ANALYSE

TD n°1

Suites numériques

Exercice 1 : Etudier les séries suivantes : ① $\sum \cos(n)$ ② $\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ ③ $\sum \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ ④ $\sum \frac{n}{n^2+4}$ ⑤ $\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ⑥ $\sum \sin\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ (discuter selon les valeurs de β)

Pour étudier une série $\sum u_n$:
- vérifier si $u_n \not\to 0$ ($n \to +\infty$). Si $u_n \not\to 0$, on dit que $\sum u_n$ DV
- si $u_n \to 0$ on ne peut pas conclure
  - utiliser le thm de comparaison
  - utiliser les équivalents

① On rappelle que sin et cos n'ont pas de limite à l'infini : $\sin(n\pi) = 0 \to 0$, $\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \to 1$

$\lim_{n\to+\infty} \cos(n)$ n'existe pas $\Rightarrow \sum \cos(n)$ DV

② Si $\sum u_n$ DV et $\sum v_n$ DV, on ne peut pas conclure par $\sum u_n + \sum v_n$

Remarque : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes ≥ 0 :

Si $\sum u_n$ ou $\sum v_n$ DV alors $\sum u_n + \sum v_n$ DV
$\sum u_n \leq \sum u_n + \sum v_n$
$\sum v_n \leq \sum u_n + \sum v_n$

Ici : $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}\right)$

$= 1 - \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1$

OU : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$

$\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ et $\sum \frac{1}{n^2}$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ CV (série de Rieman avec $\alpha = 2 > 1$) alors $\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ CV

③ $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$

$\sum u_n$ et $\frac{1}{2} \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ sont de même nature

$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{1/2}}$. D'après la série de Rieman : $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ DV $\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$

Donc $\sum u_n$ DV.

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

④ $\frac{n}{n^2+4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$

$\sum \frac{n}{n^2+4}$ et $\sum \frac{1}{n}$ sont de même nature

Donc $\sum \frac{n}{n^2+4}$ DV car $\sum \frac{1}{n}$ DV ($\alpha=1$ par la série de Rieman)

⑤ On appelle que $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$

$x = \frac{1}{n^2}$ ($n\to+\infty \Rightarrow x\to 0$) $\Rightarrow \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

$\sum \sin \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ sont de mêmes natures

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ CV alors $\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ CV

⑥ <u>Si $\beta > 0$</u> : $\frac{1}{n^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\sin\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \sim \frac{1}{n^\beta}$

$\sum \sin \frac{1}{n^\beta}$ et $\sum \frac{1}{n^\beta}$ sont de même nature

Donc $\sum \frac{1}{n^\beta}$ CV si $\beta > 1$

$\sum \sin \frac{1}{n^\beta}$ CV si $\beta > 1$

$\sum \frac{1}{n^\beta}$ DV si $0 \leq \beta < 1$

$\sum \sin\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ DV si $\beta \in]0,1[$

<u>Si $\beta = 0$</u> : $\sum_{k=0}^{n} \sin \frac{1}{k^0} = \sum_{k=0}^{n} \sin 1 \longrightarrow +\infty$

<u>Si $\beta < 0$</u> : $\frac{1}{n^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Donc $\sin\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ n'a pas de limite et $\sum \sin\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ DV

Donc $\sum \sin\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ CV ssi $\beta > 1$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 2 : Etudier la nature des séries suivantes :

① $\sum \left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}\right)$

② $\sum \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

③ $\sum \log\left(1+\frac{1}{n^\beta}\right)$ (discuter selon les valeurs de β)

④ $\sum e^{-\sqrt{n}}$

① $u_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1} = \frac{\left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}}$

$= \frac{1}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n^2}} = \frac{1}{2n}$

$\sum u_n$ et $\frac{1}{2}\sum \frac{1}{n}$ sont de même nature

Donc d'après la série de Rieman : $\sum \frac{1}{n}$ DV ($\alpha = 1$)

Donc $\sum u_n$ DV

② $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ $\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{0}{\sim} x\right)$

$\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ sont de même nature

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ CV, alors $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ CV.

③ Pour $\beta > 0$: $\frac{1}{n^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\ln\left(1+\frac{1}{n^\beta}\right) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n^\beta}$

Donc $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^\beta}\right)$ et $\sum \frac{1}{n^\beta}$ sont de même nature

Donc $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^\beta}\right)$ CV ssi $\beta > 1$ (Si $\beta \in]0,1[$, $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^\beta}\right)$ DV)

Pour $\beta = 0$: $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k^\beta}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+1) = \sum_{k=1}^{n} \ln 2 = \ln(2)\, n \longrightarrow +\infty$

Donc pour $\beta = 0$, $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^\beta}\right)$ DV

Pour $\beta < 0$: $\frac{1}{n^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n^\beta}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Donc $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^\beta}\right)$ DV si $\beta < 0$

Cl : $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^\beta}\right)$ CV ssi $\beta > 1$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

④ $\forall \alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} (x^\alpha e^{-x}) = 0$

$\Rightarrow |x^\alpha e^{-x}| \leq M \quad \forall x > 0$

$\Rightarrow \sqrt{n}^\alpha e^{-\sqrt{n}} \leq M$

$\Rightarrow e^{-\sqrt{n}} \leq \frac{M}{\sqrt{n}^\alpha} = \frac{M}{n^{\alpha/2}}$

Pour $\alpha = 4$: $e^{-\sqrt{n}} \leq \frac{M}{n^2}$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ CV alors $\sum e^{-\sqrt{n}}$ CV

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

TD n°1 (bis)

Suites numériques

Exercice 1 :

1) $u_n = \dfrac{1}{(1+\sqrt{n})^n}$

Critère de Cauchy : $\sum u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{1/n} = \ell$ $\begin{cases} \text{si } \ell < 1 : \sum u_n \text{ CV} \\ \text{si } \ell = 1 : \text{on ne peut pas conclure} \\ \text{si } \ell > 1 : \sum u_n \text{ DV} \end{cases}$

Ici, $\dfrac{1}{1+\sqrt{n}} \longrightarrow 0 < 1$. Donc d'après le critère de Cauchy, la série

$$\sum \frac{1}{(1+\sqrt{n})^n} \text{ CV}$$

OU : $(\sqrt{n}+1)^n \geqslant (\sqrt{n}+1)^4$ (on choisit une puissance α telle que $\frac{\alpha}{2} > 1$)

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n \leqslant \left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4 = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum \frac{1}{n^2} \text{ CV}$$

Ccl : $\sum \left(\dfrac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n$ est absolument CV

2) $v_n = \dfrac{n^2}{3^n}$ (>0 donc si CV alors absolument CV)

Critère d'Alembert : $\sum u_n$, $u_n > 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ $\begin{cases} \text{si } \ell < 1, \sum u_n \text{ CV} \\ \text{si } \ell = 1, \text{ on ne peut conclure} \\ \text{si } \ell > 1, \sum u_n \text{ DV} \end{cases}$

Ici, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \times \dfrac{3^n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^2}{3n^2} = \dfrac{1}{3} < 1$ $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right)$

Donc d'après le critère d'Alembert, $\sum u_n$ CV.

3) $T_n = \dfrac{1}{an+b} - \dfrac{1}{n}$ $\quad (a,b) \neq (0,0)$

Remarque : Si P est un polynôme et $a > 0$. Alors la série $\sum \dfrac{P(n)}{a^n}$ $\begin{cases} \text{CV si } a > 1 \\ \text{DV si } a < 1 \end{cases}$

$$\frac{P(n+1)}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{P(n)} \longrightarrow \frac{1}{a} \quad \text{car} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{P(n+1)}{P(n)} = 1$$

$$\frac{1}{a} \begin{cases} < 1 \text{ si } a > 1 \\ > 1 \text{ si } a < 1 \end{cases}$$

Donc $\sum \dfrac{P(n)}{a^n}$ DV si $a = 1$ et $P(x)$ n'est pas le polynôme nul (car $\lim\limits_{n\to+\infty} P(n) = +\infty$)

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Ici, $\frac{1}{an+b} - \frac{1}{n} = \frac{n-(an+b)}{n(an+b)} = \frac{(1-a)n-b}{an^2+bn} \sim \begin{cases} \frac{(1-a)n}{an^2} \sim \frac{1-a}{an} & \text{si } a \notin \{0,1\} \\ \frac{-b}{n^2} & \text{si } a=1 \text{ et } b \neq 0 \\ \frac{(1-a)n}{bn} = \frac{1-a}{b} & \text{si } a=0 \text{ et } b \neq 0 \end{cases}$

Donc • si $a \notin \{0,1\}$, $u_n \sim \left(\frac{1-a}{a}\right)\frac{1}{n} \Rightarrow \sum \frac{1}{n}$ DV $\Rightarrow \sum u_n$ DV

• si $a=1$ et $b \neq 0$, $u_n \sim -\frac{b}{n^2} \Rightarrow \sum \frac{1}{n^2}$ CV $\Rightarrow \sum u_n$ CV

$b=0$, $u_n = 0 \Rightarrow \sum u_n$ CV

• si $a=0$ et $b \neq 0$, $u_n \sim \left(\frac{1-a}{b}\right) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1-a}{b} \neq 0 \Rightarrow \sum u_n$ DV

$b=0$, la série n'est pas définie

5) $u_n = \frac{2\sqrt{n} + \cos(n)}{n^2 + \log(n)} = \frac{2\sqrt{n}}{n^2}\left(\frac{1 + \frac{\cos n}{2\sqrt{n}}}{1 + \frac{\log n}{n^2}}\right) \sim \frac{2\sqrt{n}}{n^2} = 2\,\frac{1}{n^{3/2}}$

$\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ CV car $\frac{3}{2} > 1 \Rightarrow \sum u_n$ CV

4) $w_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{2n}{2n+1}$

• DL_2 : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ $\left(x = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right)$

$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$\frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{2n}} = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{(2n)^2} + o\left(\frac{1}{(2n)^2}\right)$ $x = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

• DL_3 : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(Il faut faire à l'ordre 3 car à l'ordre 2, $w_n = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \sim 0$!)

Donc $w_n = \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{4n^2}\right)\right)$

$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$= \frac{1}{12}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\Rightarrow w_n \sim \frac{1}{12n^2}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 2 :

1) $u_n = \frac{n^2+1}{5n^2+n} \sim \frac{1}{5}$

$u_n \not\to 0 \Rightarrow \sum u_n$ DV

5) $u_n = \sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

$\sum \frac{1}{n}$ DV $\Rightarrow \sum u_n$ DV

8) $u_n = \frac{e^{-n}}{n}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{-(n+1)}}{n+1} \frac{n}{e^{-n}} = e^{-1} \frac{n}{n+1} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$

D'après le critère d'Alembert, $\sum \frac{e^{-n}}{n}$ CV

7) $u_n = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1 = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/n} - 1$

$= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{1/n} - 1$

$= \exp\left[\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{1/n}\right] - 1$

$= e^{\frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} - 1$

DL : $\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$

$\exp\left[\frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right] = \exp\left[-\frac{1}{n(n+1)} + o\frac{1}{n(n+1)}\right] = 1 - \frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$

$e^{-x} = 1 - x + o(x)$

$u_n = \exp\left[\frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right] - 1 = -\frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) \sim -\frac{1}{n(n+1)} \sim -\frac{1}{n^2}$

Donc $\sum u_n$ CV car $\sum -\frac{1}{n^2}$ CV

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

2) $u_n = \frac{1}{n\sin^2 n}$

$-1 \leq \sin n \leq 1 \iff 0 \leq \sin^2 n \leq 1 \iff \frac{1}{n\sin^2 n} \geq \frac{1}{n}$

D'où $\sum u_n \geq \sum \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$ donc $\sum u_n$ DV

3) $u_n = \frac{1}{\left[\sqrt[n]{2} + \ln(n)\right]^{n^2}}$

$\left(\frac{\ln(n)}{\sqrt[n]{2}+\ln(n)}\right)^{n^2} \longrightarrow 1$. En effet, $\frac{(\ln n)^{n^2}}{(\ln n)^{n^2}}\left(\frac{1}{1+\frac{2^{1/n}}{\ln n}}\right)^{n^2} = \left(\frac{\ln n}{\sqrt[n]{2}+\ln n}\right)^{n^2}$

$\left(\frac{1}{1+\frac{2^{1/n}}{\ln n}}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln\left(\frac{1}{1+\frac{2^{1/n}}{\ln n}}\right)} = e^{-n^2 \ln\left(1+\frac{2^{1/n}}{\ln n}\right)} \sim e^{-n^2}\frac{2^{1/n}}{\ln n}$

$a \sim b \Rightarrow \frac{a}{b} \xrightarrow{+\infty} 1$

$\Rightarrow \sqrt[n]{2} + \ln(n) \geq \sqrt[n]{2}$

$n \geq 3$ ($e^1 \geq 2{,}7$) : $\frac{1}{\sqrt[n]{2}+\ln(n)} \leq \frac{1}{2^{1/n}} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}+\ln(n)}\right)^{n^2} \leq \frac{1}{2^{1/n\,n^2}} = \frac{1}{2^n}$

$\sum \frac{1}{2^n}$ CV $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \ell^n = \frac{1}{1-\ell}$ si $|\ell| < 1$

