 3 P
5 E 2 A

(1) Il y a 14! façon ~~de~~ de les ordonner
(2) 2! pour A 4! pour M
5! pour E 3! pour P
Il y a 2! 5! 4! 3! façon
(3) On peut 4! façon d'ordonner les matières
$\Rightarrow 4!\,2!\,5!\,4!\,3!$

$$A_m^p = \frac{m!}{(m-p)!}$$

A24

Exercice 5

1) $\cancel{C_4^3}$ $\cancel{C_3^1}$ $C_4^3 C_{28}^2$

2) $C_8^3 C_{24}^2$

3) $2\, C_{16}^3\, C_{16}^2$

On tire 3 rouges parmi

16 R $\Rightarrow C_{16}^3$

On tire 2 noires parmis

16 N $\Rightarrow C_{16}^2$

Et on tire 3 noires parmi

16 N $\Rightarrow C_{16}^3$

on tire 2 rouges parmi

16 R $\Rightarrow C_{16}^2$

Exercice 7

(1) 8 boules

$\frac{5}{8}$ b $\frac{3}{8}$ R

Urne 5B 3R

$R = R_1\ R_2\ R_3$

$N = 8$ R $m = 3$

$N_1 = 5$ B

$N_2 = 3$ B B

(1) nombre des cas possible est $A_8^3 = 336$

(2) $\left.\begin{array}{l} m_1 = 0 \\ m_2 = 3 \end{array}\right\}$ $6\left(\frac{m!}{m_1!\,m_2!}\, A_{N_1}^{m_1} A_{N_2}^{m_2}\right)$ d'avoir 3 boules rouges

B B B

(3) $\left.\begin{array}{l} m_1 = 1 \\ m_2 = 2 \end{array}\right\}$ 90 d'avoir 2 rouges

(4) 0

A B C

A C B

B A C

B C A

C A B

C B A

Exercice 8

Successivement

Remise

SR 4N 3V

$R = 3$

$N = 12$

$n = 3$

$N_1 = 5$

$N_2 = 4$

$N_3 = 3$

1) $12^3 = 1728$

2) $n_R = 3$

$n_N = 0$

$n_V = 0$

Il y a 125 possibilités

Exercice 7

0,03 défec hasard + remise

10 pièce X = nbr pièce défectueuse

A = Pièce défect $p = 3/100$

B = Pièce ok $1-p = 97/100$

On répète cette épreuve 10 fois, de façon indé

$$p(X=k) = C_{10}^{k}\left(\frac{3}{100}\right)^{k}\left(\frac{97}{100}\right)^{10-k}$$

$$p(X=0) = C_{10}^{0}\left(\frac{97}{100}\right)^{10} = 0,73$$

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X=0) = 0,27$$

$$E(X) = np = 0,3$$

$$V(X) = np(1-p) = \frac{291}{1000}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 0,528$$

Exercice 8

$A \rightarrow 10\%$ $\rightarrow 3,5\%$

$B \rightarrow 40\%$ $\rightarrow 1,5\%$

$C \rightarrow 50\%$ $\rightarrow 2,2\%$

$p(A) = 1/10$

$p(B) = 4/10$

$p(C) = 1/2$

$p_A(D) = 0,035$

$p_B(D) = 0,015$

$p_C(D) = 0,022$

$p(D \cap C) = P_C(D) \times P(C) = 0,011$

$p(D) = p(D \cap C) + p(D \cap A) + p(D \cap B)$

$= 0,0205$

$$p_D(C) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = 0,54$$

$$P(X=0) = C_{10}^{0}(1-p)^{10}$$

$$= 0,81$$

$\Rightarrow P(X \geq 1) = 0,19$

N_1 1 R successivement

N_2 2 R sans remise card(Ω)

N_3 3 V $n = 2$ $= 30$

① Proba de A, B, C ?

