Mathématiques

Analyse Semestre 2

M.DIMASSI

Table des matières

Première partie

Série numérique

1 Généralités

Définition. Soit (u_n) une suite numérique, on appelle série de terme général u_n, que l'on note $\sum u_n$, la suite :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$$

Convergence. Soit $\sum u_n$ une série numérique, on dit que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si : $\lim \sum_{k=0}^{n} u_k$ existe et est finie. On note, $\sum u_n$ convergente. Dans le cas contraire c'est à dire si la limite n'existe pas ou (infinie) on dit que la série $\sum u_n$ diverge et on note $\sum u_n$ diverge.

Somme de deux séries. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques, on définit la somme de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ par $\sum(u_n + v_n)$.

Multiplication par un réel. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\sum u_n$ une série numérique alors $\lambda \sum u_n$ est la série de terme général λu_n.

Théorème I.1 (Condition nécessaire)**.** Soit $\sum u_n$ une série numérique. Si $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exemple. $\sum \frac{n}{n+1}$ c'est la série de terme général $u_n = \frac{n}{n+1} \Rightarrow lim = 1 \neq 0$. Donc $\sum u_n$ diverge. L'inverse est faux, la série $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge.

Démonstration. $\sum u_n$ converge est équivalent à dire qu'il existe $l \in \mathbb{C}$ tel que $lim \sum_{k=0}^{n} u_k = l$. Ainsi on a
$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \to l$ et $S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k \to l$
$\Rightarrow S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n \to l - l = 0 \Rightarrow u_n \to 0$.

2 Série à termes positifs

Définition. Soit $\sum u_n$ une série numérique. On dit que la série $\sum u_n$ est à termes positifs si $\exists N, n \geq N, u_n \geq 0$.

Remarque. Dans l'étude d'une suite numérique on peut supprimer un nombre fini de terme. En effet si $\sum u_n$ est une série numérique, on a $S_n = \sum_{k=0}^{n} = u_0 + u_1 + ... + u_N + \sum_{k=N+1}^{n} u_k$ (N est fixé indépendamment de n). Comme lim S_n existe et est finie si et seulement si $\lim W_n$ existe et est finie alors l'étendu $\sum u_n$ est équivalent à l'étude de $\sum_{n=N} u_n$

Théorème I.2 (Série à termes positifs)**.** Soit $\sum u_n$ une série a termes positifs. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si il existe M (indépendant de n) tel que $|\sum_{k=0}^{n} u_k| \leq M$.

Démonstration. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$:

$S_{n+1} - S_n = \sum\limits_{k=0}^{n+1} u_k - \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} \geq 0$

$\Rightarrow (S_n)$ est une suite croissante, et donc S_n converge si et seulement si la suite S_n est majorée.

$\Leftrightarrow \exists M, S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \leq M.$

Série de même nature. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. On dit que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries de même nature si $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge.

Théorème I.3 (de comparaison)**.** Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques à termes positifs tels que $0 \leq u_n \leq v_n$:

1. Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge

Démonstration.

1. On sait que $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \leq \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$

   $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \exists M, \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \leq M, \forall n.$

   $\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \leq M, \forall n$(voir le théorème sur les suites à termes positifs).

2. $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ n'est pas majorée $\sum u_n$ converge.

   $\Rightarrow lim \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = +\infty \Rightarrow +\infty = lim \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \geq lim \sum\limits_{k=0}^{n} v_k \Rightarrow lim \sum\limits_{k=0}^{n} v_k = +\infty$

Théorème I.4 (d'équivalence)**.** Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques à termes positifs. On suppose que $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1 (u_n \sim v_n)$

Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de mêmes natures.