4) $u_n = \frac{1}{n^{\ln(n)}}$

$n \geq 5$: $\ln(n) \geq \ln 5 > 1 \Rightarrow n^{\ln(n)} \geq n^{\ln 5}$

$\Rightarrow \frac{1}{n^{\ln(n)}} \leq \frac{1}{n^{\ln 5}}$

$\sum \frac{1}{n^{\ln 5}}$ CV car $\ln 5 \geq 1$

Donc $\sum \frac{1}{n^{\ln(n)}}$ CV

Puissances → passer à l'exponentielle

OU : Cauchy

$u_n^{1/n} = \frac{1}{n^{\frac{\ln(n)}{n}}} = \frac{1}{\exp\left[\ln(n)\frac{\ln(n)}{n}\right]} = \frac{1}{e^{\frac{\ln(n)}{n}\ln(n)}} = \frac{1}{e^{\frac{\ln^2(n)}{n}}} \xrightarrow{n\to+\infty} 1$

On ne peut pas conclure

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

6) $u_n = \left(\frac{\sin^2 n}{n}\right)^n$

$\left|\frac{\sin^2 n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$

$\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{\sin^2 n}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

Donc $\sum u_n$ CV

Exercice 3 :

1) $\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k - 1 - \frac{1}{3}$

$\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$\sum_{k=0}^{n} e^k \longrightarrow \frac{1}{1-\ell}$ si $|\ell| < 1$

2) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \longrightarrow +\infty$ car $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ DV

$\sum \frac{1}{n^{1/2}}$

Exercice 4 :

$u_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ CV $\Rightarrow \sum u_n$ CV

$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \left[\ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln(k)\right]$ car $\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)$

$= \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right)$

$= \ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln(k)$

$+ \ln(1) + \ln(3) - 2\ln(2)$
$+ \ln(2) + \ln(4) - 2\ln(3)$
$+ \ln(3) + \ln(5) - 2\ln(4)$
$+ \vdots \quad \vdots \quad \vdots$
$+ \ln(n-2) + \ln(n) - 2\ln(n-1)$
$\ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln(n)$

$= \ln(1) - \ln(2) - \ln(n) + \ln(n+1)$

Donc $\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = -\ln(2) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \xrightarrow{n\to+\infty} -\ln(2)$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 5 :

1) $u_n = n! x^{n^2}$, $x > 0$

Critère d'Alembert : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)! x^{(n+1)^2}}{n! x^{n^2}} = \frac{(n+1) x^{n^2} x^{2n+1}}{x^{n^2}} = (n+1) x^{2n+1}$

$= (n+1) e^{(2n+1)\ln x} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}$

D'après le critère d'Alembert,

$\sum n! x^{n^2}$ DV si $x > 1$

$\sum n! x^{n^2}$ CV si $x \in]0,1[$

2) $u_n = \frac{x^n}{n^x}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^x} \frac{n^x}{x^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^x x \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ (x fixé)

D'après le critère d'Alembert, $\sum \frac{x^n}{n^x}$ CV si $x \in]0,1[$

$\sum \frac{x^n}{n^x}$ DV si $x > 1$

Pour $x = 1$, $u_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \sum \frac{1}{n}$ DV

Exercice :

On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$

On admet que $\sum u_n$ CV

① Prouver que $\sum v_n$ DV

② Montrer que $u_n \sim v_n$

③ Que peut-on en déduire ?

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

① $\left.\begin{array}{l}\sum u_n \text{ CV} \\ \sum \frac{1}{n} \text{ DV}\end{array}\right\} \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \text{ DV}$

② $\frac{v_n}{u_n} = \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{1/n}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{1}{n}\frac{\sqrt{n}}{(-1)^n} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}(-1)^n} = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Donc $u_n \sim v_n$

③ En général, si $u_n \sim v_n \not\Rightarrow \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même natures

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

TD n°2

Intégration

Exercice 1 :

$$g : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow g(x) = \int_0^{2\cos x} \sqrt{4-t^2}\, dt$$

1) Montrer que g est bien définie
2) Montrer que g est dérivable
3) Calculer $g'(x)$
4) En déduire $g(x)$

1) Pour $x \in [0,\pi]$, $-2 \leq 2\cos x \leq 2$

$t \longrightarrow \sqrt{4-t^2}$ est continue sur $\{t \in \mathbb{R},\ 4-t^2 \geq 0\} = [-2,2]$

$\Rightarrow t \longrightarrow \sqrt{4-t^2}$ est continue entre 0 et $2\cos x$, $\forall x \in [0,\pi]$

$\Rightarrow g(x)$ est bien définie sur $[0,\pi]$

2) On définit $F(x) = \int_0^x \sqrt{4-t^2}\, dt$

F est dérivable pour $x \in [-2,2]$ et $F'(x) = \sqrt{4-x^2}$ (cours)
car $t \longrightarrow \sqrt{4-t^2}$ est continue sur $[-2,2]$

$$F(2\cos x) = \int_0^{2\cos x} \sqrt{4-t^2}\, dt = g(x) = F \circ \varphi(x) \quad \text{avec } \varphi(x) = 2\cos(x)$$

φ est dérivable sur $[0,\pi]$
$\varphi'(x) = -2\sin(x)$

Donc | φ dérivable sur $[0,\pi]$
| f dérivable sur $\varphi([0,\pi]) = [-2,2]$
$\Rightarrow g(x) = F \circ \varphi(x)$ est dérivable sur $[0,\pi]$

3) $g'(x) = \varphi'(x) \cdot F' \circ \varphi(x)$

$= \sqrt{4-\varphi(x)^2} \times \varphi'(x)$

$= \sqrt{4-4\cos^2 x}\,(-2\sin x)$

$= -4\sqrt{\sin^2 x}\,\sin x$

$= -4|\sin x|\sin x$

$= -4\sin^2 x$ car $x \in [0,\pi]$

Sébastien Delpeuch (delpeuchm) - CC BY-NC-SA 4.0

4) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 1 - 2\sin^2 x \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

Donc $g'(x) = -4\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)$

$= -2 + 2\cos(2x)$

Donc $g(x) = \int -2 + 2\cos(2x) = -2x + \sin(2x) + cste$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi) + cste = 0 \quad \Rightarrow cste = \pi$

Exercice 2 :

Soit $F(x) = \int_0^x \ln(1+e^{-2t})\,dt$

1) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$

2) Montrer que $\frac{a}{a+1} \leq \ln(1+a) \leq a$, $\forall a \geq 0$

3) En déduire que $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$

4) On définit $U_n = F(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que U_n converge

b) Montrer que $\frac{\ln 2}{2} \leq \lim_{n\to+\infty} U_n \leq \frac{1}{2}$

1) $t \longrightarrow \ln(1+e^{-2t})$ est définie et est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $e^{-2t} > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$

et $t \longrightarrow 1+e^{-2t}$ est dérivable

Donc F est définie sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = \ln(1+e^{-2t})$

2) $\ln(1+a) = \int_0^a \frac{1}{1+t}\,dt$

$0 \leq t \leq a \quad \Rightarrow \quad 1 \leq 1+t \leq 1+a$

$\Rightarrow \frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$

$\Rightarrow \int_0^a \frac{1}{1+a}\,dt \leq \int_0^a \frac{1}{1+t}\,dt \leq \int_0^a 1\,dt$

$\Rightarrow \frac{a}{a+1} \leq \ln(1+a) \leq a$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

3) $\frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} \leq \ln(1+e^{-2t}) \leq e^{-2t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\,dt \leq \int_0^x \ln(1+e^{-2t}) \leq \int_0^x e^{-2t}\,dt$$

$\forall x \geq 0$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\,dt \leq F(x) \leq \left[\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_0^x$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{1}{2}\ln(1+e^{-2t})\right]_0^x \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{e^{-2x}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{e^{-2x}}{2}$$

4) a) $u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} \ln(1+e^{-2t})\,dt - \int_0^n \ln(1+e^{-2t})\,dt$

$$= \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-2t})\,dt \geq 0$$

$\Rightarrow u_n$ est croissante

$u_n = F(n) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2n} \leq \frac{1}{2}$

$u_n \nearrow$, u_n bornée $\Rightarrow u_n$ converge

b) On a : $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2n}) \leq F(n) = u_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2n}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\ln(1+e^{-2n}) \leq \lim_{n\to+\infty} u_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} e^{-2n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(2) \leq \lim_{n\to+\infty} u_n \leq \frac{1}{2}$$

Exercice 3 :

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^3 \ln x$

2) $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$

3) $f(x) = xe^{x^2}$

4) $f(x) = \frac{x^3}{1+x^4}$

5) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

3) $f(x) = x e^{x^2} = \frac{1}{2} u'(x) e^{u(x)}$ avec $u(x) = x^2$

$F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + cste$

4) $f(x) = \frac{x^3}{1+x^4} = \frac{1}{4} \frac{4x^3}{1+x^4} = \frac{1}{4} \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = 1+x^4$

$F(x) = \frac{1}{4} \ln(1+x^4) + cst$

5) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{1}{x^2+1}$ avec $u(x) = x^2+1$

$F(x) = \int f(t)dt = \ln|x^2+1| + \arctan(x) + cst$

1) $f(x) = x^3 \ln(x)$

On pose $u' = x^3$ $\quad u = \frac{1}{4}x^4$

$v = \ln x$ $\quad v' = \frac{1}{x}$

$$\int^x t^3 \ln t = \left[\frac{1}{4} t^4 \ln t\right]^x - \int^x \frac{1}{4} t^4 \frac{1}{t} dt$$

$$= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + cst$$

2) $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$

$= \frac{a(x+2) + b(x-1)}{(x-1)(x+2)}$

$= \frac{ax + 2a + bx - b}{(x-1)(x+2)}$

$= \frac{(a+b)x + 2a - b}{(x-1)(x+2)}$

Donc $\begin{cases} a+b = 0 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -b \\ -3b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$

ou : pour a : $(x-1) f(x)\Big|_{x=1}$

$= (x-1) \frac{1}{(x-1)(x+2)}\Big|_{x=1}$

$= \frac{1}{3}$

pour b : $(x+2) \frac{1}{(x-1)(x+2)}\Big|_{x=-2}$

$= -\frac{1}{3}$

Donc $f(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \frac{1}{x+2}$

$$\int^x f(t)dt = \int^x \frac{1}{3} \frac{1}{t-1} dt - \int^x \frac{1}{3} \frac{1}{t+2} dt$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + cst$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

TD n° 2 (bis)

Intégration

Exercice 1 :

1) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = x - \arctan(x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$

2) $\int \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\int \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin'\left(\frac{x}{2}\right)dx = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (c \in \mathbb{R})$

4) $\int t^4(1+t^5)^5\,dt = \int \frac{1}{5}(1+t^5)'(1+t^5)^5\,dt = \frac{1}{30}(1+t^5)^6 + c \quad (c \in \mathbb{R})$

5) $\int \frac{\ln t}{t}\,dt = \int \frac{1}{t}\ln t = \int \ln(t)'\ln(t)\,dt = \frac{1}{2}(\ln t)^2 + c \quad (c \in \mathbb{R})$

10) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int \sin x(\cos x)^{-2}\,dx = \int -(\cos x)'(\cos x)^{-2} = (\cos x)^{-1} + c \quad (c \in \mathbb{R})$

11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c \quad (c \in \mathbb{R})$

3) $\int \frac{1}{1+\text{Hn}x}\,dx \quad \text{Hn}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \rightarrow 1+\text{Hn}x = 1 + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$= \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}}$

$\rightarrow \frac{1}{1+\text{Hn}x} = \frac{e^x + e^{-x}}{2e^x} = \frac{1}{2} + \frac{e^{-2x}}{2}$

$\int \frac{1}{1+\text{Hn}x}\,dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-2x}}{2}\right)dx = \frac{1}{2}x - \frac{e^{-2x}}{4} + c \quad (c \in \mathbb{R})$

6) $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c \quad (c \in \mathbb{R})$

9) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx = \frac{1}{(\sin x \cos x)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)^2} = \frac{4}{(\sin(2x))^2} = 4\int \frac{1}{\sin^2(2x)}$

(car $\sin(2x) = 2\cos x \sin x$)

Changement de variable : $y = 2x \rightarrow dy = 2dx$

$4\int \frac{1}{\sin^2(2x)}\,dx = 4\int_{2x}^{ex} \frac{1}{\sin^2(y)}\frac{dy}{2} = 4\,\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos y}{\sin y}\right]_{2x}^{ex} = -2\,\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} + c \quad (c \in \mathbb{R})$

8) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{\cos x}{\sin x} + c = -\text{cotan}(x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$

car $\text{cotan}(x) = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$ et $\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2(x)} = \frac{-1}{\sin^2 x}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

N.B : Lorsqu'on fait un changement de variable $y = \varphi(x)$ alors on remplace dy par $\varphi'(x)\,dx$ $\rightarrow$ $dy = \varphi'(x)\,dx$

7) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(t)}\,dt = \tan t + c \quad (c \in \mathbb{R})$

12) $\displaystyle\int \frac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \int 2(2x+1)(x^2+x+1)^{-1/2}\,dx = 4\sqrt{x^2+x+1} + c \quad (c \in \mathbb{R})$

Exercice 2 :

$$\frac{1}{x+x^3} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

$$= \frac{a(x^2+1)+(bx+c)x}{x(x^2+1)}$$

$$= \frac{(a+b)x^2+cx+a}{x(x^2+1)} \iff \begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ a=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=0 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x+x^3}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \left[\ln|x|\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \left[\ln|x|\right]_1^2 - \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_1^2 + c$$

$$= \ln 2 - \ln 1 - \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 2$$

$$= \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5$$

$$= \ln\left(\frac{2^{3/2}}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

$$= \ln|x| - \ln\sqrt{x^2+1}$$

$$= \ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\right) + c$$

$$= \ln\frac{2}{\sqrt{5}} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \ln\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 3.