A → 2 V ; B → ≥ R ; C → 2 Boules ≠

② succes avec rem

③ simultanément

①. $n_{N_2} = 0$ $\qquad \dfrac{n!}{n_{1/2}!\, n_3!} A_{N_1/N_2}^{n_1/n_2} A_{N_3}^{n_3} = 6$

$n_3 = 2$

→ 1/5

$n_{1/3} = 1$ $\qquad n_{1/3} = 0$ $\qquad n_{1/3} = 2$

$n_2 = 1$ $\qquad n_2 = 2$ $\qquad n_2 = 0$

$= 16$ $\qquad = 2$ $\qquad \to \frac{3}{5}$

$n_1 = 0$ $\qquad n_1 = 0$

$n_2 = 0$ $\qquad n_2 = 2$

$n_3 = 2$ $\qquad n_3 = 0$

$=$ $\qquad =$

Probabilité

Une urne contient 6 boules rouges, 3 boules noires et 3 boules blanches.

(1) On tire simultanément 4 boules de l'urne
Soit X la va "nombre de boules rouges"
Déterminer la loi de X, $E(X)$ et $V(X)$

(2) On tire successivement 3 boules de l'urne
Soit X la va "nombre de boules blanches tirées"
Déterminer la loi de Y, $E(Y)$ et $V(Y)$

---

(1) l'univers Ω = l'ensemble des résultats possibles.

$$card(\Omega) = C_{12}^{4}$$

• B_0 l'évènement "avoir ~~une~~ 0 boule ~~s~~ rouge"

$$card(B_0) = C_6^4$$

$$p(B_0) = \frac{card(B_0)}{card(\Omega)} = \frac{C_6^4}{C_{12}^4}$$

$$p(X=0) = p(A) = \frac{C_6^4}{C_{12}^4} = \frac{\frac{6!}{4!\,2!}}{\frac{12!}{4!\,8!}} = \frac{6!\,8!}{2!\,12!} = \frac{1}{2}\,\frac{6!}{12\times11\times10\times9}$$

$$= \boxed{\frac{1}{33}}$$

• B_1 l'évènement "avoir exactement 1 boule rouge"

$$card(B) = C_6^1 C_6^3$$

$$p(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{C_6^1 C_6^3}{C_{12}^4} = \frac{8}{33}$$

• B_k l'évènement "avoir k boules rouges"

$$card(B_k) = C_6^k C_6^{4-k}$$

$p(B_2) = \frac{15}{33}$ $\quad$ $p(B_3) = \frac{8}{33}$ $\quad$ $p(B_4) = \frac{1}{33}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \, p(X = x_i)$$

$$= 0\, p(X=0) + 1.\, p(X=1) + 2\, p(X=2) + 3\, p(X=3) + 4\, p(X=4)$$
$$= 2$$

$$E(X^2) = 0^2 p(X=0) + 1^2 p(X=1) + 2^2 p(X=2) + 3^2 p(X=3) + 4^2 p(X=4)$$
$$= \frac{52}{11}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{8}{11} \qquad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

(2) 3 boules — 6 rouges, 3 noires, 3 blanches — Remise

$n = 3$ soit X le nbre de boules blanches tirées

$$p = \frac{n}{tot} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow p(X=k) = C_3^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{3-k}$$

$$\Rightarrow E(X) = np = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow V(X) = np(1-p) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

Pour le 1^{er} tirage, soit Y_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la boule tirée est blanche et zéro si non.

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

$$p(X_i = 1) = \frac{1}{4}$$

Donc $Y_i = \mathcal{B}(1/4)$ les tirages sont indépendants

donc $Y = \mathcal{B}(3, 1/4)$

$p(Y=k) = C_3^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(1-\frac{1}{4}\right)^{3-k}$ $k=0,1,2,3$

$E(Y) = \frac{3}{4} = np$

$V(Y) = np(1-p) = \frac{9}{16}$

Une urne contient 5 boules rouges, 4 noires, 3 vertes.
Tirage de 3 boules avec remise

(1) proba 3 rouges (4) 2 vertes + 1 noire

(2) 2 rouges (5) 3 boules identiques

(3) au moins 1 (6) 3 boules ≠

$card(\Omega) = 12^3$

A = 3 boules rouges

$card(A) = 125$, $p(A) = \frac{125}{12^3}$

B = avoir 2 rouges

$card(B) = 525$, $p(B) = \frac{525}{12^3}$

C = au moins 1 rouge

$card(C) = 12^3 - 343$, $p(C) = 1 - \frac{343}{12^3}$

D = avoir 2 boules vertes et une noire

$card(D) = 108$, $p(D) = \frac{1}{16}$

E = 3 boules de couleur ≠

$\Rightarrow 3!.5.4.3 = 360$

$p(E) = \frac{360}{12^3}$

Exercice 2

Il s'agit d'une épreuve binomiale de paramètre $n = 2$, $p = 1/2$.