Démonstration. $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1 \Rightarrow \exists C_0, C_1$ tel que $C_0.v_n \leq u_n \leq C_1.v_n$

En effet $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N, n > N, |\dfrac{u_n}{v_n} - 1| < \epsilon$

En particulier pour $\epsilon = \frac{1}{2}, \exists N, n > N, -\frac{1}{2} < \dfrac{u_n}{v_n} - 1 < \frac{1}{2} \Rightarrow n > N \frac{1}{2} < \dfrac{u_n}{v_n} < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} v_n < u_n < \frac{3}{2} v_n, n > N.$

Ainsi $u_n \leq C_1 v_n$ ainsi si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

Théorème I.5 (Série de Riemann)**.** Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} (\alpha \in \mathbb{R})$ On appelle $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ série de Riemann qui converge si et seulement si $\alpha > 1$

Démonstration. Pour $\alpha \leq 0$

$\dfrac{1}{n^\alpha} = n^{-\alpha} \to +\infty$ si $\alpha < 0$ et 1 si $\alpha = 0$. Ainsi $\dfrac{1}{n^\alpha}$ ne converge pas vers $0 \Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge si $\alpha \leq 0$

Pour $\alpha > 0$ La fonction $F_\alpha(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ est décroissante.

$\Rightarrow \int\limits_{n}^{n+1} \dfrac{1}{n+1^\alpha} dx \leq \int\limits_{n}^{n+1} \dfrac{1}{x^\alpha} dx \leq \int\limits_{n}^{n+1} \dfrac{1}{n^\alpha} dx$

$\Rightarrow \dfrac{1}{n+1^\alpha} \leq \int\limits_{n}^{n+1} \dfrac{1}{x^\alpha} dx \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{k+1^\alpha} \leq \int\limits_{k}^{k+1} \dfrac{1}{x^\alpha} dx \leq \dfrac{1}{k^\alpha} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1^\alpha} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{k}^{k+1} \dfrac{1}{x^\alpha} dx \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1^{\alpha}} \leq \int\limits_{1}^{n+1} \dfrac{1}{x^{\alpha}} dx \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^{\alpha}}$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1^{\alpha}} \leq \dfrac{(n+1)^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^{\alpha}}$ si $\alpha \neq 1$.

$\sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{k}^{k+1} \dfrac{1}{x^{\alpha}} dx = \int\limits_{1}^{2} \dfrac{1}{x^{\alpha}} dx + ... + \int\limits_{n}^{n+1} \dfrac{1}{x^{\alpha}} dx = \int\limits_{1}^{n+1} \dfrac{1}{x^{\alpha}} dx$

Si $\alpha \neq 1$: $\int\limits_{1}^{n+1} \frac{1}{x^{\alpha}} = [\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}]_1^{n+1} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^{\alpha}} \leq \frac{(n+1)^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}}$

Si $\alpha = 1$: $\int\limits_{1}^{n+1} \frac{1}{x} = [ln(x)]_1^{n+1} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq ln(n+1) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Pour $\alpha = 1$ ou $0 < \alpha < 1$ alors la suite diverge et si $\alpha > 1$ la suite converge.

Proposition. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques :

1. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\lambda \sum u_n + \beta \sum v_n$ convergent $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$.
2. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum u_n + \sum v_n$ diverge.
3. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors on ne peut rien dire pour $\sum u_n + \sum v_n$.

3 Critère de convergence

Critère d'Alembert

Théorème I.6. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ existe. On pose $l = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. On a :

1. Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.
3. Si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

Preuve. On pose $l = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N, n > N, |\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - l| \leq \epsilon \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N, n > N l - \epsilon \leq \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq l + \epsilon$
Supposons que $l < 1$ (*)

1. On fixe ϵ assez petit tel que $l + \epsilon < 1$
   D'après (*) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq (l+\epsilon), \forall n > N$
   $\Rightarrow u_{n+1} \leq (l+\epsilon)u_n \leq (l+\epsilon)^2 u_{n-1} \leq (l+\epsilon)^3 u_{n-2} \leq$
   $... \leq (l+\epsilon)^{n-N} u_N$
   $u_n \leq (l+\epsilon)u_{n-1}$
   $u_{n-1} \leq (l+\epsilon)u_{n-2}$
   $u_{N+1} \leq (l+\epsilon)u_N$
   $\forall n > N : u_{n+1} \leq (l+\epsilon)^{n-N} u_N$
   $\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k = \sum\limits_{k=0}^{N} u_k + \sum\limits_{k=N+1}^{n+1} u_k$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n+1} u_k = \sum\limits_{k=0}^{N} u_k + \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=N+1}^{n+1} u_k$