1) $\int \frac{x-1}{x^2-2x+2} = \int \frac{1}{2}\frac{2x-2}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| + c$

La primitive $F(x)$ telle que $F(2)=0$ est $\begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| + c \\ F(2) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow F(2)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(4-4+2)+c=0$

$\Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}\ln(2)$

Donc $F(x) = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| - \frac{1}{2}\ln(2)$

ou : $\int_2^x \frac{x-1}{x^2-2x+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2|\right]_2^x = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| - \frac{1}{2}\ln(2)$

2) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx = \int \frac{1}{2}\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx = \int \frac{1}{2}\,u'(x)\,u(x)^{-1/2}\,dx$

$= u(x)^{1/2} + c$

$= \sqrt{x^2+2x+5} + c$

$F(-1)=0 \Rightarrow \sqrt{1-2+5}+c=0 \Rightarrow c=-2$

Donc $F(x) = \sqrt{x^2+2x+5} - 2$

3) $\int_2^x \ln t\,dt$ IPP : $u'(t)=1 \quad u(t)=t$

$v(t)=\ln(t) \quad v'(t)=\frac{1}{t}$

$= \left[t\ln t\right]_2^x - \int_2^x t\times\frac{1}{t}\,dt$

$= x\ln x - 2\ln 2 - x + 2$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

4) $\int x^{4/3} = \int \frac{3}{7}\frac{7}{3}x^{4/3} = \frac{3}{7}x^{7/3} + c$

$F(1) = 0 \Rightarrow c = -\frac{3}{7}$

$F(x) = \frac{3}{7}x^{7/3} - \frac{3}{7}$

Exercice 4 :

On rappelle que $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y$

$\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2} = \cos x \cos y \quad (*)$

$\frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2} = \sin x \cos y \quad (**)$

1) $\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)\,dx \quad , \quad p, q \in \mathbb{N}^*$

On applique $(*)$ à $x \longrightarrow px$, $y \longrightarrow qx$

$\cos(px)\cos(qx) = \frac{\cos(p+q)x + \cos(p-q)x}{2}$

$\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(p+q)x + \cos(p-q)x}{2}\,dx = \left[\frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{\sin(p-q)x}{2(p-q)}\right]_0^{2\pi}$ si $p-q \neq 0$

$= 0$

Pour $p=q$: $\int_0^{2\pi} \cos^2 px\,dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos(2px)}{2} + \frac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{\sin(2px)}{4p}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{1}{2}x\right]_0^{2\pi}$

$= \pi$

Conclusion : $p, q \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \pi & \text{si } p = q \end{cases}$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

2) $\int_0^{\pi} \cos(2x)\sin(3x)\,dx$

On applique (**) à $x \longrightarrow 3x$, $y \longrightarrow 2x$: $\sin(3x)\cos(2x) = \frac{\sin(5x)+\sin x}{2}$

$$\int_0^{\pi} \cos(2x)\sin(3x)\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin(5x)+\sin x}{2}\,dx = \left[\frac{-\cos 5x}{10} - \frac{\cos x}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2}$$

$$= 2\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{6}{5}$$

Remarque : cet exercice est valable pour calculer les primitives de

$\begin{cases} \cos(\beta x)\sin(\alpha x) \\ \sin(\beta x)\sin(\alpha x) \\ \cos(\beta x)\cos(\alpha x) \end{cases}$

Exercice 5 :

1) $\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2ix}+2+e^{-2ix}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right) + \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$$

$$\int \cos^2 x = \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \int \frac{1}{2}\,dx = \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{1}{2}x + cste$$

2) $\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}\right)$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x$$

$$\int \cos^3 x = \frac{1}{4}\int \cos(3x) + \frac{3}{4}\int \cos x$$

$$= \frac{\sin(3x)}{12} + \frac{3\sin x}{4} + cste$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

3) $\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}\right)$

$= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + e^{-4ix} + 4\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right)\right) + \frac{6}{16}$

$= \frac{1}{16}\left(2\cos(4x) + 8\cos(2x)\right) + \frac{3}{8}$

$= \frac{1}{8}\left(\cos(4x) + 4\cos(2x)\right) + \frac{3}{8}$

$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{8}\int\left(\cos(4x) + 4\cos(2x)\right)dx + \int \frac{3}{8}\,dx$

$= \frac{1}{8}\left(\frac{\sin(4x)}{4} + 2\sin(2x)\right) + \frac{3}{8}x$

$= \frac{\sin(4x)}{32} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{3}{8}x + cst$

4) $\cos^5 x = \frac{1}{2^5}\left(e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}\right)$

$= \frac{1}{2^4}\left(\frac{e^{5ix}+e^{-5ix}}{2} + 5\,\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} + 10\,\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)$

$= \frac{1}{2^4}\left(\cos 5x + 5\cos(3x) + 10\cos x\right)$

$\int \cos^5 x\,dx = \frac{1}{2^4}\int \cos 5x + \frac{1}{2^4}5\int \cos(3x) + \frac{10}{2^4}\int \cos x$

$= \frac{\sin(5x)}{80} + \frac{5\sin(3x)}{48} + \frac{5\sin x}{8} + cste$

Exercice 6 :

1) $\int \text{Arctan}(t)\,dt$ $\quad \begin{cases} u'(t) = 1 & u(t) = t \\ v(t) = \text{Arctan}(t) & v'(t) = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$

$= t\,\text{Arctan}(t) - \frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt$

$= t\,\text{Arctan}(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + cste$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

2) $\int \frac{t}{\cos^2(t)}\,dt$ $\quad u(t)=t \quad u'(t)=1$

$v'(t)=\frac{1}{\cos^2 t} \quad v(t)=\tan t$

$= t\tan(t) - \int \tan(t)\,dt$

$= t\tan(t) - \int \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,dt$

$= t\tan(t) + \ln|\cos t| + cste$

3) $\int e^t \cos t\,dt = I$ $\quad \begin{cases} u(t)=\cos t & u'(t)=-\sin(t) \\ v'(t)=e^t & v(t)=e^t \end{cases}$

$I = e^t\cos t + \int e^t \sin t$ $\quad \begin{cases} u(t)=\sin t & u'(t)=\cos t \\ v'(t)=e^t & v(t)=e^t \end{cases}$

$I = e^t\cos t + e^t\sin t - \underbrace{\int e^t\cos t\,dt}_{=I}$

$\Leftrightarrow 2I = e^t\cos t + e^t\sin t$

$\Leftrightarrow I = \frac{e^t(\cos t+\sin t)}{2} + cste$

OU : $\int e^t\cos t\,dt = \mathrm{Re}\int e^t e^{it}\,dt \quad$ car $\mathrm{Re}(e^{it})=\cos t$

$= \mathrm{Re}\int e^{(1+i)t}\,dt$

$= \mathrm{Re}\left[\frac{e^{(1+i)t}}{1+i}\right]$

$= e^t\,\mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}}{1+i}\right) = e^t\,\mathrm{Re}\left[\frac{(1-i)e^{it}}{2}\right] = \frac{e^t}{2}\mathrm{Re}(e^{it}) + \frac{e^t}{2}\mathrm{Re}(-ie^{it})$

$= \frac{e^t\cos t}{2} + \frac{e^t\sin t}{2}$

5) $\int x^n \ln x\,dx \quad u(x)=\ln x \quad u'(x)=\frac{1}{x}$

$v'(x)=x^n \quad v(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$

$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int \frac{1}{x}x^{n+1}\,dx$

$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx$

$= \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}x^{n+1}\right) + C$

$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - 1\right) + C$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

8) $\int \sin(\ln x)\,dx$ $\quad \begin{cases} u(x) = \sin(\ln x) & u'(x) = \frac{1}{x}\cos(\ln x) \\ v'(x) = 1 & v(x) = x \end{cases}$

$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx$ $\quad \begin{cases} u(x) = \cos(\ln x) & u'(x) = -\frac{1}{x}\sin(\ln x) \\ v'(x) = 1 & v(x) = x \end{cases}$

$= x\sin(\ln x) - \left(x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\right)$

$I = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - I$

$2I = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)$

$I = x\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + \text{cste}$

4) $\int_0 (x+2)\sin(4x)$ $\quad \begin{cases} u(x) = (x+2) & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \sin(4x) & v = -\frac{1}{4}\cos(4x) \end{cases}$

$= \left[(x+2)\left(\frac{-\cos(4x)}{4}\right)\right]_0^{\pi/8} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/8} \cos(4x)\,dx$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\left[\sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{8}}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$

$= \frac{9}{16}$

6) $\int_0^1 2x\,\text{Arctan}\,x\,dx$ $\quad \begin{cases} u(x) = \arctan(x) & u'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ v'(x) = 2x & v(x) = x^2 \end{cases}$

$= \left[x^2 \arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx$

$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$= \frac{\pi}{4} - \left[x - \arctan x\right]_0^1$

$= \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4}$

$= -1 + \frac{\pi}{2}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

7) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,(\tan x)'\,dx$

$= \left[\frac{\tan x}{2}\right]_0^{\pi/4}$

$= \frac{1}{2}$

Exercice 13 :

1) $\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$

↑ n'admet pas de racines réelles donc ok

Pour a : $\frac{1}{x^2-x+1} = a + \frac{(bx+c)(x+1)}{x^2-x+1}$

$\Rightarrow \frac{1}{3} = a \quad (x \to -1)$

Pour b : $\frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{ax}{x+1} + \frac{(bx+c)x}{x^2-x+1}$

$\Rightarrow 0 = a + b \quad (\text{quand } x \to +\infty)$

$\Rightarrow b = -a = -\frac{1}{3}$

Pour c : $\frac{1}{x+1} = \frac{a(x^2-x+1)}{x+1} + bx + c$

$\Rightarrow 1 = a + c \quad (x=0)$

$\Rightarrow c = \frac{2}{3}$

Donc $\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}$

2) ⊛ $\int \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}$

$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3\times 2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \int \frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}{x^2-x+1}\,dx$

$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Or $\int \frac{1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\,dx = \frac{1}{\alpha A}\arctan\left(\frac{1}{A}\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right)$

$A = \frac{\sqrt{-\beta^2+2\alpha\gamma}}{2|\alpha|}$

♡ Pour $\alpha = 1$:

$= \frac{2}{\sqrt{4\gamma-\beta^2}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{4\gamma-\beta^2}}\left(x+\frac{\beta}{2}\right)\right)$

Ici, on applique pour $(\alpha=1, \beta=-1, \gamma=1) \Rightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + cste$

OU : $I = \int \frac{1}{x^2-x+1}$

$x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right)$

$= \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)$

$I = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx$

On pose $u = \frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(u+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,du$

$I = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{4}{3}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{2\sqrt{3}}{3}[\arctan u] = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{3}\right)$

Donc $\int \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + cste$

$= \int \frac{1}{x^3+1}\,dx$

⊛ $\int \frac{x^3}{x^3+1}\,dx = \int \frac{x^3+1-1}{x^3+1}\,dx = \int\left(1 - \frac{1}{x^3+1}\right)dx$

$= x - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$ + cste

3) $\int \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$ $\quad t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2t}\,dx$

$\Rightarrow dx = 2t\,dt$

$= \int \frac{1}{t^4+t}\,2t\,dt$

$= 2\int \frac{1}{t^3+1}\,dt = 2\left[\frac{1}{3}\ln|t+1| - \frac{1}{6}\ln|t^2-t+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)\right] + cste$

$= \frac{2}{3}\ln|\sqrt{x}+1| - \frac{1}{3}\ln|x-\sqrt{x}+1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)\right) + cste$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 14 :

1) $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$

Pour a : $\dfrac{1}{x^2+1} = a + \dfrac{(bx+c)(x+1)}{x^2+1}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} = a \quad (\text{pour } x=-1)$

Pour b : $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{ax}{x+1} + \dfrac{(bx+c)x}{x^2+1}$

$\Rightarrow 0 = a+b \quad (x \to +\infty)$

$\Rightarrow b = -a = -\dfrac{1}{2}$

Pour c : $1 = a + c \quad (x=0)$

$\Rightarrow c = \dfrac{1}{2}$

Donc $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{x-1}{x^2+1}$

2) $\displaystyle\int_0^5 \frac{e^x}{(1+e^x)(1+e^{2x})}\,dx$. On pose $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$
$\Rightarrow dx = e^{-x}du$

$e^0 = 1$ et e^5

Donc $I = \displaystyle\int_1^{e^5} \frac{1}{(1+u)(1+u^2)}\,du$

$= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^{e^5} \frac{1}{u+1}\,du - \frac{1}{2}\int \frac{u-1}{u^2+1}\,du$

$= \dfrac{1}{2}\Big[\ln|u+1|\Big]_1^{e^5} - \dfrac{1}{4}\Big[\ln(1+u^2) - 2\arctan(u)\Big]_1^{e^5}$

$= \dfrac{1}{2}\ln(e^5+1) - \ln\sqrt{2} - \dfrac{1}{4}\ln(1+e^{2\cdot 5}) + \dfrac{1}{2}\arctan(e^5) + \dfrac{1}{4}\ln(2) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{4}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 15.