En effet, le premier lancé est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 1/2$

La seconde épreve est aussi de Bernoulli de paramètre $p = 1/2$ qui est indé.

$$X = \mathcal{B}(2, 1/2) \qquad k = 0, 1, 2$$

$$P(X=k) = C_2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2-k}$$

$E(X) = np = 1$

$V(X) = np(1-p) = 1/2$

A	B	C
1B	2N	3B
3N	2B	1N

Exercice 3

Soit X le nbr de boules blanches

l'univers Ω = l'ensemble des résultats

$$card(\Omega) = 4^3$$

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

$P(X=0) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$

~~$P(X=1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{3}{4}$~~

$P(X=1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$
$= \frac{13}{32}$

$P(X=2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{13}{32}$

$P(X=3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{32}$

$X = k$	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{3}{32}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{3}{32}$

$F(x) = P(X \leq x) =$

0	$x < 0$
$3/32$	~~$x < 0$~~ $0 \leq x < 1$
$16/32$	$1 \leq x < 2$
$29/32$	$2 \leq x < 3$
1	$x \geq 3$

Exercice 4

D_2 \ D_1	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$E(Z) = \frac{10}{36} + \frac{16}{36} + \frac{18}{36} + \frac{16}{36} + \frac{6}{36}$

$= \frac{35}{18}$

$E(Z^2) = \frac{10}{36} + 2^2\frac{8}{36} + 3^2\frac{6}{36} + 4^2\frac{4}{36}$

$+ 5^2\frac{2}{36} = \frac{35}{6}$

$V = \frac{665}{324}$

Z peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5

$P(Z=0) = \frac{1}{6}$

$P(Z=1) = 10/36$

$P(Z=2) = \cancel{8}\ \cancel{4/}\ 2/9$

$P(Z=3) = 1/6$

$P(Z=4) = \cancel{8}\ 1/9$

$P(Z=5) = 1/18$

$Z = k$	0	1	2	3	4	5
$P(Z=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

0	$x < 0$
$1/6$	$0 \leq x < 1$
$4/9$	$1 \leq x < 2$
$2/3$	$2 \leq x < 3$
$15/18$	$3 \leq x < 4$
$17/18$	$4 \leq x < 5$
	~~$5 \leq x < 6$~~
1	$x \geq \cancel{6}$

Exercice 5

20 sujets — sans remise

3 tirés → 12 révisés

→ 8 non révisés

$card(\Omega) = C_{20}^{3} = 1140$

$card(X=0) = C_{12}^{0}\, C_{8}^{3} = 56$ — $\frac{14}{285}$

$card(X=1) = C_{12}^{1}\, C_{8}^{2} = 336$ — $\frac{28}{95}$

$card(X=2) = C_{12}^{2}\, C_{8}^{1} = 528$ — $44/95$

$card(X=3) = C_{12}^{3}\, C_{8}^{0} = 220$ → $11/57$

Exercice 6

10 livres — 5 Am, 2 AP, 3 R — 5 tirés — X = russe

$card(\Omega) = C_{10}^{5} = 252$

$card(0) = C_{5}^{0}\, C_{7}^{5} = 21 \Rightarrow 1/12$

$card(1) = C_{5}^{1}\, C_{7}^{4} = \Rightarrow 5/12$

$card(2) = C_{5}^{2}\, C_{7}^{3} = \Rightarrow 5/12$

$card(3) = C_{5}^{3}\, C_{7}^{2} = \Rightarrow 1/12$

$X=k$	0	1	2	3
$p(X=k)$	1/12	5/12	5/12	1/12

$$F(x) = p(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/12 & 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & 1 \leq x < 2 \\ 11/12 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$