$\sum\limits_{k=N+1}^{n+1} u_k \leq \sum\limits_{k=N+1}^{n+1} (l+\epsilon)^{k-N-1} u_{N+1}$

$= u_{N+1} \sum\limits_{k=N+1}^{n+1} (l+\epsilon)^{k-N-1}$

$= u_{N+1} \sum\limits_{p=k-N-1}^{n-N} (l+\epsilon)^p$

$= u_{N+1} \sum\limits_{p=0}^{n-N} (l+\epsilon)^p$

$\sum\limits_{k=N+1}^{n+1} u_k \leq u_{N+1} \sum\limits_{p=0}^{n-N} (l+\epsilon)^p$

$\Rightarrow 1 + x + ... + x^k = \dfrac{1-x^{k+1}}{1-x}$

$\sum\limits_{l=1}^{k} x^l = \dfrac{1-x^{k+1}}{1-x} \Rightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} \sum\limits_{l=0}^{k} x^l = \dfrac{1}{1-x}$ si $0 \leq x \leq 1$

Donc $\sum_{k=N+1}^{n+1} u_k \to u_{N+1}\dfrac{-1}{(l+\epsilon)}$ car $l=\epsilon<1$

2. Si $l<1$ en choisissant un ϵ assez petit tel que $l+\epsilon>l$

   D'après (*) $\Rightarrow u_{n+i} \geq (l-\epsilon)u_n$

   $u_n \geq (l-\epsilon)u_{n-1}$

   $u_{N+1} \geq (l-\epsilon)u_N$

   $u_{n+1} \geq (l-\epsilon)^{n-N}$

   $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} \geq u_n \lim\limits_{n\to+\infty}(l-\epsilon)^{n-N} = +\infty$ car $l-\epsilon>l$

   Donc $\sum u_n$ diverge si $l>1$.

Critère de Cauchy

Théorème I.7. Soit $\sum u_n$ une série numérique à termes positifs. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$ existe. On pose $l=\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$. On a :

1. Si $l<1$ alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $l>1$ alors $\sum u_n$ diverge.
3. Si $l=1$, on ne peut pas conclure.

Démonstration. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}=l \Leftrightarrow \forall\epsilon>0, \exists N, n>N, l-\epsilon \leq \sqrt[n]{u_n} \leq l+\epsilon(*)$

1. Si $l<1$, on fixe $\epsilon>0$, tel que $l+\epsilon<l$

   Par (*) $u_n \leq (l+\epsilon)^n, \forall n \geq N$

   $\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{N} u_k + \sum_{k=N+1}^{n} u_k$

   $\Rightarrow \sum_{k=N+1}^{n} u_k \leq \sum_{k=N+1}^{n}(l+\epsilon)^k = \sum_{\substack{p=k-N-1\\p=0}}^{n-N-1}(l+\epsilon)^{p+N+1} \to \dfrac{(l+\epsilon)^{N+1}}{1-(l+\epsilon)}$ car $l+\epsilon<l$

   $\Rightarrow \sum u_n$ converge.

2. Si $l>1$, on fixe $\epsilon>0$ assez petit tel que $l-\epsilon>l$

   Par (*) $\Rightarrow u_n \geq (l-\epsilon)^n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq \lim\limits_{n\to+\infty}(l-\epsilon)^n=+\infty$ car $l-\epsilon>1$

   Donc $\sum u_n$ diverge.

4 Série absolument convergente

Définition. Soit $\sum u_n$ une série numérique. On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum |u_n|$ converge.

Remarque. Pour une série à terme positifs, il n'y a pas de différence entre convergence et absolument convergence.

Théorème I.8. Soit $\sum u_n$ une série numérique si $\sum |u_n|$ converge alors $\sum u_n$ converge c'est à dire une série qui est absolument convergente est convergente. En général l'inverse est faux.