1) $F(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$

$a = (x-1)F(x)\Big|_{x\to 1} = \dfrac{1}{x^2+1}\Big|_{x=1} = \dfrac{1}{2}$

$xF(x) = \dfrac{ax}{x-1} + \dfrac{bx^2+cx}{x^2+1} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = 0 = a+b \Rightarrow b = -\dfrac{1}{2}$

$F(0) = -1 = -a+c \Rightarrow c = -\dfrac{1}{2}$

D'où $F(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{x+1}{x^2+1}$

2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{(e^x-1)(e^{2x}+1)}\,dx$ On pose $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{u}$

$x=2 \Rightarrow u = e^2$

$x=1 \Rightarrow u = e$

$$I = \int_e^{e^2} \frac{u}{(u-1)(u^2+1)} \times \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{2}\int_e^{e^2} \frac{1}{u-1}\,du - \frac{1}{2}\int_e^{e^2} \frac{u+1}{u^2+1}\,du$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln|u-1|\right]_e^{e^2} - \frac{1}{4}\int_e^{e^2} \frac{2u}{u^2+1} - \frac{1}{2}\int_e^{e^2} \frac{1}{u^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(e^2-1) - \frac{1}{2}\ln(e-1) - \frac{1}{4}\ln(e^4+1) + \frac{1}{4}\ln(e^2+1) - \frac{1}{2}\arctan(e^2) + \frac{1}{2}\arctan(e).$$

Exercice 12 :

$I = \left]\dfrac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ \dfrac{\pi}{4} + (k+1)\pi\right[$

$\{x \in \mathbb{R},\ \cos x = \sin x\} = \left\{\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \Rightarrow x \longrightarrow \dfrac{1}{\cos x - \sin x}$ est continue pour I

- $I(x) + J(x) = \displaystyle\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}\,dx = \int \frac{-u'(x)}{u(x)}\,dx$

$$= -\ln|\cos x - \sin x| + c/e$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

- $I(x) - J(x) = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x \sin x} dx = \int 1 \, dx = x + cte$

- $I = \frac{I+J+I-J}{2} = \frac{x - \ln|\cos x - \sin x|}{2} + cte$

  $J = \frac{I+J-(I-J)}{2} = \frac{-x - \ln|\cos x - \sin x|}{2} + cte$

Exercice 11 :

1) $\int_0^1 t^p (1-t)^q dt = \int_0^1 t^q (1-t)^p dt$

On pose $u = 1-t \Leftrightarrow t = 1-u$ $\quad t=0 \Rightarrow u=1$

$du = -dt \Leftrightarrow dt = -du$ $\quad t=1 \Rightarrow u=0$

$J_{p,q} = \int_1^0 (1-u)^p u^q \cdot -du = \int_0^1 u^q (1-u)^p du = J_{q,p}$

2) $(q+1)\int_0^1 \underbrace{t^p}_{\text{primitive}} \underbrace{(1-t)^q}_{\text{dérivée}} dt = p \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q+1} dt$

IPP avec $u(t) = t^p$ $\quad u'(t) = p t^{p-1}$

$v'(t) = (1-t)^q$ $\quad v(t) = \frac{-(1-t)^{q+1}}{q+1}$

$$\int_0^1 t^p (1-t)^q dt = \left[t^p \left(\frac{-(1-t)^{q+1}}{q+1} \right) \right]_0^1 + \int_0^1 p t^{p-1} \frac{(1-t)^{q+1}}{q+1} dt$$

$$= \frac{p}{q+1} \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q+1} dt$$

$\Rightarrow (q+1) J_{p,q} = p J_{p-1,q+1}$

3) $J_{0,p+q} = \int_0^1 (1-t)^{p+q} dt = \left[\frac{-(1-t)^{p+q+1}}{p+q+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+q+1}$

$(q+1) J_{p,q} = p J_{p-1,q+1} \Rightarrow J_{p,q} = \frac{p}{q+1} J_{p-1,q+1} = \frac{p}{q+1} \frac{p-1}{q+2} J_{p-2,q+2}$

$= \frac{p}{q+1} \frac{p-1}{q+2} \frac{p-2}{q+3} J_{p-3,q+3}$ $\quad \left(J_{p-1,q+1} = \frac{p-1}{q+2} J_{p-2,q+2} \right)$

$J_{p+q,p+q} = \frac{p!}{(q+1)(q+2)\cdots(q+p)}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$$J_{p+p,q+p} = \frac{p!}{(q+1)(q+2)\cdots(q+p)} J_{q\,p+q}$$

$$= \frac{p!}{(q+1)\cdots(p+q)} \frac{1}{p+q+1}$$

(On multiplie en haut et en bas par $q!$)

$$J_{p,q} = \frac{(1\times\cdots\times q)\,p!}{1\times\cdots\times(q-1)q\times(q+1)\cdots(q+p+1)} = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!} \quad \forall p,q \in \mathbb{N}$$

Exercice 10 :

$$\int_{-x}^{x} f(t)dt = 2\int_{0}^{x} f(t)dt \quad \text{si } f \text{ est paire} \quad (f(x) = f(-x))$$

2) $g = -t \Leftrightarrow t = -g$ $\quad t = x \Rightarrow g = -x$
$dg = -dt \Leftrightarrow dt = -dg$ $\quad t = -x \Rightarrow g = x$

$$\int_{-x}^{x} f(t)dt = -\int_{x}^{-x} f(-g)\,dg = \int_{-x}^{x} f(-g)\,dg$$

Si $f(-g) = -f(g)$: $\int_{-x}^{x} f(t)dt = -\int_{-x}^{x} f(g)dg \Rightarrow 2\int_{-x}^{x} f(t)dt = 0$

1) $$\int_{0}^{x} f(t)dt = -\int_{0}^{-x} f(-g)\,dg = -\int_{0}^{-x} f(g)\,dg \quad \text{si } f \text{ est paire}$$

$g = t$; $dg = -dt$

$$= \int_{-x}^{0} f(g)dg$$

$$\int_{-x}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} f(t)\,dt + \int_{-x}^{0} f(t)dt$$

$$= \int_{0}^{x} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

$$= 2\int_{0}^{x} f(t)dt$$

3) f est T-périodique ssi $f(t+T) = f(t)$ $\forall t$

$$\int_{x}^{x+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt$$

Changement de variable $y = t - x$; $t = x + T \Rightarrow y = x + T - x = T$
$dy = dt$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_x^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(g+x)\,dg \quad \longrightarrow \text{ ne marche pas}$$

Soit $F(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,dt$ et $G(x) = \int_0^T f(t)\,dt$ — On veut montrer que $F(x) = G(x)$, $\forall x$

$\Uparrow$

$F'(x) = G'(x)$ et $F(0) = G(0)$

$G'(x) = 0$ (ne dépend pas de x)

$$F(x) = \int_0^{x+T} f(t)dt - \int_0^x f(t)\,dt$$

Donc $F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$ car f est T-périodique

$F'(x) = G'(x) = 0$

$F(x) = \int_0^T f(t)dt = G(x)$ $\Big\}$ $F(x) = G(x)$ $\forall x$

Exercice 9 :

1) $$\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$$

$$\frac{1}{x^2+\beta x+\gamma} \longrightarrow \frac{2}{\sqrt{4\gamma-\beta^2}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{4\gamma-\beta^2}}(x+\frac{\beta}{2})\right)$$

$\beta = \gamma = 2$

Donc $I = \left[\arctan(x+1)\right]_0^1 = \arctan(2) - \frac{\pi}{4}$

Exercice 8 :

1) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$ $\quad y = \frac{x}{a}$ $\quad dy = \frac{dx}{a}$

$$\int \frac{1}{a^2+a^2y^2}\,a\,dy = \frac{a}{a^2}\int \frac{1}{1+y^2}\,dy$$

$$= \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + cte$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

2) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \qquad y=\frac{x}{a} \qquad dy=\frac{dx}{a}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-a^2y^2}}\,a\,dy = \frac{a}{|a|}\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \frac{a}{|a|}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c\text{ste}$$

Remarque: Pour $a \neq 0$:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c\text{ste}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{a}{|a|}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c\text{ste}$$
$$= \arcsin\left(\frac{x}{|a|}\right)+c\text{ste}$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Révision calcul intégral

Exercice 1

(1) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx$

$= x - \text{Arctan}(x) + cte$

(2) $\int t^4(1+t^5)\,dt = \frac{1}{30}(1+t^5)^6 + cte$

(3) $\int \frac{1}{\cos^2(t)} = \tan(t)$

(4) $\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = -\int \frac{1}{u^2} = \frac{1}{u} = \sec(x)$

$u = \cos(x)$

$x = \arccos(u)$

$dx = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(5) $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(x)\,dx = -\frac{\cos(x)}{2} + cte$

(6) $\int \frac{\ln(t)}{t}\,dt = \ln^2(t) + cte$

(7) $\int \frac{1}{\sin^2(t)}\,dt = -\frac{1}{\tan(t)} + cte$

$-\frac{\cos x}{\sin x}$

(8) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{Arcsin}(x) + cte$

$-\frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$

(9) $\int \frac{1}{1+th(x)} = \int \frac{1}{1+\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}}\,dx = \int \frac{e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\,dx$

$= -\frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{x}{2} + cte$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

(10) $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$ on pose $v = \cos x$

$= -\int \frac{1}{v} \, dv = -\ln|v| + cte = -\ln|\cos x| + cte$

(11) $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1 - \cos(4x)}{8}$

$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{8}{1 - \cos(4x)} dx$

$v = 4x$

$= 2 \int \frac{1}{1 - \cos v} \, dv$

$= 2 \int \frac{1}{1 - \cos(2 \arctan(v))} \cdot \frac{2}{1+v^2} \, dv$

$v = \tan(u/2)$

$u = 2 \arctan(v)$

$du = \frac{2}{1+v^2} dv$

$= 2 \int \frac{1}{v^2}$

$= -\frac{2}{v} + cte = -\frac{2}{\tan(u/2)} + cte = -\frac{2}{\tan(2x)} + cte$

(12) $\int \frac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+1}} dx = \int \frac{4x}{\sqrt{x^2+x+1}} + \int \frac{2}{\sqrt{x^2+x+1}}$

(12.1) $4 \int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} dx = 4 \int \frac{x}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}} dx$ $v = x + \frac{1}{2}$

$= 4 \int \frac{2v-1}{\sqrt{4v^2+3}} \, dv = 4 \left(\int \frac{2v}{\sqrt{4v^2+3}} - \int \frac{1}{\sqrt{4v^2+3}} \right)$

$= 4 \left(\frac{1}{2} \sqrt{4v^2+3} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2}{\sqrt{3}} v + \sqrt{1 + \frac{4}{3} v^2} \right| \right)$ *

On peut le voir à vue: $\frac{4}{4} \sqrt{x^2+x+1}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

(12.2) $\int \frac{2}{\sqrt{x^2+x+1}} = 4 \int \frac{1}{\sqrt{4u^2+3}}\,du \qquad u = x + \frac{1}{2}$ I10

$= 2\sqrt{3} \int \frac{1}{\sqrt{3\tan^2(v)+3}\cos^2(v)}\,dv$

$= 2 \int \frac{1}{\cos(v)}\,dv$

$= 2 \ln\left|\tan(v) + \frac{1}{\cos(v)}\right|$

Exercice 2

$$\frac{1}{1+x^2} = a + \frac{(bx+c)x}{1+x^2}$$

Si $x = 0$

$a = 1$

$$\frac{1}{x} = \frac{1+x^2}{x} + bx + c$$

si $x = 1$ $\qquad b + c = -1$

$1 = 2 + b + c$

si $x = 2$

$\frac{1}{2} = \frac{5}{2} + 2b + c \qquad 2b + c = -2$

$b = -1$ donc $\frac{1}{x+x^3} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$

$c = 0$

Donc $\int_1^2 \frac{1}{x+x^3} = \left[\ln(x)\right]_1^2 - \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^2$

$= \ln(2) - \frac{1}{2}\ln(5/2)$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 3

(1) $\int_{(1)} = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 2) + cte = \int_2^x \frac{t-1}{t^2-2t+2}\,dt$

$x = 2 \Rightarrow \int(1) = 0$

$cte = -\frac{\ln(2)}{2}$

(2) $\int(2) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+2x+5} + cte$ $\quad \frac{1}{2}$ $\quad 2x+2$

$x = -1 \Rightarrow \int(2) = 0$

$cte = -2$

(3) IPP : $\int u'v = [uv] - \int uv'$

$u' = 1$

$u = x$ $\qquad \int(3) = x\ln x - x + cte$

$v = \ln x$ $\qquad cte = -2\ln 2 + 2$

$v' = 1/x$

(4) $\int(4) = \frac{3}{7} x^{7/3} + cte \Rightarrow cte = -3/7$

Exercice 4

(1) $\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((p+q)x) + \cos((p-q)x)$

$= \left[\frac{1}{2(p+q)} \sin((p+q)x)\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{1}{2(p-q)} \sin((p-q)x)\right]_0^{2\pi} + cte = 0$

(2) $= \left[\frac{1}{10} \sin(5x)\right]_0^{\pi} + \left[-\frac{1}{2} \sin(-x)\right]_0^{\pi} + cte$

$= 0$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 4

(1) $\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((p+q)x)\cos((-q+p)x)\,dx$

$= 0$

pour $p = q$

$= 2\pi/2 = \pi$

(2) $\int_0^{\pi} \cos(2x)\sin(3x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin(5x) + \sin(x)$

$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5}\cos(5x) - \cos(x)\right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} + 1 + \frac{1}{5} + 1\right) = \frac{1}{5} + 1$

Exercice 5

(1) $\int \cos^2 x\,dx = \int 1/2 + \cos(2x)/2\,dx$

$= \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$

$\int \cos^{2p+1} x\,dx = \int \cos x\,(\cos^2 x)^p\,dx$

$= \int \cos x\,(1 - \sin^2 x)^p\,dx$

$= F(\sin(x)) + cte$

avec $F(t) = (-1)^p \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (x^2)^k (-1)^{p-k}$

(2) $\int \cos^3 x\,dx = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} (-1)^k \binom{p}{k}$

$= \sum_{k=0}^{1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} (-1)^k \binom{1}{k}$

$= x + \frac{x^3}{3}(-1) = x - \frac{x^3}{3}$

$= \sin x - \frac{\sin x^3}{3}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

(3) $\int \cos^4(x)\,dx = \int \cos^2(x)\cos^2(x)\,dx$

$= \int \frac{1+\cos(2x)}{2} \cdot \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx$

$= \frac{1}{4}\int 1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\,dx$

$= \frac{1}{4}\int 1 + 2\cos(2x) + \frac{1+\cos(4x)}{2}$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2} + \sin(2x) + \frac{\sin(4x)}{8}\right)$

$= \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{3x}{8} + \frac{\sin(2x)}{4}$

(4) $\int \cos^5 x = \frac{5}{8}\sin x - \frac{5\sin^3(3x)}{48} + \frac{\sin^5(5x)}{80}$

Exercice 6

(1) $u' = 1 \qquad v' = \frac{1}{1+t^2}$

$u = t \qquad v = \text{Arctan } t$

$= t\,\text{Arctan } t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$

(2) $u' = \frac{1}{\cos^2 t} \qquad v = t$

$u = \tan t \qquad v' = 1$

$= t.\tan(t) - \int \tan t$

$= t.\tan(t) + \ln|\cos t|$

(3) $u' = \cos(t) \qquad I = \int \cos(t)\,e^t$

$u = \sin(t) \qquad = \sin(t)\,e^t - \int \sin(t)\,e^t$

$= \sin(t)\,e^t + \cos(t)\,e^t - \int \cos(t)\,e^t$

$= \frac{e^t}{2}(\sin(t) + \cos(t))$.

