

Exercice Analyse 12/09

0

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

- 1) $\forall R \geq 1$, calculer $\int_1^R \frac{1}{x^\alpha} dx := I_R$
2) Discuter selon les valeurs de α de l'existence de $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_R$.

$$1) \text{ Pour } \alpha \neq 1 : I_R = -\frac{1}{\alpha-1} \left[\frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_1^R$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\} = \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{R^{\alpha-1}} - 1 \right)$$

$$\text{Pour } \alpha = 1 : I_R = \left[\ln x \right]_1^R = \ln R$$

2)

$$I_R = \begin{cases} \ln(R) & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{R^{\alpha-1}} - 1 \right) & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Si } \alpha = 1, I_R = \ln(R) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} +\infty \text{ quand } R$$
$$\text{Si } \alpha > 1 \text{ alors } \frac{1}{R^{\alpha-1}} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \text{ de } \lim_{R \rightarrow +\infty} I_R = \frac{1}{\alpha-1}$$

$$\text{Si } \alpha < 1 \text{ alors } \frac{1}{R^{\alpha-1}} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \text{ de } \lim_{R \rightarrow +\infty} I_R = \frac{1}{\alpha-1}$$

Exercice 1

- 1) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$
2) Soit $u_n = \frac{1}{2n^2}, l = 0$

$$\text{On fixe } \varepsilon > 0, |u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2n^2} < \varepsilon$$
$$\Rightarrow n > \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}}. \text{ Il suffit donc de prendre } N > \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}}$$

3) (u_n) bornée si $\exists M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$
Supposons que (u_n) converge. En appliquant la
définition avec $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$,
 $|u_n - l| \leq 1$. En particulier $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq |l| + 1$

TD - Analyse

1

Exercice 2

1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = p \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - p| < \varepsilon (*)$

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = p$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = p$ montrons que

$$\begin{aligned} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_1, n \geq N_1, |u_n - p| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N_2, n \geq N_2, |u_{2n+1} - p| < \varepsilon \\ \text{Si } n \geq N = N_1 \Rightarrow 2n \geq N \text{ et } * \Rightarrow |u_{2n} - p| < \varepsilon \\ \text{et } n \geq N = N_2 \Rightarrow 2n+1 \geq N \text{ et } * \Rightarrow |u_{2n+1} - p| < \varepsilon \end{aligned}$$

●

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = p$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = p$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, n \geq N, |u_{2n} - p| = |u_{2n} - p| < \varepsilon ** \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon), n \geq N_2, |u_{2n+1} - p| = |u_{2n+1} - p| < \varepsilon *** \end{aligned}$$

$$n \geq N_2 \Rightarrow 2n+1 \geq 2N_2+1$$

$$n \geq N_1 \Rightarrow 2n \geq 2N_1$$

$$\text{pour } R \geq \max(2N_2, 2N_1+1)$$

$$|u_R - p| < \varepsilon$$

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N = \max(2N_2, 2N_1+1)$ tel que si $R \geq N$ alors ** et *** $\Rightarrow |u_R - p| < \varepsilon$

Exercice 3 Soit (u_n) est une suite telle que (u_{2n}) converge alors ~~que~~ u_n converge.
deme ~~$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$~~ (u_n) converge vers p
et u_n croissant donc $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_{2m} \leq u_{2m+1} \leq u_{2(2m+1)} \quad \text{on} \quad u_{2m} \rightarrow l \quad \text{et} \quad u_{2(m+1)} \rightarrow l$$

donc (Comparaïson) $u_{2m+1} \rightarrow l$ donc (u_{2m}) et (u_{2m+1}) cv vers la même limite $\Leftrightarrow (u_m)$ cv vers l .

$$\begin{aligned} \text{On sait } \forall \varepsilon > 0 \exists N, m \geq N, |u_{2m} - l| \leq \varepsilon \\ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon), m \geq N, l - \varepsilon \leq u_{2m} \leq u_{2m+1} \leq l + \varepsilon \\ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N, m \geq N, l - \varepsilon \leq u_{2m} \leq u_{2m+1} \leq l + \varepsilon \\ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N, m \geq N, |u_{2m+1} - l| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Exercice 4

$$u_{n+1} = u_n + \frac{a}{u_n} \quad a > 0$$

u_0 donnée

On suppose que $u_n \rightarrow l$, montrons que $l \neq 0$
 Supposons que $(l=0)$ $u_n \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{a}{u_n} \rightarrow \infty$ on a $a > 0$
 $\Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right) \rightarrow +\infty$

abandonne car $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Si $u_n \rightarrow l$ alors $u_{n+1} \rightarrow l$ comme $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right)$
 $\Rightarrow \frac{1}{2} \left(l + \frac{a}{l} \right) \Rightarrow \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \frac{a}{l} \Rightarrow l^2 = a \Rightarrow l = \sqrt{a}$

2) a) On suppose que $u_0 > 0$

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right) - \sqrt{a}$$

$$= \frac{1}{2} (u_n^2 + a - 2u_n \sqrt{a})$$

$$= \frac{1}{2} (u_n - \sqrt{a})^2$$

Montrons que $u_n \geq 0, \forall n$
 Par récurrence l'hypothèse est vraie pour $n=0$
 car $u_0 > 0$

Supposons que $u_n \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}) = u_{n+1} \geq 0$
 $\Rightarrow u_{n+1} - \sqrt{a} \geq 0, \forall n$

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}) - u_n$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}u_n^2 = -\frac{1}{2}(u_n - \sqrt{a})(u_n + \sqrt{a})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{a}^2 - u_n^2) \text{ d'où } u_{n+1} - u_n \leq 0 \text{ donc } (u_n) \searrow$$

c) u_n est minorée car $u_n \geq \sqrt{a}$, u_n est décroissante
 donc u_n converge.

3) a) voir 2) a) $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}u_n + \frac{a}{2u_n} - \sqrt{a}$

b) Or a $u_n > \sqrt{a}$ $= \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2$
 $\frac{1}{2u_n} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$

$$\frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2 < \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n - \sqrt{a})^2$$

c) $(u_n - \sqrt{a}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (u_0 - \sqrt{a})^{2^{n+1}}$

Par récurrence

$$I: (u_0 - \sqrt{a}) \leq \left(\frac{1}{2}\right) (u_0 - \sqrt{a})^2$$

Ceci donne l'hypothèse de récurrence pour $n=1$

Supposons que

$$(u_n - \sqrt{a}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} (u_0 - \sqrt{a})^{2^{n+1}}$$

$$\begin{aligned}
 (u_{n+1} - \sqrt{2}) &\leq \frac{1}{2} (u_n - \sqrt{2})^2 \quad \text{comme } (u_n - \sqrt{2})^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} \\
 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} (u_0 - \sqrt{2})^{2^{n+1}} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}} (u_0 - \sqrt{2})^{2^{n+1}} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}} (u_0 - \sqrt{2})^{2^{n+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}} (u_0 - \sqrt{2})^{2^{n+1}}
 \end{aligned}$$

Exercice 5

On rappelle que $\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \cos(x) \sin(y)$

$$\Rightarrow \sin(n+1) - \sin(n-1) = 2 \cos(n) \sin(1)$$

Supposons que $\sin(n)$ CV vers P .

$$\Rightarrow \sin(n+1) - \sin(n-1) = 2 \cos(n) \sin(1)$$

$$P - P = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(n) \sin(1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(n) = 0$$

~~$$\begin{aligned}
 \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
 \cos(n+1) &= \cos(n) \cos(1) - \sin(n) \sin(1)
 \end{aligned}$$~~

$$\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos(n) \sin 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n+1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin n \cos(1) + P \sin 1$$

$$\text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n) = 0 \quad \text{car si } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n) = P \neq 0$$

$$\text{a } \cos(1) = 1 \text{ faux.}$$

Si $\sin(n)$ CV elle CV vers 0 si $\cos(n)$ CV, converge vers 0.

4) $\cos^2(n) + \sin^2(n) = 1 \Rightarrow 1 = 0 + 0$ absurde
donc $\cos(n)$ et $\sin(n)$ n'ont pas de limite.

Exercice 6

On suppose que (u_n) converge vers l .

① $\forall \varepsilon > 0 \exists N, n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$. On pose

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$$

Montrons que (v_n) converge vers l .

$$v_n = \lim$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et montrons qu'il existe N_1 telle que si $n \geq N_1$

$$|v_n - l| \leq \varepsilon$$

$$v_n - l = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \right) - l$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - l) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N (u_k - l) + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n (u_k - l)$$

$$|v_n - l| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |u_k - l| + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n |u_k - l|$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n |u_k - l| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n \varepsilon$$

car pour $k \geq N+1$ on a

$$|u_k - l| \leq \varepsilon$$

$$\textcircled{2} \leq \frac{1}{n} (n - N) \varepsilon \leq \varepsilon$$

$$\text{car } \frac{n - N}{n} \leq 1 \text{ pour } n \geq N$$

On veut montrer qu'il existe N_2 tel que pour $n \geq N_2$

$$\textcircled{1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |u_k - l| \leq \varepsilon. \text{ Comme } (u_n) \text{ CV alors } \exists M$$

$$\text{tel que } |u_n| \leq M = C$$

$$\Rightarrow |u_n - l| \leq |u_n| + |l| \leq M + |l| \forall n$$

$$\textcircled{1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |u_k - l| \leq \frac{C}{n} \sum_{k=1}^N 1 = \frac{C \cdot N}{n}$$

$$\text{On doit avoir } \frac{CN}{n} \leq \varepsilon \Rightarrow n \geq \frac{CN}{\varepsilon}$$

$$\text{On choisit } N_2(\varepsilon) \geq \frac{CN}{\varepsilon} \text{ pour } n \geq N_2 \text{ on a}$$

$$\textcircled{1} \leq \varepsilon \text{ donc pour } n \geq \max(N_2, N) = N_1$$

$$|v_n - p| \leq \textcircled{1} + \textcircled{2} \leq 2\varepsilon \Rightarrow \lim v_n = p$$

$$\text{Premons } u_n = (-1)^n$$

$$v_n = \frac{1}{n} (-1 + 1 \cdot (-1) + \dots + (-1)^n)$$

$$\text{donc } |v_n| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow v_n \text{ converge}$$