Exemple. $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}, \sum |\dfrac{(-1)^n}{n^2}| = \sum \dfrac{1}{n^2}$ converge. Donc elle est absolument convergente.
Soit $0<\alpha<1, \sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}, \sum |\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}| = \sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge. (série de Riemann) Or le critère d'Abel nous dit le contraire (admis).

Théorème I.9. Soit $|l|<1$ la série $\sum l^n$ est absolument convergente et on a : $\sum_{k=0}^{+\infty} l^n = \dfrac{1}{1-l}$

Démonstration. $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} |l|^k = \frac{1-|l|^{n+1}}{1-|l|} \rightarrow \frac{1}{1-|l|}car|l| < 1$ donc la série est absolument convergente.

$\sum\limits_{k=0}^{n} l^k = \dfrac{1 - l^{n+1}}{1 - l} \rightarrow \dfrac{1}{1 - l}$ car $|l^{n+1}| \rightarrow 0$ car $|l| < 1$

Série à valeurs complexes : Soient $\sum u_n$ une série avec $u_n \in \mathbb{C}$. Comme $u_n \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \exists a_n, b_n \in \mathbb{R}, u_n = a_n + ib_n \Rightarrow \sum u_n = \sum a_n + i \sum b_n$

Donc une série à valeurs complexe c'est la donnée des **deux séries à valeurs réelles** . Donc étudier une série à valeur complexe revient à étudier deux séries à valeur réelles.

Deuxième partie

Intégrale d'une fonction continue

5 Subdivision

Définition. Soit un segment $[a, b]$. On appelle subdivision de ce segment toute suite finie

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < a_n = b$$

Le pas de cette subdivision est le plus grand des $a_{i+1} - a_i$. Soit σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$. On dit que σ' est plus fine que σ si pour chaque i, on peut trouver j tel que $b_j = a_i$ autrement dit si σ' découpe plus l'intervalle $[a, b]$ que ne le fait σ.

Propriétés. L'union de deux subdivision est une subdivision.

6 Fonction en escalier

Définition. Soit $[a, b]$ un intervalle et $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ on dit que f est une fonction en escalier si et seulement si il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, ..., a_n)$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[, i = 0, ..., n - 1$.

Propriété. Toute fonction en escalier est bornée car f prend un nombre fini de valeur (les constantes sur chaque intervalle et $f(a_0), f(a_1), f(a_n)$).

Notation. Soit $[c, d]$ un intervalle. On note $1_{[c,d]}$ la fonction définie par :

$$1_{[c,d]} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 1_{[c,d]}(x) = 1 \text{ si } x \in [c, d] \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ 1_{[c,d]} = 0 \text{ si } x \notin [c, d] \end{cases} .$$

$1_{[c,d]}$ est appelé les fonction indicatrice de l'intervalle $[c, d]$. Si $\sigma(a_0, ..., a_n)$ est une subdivision de $[a, b]$. Alors toute fonction en escalier f s'écrit sous la forme :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i 1_{[a_i, a_{i+1}]}(x)$$

Exemple.

$f(x) = 1_{[0,1]}(x) + 1_{]1,2]}(x)$

$$f(x) = 1_{[0,3]}(x) + 2.1_{]1,2]}(x) + 4.1_{]2,3]}(x) = \begin{cases} \text{si } x \in (0, 1) : f(x) = 1 \\ \text{si } x \in (1, 2) :] f(x) = 3 \\ \text{si } x \in (2, 3) : f(x) = 5 \end{cases} .$$

Ainsi $f(x) = 1_{[0,1]}(x) + 3.1_{]1,2]}(x) + 5.1_{]2,3]}(x)$ Donc f est une fonction en escalier sur $[0,3]$.

7 Intégrale d'une fonction continue

Unité d'aire. Dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'unité d'aire (U, a) est l'aire du rectangle.

Définition. Soit $f[a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$ l'aire de la partie du plan E situé entre la courbe C_f et l'axe des abscisses.
On les note $\int_a^b f(x)dx = \text{aire(E)}$. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq f(x), x \in [a,b]\}$.