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 9

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \text{Arctan}(x+1)$$

Exercice 8

$$\frac{1}{a}\int \frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{a}\,\text{Arctan}(x/a)$$

$x = au$

$u = \frac{x}{a}$

$dx = a$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 11

(1) $I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q \, dt = \int_0^1 t^q (1-t)^p$

$t = 1-y$ $\quad I_{p,q} = \int_1^0 -(1-y)^p y^q \, dy = \int_0^1 (1-y)^p y^q \, dy$

$dt = -1$

(2) $p \geq 1$ $\quad (q+1)\, I_{p,q} = p\, I_{p-1,q+1}$

$(q+1) \int_0^1 t^p (1-t)^q \, dt = p \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q+1} \, dt$

$u(t) = t^p$ $\quad u'(t) = p t^{p-1}$

$v'(t) = (1-t)^q$ $\quad v(t) = -\dfrac{(1-t)^{q+1}}{q+1}$

$(q+1)\, I_{p,q} = \left[-t^p \dfrac{(1-t)^{q+1}}{q+1} \right]_0^1 + p \int_0^1 t^{p-1} \dfrac{(1-t)^{q+1}}{q+1} \, dt$

$= \dfrac{p}{q+1} \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q+1} \, dt$

(3) $I_{0,p+q} = \int_0^1 (1-t)^{p+q} \, dt$

$= \left[-\dfrac{(1-t)^{p+q+1}}{p+q+1} \right]_0^1 = \dfrac{1}{p+q+1}$

$\int_0^1 t^p (1-t)^q = \int_0^1$

$I_{p,q}^{(q+1)} = p\, I_{p-1,q+1}$

$I_{p-1,q+1} = \dfrac{p-1}{q+2} I_{p-2,q+2}$

$\vdots$

$\dfrac{\prod_{k=0}^{p-1} (p-k)}{\prod_{k=1}^{p} (q+k)} I_{p-p,q+p} = \dfrac{p!}{\prod_{k=1}^{p} (q+k)} I_{0,p+q}$

$= \dfrac{p! \, (q)(q-1) \times \ldots \times 1}{(p+q+1)!}$

$= \dfrac{p! \, q!}{(p+q+1)!}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 10

(1) Si f paire : $\int_{-x}^{x} f = 2\int_0^x f$

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$

donc $\int_0^x f(x) + \int_{-x}^{0} f(x)$

$= \int_{-x}^{x} f(x)\,dx$

$\int_{-x}^{0} f(x) = -\int_0^{-x} f(x)\,dx$

$x = -x$

$= +\int_0^x f(-x)\,dx$

$= \int_0^x f(x)\,dx$

donc $\int_{-x}^{x} f(x)\,dx = 2\int_0^x f(x)\,dx$

$f(x)$ paire

$f(-x) = f(x)$

$\int_0^x f(x) + \int_{-x}^{0} f(x)$

$\int_0^x f(x) - \int_0^{-x} f(x)\,dx$

$\begin{cases} x = -x \\ dx = -1 \\ -\int_0^x f(-x) = -\int_0^x f(x) \\ = 2\int_0^x f(x) \end{cases}$

$\int_0^x f(x) - \int_0^{-x} f(x)$

(2) $\int_0^x f(x) - \int_0^{-x} f(x)$

$x = -x$

$+\int_0^{x} f(-x) = -\int_0^x f(x)$

$\int_{-x}^{x} f(x)\,dx = 0$

$x = -x$

$\int_0^x f(x) + \int_0^x f(-x)$

$= \int_0^x f(x) - \int_0^x f(x)$

$= 0$

$\int_x^{x+T} f(x)$

$x =$

(3) $F(x) - G(x) = 0$

$F'(x) - G'(x) = 0$

$F(0) = F(0)$

$F(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^{x+T} f(t) - \int_0^x f(t)$

$F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$

$G'(x) = 0$

$\Rightarrow F(x) = G(x)$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 13

(1) $$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

$$a = (x+1)F(x)\Big|_{x=-1} = 1/3$$

$x = 0$

$1 = a + c \Rightarrow c = \frac{2}{3}$

$x = 1$

$\frac{1}{2} = \frac{a}{2} + \frac{2b+c}{2} \Rightarrow b = -1/3$

$$(1) = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{-1x+2}{3(x^2-x+1)}$$

$$\int (1) = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \int \frac{2/3 - 1/6}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \int \frac{1}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + cte$$

(2) $$\int \frac{x^3}{x^3+1} = \int 1 - \frac{1}{x^3+1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$$

(3) $t = \sqrt{x}$

$dx = 2t$

$x = t^2$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x}} = 2\int \frac{1}{t^3+1}$$ voir (2)

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 14

(1) $$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2+1}$$

(2) $$I_3 = \frac{1}{2}\left[\ln|t+1|\right]_1^{e^3} - \left[\frac{1}{4}\ln(t^2+1) - 2\arctan(t)\right]_1^{e^3} + cte$$

Exercice 15

(1) $$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2(x-1)} + \frac{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2+1}$$

$x = 1$

$\frac{1}{2} = a$

$x = 0$

$-1 = -a + c$

$-\frac{1}{2} = c$

$x = 2$

$\frac{1}{5} = \frac{1}{2} + \frac{2b - \frac{1}{2}}{5}$

$b = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{5} - \frac{1}{2}$

$\frac{2}{10} - \frac{5}{10}$

On pose $t = e^x$

$$\int_1^2 \frac{e^x}{(e^x-1)(e^{2x}+1)}\,dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{(t-1)(t^2+1)}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln(e^2-1) - \frac{1}{2}\ln(e-1) - \frac{1}{4}\ln(e^4+1) + \frac{1}{4}\ln(2e^2+1) - \frac{1}{2}\arctan(e^2) + \frac{1}{2}\arctan(e)$$

Exercice 12

$u'v + uv'$

$\sin x = \sin x + \cos x$

$$I + J = \int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}\,dx = -\ln|\cos x - \sin x| + cte$$

$$I - J = \int dx = x + cte$$

$$\begin{cases} I + J = -\ln|\cos x - \sin x| + cte \\ I - J = x + cte \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}I = x - \ln|\cos x - \sin x| \\ \frac{1}{2}J = \ln|\cos x - \sin x| - x \end{cases}$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

(4) $u' = x+2 \sin(4x)$ $\quad v = x+2$

$u = -\frac{1}{4}\cos(4x)$ $\quad v' = 1$

$= \left(-\frac{1}{4}\cos(4x)(x+2) + \frac{1}{16}\sin(4x)\right)_0^{\pi/8} = \frac{9}{16}$

(5) $\int x^n P_n x$

$u' = x^n$ $\quad v = P_n x$

$u = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\quad v' = 1/x$

$= \frac{x^{n+1}}{n+1} P_n x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$

(6) $u' = 2x$ $\quad v = \text{Arctan } x$

$u = x^2$ $\quad v' = \frac{1}{1+x^2}$

$= x^2 \text{Arctan } x \quad P_n\,|1+x^2| = \text{arctan } 1 - [1 - \text{arctan } 1] = \frac{\pi}{2} - 1$

$= \frac{\pi}{4} \quad P_n(2)$

(7) $u' = 1/\cos^2 x$ $\quad v = \tan x$

$u = \tan x$ $\quad v' = 1/\cos^2 x$

$I = \int \tan x / \cos^2 x$

$= \tan^2 x - \int \tan x / \cos^2 x$

$= \frac{\tan^2 x}{2} = \frac{1}{2}$

(8) $u' = 1$ $\quad v = \sin(P_n(x))$

$u = x$ $\quad v' = \frac{1}{x}\cos(P_n(x))$

$I = x \sin(P_n x) - \int \cos(P_n(x))$

$= x \sin(P_n x) - x\cos(P_n(x)) - \sin(P_n(x))$

$2I = x \sin(P_n x) - x \cos(P_n(x))$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 7

(1) On pose $u = 1 + \ln(x)$

$x = \exp(1-u)$

$dx = -\exp(1-u)$

$$\frac{1}{x(1+\ln x)^3} = \frac{1}{u^3 \cdot e^{1-u}} \cdot -e^{1-u}$$

$$= -\frac{1}{u^3} \Rightarrow \int -\frac{1}{u^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(1+\ln(x))^2}$$

u^{-3}

u^{α} $\alpha \to \alpha$

$\alpha u^{\alpha-1}$ $\alpha - 1 = -3$

$\alpha = -2$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Formules de Taylor - Somme de Riemann

Exercice 5

Rappel Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

- $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$

Remarque $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \frac{(b-a)}{n}\right)$

Cas particulier : Si $a = 0$

- $\frac{b}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{bk}{n}\right) \longrightarrow \int_0^b f(x)\,dx$ on cherche $f(x)$

tel que notre somme : $\frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{bk}{n}\right)$

$$f(a) + \frac{b-a}{n} f(b) \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$$

(a) $$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k\sqrt{n^2-k^2}}{n^3} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{kn\sqrt{1-(k/n)^2}}{n^3}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{avec} \quad f(x) = x\sqrt{1-x^2}$$

On applique la formule du cours à $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k\sqrt{n^2-k^2}}{n^3} \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{3}$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{1}{\sqrt{m^2 - k^2}} = \frac{1}{m\sqrt{1 - \left(\frac{k}{m}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{k}{m}\right)^2}} \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = \left[\text{Arcsin } x\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

(2) $$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{m^2 - k^2}} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{k}{m}\right)^2}} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(x)$$

où $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$\longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = \left[\text{Arcsin } x\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 3

Rappel : Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n de $f(x) = \ln(1+x)$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(tx)\,dt\, x^n$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f^{(3)}(x) = \frac{(-1)^2 2!}{(1+x)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \qquad f^{(4)}(x) = \frac{(-1)^3 3!}{(1+x)^4}$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

Montrons par récurrence que

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1-x)^k} \qquad k \geq 1$$

$k = 1$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Vraie pour $k=1$ montrons pour k

$$f^{(k+1)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!\,(-k)}{(1+x)^{k+1}} = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$$

→ * Vrai pour k

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

$$P_m(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{m-2}(m-2)!\,x^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$+ \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{(1+tx)^m}\,dt\,x^m$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^m \frac{x^{m-1}}{(m-1)} + (-1)^{m-1} x^m \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(1+tx)^m}\,dt$$

Pour $x=1$

$$P_m(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^m}{m-1} + (-1)^{m-1} \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(1+t)^{m+1}}\,dt$$

$$P_m(2) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = (-1)^{m-1} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \frac{1}{(1+t)^m}\,dt$$

$$\frac{1}{(1+t)^m} \leq 1 \quad \forall\, t \geq 0$$

$$\Rightarrow \left| P_m(2) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| \leq \left| \int_0^1 (1-t)^{m-1}\,dt \right| = \left[-\frac{(1-t)^m}{m} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{m}$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 1

(1) $$P_m(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^m}{m-1} x^{m-1} + (-1)^{m+1} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \frac{1}{(1+tx)^m} dt \, x^m$$

Pour $m = 3$:

$$P_m(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \int_0^1 (1-t)^2 \frac{1}{(1+tx)^3} dt \, x^3$$

Montrons que pour $x \geq 0$

$$\frac{x^3}{3(1+x)^3} \leq \int_0^1 (1+t)^2 \frac{1}{(1+tx)^3} dt \, x^3$$

pour $x \geq 0$, $0 \leq t \leq 1$

$$1+tx \leq 1+x$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1+x}\right)^3 \leq \frac{1}{(1+tx)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{(1+x)^3} \leq \frac{x^3}{(1+tx)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{(1+x)^3} \int_0^1 (1-t)^2 dt \leq \int_0^1 (1-t)^2 \frac{1}{(1+tx)^3} dt \, x^3$$