Exercice 7 On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$. Pour hypothèse $v_n \rightarrow p$

$$\text{D'après Cauchy : } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k \rightarrow p$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} v_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \frac{1}{n} [(u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_2 - u_1)]$$

$$= \frac{1}{n} [(u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_2 - u_1)] = \frac{u_n}{n} - \frac{u_1}{n}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} v_k \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{n} - \frac{u_1}{n} \right) = p$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1}{n} = p$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = p$$

Exercice 8

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m k(u_k - u_{k-1}) &= m(u_m - u_{m-1}) + (m-1)(u_{m-1} - u_{m-2}) + \dots + \\ &\quad \underbrace{2(u_2 - u_1)}_{\text{}} + u_1 - u_0 \\ &= m u_m - u_{m-1} - u_{m-2} - \dots - u_1 - u_0 \\ &= m u_m - \sum_{k=0}^{m-1} u_k\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m} \sum_{k=0}^m k(u_k - u_{k-1}) = u_m - \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u_k$$

On pose $u_k = k(u_k - u_{k+1})$ comme $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$
D'après l'exo 6: $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m k(u_k - u_{k+1}) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m k(u_k - u_{k+1}) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left[u_m - \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u_k \right] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} u_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u_k = p$$

Séries numériques

Exercice 1 $S_m = \frac{m(m+1)}{2}$

Exercice 2

a) $u_m = e^{im} = (e^i)^m$
donc $\sum_{j=0}^m u_j = \frac{1 - (e^i)^{m+1}}{1 - e^i}$ Montrons que $(e^i)^m$ n'a pas

de limite. Supposons par l'absurde qu'il existe p tel que $\lim_{m \rightarrow +\infty} (e^i)^m = p$ on a alors $\lim_{m \rightarrow +\infty} (e^i)^{m+1}$

$$= \lim_{m \rightarrow +\infty} (e^i)^m \cdot e^i = p \cdot e^i \neq p. \text{ Donc c'est absurde,}$$

$\sum u_m$ diverge.

$$\begin{aligned} \underline{b)} \quad \sum \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{c)} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sin(k) &= \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Im}(e^{ik}) \\ &= \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik} = \operatorname{Im} \left(\frac{1 - e^{in}}{1 - e^i} \right) \\ &= \frac{\operatorname{Im} \left((1 - e^i)(1 - e^{in}) \right)}{2(1 - \cos(1))} \\ &= \frac{1}{2} (-\sin(n) + \sin(1) + \sin(n-1)) \frac{1}{2(1 - \cos(1))} \end{aligned}$$

Moments que $\sin(n) - \sin(n-1)$ diverge

$$\begin{aligned} \sin(a) - \sin(b) &= 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin(n) - \sin(n-1) &= 2 \cos\left(\frac{2n-1}{2}\right) \sin\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{d)} \quad \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)(k+2)} &= \frac{1}{3} \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} - \sum_{p=4}^{n+2} \frac{1}{p} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \sum_{p=4}^{n-1} \frac{1}{p} - \sum_{p=4}^{n+2} \frac{1}{p} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{11}{18} \end{aligned}$$

$$\underline{e)} \quad p_n \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \sim -\frac{1}{n^2} \Rightarrow \text{CV pour niemann}$$

$$\begin{aligned} p_n \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) &= p_n(n+1) + p_n(n-1) - 2p_n(n) \\ \sum' p_n \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) &= p_n(2) - 2p_n(2) + p_n(3) + p_n(2) - 2p_n(3) \\ &\quad + p_n(4) + \dots + p_n(n-2) - 2p_n(n-1) + \\ &\quad + p_n(n) + p_n(n-1) - 2p_n(n) + p_n(n+1) \end{aligned}$$

$$= P_m \left(1 + \frac{1}{m}\right) - P_m(2)$$

S#

Exercice 3

$$\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \sum_{p=0}^n \underset{CV}{u_{2p}} + \sum_{p=0}^n \underset{DV}{u_{2p+1}} \Rightarrow \text{La suite } \left(\sum_{k=0}^{2n+1} u_k\right)_n \text{ diverge}$$

$\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)_n$ ne CV pas. (S_{m+1}) est une suite extraite de (S_m) .

On ite suite extraite d'une suite CV est CV. Donc (S_m) ne CV pas.

Exercice 4

En particulier (u_n) est bornée, c-à-d il existe $M > 0$

$$\text{tq } \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq M$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n^2 \leq M \quad \begin{matrix} \uparrow \\ M_n \geq 0 \end{matrix}$$

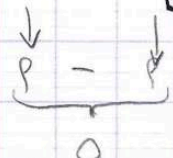
$$\begin{aligned} \text{Donc } \sum_{n=0}^N u_n^2 &\leq M \sum_{n=0}^N u_n \\ &\leq M \sum_{n=0}^{+\infty} u_n < +\infty \end{aligned}$$

Exercice 5

On va montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = 0$

$$\text{Soit } S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

$$S_n - S_{[n/2]} = \sum_{k=[n/2]+1}^n u_k$$



$$\text{Soit } R_n = \sum_{k=[n/2]+1}^n u_k$$

$$R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{aligned} R_n &\geq (n - [n/2] - 1) u_n \\ &\geq \frac{n}{2} u_n \\ n u_n &\leq 2 R_n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Soit u_n défini par $u_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n = R^2, R \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On a $u_n \geq 0$ mais u_n n'est pas décroissante
 $\lim_{R \rightarrow +\infty} \sum_{R^2} u_{R^2} = 1$ et une suite extraite de nu_n

donc nu_n ne tend pas vers 0.

Donc $nu_n \not\rightarrow 0$ et ce que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge?

$$\sum_{R=1}^{K^2} u_R = \sum_{R=1}^K u_{R^2}$$

On $\lim_{K \rightarrow +\infty} \sum_{R=1}^K \frac{1}{R^2} < +\infty$ donc $\sum_{R=1}^{K^2} u_R \leq \sum_{R=1}^{\infty} \frac{1}{R^2}$

Pour $K \geq 1$ on a $K^2 \geq K$

Donc $S_K \leq S_{K^2}$

Donc $S_K \leq \sum_{R=1}^{\infty} \frac{1}{R^2}$

Exercice 8: Série de Bertrand

Montrer que $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln n)^{\beta}}$ convergessi: $\beta > 1$

$= \sum_{n \geq 2} f(n)$, $f: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{x (\ln x)^{\beta}}$

Th de comparaison série / intégrale

$\Rightarrow \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(p_n n)^\beta}$ est de même nature que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(p_n x)^\beta} dx$

Pon changement de variable $u = p_n(x)$:

$$\int_{p_n 2}^{p_n N} \frac{1}{u^\beta} du = \left[\frac{1}{1-\beta} u^{1-\beta} \right]_{p_n 2}^{p_n N} = \frac{1}{1-\beta} (p_n(N))^{1-\beta} - \frac{1}{1-\beta} (p_n(2))^{1-\beta}$$

Cela converge si $\beta > 1$

Exercice 6

$$I_N = \int_1^N x^a dx$$

1) $I_N = \frac{1}{1+a} (N^{a+1} - 1)$. $(I_N)_N$ cv si $a < -1$

2) $\exists$ cte $|f(x)| \leq C x^{-a}$ est ce que $\int_1^N f(x) dx$ cv ?

$$-\int_1^N x^{-a} dx \leq \int_1^N f(x) dx \leq \int_1^N x^{-a} dx$$

Rappel: Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx$ converge. Alors $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge

Ici $|f(x)| \leq x^{-a}$ avec $a > 1$

Donc $\int_1^{\infty} |f(x)| dx$ converge $\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx$ cv

Exercice 7

$$\forall n \geq 2, \sqrt{n^3 - n - 1} \gg n^{3/2}$$

$$\text{donc } \frac{p_n(n)}{\sqrt{n^3 - n - 1}} \sim \frac{p_n(n)}{n^{3/2}} \quad \varepsilon > 0$$

$$= \frac{p_n(n)}{n^{3/2 - \varepsilon} \times n^\varepsilon} \quad 3/2 - \varepsilon > 1$$

$$\frac{p_m(c)}{m^{3/2-\varepsilon}} \leq \frac{c}{m^{3/2-\varepsilon}}$$

Par comparaison on a la convergence.

Convergence de $\sum_{n \geq 2} \frac{\sin(1/p_m(m))}{m} \sim \sum_{n \geq 2} \frac{1}{m p_m(m)}$ par

Leibniz diverge car pour $n \geq 2$ on a $\sin \frac{1}{p_m(m)} > 0$ on a donc 2 séries positives

Par théorème de comparaison il vient $\sum_n \frac{\sin 1/p_m(m)}{m}$ diverge

$$\begin{aligned} 2) \text{ Par d'Alembert } \frac{u_{m+1}}{u_m} &= \frac{(m+1)^2}{\sqrt{m!}} \times \frac{\sqrt{(m-1)!}}{m^2} \\ &= \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2 \times \sqrt{\frac{1}{m}} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \text{ CV} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ Par d'Alembert } \frac{u_{m+1}}{u_m} &= \left(\frac{(m+1)!}{m!}\right)^2 \times \frac{(2m)!}{(2m+2)!} \\ &= \frac{1}{4} \Rightarrow \text{CV} \end{aligned}$$

$$4) \text{ Par Cauchy : } \sqrt[m]{u_n} = \frac{n}{2^n} \rightarrow 0 \text{ donc CV}$$

$$\begin{aligned} 5) \text{ Par d'Alembert } \frac{u_{m+1}}{u_m} &= \frac{(m+1)! \times m^n}{(m+1)^{(m+1)} \times m!} \\ &= \frac{m^n}{(m+1)^m} \\ &= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{m}}\right)^m = e^{m[\ln(1+\frac{1}{m}) - \ln(1+\frac{1}{m+1})]} \\ &= e^{-1} \Rightarrow \text{CV} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \text{ Par d'Alembert } \frac{u_{m+1}}{u_m} &= \frac{(m+1)^{(m+1)}}{(2m+2)!} \times \frac{2m!}{m^n} = \frac{1}{2(2m+1)} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \\ &\sim \frac{e}{4m} \rightarrow 0 \text{ donc CV} \end{aligned}$$