Montrons que $P_m(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Il suffit de montrer que $\int_0^1 (1-t)^2 \frac{1}{(1+tx)^3} dt \, x^3 \leq x^3/3$

$$\frac{1}{1+tx} \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{1+tx}\right)^3 \leq 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1-t)^2 \frac{1}{(1+tx)^3} dt \, x^3 \leq \int_0^1 (1-t)^2 dt \, x^3 \leq x^3/3$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 2

$$e^x = 1 + \dots + \frac{x^m}{m!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!} e^{tx}\, dt\, x^{m+1} \qquad \text{TD8}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!} e^{tx}\, dt\, x^{m+1}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!} e^{tx}\, dt\, x^{m+1} \leq \frac{|x|^{m+1} e^{|x|}}{(m+1)!} \quad \text{car } e^{tx} \leq e^{|x|}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!}\, dt\, x^{m+1} \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(m+1)\, m!}\, x^{m+1} \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}$$

$$x^{m+1} \leq |x|^{m+1}$$

$$x^{m+1} \leq |x|^{m+1}$$

$$\frac{1}{m!(m+1)}\, x^{m+1} \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}$$

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!}\, dt\, x^{m+1} \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}$$

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!} e^{tx}\, dt\, x^{m+1} \leq \frac{|x|^{m+1} e^{|x|}}{(m+1)!} \quad \text{car } e^{tx} \leq e^{|x|} \ \forall x \in \mathbb{R},\ t \in [0,1]$$

$n = 4$, $x = -1$

(1) $$\left| e^{-1} - \sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leq \frac{|-1|^{m+1} e^{|-1|}}{5!}$$

$e^{-1} \simeq 0,395$

(2) $$\frac{u_{m+1}}{u_m} = \frac{e^{|x|}|x|}{(m+2)!} \cdot \frac{(m-1)!}{e^{|x|}|x|^{m+1}} = \frac{|x|}{m+2} \to 0$$

$\sum u_m(x)$ CV $\Rightarrow \lim u_m = 0$

$$\Rightarrow \lim \left| e^x - \sum_{k=0}^{m} x^k/k! \right| \leq \lim \frac{e^{|x|}|x|^{m+1}}{(m+1)!} = 0$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 4

(1) $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x$

$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin x$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^{2m}}{(2m!)} f^{(2m+1)}(tx)\,dt\, x^{2m+1}$$

$$f(x) = \sum_{p=0}^{m} \frac{(-1)^k x^{2p}}{(2p)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{2m}}{(2m)!} (-1)^{m+1} \sin(tx)\,dt\, x^{2m+1}$$

$$\Rightarrow \cos x - \sum_{p=0}^{m} \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} = \int_0^1 \frac{(1-t)^{2m}}{(2m)!} (-1)^{m+1} \sin(tx)\,dt\, x^{2m+1}$$

$$\Rightarrow \left|\cos x - \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}\right| = \left|\int_0^1 \frac{(1-t)^{2m}}{(2m)!} (-1)^{m+1} \sin(tx)\,dt\, x^{2m+1}\right|$$

$$\leq |x|^{2m+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^{2m}}{(2m)!}\,dt$$

$$\bullet \quad |\cos x - v_m| = \frac{1}{(2m+1)} \frac{|x|^{2m+1}}{(2m)!}$$

Arcs paramétrés

Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan on considère la courbe C :

$$\begin{cases} x(t) = 1/(1-t^2) \\ y(t) = t^3/(1-t^2) \end{cases}$$

définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

(1) Déterminer les symétrie de C

(2) Déterminer le tableau de variation des fonctions $x(t)$ et $y(t)$

(3) Déterminer points singulier et nature

(4) " tangentes

(5) Étudier branches infinies

(6) Tracer C

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

(1) $\forall t \in D = \mathbb{R}^2 \setminus \{-1, 1\}$ $\quad x(-t) = x(t)$

$y(-t) = -y(t)$

Symétrie par rapport à l'axe (ox)

t				
$x'(t)$		$2t$		

(2) $x'(t) = \dfrac{2t}{(1-t^2)^2}$

$y'(t) = \dfrac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2}$

$\lim_{t \to 1^-} x(t) = +\infty$

$\lim_{t \to 1^+} = -\infty$

t	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x'	0	$+$	$\|$	$+$		$+$	
x		$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$			$\searrow$
y'	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$y(\sqrt{3})$		$\searrow$

(3) $x'(t_0) = y'(t_0) \iff t = 0$

Donc en $M(0)$, on a un point singulier.

On détermine la nature de $M(0)$ on cherche le plus petit $p \geq 1$ / $(x^{(p)}(0), y^{(p)}(0)) \neq (0,0)$

on cherche le + petit $q > p$ tel que les $(x^{(p)}(0), y^{(p)}(0))$ et $(x^{(q)}(0), y^{(q)}(0))$ pas colinéaire

$x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 2$, $x^{(3)}(0) = 0$, $x^{(4)}(0) = 24$

$y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y^{(3)}(0) = 6$, $y^{(4)}(0) = 24 \neq 0$

, $y^{(5)}(0) = 5!$

$p = 2$

$q = 3$ On a un point de rebroussement de première espèce.

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Au point $M(t_0)$ la tangente a pour direction $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0))$ avec p le plus petit entier non nul tel que $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0)) \neq (0,0)$

Si $x^{(p)}(t_0) = 0$, alors on a une tangente verticale

Si $y^{(p)}(t_0) = 0$, alors " " " horizontale

à $(x''(0), y''(0)) = (2,0)$ tangente horizontale,

en $M(\sqrt{3})$ "

$$\lim_{t \to 1} x(t) = \infty \quad , \quad \lim_{t \to 1} y(t) = \infty$$

$$\lim_{t \to 1} \frac{y(t)}{x(t)} = 1$$

$$\lim_{t \to 1} y(t) - x(t) = \lim_{t \to 1} \frac{t^3}{1-t^2} - \frac{1}{1-t^2} = \lim_{t \to 1} \frac{t^3 - 1}{1-t^2}$$

$$= \lim_{t \to 1} -\frac{t^2 + t + 1}{1+t} = -3/2$$

La droite d'équation $y(t) - x(t) = -3/2$ est une asymptote à la courbe quand $t \to 1$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{1-t^2} \\ y(t) = \frac{t^2}{1-t^2} \end{cases}$$

signe de $y(t) - x(t) + 3/2$ quand $t \to 1$

$$y(t) - x(t) + 3/2 = -\frac{t^2+t+1}{1+t} + 3/2$$

$$= \frac{3(1+t) - 2(t^2+t+1)}{2(1+t)} = \frac{1 + t - 2t^2}{2(1+t)} \sim (1-t)\frac{3}{4}$$

Si $t > 1$

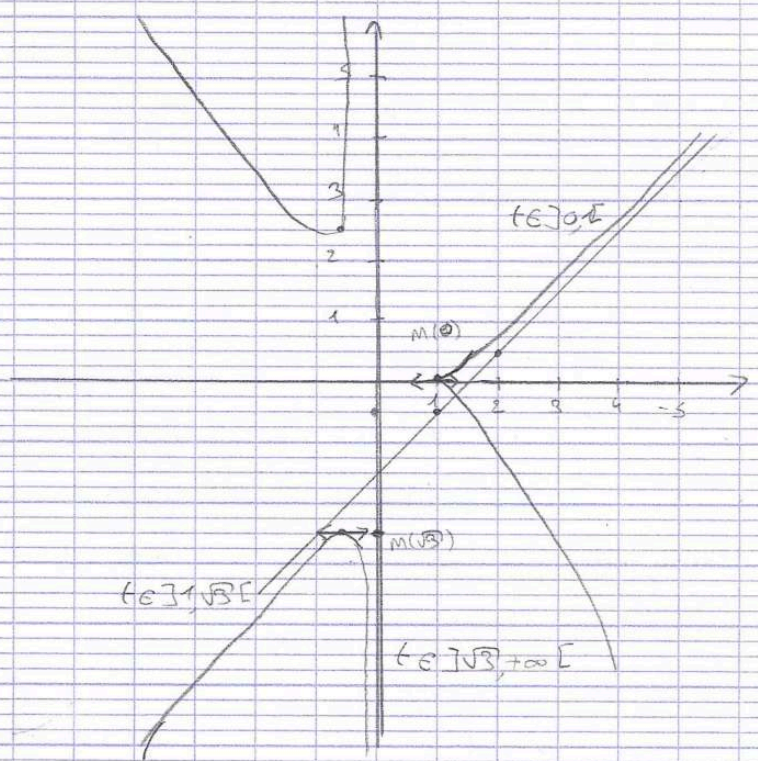
$y(t) - x(t) + \frac{3}{2} \sim \frac{3}{4}(1-t) < 0 \Rightarrow$ la courbe est en dessous de l'asymptote quand $t \to 1$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Si $t < 1$, $y(t) - x(t) + \frac{3}{2} \sim \frac{3}{4}(1-t) > 0$

$\Rightarrow$ La courbe est au dessus de l'asymptote quand $t \to 1^-$

Donc $y = x - 3/2$ est une asymptote à la courbe.



Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$$y(t) - 2x(t) - 3/2 = \frac{t^2 - 2t - 3}{t-2} - \frac{3}{2}$$ **Q 20**

$$= \frac{2(t^2 - 2t - 3) - 3(t-2)}{2(t-2)} = \frac{2t^2 - 7t}{2(t-2)} = \frac{(2t-7)t}{2(t-2)} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{7}{4} \cdot t$$

$P = 2L + 2l$

$A = L \times l$

Si $t \to 0^+$ la courbe est au dessus de son asymptote

Si $t \to 0^-$ " " " en dessous " " "

$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases} \qquad t_1 \neq t_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{t_1^2 - 2t_1} = \dfrac{3}{t_2^2 - 2t_2} \\ \dfrac{t_1^2 - 3}{t_1} = \dfrac{t_2^2 - 3}{t_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1^2 - 2t_1 = t_2^2 - 2t_2 \\ \dfrac{t_1^2 - 3}{t_1} = \dfrac{t_2^2 - 3}{t_2} \end{cases}$$

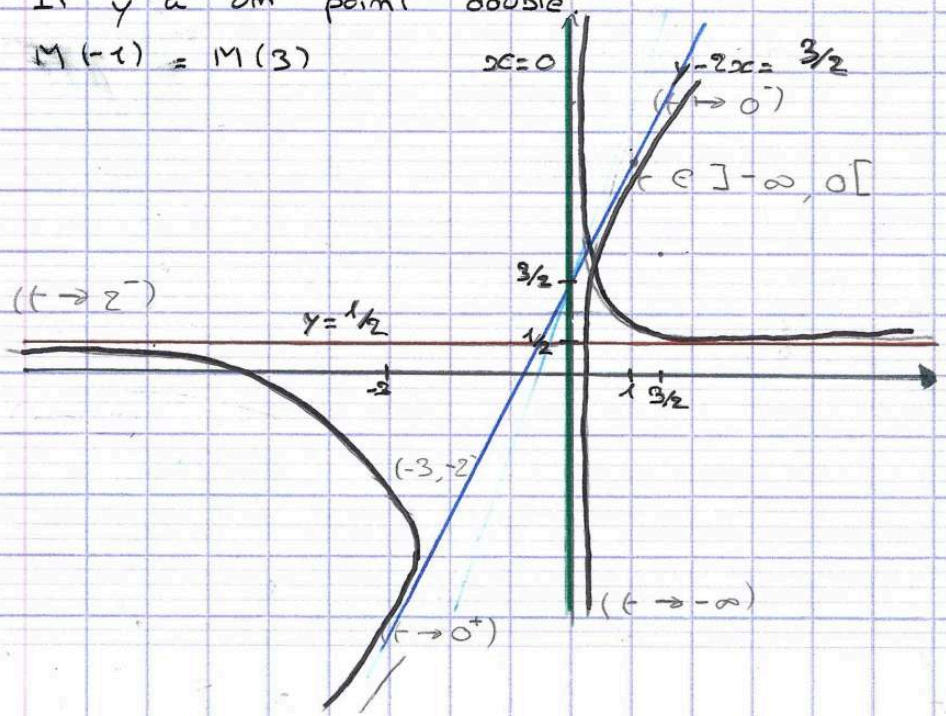
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_2^2 - t_1^2 = 2t_2 - 2t_1 \\ t_1^2 t_2 - t_2^2 t_1 = 3t_2 - 3t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t_2 - t_1)(t_2 + t_1) = 2(t_2 - t_1) \\ t_1 t_2 (t_1 - t_2) = 3(t_2 - t_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_2 + t_1 = 2 \\ t_1 t_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = 3 \end{cases}$$

$y = 2x + 3/2$

Il y a un point double.