Exercice 11

$$\sum e^{-m^2 \sin(1/m)} - 1 : \quad \sin(1/m) \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} 1/m + o(1/m)$$

$$e^{-m^2 \sin(1/m)} - 1 \sim e^{-m} - 1 \rightarrow -1 \not\rightarrow 0 \quad \text{donc diverge.}$$

$$u_m = O(1/m^R) \Rightarrow u_m = o(1/m^{R-1})$$

$$u_m = O(1/m^R) \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} m^R u_m = 0$$

$$u_m = O(1/m^R) \Leftrightarrow |m^R u_m| \text{ bornée}$$

$$u_m = o(1/m^R) \Leftrightarrow O(1/m^R)$$

$$\begin{aligned} \sum e^{-m^2 \sin(1/m^2)} - 1 &= e^{-m^2 (1/m^2 + o(1/m^2))} \\ &= e^{-1/m^2 + o(1/m^2)} \\ &= 1 + (-1/m^2 + o(1/m^2)) + o(1/m^2) \\ &\Rightarrow \text{CV par Riemann} \end{aligned}$$

$$\sum (m P_m(1 + 1/m) - \frac{2m}{2m+1})$$

$$m P_m(1 + \frac{1}{m}) = m \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2m^2} + O\left(\frac{1}{m^2}\right) \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

$$\frac{2m}{2m+1} = \frac{2}{2 + \frac{1}{m}} = 1 - \frac{1}{2m} + \frac{1}{4m^2} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

$$m P_m(1 + 1/m) - \frac{2m}{2m+1} = \frac{1}{4m^2} + o\left(\frac{1}{m^2}\right) \Rightarrow \text{CV par Riemann}$$

$$\text{On utilise que } \sin\left(\frac{2k\pi}{n^3}\right) = \operatorname{Im} e^{\frac{2ik\pi}{n^3}}$$

$$\text{donc } \sum_{k=0}^{19} \sin \frac{2k\pi}{n^3} = \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{19} \left(e^{\frac{2ik\pi}{n^3}} \right)^k = \operatorname{Im} \frac{1 - e^{2i \cdot 20\pi/n^3}}{1 - e^{2i\pi/n^3}}$$

Exercice 11

Pon d'Alembert $\frac{a^n}{n!} : \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n} = a \times \frac{1}{n+1}$

Pon d'Alembert $\frac{a^n}{n^\alpha} : \frac{a^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \frac{n^\alpha}{a^n} = a \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \rightarrow a$

$\Rightarrow$ CV si $a < 1$

DV si $a > 1$

Si $a = 1$ on a $\frac{1}{n^\alpha}$ si $\alpha > 1$ CV
sinon DV

Exercice 15

1) Pour valeur absolue on a CV

2^e $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} \overset{CV}{\leftarrow} \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2+m(-1)^n}$

$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} - \frac{(-1)^n}{n}$

$= \frac{-1}{n^2+(-1)^n n}$

2) $u_n = \frac{1+(-1)^n \sqrt{n}}{n}$

$= \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$\downarrow$ DV $\downarrow$ CV

donc diverge

$$3) u_m = (-1)^m \sqrt{m} P_m\left(\frac{m+1}{m-1}\right)$$

$$P_m\left(\frac{m+1}{m-1}\right) = P_m\left(1 + \frac{1}{m}\right) - P_m\left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

$$= \frac{1}{m} + r_m + \frac{1}{m} - \tilde{r}_m$$

$$= \frac{2}{m} + r_m + \tilde{r}_m$$

$$u_m = (-1)^m \sqrt{m} \left(\frac{2}{m} + r_m + \tilde{r}_m \right)$$

$$= \frac{2(-1)^m}{\sqrt{m}} + (-1)^m \sqrt{m} r_m$$

↓
cv par SA

On étudie $(-1)^m \sqrt{m} r_m$

$$\begin{aligned} r_m &= \frac{(-1)^m \sqrt{m}}{m} o(1/m) \\ &= o\left(\frac{(-1)^m}{\sqrt{m}}\right) \end{aligned}$$

↓
par SA car $\frac{m_i}{m_i} \geq 0$
 $m_i \downarrow$

$$\begin{aligned} r_m &= \frac{(-1)^m \sqrt{m}}{m} o(1/m) \\ (-1)^m \sqrt{m} o(1/m) &= o\left(\frac{1}{m^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

Donc $\sum |(-1)^m \sqrt{m} r_m|$ cv par Riemann

$$4) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n - p_n(n)} \geq 0$$

$\Rightarrow 0$

$$f(x) = x - p_n(x)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \geq 0 \quad \forall x \geq 1$$

$$\text{Donc } \frac{1}{n - p_n(n)} \rightarrow \Rightarrow \text{CCSA}$$

$$5) \sum (e - (1 + 1/n)^n)$$

$$u_n = e - \exp(n p_n(1 + 1/n))$$

$$p_n(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$$

$$\text{donc } \exp(n p_n(1 + 1/n)) = \exp(1 - 1/2n + o(1/n))$$

$$u_n = \exp(1 - (1 - 1/2n + o(1/n)))$$

$$= \frac{e}{2n} + o(1/n)$$

~~On pour n assez~~

On en déduit que pour $n \gg 1$, $u_n > 0$.

De plus $u_n \sim \frac{e}{2n}$ on $\sum \frac{e}{2n}$ diverge donc $\sum u_n$ diverge

$$6) p_n(1 + \frac{(-1)^n}{n}) = \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 p.c.c.a cv cv

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$8) \quad u_m = \frac{(-1)^m}{m^{1+1/m}}$$

Par comparaison $v_m = \frac{1}{m^{1+1/m}} > 0$
 $\rightarrow 0$

Soit $g(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$ on a $g(x) \nearrow$ donc $v_m \searrow$
 donc cv.

Exercice 13

$$1) \quad S_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$$

$$g(x) = \frac{1}{x} \text{ est } \searrow \text{ sur } [1, +\infty[$$

Donc pour tout $k \geq 1$ on a :

$$\forall x \in [k, k+1], \quad g(k) \geq g(x) \geq g(k+1)$$

$$\text{Donc } \forall x \in [k, k+1], \quad \frac{1}{k} \geq g(x) \geq \frac{1}{k+1}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} g(x) dx \leq \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{m-1} \int_k^{k+1} g(x) dx \leq \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=2}^m \frac{1}{k} \leq \int_1^m \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k}$$

$$S_m - 1 \leq P_m(m) \leq S_{m-1}$$

Alors : $\left. \begin{array}{l} P_{m+1} > S_m \\ S_m \geq P_m(m+1) \end{array} \right\} \text{ on a bien l'inégalité.}$

$$2) \quad m+1 \geq m$$

$$P_m(m+1) \geq P_m(m)$$

$$-P_m(m+1) \leq -P_m(m)$$

$$S_m - P_m(m+1) \leq S_m - P_m(m)$$

$$v_m \leq u_m$$

$$u_m - v_m = P_m(m+1) - P_m(m) = P_m \left(1 + \frac{1}{m}\right) \rightarrow 0$$

$$u_{m+1} - u_m = \frac{1}{m+1} - (P_m(m+1) - P_m(m)) = \frac{1}{m+1} - \int_m^{m+1} \frac{1}{t} dt$$

$$v_{m+1} - v_m = \frac{1}{m+1} - (P_m(m+2) - P_m(m+1)) = \int_{m+1}^{m+2} \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{t}\right) dt \geq 0$$

croissante

ainsi les suites sont adjacentes et donc elles convergent vers une limite commune γ .

Montrons que $\gamma \in [1/2, 1]$

$$u_1 = 1 - P_m(1) = 1$$

$$v_1 = 1 - P_m(2) \dots v_6 = 0,50$$

Exercice 16

Gm a $\frac{v_m}{u_m} \rightarrow 1$ donc équivalent

$$\frac{u_m}{(-1)^m} = \frac{1}{\sqrt{m}} \text{ par croissance}$$

$$\frac{v_m}{(-1)^m} = \frac{1}{(-1)^m + \sqrt{m}} > 0 \text{ car } \sqrt{m} \pm 1 > 0$$

$\rightarrow 0$

on ne peut pas conclure sur la décroissance

$$v_m = \frac{(-1)^m}{\sqrt{m} \left(1 + \frac{(-1)^m}{\sqrt{m}}\right)} = \frac{(-1)^m}{\sqrt{m}} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^m}{\sqrt{m}}}$$

$$\text{par DL} = \underbrace{\frac{(-1)^m}{\sqrt{m}}}_{cv} - \underbrace{\frac{1}{m}}_{dv} + o\left(\underbrace{\frac{1}{m^{3/2}}}_{cv}\right)$$

Espaces vectoriels normés

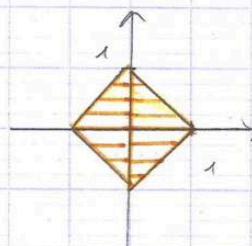
Exercice 1

$$B_1(0, 1) = \{(x, y) \mid \|(x, y)\|_1 < 1\}$$

$$\Leftrightarrow |x| + |y| < 1$$

1^{ère} cas si $x > 0$ et $y > 0$
alors $x + y < 1$

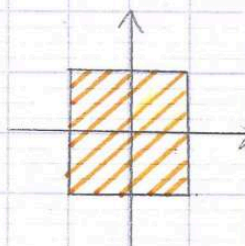
2^{ème} cas si $x > 0$ et $y \leq 0$
alors $x - y < 1$



$$B_\infty(0, 1) = \{(x, y) \mid \|(x, y)\|_\infty < 1\}$$

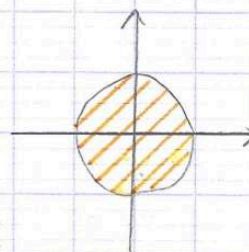
$$\Leftrightarrow \max(|x|, |y|) < 1$$

Si $\begin{cases} |x| < 1 \\ |y| < 1 \end{cases}$ alors $B_\infty(0, 1) = \{|x| < 1\} \cap \{|y| < 1\}$



$$B_2(0, 1) = \{(x, y) \mid \|(x, y)\|_2 < 1\}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 < 1$$



Exercice 3

$$P = \sum_{R=0}^K a_R X^R \quad N(P) = \sup |a_R|$$

$N(P) \geq 0$ comme $\sup$ d'une quantité ≥ 0

$$N(P) = 0 \Rightarrow \sup |a_R| = 0$$

$$\text{Donc } |a_R| = 0 \quad \forall R = 0, \dots, K$$

$$\text{donc } a_R = 0 \quad \forall R = 0, \dots, K$$

$$\text{donc } P = 0$$

$$\lambda \in \mathbb{K} \quad P \in \mathbb{K}[X] \quad P = \sum_{R=0}^K a_R X^R$$

$$\lambda P = \sum_{R=0}^K \lambda a_R X^R$$

$$N(\lambda P) = \sup \left\{ \left| \sum_{R=0}^K \lambda a_R X^R \right| \right\}$$

$$P = \sum_{R=0}^K a_R X^R \quad Q = \sum_{R=0}^L b_R X^R$$

Supposons $K \leq L$

$$P = \sum_{R=0}^K a_R X^R \quad \text{avec } a_R = 0 \quad \forall R = K+1, \dots, L$$

$$P+Q = \sum_{R=0}^L (a_R + b_R) X^R$$

$$\begin{aligned} N(P+Q) &= \sup |a_R + b_R| \\ &\leq \sup (|a_R| + |b_R|) \\ &\leq \sup |a_R| + \sup |b_R|. \end{aligned}$$

$$N_q(P) = \left(\sum |a_R|^q \right)^{1/q}$$

Exercice

① Soit $\mathbb{R}^d$ montrons que $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ sont équivalents

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i| \leq \max_j |x_j| \sum_{j=1}^d 1 = d \max_j |x_j| = d \|x\|_\infty$$

Réciproquement $\|x\|_\infty = \max |x_i| \leq \sum |x_i| = \|x\|_1$

Donc $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq d \|x\|_\infty$

De même $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{d} \|x\|_\infty$

② Est ce que c'est vrai sur $\mathbb{K}[X]$

Montrons qu'il existe une suite de polynômes (P_m) tel que

$N_1(P_m) = m$ et $N_\infty(P_m) = 1$

On définit $P_m(X) = \sum_{k=0}^m X^k$ donc $N_\infty(P_m) = 1$

$N_1(P_m) = m+1$

Ainsi il n'existe pas de constante $c > 0$ tel que
 $\forall P \in \mathbb{K}[X], N(P) \leq c N_\infty(P)$

Exercice 2

$$N(u) = \sup_{t \in [0,1]} |x + ty|$$

$N(u)$ est clairement positive (car sup de valeurs absolues)

$$N(u) = 0 \Leftrightarrow \sup |x + ty| = 0$$

$$\Leftrightarrow |x + ty| = 0 \quad \forall t \in [0,1]$$

$$t=0 \Rightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$t=1 \Rightarrow |y| = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

donc $u = (0,0)$

Soit $w = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$N(u+w) = \sup |(x+x_2) + t(y+y_2)|$$

$$= \sup |(x+ty) + (x_2 + ty_2)|$$

$$\leq \sup |x + ty| + \sup |x_2 + ty_2| = N(u) + N(w)$$

donc N est une norme.

$$N(x, y) < 1 \Leftrightarrow \sup_{t \in [0, 1]} |x + ty| < 1$$

- $x, y \geq 0$ alors $x + ty = |x + ty|$ donc $N(x, y) = \sup_{t \in [0, 1]} x + ty = x + y$ (sup en $t = 1$)
donc $N(x, y) < 1 \Leftrightarrow x + y < 1$

- $y \geq 0, x < 0$. La fonction $t \mapsto x + ty$ est croissante donc $x \leq x + ty \leq x + y$

$$|x + ty| \leq \max(|x|, |x + y|)$$

- Si $x \geq -y/2$

$$x + y \geq y/2$$

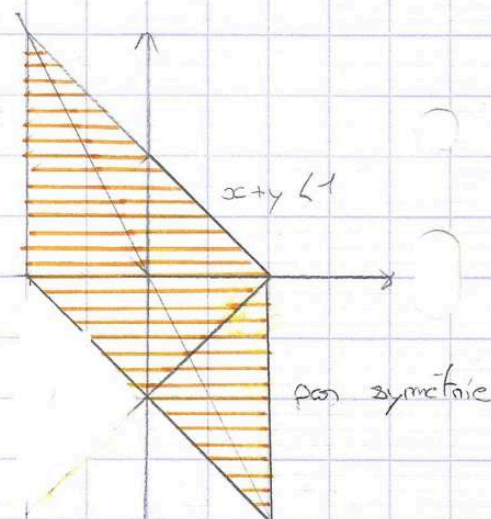
$$|x + y| \geq y/2 \geq |x|$$

$$x + y < 1$$

- Si $x \leq -y/2$

$$\text{Alors } |x| > |x + y|$$

$$|x| < 1$$



99 écale - avec Jean Jaurès

Exercice 1

Supposons par l'absurde que $g \in \mathcal{C}([a, b])$ vérifie $\int g = 0$, $g \geq 0$ et $g(x_0) > 0$ pour un certain x_0 .

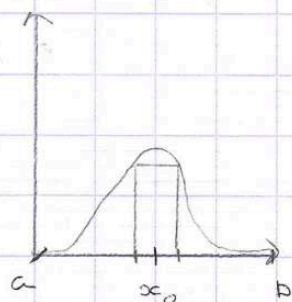
D'après la continuité de g en

$$x_0 \text{ avec } \varepsilon = \frac{g(x_0)}{2} > 0$$

Il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

$$|g(x) - g(x_0)| < \frac{g(x_0)}{2}$$



Par suite $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\quad f(x) \geq \frac{|f(x_0)|}{2}$

Par suite $\int_a^b f = \int_a^{x_0 - \delta} f + \underbrace{\int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f}_{\geq \delta \frac{|f(x_0)|}{2}} + \int_{x_0 + \delta}^b f$

Exercice 6

Pour tout ensemble A , $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A .

Montrons que $\overline{B(a, \eta)} = \bar{B}(a, \eta) = \{x \mid |x - a| \leq \eta\}$

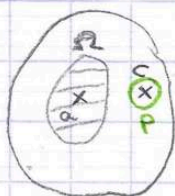
$\bar{B}(a, \eta) \supset B(a, \eta) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \bar{B}(a, \eta) \subset \bar{B}(a, \eta) \\ \uparrow \text{l'adhérence est le} \\ \text{plus petit fermé} \end{array} \right.$

Montrons que $\bar{B}(a, \eta)$ est fermée, il faut montrer que $\mathbb{C} \setminus \bar{B}(a, \eta)$ est ouvert.

On doit montrer que $\forall c \in \Omega, \exists p > 0$ tel que $B(c, p) \subset \Omega$

Comme $c \notin \bar{B}(a, \eta)$ alors $\|c - a\| > \eta$

Soit $p = \frac{\|c - a\| - \eta}{4} > 0$



Soit $x \in B(c, p)$ alors

$$\begin{aligned} \|x - a\| &\geq \|a - c\| - \|x - c\| \geq \|a - c\| - p \\ &\geq \|c - a\| - \frac{\|c - a\| - \eta}{4} \geq \frac{3}{4}\|c - a\| + \frac{\eta}{4} \\ &> \frac{3\eta}{4} + \frac{\eta}{4} = \eta \quad \text{on a donc } \bar{B}(a, \eta) \text{ fermée.} \end{aligned}$$

On doit montrer que $\overline{B(a, \eta)} = \bar{B}(a, \eta)$

Réciproquement montrons que $\bar{B}(a, \eta) \subset \overline{B(a, \eta)}$

Soit $c \in \bar{B}(a, \eta)$ ie $\|c - a\| \leq \eta$

Supposons par l'absurde que $c \notin \overline{B(a, \eta)}$ c'est à dire $c \in \mathbb{C} \setminus \overline{B(a, \eta)}$ qui est ouvert par définition

Donc il existe $p > 0$ tel que $B(c, p) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{B(a, \eta)}$



$\|c-a\| \geq r+p > r$ qui contredit $\|c-a\| \leq r$

Exercice 7

1) Sur $\mathbb{R}^2$

Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes alors:

U ouvert pour $N_1 \Leftrightarrow U$ ouvert pour N_2

F fermé pour $N_1 \Leftrightarrow U$ fermé pour N_2

preuve Soit $a \in U$, il existe $\eta > 0$ tq $B_{N_1}(a, \eta) \subset U$

Or N_1 équivalente à $N_2 \Rightarrow$ il existe $c > 0$

tel que $N_1 \leq c N_2$

Alors $B_{N_2}(a, \frac{\eta}{c}) \subset B_{N_1}(a, \eta)$

$$N_2(x-a) < \frac{\eta}{c}$$

$$N_1(x-a) < \eta$$

□

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\} = \{x > 0\} \cap \{y > 0\}$$

et $\{x > 0\}$ et $\{y > 0\}$ sont ouverts

Soit $a \in \{x > 0\}$. On cherche $\eta > 0$ tel que $B(a, \eta) \subset \{x > 0\}$

$$a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{On prend } \eta = \frac{a_1}{2} > 0$$

$$B(a, \eta) \subset \{x > 0\}$$

$$\text{Soit } x \in B(a, \eta) \text{ alors } \begin{cases} |x - a_1| < \eta \\ |y - a_2| < \eta \end{cases}$$

$$x = a_1 + x - a_1$$

$$\geq a_1 - |x - a_1| > a_1 - \frac{a_1}{2} = \frac{a_1}{2} > 0$$

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$ n'est ni ouvert ni fermé

il n'est pas ouvert car $a = (1, 0) \in U_2$

mais $\forall \eta > 0, B(a, \eta) \cap U_2^c \neq \emptyset$

en effet $(1, \eta/2) \in B(a, \eta) \cap U_2^c$



Exercice 3

U_2 n'est pas fermé car U_2^c n'est pas ouvert par le même raisonnement.

$$U_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0\} = \{x \geq 0\} \cap \{y \geq 0\}$$

U_3 est fermé donc U_3^c est ouvert

$$U_3^c = \{x < 0\} \cup \{y < 0\}$$

Or $\{x < 0\}$ et $\{y < 0\}$ sont des ouverts.

Donc U_3^c est ouvert d'où U_3 est un fermé.

$$2) \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq y \leq 1\} = \{y \geq 0\} \cap \{y \leq 1\}$$

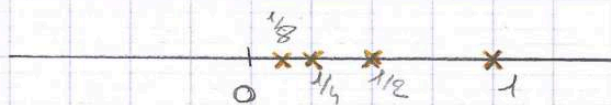
donc fermé.