$M(-1) = M(3)$



Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

(3) Domaine de définition : $[-\pi, \pi] \ni t$

Symétrie : $\left.\begin{array}{l} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{array}\right\}$ par rapport à Ox

$y(t)$

$\sin(t+\pi) = -\sin(t)$

$\cos(t+\pi) = -\cos(t)$

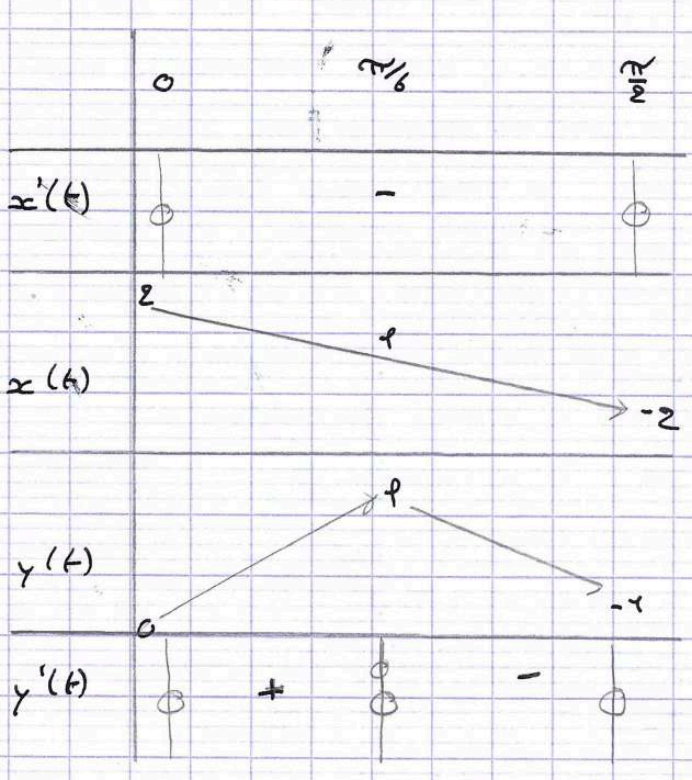
$x(\pi - t) = 2\cos(2(\pi - t)) = x(t)$

$y(\pi - t) = y(t)$

$\Rightarrow M(\pi - t) = M(t)$

On étudie donc sur $t \in [0, \pi/2]$ pour $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ on a la même courbe que pour $t \in [0, \pi/2]$

Variation :



En $t = \pi/2$ on a un point singulier

$x'(\frac{\pi}{2}) = y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

$x(t) = 2\cos(2t)$

$x'(t) = -4\sin(2t) = 0$

$x^{(2)}(t) = -8\cos(2t) = 8$

$x^{(3)}(t) = 16\sin(2t) = 0$

$x^{(4)}(t) = 32\cos(2t) = -32$

$y(t) = \sin 3t$

$y'(t) = 3\cos 3t = 0$

$y^{(2)}(t) = -9\sin 3t = 9$

$y^{(3)}(t) = -27\cos(3t) = 0$

$y^{(4)}(t) = 81\sin(3t) = -81$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 1

$$\begin{cases} x(t) = 3/t^2 - 2t \\ y(t) = t^2 - 3/t \end{cases} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

Rappel: Symétrie $\Leftrightarrow$ trouver une transformation $t \to \varphi(t)$ qui fixe les points $M(\varphi(t)) = (x(\varphi(t)), y(\varphi(t)))$ et $M(t) = (x(t), y(t))$

$\Rightarrow$ Pas de symétrie

$$x'(t) = -6\frac{(t-1)}{(t^2-2t)^2} \qquad y'(t) = 1 + \frac{3}{t^2}$$

Remarque: Pour calculer $x^{(2)}(t)$, $x^{(3)}(t)$ ...

$$x(t) = \frac{3}{t^2-2t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-2}$$

$$x^{(m)}(t) = \frac{A(-1)^m m!}{t^{m+1}} + \frac{B(-1)^m m!}{(t-2)^{m+1}}$$

$\lim_{t \to -\infty} y(t) = -\infty$

$\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty$

$\lim_{t \to 0^+} y(t) = -\infty$

$\lim_{t \to 0^-} y(t) = +\infty$

$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0^+$

$\lim_{t \to -\infty} x(t) = 0^-$

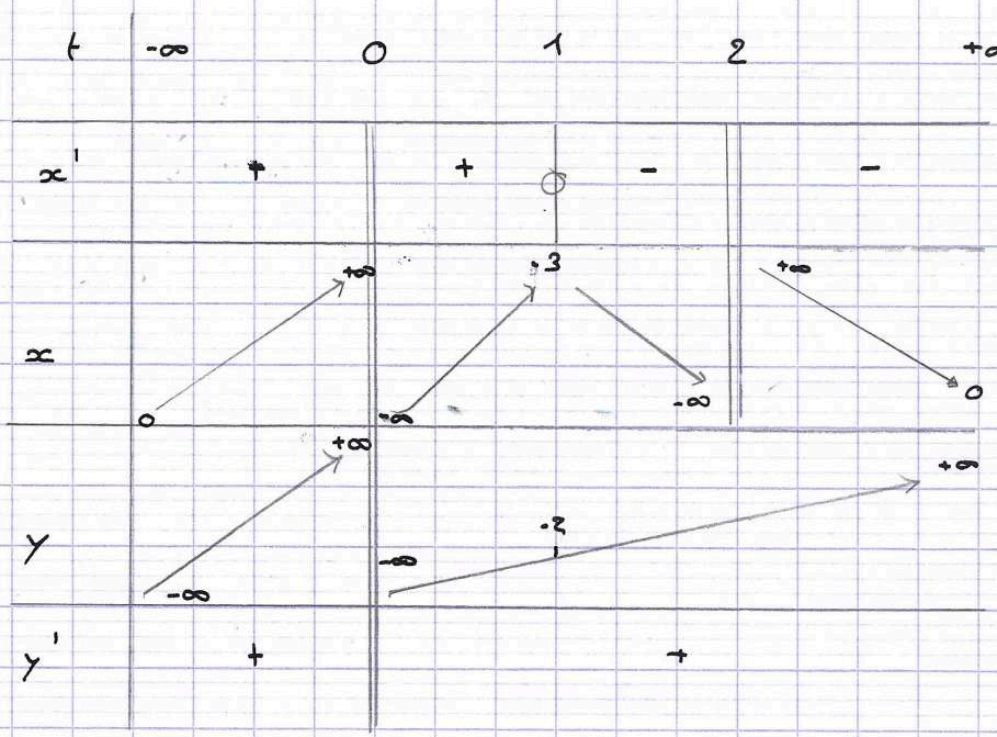
$\lim_{t \to 0^+} x(t) = -\infty$

$\lim_{t \to 0^-} x(t) = +\infty$

$\lim_{t \to 2^-} x(t) = -\infty$

$\lim_{t \to 2^+} x(t) = +\infty$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0



$x'(1) = 0$ et $y'(1) = 4 \Rightarrow$ tangente verticale au point $M(1)$

$\lim\limits_{t \to 2} x(t) = \infty$ $\quad$ $\lim\limits_{t \to 2} y(t) = 1/2$

- $y = 1/2$ est asymptote

$\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = \infty$ $\quad$ $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$

- $x = 0$ est asymptote

$\lim\limits_{t \to 0} x(t) = \infty$ et $\lim\limits_{t \to 0} y(t) = \infty$

$$\lim_{t \to 0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{(t^2-3)(t-2)}{3} = 2$$

$$\lim_{t \to 0} y(t) - 2x(t) = \frac{t(t^2-2t-3)}{t(t-2)} \xrightarrow[t \to 0]{} 3/2$$

La droite d'équation $y - 2x - 3/2 = 0$ est une asymptote à la courbe

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

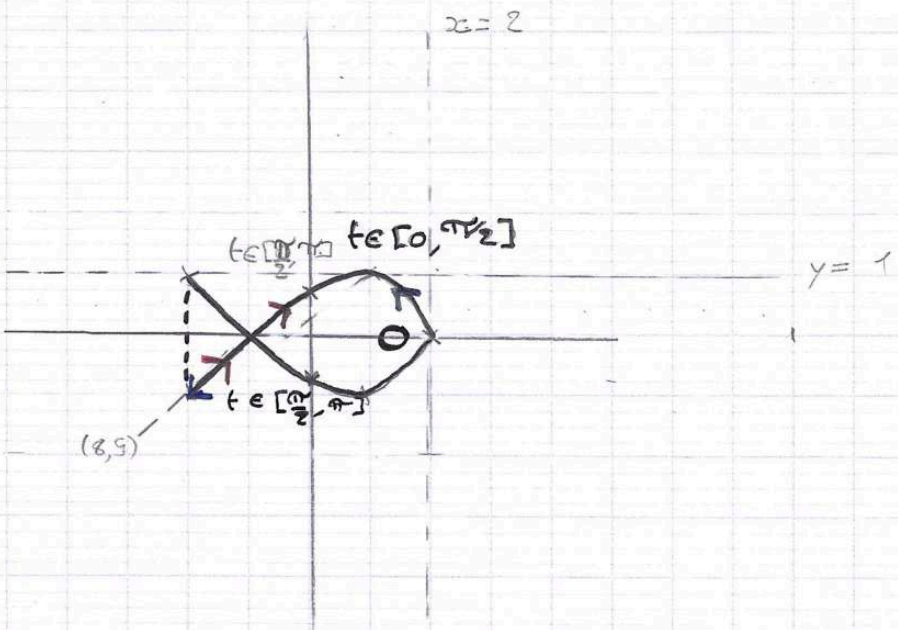
Les vecteurs $(x^{(2)}(\pi/2), y^{(2)}(\pi/2)) \neq (0,0)$ A22

pas colinéaires avec $(x^{(4)}(\pi/2), y^{(4)}(\pi/2))$

Rebroussement de second espèce.

Au point $M(\pi/2)$ $\left.\begin{array}{l} x'(0) = 0 \\ y'(0) \neq 0 \end{array}\right\}$ tangente verticale.

Au point $M(\pi/2)$ tangente horizontale



Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Dénombrement

Exercice 1

(1) Pas de Répétition, Ordre non important $\Rightarrow C_{52}^{5} = \frac{52.51.50.49.48}{5!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = 2\,598\,960$

(2) 4 as, 48 autres $\Rightarrow$ 52 cartes avoir un as il y a 4 possibilités : $C_4^1 = 4$

$\Rightarrow$ On veut un seul as $\Leftrightarrow$ tirer une carte parmi les 4 as et 4 parmi les 48

$\Rightarrow C_4^1 C_{48}^4 = 4 \cdot \frac{48!}{4!(48-4)!}$

$= 778\,320$

(3) 4 valets, 48 autre $\Rightarrow$ On veut au moins un seul as donc on tire 1 carte parmi les 4 et 4 parmis les 51

$\Rightarrow$ faux (plusieur comptage)

- Avoir au moins un valet $\Leftrightarrow$ avoir exactement deux valets ou avoir exactemment 3 valets ou avoir exactemment 4 valets.

- Avoir au moins un valet c'est le complémentaire de n'avoir aucun valet.

$$card(A) + card(\Omega \setminus A) = card(\Omega)$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

$$-\text{card}(A \cap B) = \text{card}(A \cup B) - \text{card}(A) - \text{card}(B)$$

$$\text{card}(A \cap B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cup B)$$

- A_R = avoir exactement R valets $R = 1, 2, 3, 4$

$\text{card}(A_1) = C_4^1 C_{48}^4$

$\text{card}(A_2) = C_4^2 C_{48}^3$ $\Rightarrow \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \text{card}(A_3) + \text{card}(A_4)$

$\text{card}(A_3) = C_4^3 C_{48}^2$

$\text{card}(A_4) = C_4^4 C_{48}^1$

- B = IP n'y a aucun valet = on retire les 5 cartes parmis les 48. $\text{card}(B) = C_{48}^5$

C = les complementation de B = IP y'a au moins un valet. $\text{card}(C) + \text{card}(B) = C_{52}^5 \Rightarrow \text{card}(C) = C_{52}^5 - C_{48}^5$

(4) A = avoir au moins une dame ou un Roi

$\bar{A}$ = complémentaire de A = avoir 0 dame ou 0 Roi = B ∪ C

avec B = 0 dame et C = 0 Roi

1 dame	1 Roi	3 autres	$\Rightarrow C_4^1 C_4^1 C_{44}^3$
2 dames	1 Roi	2 autres	$\Rightarrow C_4^2 C_4^1 C_{44}^2$
3 dames	1 Roi	1 ~~Roi~~ autre	$\Rightarrow C_4^2 C_4^1 C_{44}^1$
4 dames	1 Roi		$\Rightarrow C_4^4 C_4^1$
2 Rois	1 dame	2 autres	$\Rightarrow C_4^2 C_4^1 C_{44}^2$
2 Rois	2 dames	1 autre	$\Rightarrow C_4^2 C_4^2 C_{44}^1$
2 Rois	3 dames		$\Rightarrow C_4^2 C_4^3$
3 Rois	1 dames	1 autre	$\Rightarrow C_4^3 C_4^1 C_{44}^1$
3 Rois	2 dames		$\Rightarrow C_4^3 C_4^2$
4 Rois	1 dame		$\Rightarrow C_4^4 C_4^1$

C = avoir au moins une dame

$$\text{card}(C) = \sum_{\substack{R=1 \\ j=1}}^{4} \text{card}(D_R R_j)$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$\text{card}(B) = C_{48}^5$ $\quad \text{card}(C) = C_{48}^5$

$\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(B \cup C) = \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(B \cap C)$

$B \cap C$ = avoir 0 dames et 0 roi $= C_{44}^5$

$\Rightarrow \text{card}(\bar{A}) = \text{card}(B \cup C) = \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(B \cap C)$

$= 2C_{48}^5 - C_{44}^5$

$\text{card}(A) = C_{52}^5 - \text{card}(\bar{A})$

$= C_{52}^5 - 2C_{48}^5 + C_{44}^5$

Exercice 2 $\quad E = \{1, 2, 3, \ldots, 18\}$

Le nombre d'applications bijectives de E dans E.