Pourquoi $[0, +\infty[$ est fermé ?

1) car $]-\infty, 0[$ ouvert

2) $(u_n) \in [0, +\infty[$ il existe une suite $u_n \rightarrow l$.

$$4) A = \{2^{-n}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$$



A n'est pas ouvert car la boule $B(1, \eta) \cap A^c \neq \emptyset$
 $\forall \eta > 0$

A n'est pas fermé car A^c n'est pas ouvert

En effet $0 \in A^c$ et $\forall \eta > 0$ $B(0, \eta) \cap A \neq \emptyset$
 car $2^{-n} \rightarrow 0$.

$$5) B = \{2^n, n \in \mathbb{N}\} = \bigcup \{2^n\}$$

$$B^c =]-\infty, 1[\cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}}]2^n, 2^{n+1}[\right)$$

et ouvert comme réunion d'ouverts.

• $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est à dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ tel que $x_n \rightarrow x$.
Cela implique que $\mathbb{Q}$ n'est pas fermé. En effet $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels tel que $x_n \rightarrow \sqrt{2}$.

• Supposons $x \in \mathbb{Q}$

$$x_n = x + \frac{\sqrt{2}}{n} \notin \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad x_n \rightarrow x$$

• Supposons $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

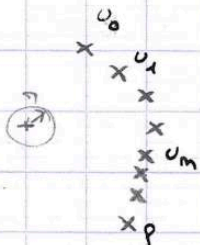
$$x_n = x$$

Donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas fermé

Finalement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas fermés

Donc ils ne sont pas adjacents.

Exercice 8



Montrons que $G = \{u_1, \dots, u_m\}$

Soit $x \in G^c$, soit $r = \frac{1}{2} \min(\|x - u_i\|, i=1, \dots, m)$

$r > 0$ car $x \notin G$

Alors $B(x, r) \cap G = \emptyset$ donc G est fermé.

Soit $r = \|x - p\| > 0$

$$B(x, \frac{r}{2}) \cap B(p, \frac{r}{2}) = \emptyset$$

Alors $x \notin B(p, \frac{r}{2})$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = p$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$

tel que $\forall n > N, \|u_n - p\| < \frac{r}{2}$

En particulier

$$\forall n \geq N, \|u_n - x\| \geq \frac{r}{2}$$

Soit $\eta' = \min(\|x - u_m\| \mid m=0, \dots, n)$ alors $\eta' > 0$. Soit $\eta'' = \min(\eta, \eta')$ alors $B(x, \eta'') \cap F \neq \emptyset$.

Exercice 10

$x \in \bar{F}$ ssi $\exists (x_m)$ suite de F tel que $x_m \rightarrow x$

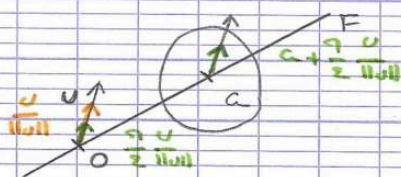
1) Soient x et $y \in \bar{F}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

$$x_m \rightarrow x \in \bar{F}$$

$$y_m \rightarrow y \in \bar{F}$$

$$x_m + \lambda y_m \rightarrow x + \lambda y \Rightarrow x + \lambda y \in \bar{F}$$

2) F



Supposons par l'absurde $\exists a \in \bar{F}$ tel que $B(a, \eta) \cap F = \emptyset$ donc il existe $u \in E \setminus F$ en particulier $u \neq 0$

$$\text{Soit } x = a + \frac{\eta}{2} \frac{u}{\|u\|}$$

$$\|x - a\| = \frac{\eta}{2} \Rightarrow x \in B(a, \eta)$$

Donc $x \in \bar{F}$, comme $a \in \bar{F}$ alors $u = \frac{2\|u\|}{\eta} (x - a) \in \bar{F}$
ce qui est absurde par définition. $\Rightarrow u \in F$

Exercice 12

$$A \in M_n(\mathbb{K})$$

$$A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$$

linéaire

$$\begin{cases} \|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \end{cases}$$

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$$

$$A(x) = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)_{i=1, \dots, n}$$

$$\|Ax\|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, m} |(Ax)_i|$$

$$= \max_{i=1, \dots, m} \left| \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right|$$

$$\left| \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^m |a_{ij}| |x_j| \leq \left(\sum_{j=1}^m |a_{ij}| \right) \|x\|_{\infty}$$

$$\text{donc } \|A\|_{\infty} \leq \max_{i=1, \dots, m} \left(\sum_{j=1}^m |a_{ij}| \right) := K$$

$$\text{On prend } i_0 \text{ tel que } \sum_{j=1}^m |a_{i_0 j}|$$

$$2) \text{ sur } \mathbb{K}^m \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^m |x_i|$$

$$A = (a_{ij})_{i,j=1, \dots, m}$$

$$Ax = ((Ax)_i)_{i=1, \dots, m}$$

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j$$

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^m |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |a_{ij}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m |a_{ij}| \right) |x_j|$$

$$\leq \max_{k=1, \dots, m} \sum_{i=1}^m |a_{ik}| \times \|x\|_1$$

$$\text{Donc } \|A\|_1 \leq \max_{k=1, \dots, m} \sum_{i=1}^m |a_{ik}|$$

$$\text{Montrons l'égalité, soit } k_0 \text{ tel que}$$

$$\sum_{i=1}^m |a_{i, k_0}| = \max_{k=1, \dots, m} \sum_{i=1}^m |a_{ik}|$$

$$\|x\|_1 = \sup_{\|y\|_{\infty}=1} |\langle x, y \rangle| \quad \text{où } \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i$$

démonstration

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{i=1}^m x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^m |x_i| |y_i|$$

$$\leq \sum_{i=1}^m |x_i| = \|x\|_1$$

$$\|Ax\|_1 = \sup_{\|y\|_\infty=1} |\langle Ax, y \rangle|$$

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, {}^tAy \rangle$$

Pour tout y tel que $\|y\|_\infty = 1$ et tout x on a

$$|\langle Ax, y \rangle| = |\langle x, {}^tAy \rangle|$$

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_1 = \sup_{\|x\|_1=1} \sup_{\|y\|_\infty=1} |\langle x, {}^tAy \rangle|$$

$${}^tAy = \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \right)_i$$

$$\langle x, {}^tAy \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i y_j a_{ij} \quad \text{soit tel que } \max_{j=1}^m \sum_{i=1}^m |a_{ij}| = \sum_{i=1}^m a_{ij_0}$$

$$\text{On prend } y = (sg(a_{1j_0}), \dots, sg(a_{mj_0})) = \sum_{i=1}^m |a_{ij_0}|$$

$$\begin{aligned} 3) \|Ax\|_2^2 &= \sum_{i=1}^m |(Ax)_i|^2 \\ &= \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right|^2 \end{aligned}$$

$$\text{On Cauchy Schwarz} \Rightarrow \left| \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^m x_j^2 \right)^{1/2}$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^m x_j^2 \right)^{1/2} \quad \text{Par suite } \sum_{i=1}^m (Ax)_i^2 \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (a_{ij})^2 \|x\|_2^2$$

Exercice 20

fin page 17.

$$\begin{aligned} \text{v) Soit } x \text{ et } y \text{ tels que } & \begin{cases} g(x) = x \\ g(y) = y \end{cases} \\ \text{donc } \|g(x) - g(y)\| &\leq K \|x - y\| \end{aligned}$$

$$\|x - y\| \leq K \|x - y\|$$

or $K \neq 1$ donc $\|x - y\| = 0$ donc $x = y$, x est unique.

2) On veut montrer que $\|g^p(x) - g^p(y)\| \leq R \|x - y\|$
 On fait par récurrence en p .

$p=1$ hypothèse de g .

$$\begin{aligned} \|g^{p+1}(x) - g^{p+1}(y)\| &= \|g(g^p(x)) - g(g^p(y))\| \\ &\leq R \|g^p(x) - g^p(y)\| \\ &\leq R \times R^p \|x - y\| \\ &\leq R^{p+1} \|x - y\| \end{aligned}$$

$$3) x_m = g^m(x_0)$$

$$x_{m+1} = g^m(x_1)$$

$$\begin{aligned} \|x_{m+p} - x_m\| &= \|g^{m+p}(x_0) - g^m(x_0)\| \\ &= \|g^m(g^p(x_0)) - g^m(x_0)\| \\ &\leq R^m \|g^p(x_0) - x_0\| \quad * \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^p(x_0) - x_0 &= \sum_{j=0}^{p-1} g^{j+1}(x_0) - g^j(x_0) \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} g^j(x_1) - g^j(x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|g^p(x_0) - x_0\| &\leq \sum_{j=0}^{p-1} \|g^j(x_1) - g^j(x_0)\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{p-1} R^j \|x_1 - x_0\| \leq \frac{1-R^p}{1-R} \|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{1-R} \|x_1 - x_0\| \quad **$$

1) Ceci montre que la suite est de Cauchy
 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \geq N, \forall p \in \mathbb{R} \|x_{m+p} - x_m\| < \epsilon$
 Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} R^n = 0$ car $|R| < 1$

$\Rightarrow$ Donc $\exists N$ tel que $\forall m \geq N \frac{R^m}{1-R} \|x_1 - x_0\| < \epsilon$
 Comme E est complet, la suite de Cauchy (x_m) admet une limite $x \in E$.
 Comme F est fermé alors $x \in F$

Comme f est continue on a $f(x) = x$

Exercice 19

Montrons que $\exists \eta > 0$ tel que $B_F(0, \eta) \subset u(B_E(0, 1))$ *
 $B_E(0, 1)$ est un ouvert de E . Donc $u(B_E(0, 1))$ est
 un ouvert de F .

u est linéaire donc $u(0_E) = 0_F$

Donc $0_F \in u(B_E(0, 1))$ est ouvert donc il existe $\eta > 0$ tel
 que $B_F(0, \eta) \subset u(B_E(0, 1))$

* équivaut à $\forall y \in F, \|y\| < \eta \Rightarrow \exists x \in E$ tel que
 $\|x\| < 1$ et $u(x) = y$

Soit $y \in F$

• si $y = 0$ alors $y = u(0)$

• si $y \neq 0$, $\frac{\eta}{2} \frac{y}{\|y\|} \in B_F(0, \eta)$

Donc d'après étoile, il existe $x \in B_E(0, 1)$ tel que
 $\frac{\eta}{2} \frac{y}{\|y\|} = u(x)$ $y = \frac{2\|y\|}{\eta} u(x)$

$y = u\left(\frac{2\|y\|}{\eta} x\right)$ donc surjectif.

Exercice 16

$\varphi_a(x) = \langle a, x \rangle$ est linéaire par rapport linéarité
 du produit scalaire

u est continue si $\exists C > 0$ tel que $\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq C \|x\|_E$
 $|\varphi_a(x)| = |\langle a, x \rangle| \leq \|a\| \|x\|$

Donc φ_a est continue et $\|\varphi_a\|_{E \rightarrow \mathbb{R}} \leq \|a\|_E$

De plus $|\varphi_a(a)| = \langle a, a \rangle = \|a\|^2$

Montrons que $\sup_{\|x\|=1} |\varphi_A(x)| \geq \|a\|$

$$\text{Soit } x_0 = \frac{a}{\|a\|}, \quad |\varphi_A(x_0)| = \left\langle a, \frac{a}{\|a\|} \right\rangle = \|a\|.$$

$$\begin{aligned} a^\perp &= \{x \in E, \langle a, x \rangle = 0\} \\ &= \{x \in E, \varphi_A(x) = 0\} \\ &= \varphi_A^{-1}(\{0\}) \end{aligned}$$

Or $\{0\}$ fermé de $\mathbb{R}$ et φ_A continue donc $a^\perp$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

Exercice 17

$$\begin{aligned} \varphi(g) &= \int_{-1}^0 g(t) dt - \int_0^1 g(t) dt \\ |\varphi(g)| &\leq \int_{-1}^0 |g(t)| dt + \int_0^1 |g(t)| dt \\ &\leq \int_{-1}^1 |g(t)| dt \leq \int_{-1}^1 \sup |g| dt \\ &\leq 2\|g\| \end{aligned}$$

Exercice 12 - Sim

$$\|Ax\|_2^2 \leq \left(\sum_{i,j=1}^m |a_{ij}|^2 \right) \|x\|_2^2$$

Si $\|x\|_2 = 1$ alors $\|Ax\|_2 \leq \left(\sum_{i,j=1}^m |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$
 donc $\|A\| \leq \left(\sum_{i,j=1}^m (a_{ij})^2 \right)^{1/2}$

Exercice 13

$$f_n : (M_m(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$$

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^m a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

$$|f_n(A)| = \left| \sum_{i=1}^m a_{ii} \right| \leq \left(\sum_{i=1}^m (a_{ii})^2 \right)^{1/2} \sqrt{m}$$

$$\leq \left(\sum_{i,j=1}^m (a_{ij})^2 \right)^{1/2} \sqrt{m}$$

$$|f_n(A)| \leq \sqrt{m} \|A\|_2$$

Soit $A = I_m$

donc $\|f_n\| \leq \sqrt{m}$

$f_n(A) = m$

$$\|A\|_2^2 = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^m 1^2$$

$$= m$$

Exercice

$$E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$$

Soit E muni de $\|g\|_2 = \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}$

$$\langle g, g \rangle = \int_a^b g g$$

Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$
 $u \mapsto \int_a^b u(t) dt$

$$|\varphi(u)| = \left| \int_a^b u(t) dt \right| = |\langle u, 1 \rangle|$$

$$\leq \left(\int_a^b |u(t)|^2 dt \right)^{1/2} (b-a)^{1/2}$$

$$\varphi(u) = \int_a^b u(t) dt$$

$$\|u\|_1 = \int_a^b |u(t)| dt$$

$$|\varphi(u)| = \left| \int_a^b u(t) dt \right| \leq \int_a^b |u(t)| dt = \|u\|_1$$

$$\Rightarrow \|\varphi(u)\| \leq 1$$

$$\text{Prenons } u(t) = 1$$

$$\varphi(u) = b - a$$

$$\|u\| = b - a \neq 0$$

$$\|\varphi\| = \sup \frac{|\varphi(u)|}{\|u\|} \geq \frac{|\varphi(u)|}{\|u\|} = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

$$\Rightarrow \|\varphi\| = 1$$

$$\leq (b-a) \|u\|_1$$

$$\|\varphi\| \leq b-a$$

$$u=1 \Rightarrow \|u\|=1$$

$$|\varphi(u)| = b-a$$

Exercice 5

$$\forall f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$$

$$C_1 \|f\|_\infty \leq \|f\|_1 \leq C_2 \|f\|_\infty$$

(1) est vraie avec $C_2 = b-a$

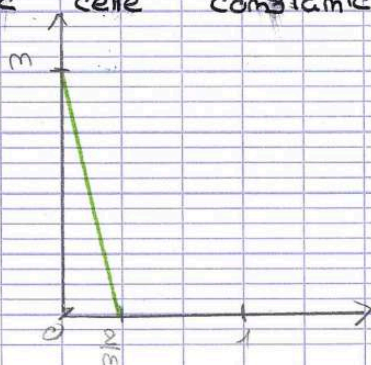
$$\text{En effet } \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt \leq \int_a^b \|f\|_\infty dt = (b-a) \|f\|_\infty$$

(2) n'est pas vérifiée. En effet il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Les fonctions (f_n) sont continues

donc cette constante n'existe pas.

$$\text{et } \frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = n \rightarrow +\infty$$



Résumé exercice

$$\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) = \mathcal{C}^- \quad a < b$$

$$\|g\| = \int_a^b t^2 |g(t)| dt$$

$$\varphi : (\mathcal{E}, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$$

$$\varphi \text{ continue} \Leftrightarrow \exists c > 0, \forall g \in \mathcal{E}, |\varphi(g)| \leq c \|g\|$$

$$\Leftrightarrow \exists c > 0, \forall g \in \mathcal{E}, \left| \int_a^b g(t) dt \right| \leq c \int_a^b t^2 |g(t)| dt$$

$$\Leftrightarrow \left| \int_a^b g(t) dt \right| \leq \int_a^b |g(t)| dt \leq \int_a^b \frac{t^2}{t^2} |g(t)| dt$$

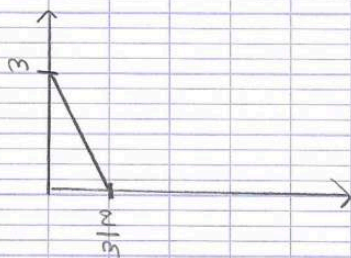
$$\leq \frac{1}{a^2} \int_a^b t^2 |g(t)| dt \leq \frac{1}{a^2} \|g\|$$

$$\varphi \text{ continue} \Leftrightarrow \exists c > 0 \text{ tel que } \frac{|\varphi(g)|}{\|g\|} \leq c$$

$$\forall g \neq 0$$

On cherche une suite une suite de fonction (g_n) tel que $\frac{|\varphi(g_n)|}{\|g_n\|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

On choisit $g_n =$



$$\varphi(g_n) = \int_0^{2/n} g_n(t) dt = \frac{1}{2}$$

$$\|g_n\| = \int_0^{2/n} t^2 |g_n(t)| dt \leq \frac{1}{n^2} \int_0^{2/n} |g_n(t)| dt = \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\varphi(g_n)}{\|g_n\|} > \frac{n^2}{1} \rightarrow +\infty$$

Montrons que $\{x > 0\}$ est ouvert

Soit (a, b) , $a > 0$

$B = B((a, b), \varepsilon) \subset \{x > 0\}$

$a - \varepsilon > 0$

$(x, y) \in B$ $|x - a|^2 + |y - b|^2 < \varepsilon^2$

$|x - a| < \varepsilon$

$x > 0$

Feuille 1: suites et série de fonctions

Exercice 1

Chaque fonction f_m est croissante donc $\forall m \in \mathbb{N}$
on a $a \leq b \Rightarrow f_m(a) \leq f_m(b)$

Montrons que f est croissante

Soient a et b tel que $a \leq b$
alors $f_m(a) \leq f_m(b) \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Exercice 2

$$1) \left(1 + \frac{a}{m}\right)^m = e^{m \ln(1+a/m)} \rightarrow e^a$$

$$2) f_m(x) = \begin{cases} (1 - \frac{x}{m})^m & x \in [0, m] \\ 0 & x > m \end{cases}$$

Montrons que (f_m) est convergente simplement vers
la fonction $x \mapsto e^{-x}$ c'est à dire

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \lim_{m \rightarrow +\infty} f_m(x) = e^{-x}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et soit N_0 entier $N_0 > x$

$$\forall m \geq N_0, f_m(x) = (1 - \frac{x}{m})^m$$

On passe à la limite, il vient $\lim_{m \rightarrow +\infty} f_m(x) = e^{-x}$

$$\text{comme } f_m \xrightarrow{as} f \quad \text{alors } f_m(a) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} f(a) \\ f_m(b) \rightarrow f(b)$$

$$\text{d'où } f(a) \leq f(b)$$

Montrons que (f_m) converge uniformément vers

la fonction $x \mapsto e^{-x}$

$$\text{c'est à dire } \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_m(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

$$g_m(x) - e^{-x} = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x > m \\ (1 - \frac{x}{3})^m - e^{-x} & \text{si } x \in [0, m] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sup_{x \geq 0} |g_m(x) - e^{-x}| &\leq \sup_{x \geq m} |e^{-x}| + \sup_{[0, m]} |(1 - \frac{x}{3})^m - e^{-x}| \\ &\leq e^{-m} + \sup_{[0, m]} |(1 - \frac{x}{3})^m - e^{-x}| \\ &\leq e^{-m} + \sup_{[0, A]} |(1 - \frac{x}{3})^m - e^{-x}| + \sup_{[A, m]} |(1 - \frac{x}{3})^m - e^{-x}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sup_{[A, m]} |(1 - \frac{x}{3})^m - e^{-x}| &\leq \sup_{[A, m]} (1 - \frac{x}{3})^m + \sup_{[A, m]} e^{-x} \\ &\leq (1 - \frac{A}{3})^m + e^{-A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sup_{[0, A]} |(1 - \frac{x}{3})^m - e^{-x}| &= e^{-m} \sup_{[0, A]} (1 - \frac{x}{3})^m \\ &= e^{-m} (\frac{1}{3} + O(\frac{x^2}{3^2})) \\ &= e^{-m} + O(\frac{x^2}{3^2}) \\ &= e^{-x} (e^{x-m} + O(\frac{x^2}{3^2})) \\ &= e^{-x} O(\frac{x^2}{3^2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sup_{[0, A]} (1 - \frac{x}{3})^m + e^{-x} &\leq \sup_{[0, A]} |e^{-x} O(\frac{x^2}{3^2})| \\ &\leq \frac{A^2}{3^2} \end{aligned}$$

On obtient $\sup_{\mathbb{R}_+} |g_m(x) - e^{-x}| \leq e^{-m} + \frac{A}{3} + (1 - \frac{A}{3})^m + e^{-A}$

$\exists A \in \mathbb{R}$ que $e^{-A} < \varepsilon$ donc $\frac{A}{3} < \varepsilon$

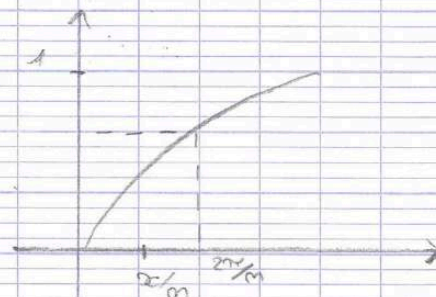
Exercice Montrons que la suite de fonctions $f_m(x) = \sin(x/m)$ converge uniformément vers 0 sur $[0, 2\pi]$.