Si E est une ensemble fini et $f : E \to E$ alors

f est bijective ssi f est injective si f est injective

si f est injective $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Comme f est injective alors si $x_i \neq x_j$ on a $f(x_i) \neq f(x_j)$

$\Rightarrow \text{card}\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\} = \text{card}\, f(E)$

comme $f(E) \subset E$ et $\text{card}(f(E)) = \text{card}\, E$ $\Rightarrow f(E) = E$

~~card~~ $= C_{52}^5 - c$

Soit E et F deux ensembles tels que $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = p$

$f : E \to F$

pour que f soit injective il est nécessaire que $n = \text{card}(F) \geq \text{card}(E) = p$ Le nombre d'applications injective de E dans $F = A_n^p$

En particulier si $p = n$ le nombre d'applications injectives de E dans $E = A_n^n = n!$

Donc le nombre d'applications bijectives de $\{1, 2, 3, \ldots, 18\}$ dans $\{1, 2, \ldots, 18\} = 18!$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

(1) L'ensemble d'applications bijectives de $\{1, 2, \dots, 12\}$ dans $\{1, 2, \dots, 12\}$ tel que $f(\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ et donc $f(\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}) = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

$\Rightarrow 6!^2$

(2) $\{3, 6, 9, 12\} = \{3, 6, 9, 12\}$

$\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$

$4!\ 8!$

Exercice 3 $E = \{1, 2, \dots, n\}$

$A = \{1, 2, \dots, p\}$ $p < n$

Soit B une partie de E qui contient exactement 1 élément de A

$\Leftrightarrow B = \{k\} \cup C$ $k = 1, 2, \dots, p$

avec C une partie de $E \setminus A = \{p+1, \dots, n\}$

car $(E \setminus A) = n - p$

Donc il y 2^{n-p} parties C de $(E \setminus A)$

Le nombre de parties de E contenant exactement un élément de A.

$= 2^{n-p} + 2^{n-p} + \dots + 2^{n-p}$

$= p 2^{n-p}$

Exercice 4 14 livres 4 M 3 P $\leq E$ 2 A

(1) Il y a $14!$ façon de les ordonner

(2) $2!$ pour A $4!$ pour M

$5!$ pour E $3!$ pour P

Il y a $2!\,5!\,4!\,3!$ façon

(3) On peut $4!$ façon d'ordonner les matières

$\Rightarrow 4!2!5!4!3!$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$$A_m^p = \frac{m!}{(m-p)!}$$

Exercice 5

A24

1) $C_4^3 \; C_{28}^2$

2) $C_8^3 \; C_{24}^2$

3) $2\, C_{16}^3 \; C_{16}^2$

On tire 3 rouges parmi 16 R $\Rightarrow C_{16}^3$

On tire 2 noires parmi 16 N $\Rightarrow C_{16}^2$

OU on tire 3 noires parmi 16 N $\Rightarrow C_{16}^3$

on tire 2 rouges parmi 16 R $\Rightarrow C_{16}^2$

Exercice 7

(1) 8 boules

$\frac{5}{8}$ b $\quad \frac{3}{8}$ R

Urne 5B 3R

$k = 2$ R R

$N = 8$ R $m = 3$

$N_1 = 5$ B

$N_2 = 3$ B B

(1) nombre de cas possible est $A_8^3 = 336$

(2) $m_1 = 0$ R B $\quad$ 6 $\left(\frac{m!}{m_1! m_2!} A_{N_1}^{m_1} A_{N_2}^{m_2} \right)$ d'avoir 3 boules Rouges

$m_2 = 3$ B R

B B B

(3) $m_1 = 1$ $\quad$ 90 d'avoir 2 Rouges

$m_2 = 2$

(4) 0

A B C

A B C

A B

A C B

B A C

B A

B C A

B C

B C

C A B

C A

C A

C B A

C B

C B

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 8

Successivement

Remise

SR 4N 3V

$R = 3$ $N_1 = 5$

$N = 12$ $N_2 = 4$

$n = 3$ $N_3 = 3$

(1) $12^3 = 1728$

(2) $m_R = 3$

$m_N = 0$

$m_V = 0$

I^P y a 125 poss. b.P.F

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 7

0,03 defec — hasard + remise

10 pièce — X = nbr pièce defectueuses

A = Pièce defect — $p = 3/100$

B = Pièce ok — $1-p = 97/100$

On répète cette épreuve 10 fois, de façon indé

$$p(X=k) = C_{10}^{k} \left(\frac{3}{100}\right)^{k} \left(\frac{97}{100}\right)^{10-k}$$

$$p(X=0) = C_{10}^{0} \left(\frac{97}{100}\right)^{10} = 0,73$$

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X=0) = 0,27$$

$$E(X) = np = 0,3$$

$$V(X) = np(1-p) = \frac{291}{1000}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 0,528$$

Exercice 8

A → 10% → 3,5%

B → 40% → 1,5%

C → 50% → 2,2%

$p(A) = 1/10$

$p(B) = 4/10$

$p(C) = 1/2$

$p_A(D) = 0,035$

$p_B(D) = 0,015$

$p_C(D) = 0,022$

$p(D \cap C) = p_C(D) \times p(C) = 0,011$

$p(D) = p(D \cap C) + p(D \cap A) + p(D \cap B)$

$= 0,0205$

$$p_D(C) = \frac{p(C \cap D)}{p(D)} = 0,54$$

$$p(X \neq 0) = C_{10}^{0} (1-p)^{10}$$

$= 0,81$

$\Rightarrow p(X \geq 1) = 0,19$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

N_1 1 B

N_2 2 R

N_3 3 V

Successivement

sans Remise

$m = 2$

$\text{card}(\Omega) = 30$

① Proba de A B, C ?

↓ ↓ ↓

2 V ; 1 R ; 2 Boules $\neq$

② succès avec Rem

③ simplement

④ $m_{1/2} = 0$

$m_3 = 2$

↳ 1/5

$\frac{m!}{m_{1/2}! \, m_3!} \, P_{N_1/N_2}^{m_1/m_2} \, P_{N_3}^{m_3} = 6$

$m_{1/3} = 1$

$m_2 = 1$

1/5

$m_{1/3} = 0$

$m_2 = 2$

2/5

$m_{1/3} = 2$

$m_2 = 0$

$m_1 = 0$

$m_2 = 0$

$m_3 = 2$

$m_1 = 0$

$m_2 = 2$

$m_3 = 0$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Probabilités

Une urne contient 6 boules rouges, 3 boules noires et 3 boules blanches.

(1) On tire simultanément 4 boules de l'urne
Soit X la va "nombre de boules rouges"
Déterminer la loi de X, $E(X)$ et $V(X)$

(2) On tire successivement 3 boules de l'urne
Soit Y la va "nombre de boules blanches tirées"
Déterminer la loi de Y, $E(Y)$ et $V(Y)$

---

(1) L'univers Ω = l'ensemble des résultats possibles.

$$\text{card}(\Omega) = C_{12}^4$$

- B_0 l'évenmement "avoir 0 boule rouge"

$$\text{card}(B_0) = C_6^4$$

$$p(B_0) = \frac{\text{card}(B_0)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_6^4}{C_{12}^4}$$

$$p(X=0) = p(A) = \frac{C_6^4}{C_{12}^4} = \frac{\frac{6!}{4!2!}}{\frac{12!}{4!8!}} = \frac{6!\,8!}{2!12!} = \frac{1}{2}\frac{6!}{12\times11\times6\times5}$$

$$= \frac{1}{33}$$

- B_1 l'évenmement "avoir exactement 1 boule rouge"

$$\text{card}(B) = C_6^1 C_6^3$$

$$p(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_6^1 C_6^3}{C_{12}^4} = \frac{8}{33}$$

- B_R l'évenement "avoir R boules rouges"

$$\text{card}(B_R) = C_6^R C_6^{4-R}$$

$$p(B_2) = \frac{15}{33} \qquad p(B_3) = \frac{8}{33} \qquad p(B_4) = \frac{1}{33}$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \, p(X = x_i)$$

$$= 0\,p(X=0) + 1\,p(X=1) + 2\,p(X=2) + 3\,p(X=3) + 4\,p(X=4)$$
$$= 2$$

$$E(X^2) = 0^2 p(X=0) + 1^2 p(X=1) + 2^2 p(X=2) + 3^2 p(X=3) + 4^2 p(X=4)$$
$$= \frac{52}{11}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{8}{11} \qquad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

(2) 3 boules — 6 Rouges, 3 noires, 3 blanches — Remise

$n = 3$, soit X le nbre de boules blanches tirées

$$p = \frac{m}{tot} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow p(X=k) = C_3^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{3-k}$$

$$\Rightarrow E(X) = np = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow V(X) = np(1-p) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

Pour le 1er tirage, soit Y_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la boule tirée est blanche et zéro si non.

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

$$p(X_1 = 1) = \frac{1}{4}$$

Donc $Y_i = \mathcal{B}(1/4)$ les tirages sont indépendants

donc $Y = \mathcal{B}(3, 1/4)$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$p(Y=k) = C_3^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(1-\frac{1}{4}\right)^{3-k}$ $k = 0, 1, 2, 3$ P24

$E(Y) = \frac{3}{4} = np$

$V(Y) = np(1-p) = \frac{9}{16}$

Une urne contient 5 boules rouges, 4 noires, 3 vertes.
Tirage de 3 boules avec remise

(1) proba 3 rouges (4) 2 vertes + 1 noire
(2) 2 rouges (5) 3 boules identiques
(3) au moins 1 (6) 3 boules $\neq$

$\text{card}(\Omega) = 12^3$

A = 3 boules rouges
$\text{card}(A) = 125$, $p(A) = \frac{125}{12^3}$

B = avoir 2 rouges
$\text{card}(B) = 525$, $p(B) = \frac{525}{12^3}$

C = au moins 1 rouge
$\text{card}(C) = 12^3 - 343$, $p(C) = 1 - \frac{343}{12^3}$

D = avoir 2 boules vertes et une noire
$\text{card}(D) = 108$, $p(D) = \frac{1}{16}$

E = 3 boules de couleur $\neq$
$\Rightarrow 3! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
$p(E) = \frac{360}{12^3}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 2

Il s'agit d'une épreuve binomiale de paramètre $n = 2$, $p = 1/2$.

En effet, le premier lancé est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 1/2$

Le second épreuve est aussi de Bernoulli de paramètre $p = 1/2$ qui est indé.

$$X = \mathcal{B}(2, 1/2) \qquad k = 0, 1, 2$$

$$P(X=k) = C_2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2-k}$$

$E(X) = np = 1$

$V(X) = np(1-p) = 1/2$

A B C

1B 2N 3B

3N 2B 1N

Exercice 3

Soit x le nbr de boules blanches

l'univers Ω = l'ensemble des résultats

$$\text{card}(\Omega) = 4^3$$

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X=0) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$$

$$P(X=1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{13}{32}$$

$$P(X=2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{13}{32}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{32}$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$X = k$	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{3}{32}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{3}{32}$

$F(x) = P(X \leq x) =$

0 $\quad x < 0$

$\frac{3}{32}$ $\quad 0 \leq x < 1$

$\frac{16}{32}$ $\quad 1 \leq x < 2$

$\frac{29}{32}$ $\quad 2 \leq x < 3$

1 $\quad x \geq 3$

Exercice 4

D_1 / D_2	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$E(Z) = \frac{10}{36} + \frac{16}{36} + \frac{18}{36} + \frac{16}{36} + \frac{10}{36}$

$= \frac{35}{18}$

$E(Z^2) = \frac{10}{36} + 2^2\frac{8}{36} + 3^2\frac{6}{36} + 4^2\frac{4}{36}$

$+ 5^2\frac{2}{36} = \frac{35}{6}$

$V = \frac{665}{324}$

Z peut prendre les valeurs $0, 1, 2, 3, 4, 5$

$P(Z=0) = \frac{1}{6}$

$P(Z=1) = 10/36$

$P(Z=2) = 2/9$

$P(Z=3) = 1/6$

$P(Z=4) = 1/9$

$P(Z=5) = 1/18$

$Z = k$	0	1	2	3	4	5
$P(Z=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

0 $\quad x < 0$

$1/6$ $\quad 0 \leq x < 1$

$4/9$ $\quad 1 \leq x < 2$

$2/3$ $\quad 2 \leq x < 3$

$\frac{15}{18}$ $\quad 3 \leq x < 4$

$\frac{17}{18}$ $\quad 4 \leq x < 5$

1 $\quad x \geq 5$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 5

20 sujets — 3 tirés sans remise → 12 révisés, → 8 non révisés

$\text{card}(\Omega) = C_{20}^{3} = 1140$

$\text{card}(X=0) = C_{12}^{0} C_{8}^{3} = 56$ — $\frac{14}{285}$

$\text{card}(X=1) = C_{12}^{1} C_{8}^{2} = 336$ — $\frac{28}{95}$

$\text{card}(X=2) = C_{12}^{2} C_{8}^{1} = 528$ — $\frac{44}{95}$

$\text{card}(X=3) = C_{12}^{3} C_{8}^{0} = \frac{11}{5} 220$ → $\frac{11}{57}$

Exercice 6

1o Pièce : 5 Am, 2 AP, 3 R — 5 tirés, X = Russe

$\text{card}(\Omega) = C_{10}^{5} = 252$

$\text{card}(0) = C_{5}^{0} C_{7}^{5} = 21$ ⇒ $1/12$

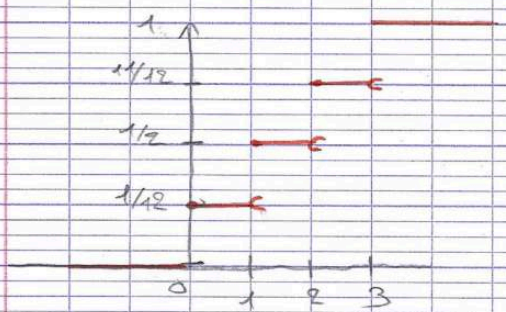
$\text{card}(1) = C_{5}^{1} C_{7}^{4} =$ ⇒ $5/12$

$\text{card}(2) = C_{5}^{2} C_{7}^{3} =$ ⇒ $5/12$

$\text{card}(3) = C_{5}^{3} C_{7}^{2} =$ ⇒ $1/12$

$X=k$	0	1	2	3
$p(X=k)$	$1/12$	$5/12$	$5/12$	$1/12$

$$g(x) = p(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1/12 & 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & 1 \leq x < 2 \\ 11/12 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$



Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0