Supposons $m \geq 1$

Alors $\forall x \in [0, 2\pi], \frac{x}{m} \in [0, \pi/2]$

donc

$$\left| \sin\left(\frac{x}{m}\right) \right| \leq \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)$$



Donc $\sup_{x \in [0, 2\pi]} \left| \sin \frac{x}{m} \right| \leq \sin \frac{2\pi}{m}$

Rappel: Théorème des accroissements finis

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Soient $x, y \in [a, b]$

Alors $|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \sup_{t \in [x, y]} f'(t)$

$\forall x, y, \exists c \in [x, y]$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$

Montrons que $\sin \frac{x}{m} \rightarrow 0$ uniformément sur $[0, 2\pi]$

D'après le TAF

$$\left| \sin\left(\frac{x}{m}\right) - \sin(0) \right| \leq \left| \frac{x}{m} \right| \sup_{t \in [0, x/m]} |\cos(t)|$$

$$\leq \left| \frac{x}{m} \right| \leq \frac{2\pi}{m} \rightarrow 0.$$

Même question pour $x \in \mathbb{R}$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sin\left(\frac{x}{m}\right) \right| = 1 \neq 0$$

Donc la convergence n'est pas uniforme.

Exercice 3

On a $f_n(x) = \sin(x) + nx e^{-nx}$

Montrons que f_n converge simplement vers 0 sur $[0, +\infty[$

On doit montrer que $\forall x > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$

• 1^{er} cas : Si $x=0$, alors $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$

• 2nd cas : Si $x > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx = +\infty$

Par ailleurs on a $\lim_{u \rightarrow +\infty} u e^{-u} = 0$

Notons $g(u) = u e^{-u}$ alors $f_n(x) = g(nx)$

Par théorème de composition des limites on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(u) = 0$$

Par suite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sin x$

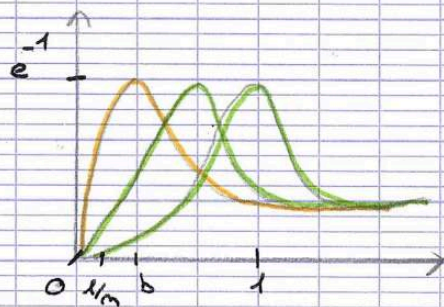
On doit calculer $\sup_{x \geq 0} |f_n(x)| = \sup_{x \geq 0} f_n(x)$ car $f_n(x) \geq 0$

$$(nx e^{-nx})' = (n - n^2 x) e^{-nx} = 0 \quad \text{pour } x = 1/n$$

$$f_n(1/n) = n \frac{1}{n} e^{-1} = e^{-1} > 0$$

$$\Rightarrow \sup |f_n| = e^{-1}$$

on $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup |f_n| \neq 0$. donc pas uniformément



$$\forall n > 1/b$$

La fonction f_n est $\searrow$ sur $[b, +\infty[$

$$\text{Donc } \sup_{[b, +\infty[} |f_n(x)| = f_n(b) = n b e^{-nb} \rightarrow 0.$$

Exercice 5

Calculons $\sup_{[0,1]} x(1-x)$

On a $\sup_{[0,1]} x(1-x) = \frac{1}{4}$

Donc $\sup_{[0,1]} x^m(1-x)^m = \frac{1}{4^m}$

Comme $x^m(1-x)^m \geq 0$, il vient $\sup_{[0,1]} |x^m(1-x)^m| = \frac{1}{4^m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$

Donc (f_m) cvc vers 0 sur $[0,1]$

On a $f_m \rightarrow 0$ uniformément sur $[0,1]$

Donc $\int_0^1 f_m(t) dt \rightarrow \int_0^1 0 dt$

Exercice 6

$$f_m(x) = m^2 x^m (1-x)$$

On a $\lim_{m \rightarrow +\infty} f_m(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$ par croissance composée

donc f_m cvc vers 0.

Calculons $\sup_{[0,1]} |f_m|$ comme $f_m \geq 0$ alors

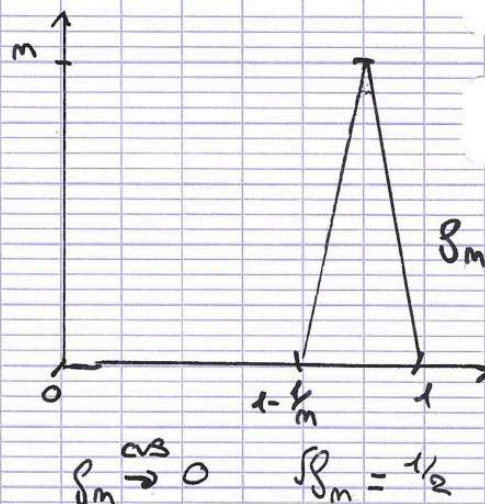
$$\sup_{[0,1]} |f_m| = \sup_{[0,1]} f_m$$

$$\begin{aligned} f'_m &= m^2 [m x^{m-1} (1-x) - x^m] \\ &= m^2 x^{m-1} [-(1+m)x + m] \end{aligned}$$

s'annule quand $x = \frac{m}{1+m}$

x	0	$m/(m+1)$	1
$f'_m(x)$	$\emptyset$	+	-
$f_m(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

$$\begin{aligned}
 \sup_{[0,1]} f_m(x) &= f_m\left(\frac{m}{1+m}\right) \\
 &= \left(\frac{m}{1+m}\right)^m \left(\frac{m^2}{1+m}\right) \\
 &= \exp\left(m \ln\left(\frac{m}{1+m}\right)\right) \frac{m^2}{1+m} \\
 &= \frac{m^2}{1+m} \exp\left(-\frac{m}{m+1} + o(1)\right)
 \end{aligned}$$



donc $\sup_{[0,1]} |f_m| \rightarrow +\infty$

On a f_m cvs vers 0 : $\int_0^1 f_m(x) dx$

$$\begin{aligned}
 \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_m(x) dx &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^1 m^2 (x^m - x^{m+1}) dx \\
 &= \lim_{m \rightarrow +\infty} m^2 \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{m^2}{m^2+1} \right) = 1
 \end{aligned}$$

Exercice 4

1) $x \in \mathbb{R}$ fixe

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (x-m)^2 = +\infty$$

Donc $\lim_{m \rightarrow +\infty} f_m(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+(x-m)^2} = 0$

Calculons $M_m = \sup_{\mathbb{R}} f_m$ donc $\sup_{\mathbb{R}} f_m = 1$

2) • Tableau de variation

• $|f_m(x)| = \frac{1}{1+(x-m)^2} \leq 1$

Donc $\sup |f_m| \leq 1$

Pour affiner $f_m(m) = 1$

3) Soient $a < b < \infty$

Pour $m \geq b$ on a

$\sup f_m = f_m(b)$

• Nom

4) Soit $[a, b]$ intervalle de $\mathbb{R}$

Pour $m \geq b$ on a $\sup f_m = f_m(b)$

$= \frac{1}{1+(b-m)^2} \rightarrow 0$ donc au

Exercice 7

1) Montrons $0 \leq \int_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^1 |f_m(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$$\int_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^1 1 dx = (1 - 1 + \frac{1}{2}\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$$

2) Montrons que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m \geq N, \int_0^1 |f_m(x)| dx < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$

comme (f_m) converge vers 0 sur $[0, 1 - \frac{\varepsilon}{2}]$

donc $(|f_m|)$ converge vers 0 sur $[0, 1 - \frac{\varepsilon}{2}]$

Donc $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{2}} |f_m| = \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{2}} 0 = 0$

Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \geq N$

$$\int_0^{1-\frac{\varepsilon}{2}} |f_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (*)$$

Pour suite $\int_0^1 |f_m| = \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{2}} |f_m| + \int_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^1 |f_m|$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

3) $f_m(x) = e^{-m \sin(x)} \quad x \in [0, 1]$

$$f_m(0) = 1 \quad \forall m$$

$\forall x \in]0, 1], \sin(x) > 0$ donc $\forall x \in]0, 1], f_m(x) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$

Donc $f_m \rightarrow f$ avec $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \in]0, 1] \end{cases}$

On remarque que f_m est pas continue en 0.
Comme les f_m sont continues, la convergence ne peut pas être uniforme sur $[0, 1]$

On a $|f_m(x)| = |e^{-m \sin(x)}| \leq 1$ car $\sin(x) \geq 0$
 • Soit $a > 0$ alors $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_m(x)| \leq e^{-m \sin(a)} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$

D'après 1) 2) on a $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_m = 0$

Exercice 8

a) Montrer que la série de fonction $\sum \frac{1}{\sqrt{x^2 + m^3}}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$

$\sum_{m \in \mathbb{N}} f_m$ converge normalement si $\sum_{m \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_m(x)|$ cv

$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_m(x)| = m^{-3/2}$ et $\sum_{m=1}^{\infty} m^{-3/2}$ cv par Riemann

de plus $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (m^3 + x^2)^{-1/2}$ est continue car les (f_m) sont continues et la série cv normalement

$$f_m(x) = (m^3 + x^2)^{-1/2}$$

$$f'_m(x) = -x (x^2 + m^3)^{-3/2}$$

$$\left| \frac{x}{(x^2 + m^3)^{3/2}} \right| = \left| \frac{x}{(x^2 + m^3)(x^2 + m^3)^{1/2}} \right|$$

$$\text{on } \frac{|x|}{(x^2 + m^3)^{1/2}} \leq 1 \quad \text{donc} \quad \left| \frac{x}{(x^2 + m^3)^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{(x^2 + m^3)}$$

$$\text{donc } \sum_{m \geq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x}{(x^2 + m^3)^{3/2}} \right| \leq \sum_{m \geq 1} \sup \frac{1}{x^2 + m^3}$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3}$$

$$1) f_m(x) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{x^2 + m^2}}$$

$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_m| = |f_m(0)| = 1/m$ on $\sum 1/m$ diverge par Riemann

on $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge par critère arithmétique de Riemann.
donc $\sum_n \frac{1}{n}$ ne converge pas absolument.

2) $g_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{m^2 + x^2}}$
car par comparaison simple.
donc converge

3) $S(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{\sqrt{x^2 + m^2}}$
on veut montrer que $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est défini par

$$S_N(x) = \sum_{m=1}^N g_m(x) \quad \text{car vers } S.$$

$$\left| \sum_{m=N}^{+\infty} (-1)^m v_m \right| \leq |v_N|$$

$$|S_N(x) - S(x)| = \left| \sum_{m=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{\sqrt{x^2 + m^2}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + (N+1)^2}}$$

Par suite $\sup_{x \in \mathbb{R}} |S_N(x) - S(x)| \leq \frac{1}{N+1} \rightarrow 0$ donc converge uniformément.

Exercice 10

$$g^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{\sin(2^m x)}{2^m} \right)^{(k)} \\ = \frac{(-1)^k 2^m \cos(2^m x + k\pi/2)}{2^m}$$

$$|g^{(k)}(x)| \leq \frac{2^m}{2^m}$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g_m^{(k)}(x)| = \frac{2^m}{2^m}$$

$$\sum_n v_n \text{ cvm} \Leftrightarrow \sum_{m \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \mathbb{R}} |v_m(x)| < \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{2^m}{2^m} < +\infty$$

$$\sqrt{\frac{2^m}{2^m}} = \frac{1}{1} \rightarrow 0$$

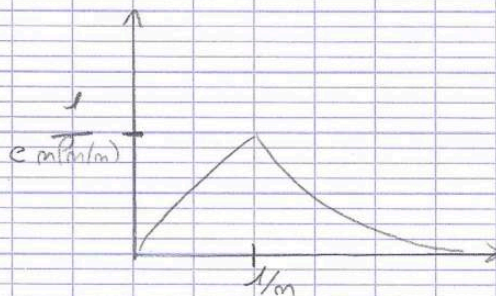
par comparaison donc $g(x) \in C^\infty$ converge.

Exercice 12

$$\sup_{x \geq a} \left| \frac{x e^{-mx}}{p_m(m)} \right|$$

$$f'_m(x) = \left(\frac{x e^{-mx}}{p_m(m)} \right)' = \frac{1}{p_m(m)} (1 - mx) e^{-mx}$$

x	0	$1/m$	$+\infty$
$f'_m(x)$	+	0	-
$f_m(x)$		$\frac{1}{m p_m(m)}$	



Sur $[a, +\infty[$, $a > 0$ $\forall m > 1/a$

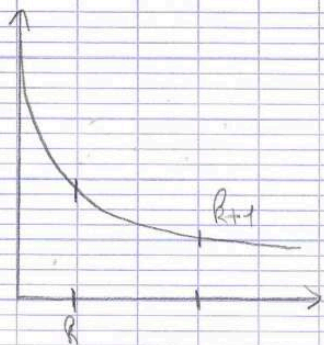
$$\sup |f_m(x)| = |f_m(a)| = \frac{a e^{-ma}}{p_m(m)}$$

Par croissance comparée, on a $e^{-ma} = o(1/m)$ pour $a > 0$
donc $\sum_{n \rightarrow \infty} |f_m(x)|$ cv par Riemann

IP n'y a pas cvm sur $\mathbb{R}^+$ car $\sum_{\mathbb{R}^+} |f_m| = \sum \frac{1}{m p_m(m)}$
qui diverge par bornéité

Montrons que $\sum_{k=m}^{+\infty} \frac{x e^{-kx}}{p_m(k)} \leq \int_{m-x}^{+\infty} \frac{x e^{-tx}}{p_m(t)} dt$

On fixe $x > 0$: on regarde la fonction
 $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto \frac{x e^{-tx}}{p_m(t)}$
 g est positive décroissante et continue.



$$g(R) \geq \int_R^{R+1} g(t) dt$$

$$g(R) \leq \int_{R-1}^R g(t) dt$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{+\infty} g(k) &\leq \int_{m-1}^{+\infty} g(t) dt \\ &\leq \int_{m-1}^{+\infty} \frac{x e^{-tx}}{p_m(t)} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{m-1}^{+\infty} \frac{x e^{-tx}}{p_m(t)} dt &\leq \frac{1}{p_m(m-1)} \int_{m-1}^{+\infty} x e^{-tx} dt \\ &\leq \frac{1}{p_m(m-1)} \left[-e^{-tx} \right]_{m-1}^{+\infty} = \frac{e^{-(m-1)x}}{p_m(m-1)} \end{aligned}$$

La série cv uniformément sur $\mathbb{R}_+$ donc g continue.

Fixons $a > 0$

Montrons que e^x sur $[a, +\infty[$

On sait $\sum g_m$ cv normalement sur $[a, +\infty[$
il suff. de montrer que $\sum g'_m$ cv m

$$g'_m(x) = e^{-mx} \left(\frac{1-mx}{p_m(m)} \right)$$

$$\begin{aligned} \sup_{[a, +\infty[} |g'_m| &\leq \sup_{[a, +\infty[} \frac{e^{-mx}}{p_m(m)} + \sup_{[a, +\infty[} \left| \frac{mx e^{-mx}}{p_m(m)} \right| \\ &\leq \frac{e^{-ma}}{p_m(m)} + \frac{m}{p_m(m)} \sup_{[a, +\infty[} |x e^{-mx}| \\ &\leq \frac{e^{-ma}}{p_m(m)} + \frac{ma}{p_m(m)} e^{-ma} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{(1+ma)}{p_m(m)} e^{-ma} \quad \text{on} \quad \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1+ma}{p_m(m)} e^{-ma}$$

car $a > 0$

Remarque: si $a=0$ $\sum \frac{1}{p_m(m)}$ diverge

Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x} = +\infty$

La fonction $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{p_m t} \geq 0, \downarrow$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{e^{-kx}}{p_m k} &\geq \int_2^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{p_m t} dt \\ &\geq \int_2^{1/x} \frac{e^{-tx}}{p_m t} dt \\ &\geq \frac{1}{e} \int_2^{1/x} \frac{1}{p_m t} dt \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Exercice 11

$$I = [-p_m(2), +\infty[$$

$$1 \sum_{m \geq 1} \frac{(1-e^{-x})^m}{m^2} \quad \text{Soit } f_m(x) = \frac{(1-e^{-x})^m}{m^2}$$

$$\forall x \in [-p_m(2), +\infty[$$

$$\text{donc } |f_m(x)| \leq \frac{1}{m^2}$$

$$0 < e^{-x} \leq 2$$

$$-1 < 1-e^{-x} \leq 1$$

$$\text{donc } \sum_{m \geq 1} \sup_{x \in I} |f_m(x)| = \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^2}$$

donc $\sum f_m$ cvm $\left\{ \begin{array}{l} \text{bien d\'efinie (cvs)} \\ \text{continue} \end{array} \right.$

✓
ou par
Riemann

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(1-e^{-x})^m}{m^2} \\
 &= \sum_{m=1}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1-e^{-x})^m}{m^2} \quad \text{par théorème de la double limite} \\
 &= \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{voir analyse de Fourier})
 \end{aligned}$$

$$2) f'_m(x) = \frac{m e^{-x} (1-e^{-x})^{m-1}}{m^2}$$

$$\text{donc } \sup_{x \in \mathbb{I}} |f'_m(x)| = \frac{2}{3} \quad \text{on a } \sum \frac{2}{3} \text{ diverge}$$

Supposons que $-\ln(2) < a < b < +\infty$
 Soit $x \in [a, b]$ alors $|f'_m(x)| \leq e^{-a}$
 $e^{-b} \leq e^{-x} \leq e^{-a}$

$$\text{alors } |f'_m(x)| \leq \frac{e^{-a}}{m} (\max(1-e^{-a}, 1-e^{-b}))^m < 1$$

$\Rightarrow$ on a c.v.m. donc f est C^1 sur $[a, b]$

TD4 - Séries entières

$R = \sup \{ R \geq 0 \text{ tel que } a_n n^m \text{ bornée} \}$
 $\forall |z| < R$, la série cv

Théorème • $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$ alors $R = 1/l$
 • $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ alors $R = 1/l$

Exercice 1

$$\begin{aligned}
 \bullet R=0 & \quad \bullet \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{p_n (n+1)!}{p_n n!} \right)^2 = \left(1 + \left(\frac{p_n (n+1)}{p_n n!} \right) \right)^2 \\
 \bullet R=0 &
 \end{aligned}$$

$$\left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \frac{(2(m+1))!}{(m+1)!(m+1)!} \times \frac{m!m!}{(2m)!} \times \frac{m^m}{(m+1)^{m+1}}$$

$$= \frac{(2m+2)(2m+1)}{\underbrace{(m+1)(m+1)}_4} \underbrace{\left(\frac{m}{m+1}\right)^m}_{e^{-1}} \underbrace{\frac{1}{m+1}}_0 \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow R = +\infty$$

Exercice 2

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n \quad R=1$$

$$\forall |x| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = f(x) = \frac{1}{1-x}$$

somme des termes
d'une suite géo.

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

on multiplie par x

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2}$$

on multiplie par x^2

$$\frac{2x^2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} (n^2 - n) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - n) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n - \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$$