Propriétés. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et positives. On a :

1. $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
2. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
3. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx, \forall c \in [a,b]$

Intégrale d'une fonction continue négative

Définition. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et négative. On définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b |f(x)|dx$$

Théorème II.1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose :

$$\begin{cases} f_+ : x \to \frac{f(x)+|f(x)|}{2} \\ f_- : x \to \frac{f(x)-|f(x)|}{2} \end{cases}$$

On a :

1. Les fonctions f_+ et f_- sont continues sur $[a,b]$.
2. $f_+(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$
3. $f_-(x) \leq 0, \forall x \in [a,b]$
4. $f(x) = f_+(x) + f_-(x), \forall x \in [a,b]$
5. $f_+(x) = max(f(x), 0), \forall x \in [a,b]$
6. $f_-(x) = min(f(x), 0), \forall x \in [a,b]$

Démonstration.

1. $f(x)$ est continue par hypothèse et donc $|f(x)|$ est continue. Donc $f_+(x)$ et $f_-(x)$ sont continues.

2. $a \leq |a|$ et $-a \leq |a|$

   $\Rightarrow f(x) \leq |f(x)|$ et $-f(x) \leq |f(x)|$
   $\Rightarrow \dfrac{f(x) - |f(x)|}{2} \leq 0$ et $\dfrac{|f(x)| + f(x)}{2} \geq 0$
   $\Rightarrow f_+(x) \geq 0$ et $f_-(x) \leq 0$

3. $a \leq |a|$ et $-a \leq |a|$

   $\Rightarrow f(x) \leq |f(x)|$ et $-f(x) \leq |f(x)|$
   $\Rightarrow \dfrac{f(x) - |f(x)|}{2} \leq 0$ et $\dfrac{|f(x)| + f(x)}{2} \geq 0$
   $\Rightarrow f_+(x) \geq 0$ et $f_-(x) \leq 0$
4. $f_+(x) + f_-(x) = \dfrac{|f(x)| + f(x)}{2} + \dfrac{f(x) - |f(x)|}{2} = f(x)$
5. $f_+(x) = \dfrac{|f(x)| + f(x)}{2} = max(f(x), 0)$
6. $f_-(x) = \dfrac{f(x) - |f(x)|}{2} = min(f(x), 0)$

Définition. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ l'intégrale de f sur $[a, b]$ est par définition :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b max(f(x), 0)dx + \int_a^b min(f(x), 0)dx$$

On appelle l'intégrale d'une fonction l'aire algébrique d'une fonction.

Théorème II.2. Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :

1. $\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$
2. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \ \forall c \in [a, b]$
3. Si $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in [a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
5. $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
6. $|\int_a^b f(x)dx| \leq (sup|f(x)|)|b - a|$
7. Si $f(x) \geq 0$ et $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors $f(x) = 0 \ \forall x \in [a, b]$

Démonstration.

1. Résulte de la définition des intégrales
2. Résulte de la définition des intégrales
3. Si $g(x) = f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0$

   $\Rightarrow \int_a^b g(x) - f(x)dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0$
   $\Rightarrow \int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$

4. D'après (2) : $\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = 0$

5. Comme $f(x) \leq |f(x)|$ et $-f(x) \leq |f(x)|$ alors d'après (3) $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$ et $-\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$

   $\Rightarrow |\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$

6. $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b sup|f(x)|dx = sup|f(x)| \int_a^b dx = (b-a)sup|f(x)|$

7. Supposons $\exists x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) \neq 0$ Comme f est continue en x_0. $\epsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}, \exists \eta > 0, |x - x_0| < \eta = -\dfrac{f(x_0)}{2} \leq f(x) - f(x_0) \leq \dfrac{f(x_0)}{2}$

   $\Rightarrow \exists \eta > 0, |x - x_0| < \eta, \dfrac{f(x_0)}{2} \leq f(x).$

   $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0-\eta} f(x)dx + \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} f(x)dx + \int_a^b f(x)dx \geq \int_{x-\eta}^{x+\eta} f(x)dx$ (car $f(x) \geq 0$) $\geq \dfrac{f(x_0)}{2} \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx = \dfrac{f(x_0)}{2}(x_0 + \eta - (x_0 - \eta)) = \eta f(x_0) > 0$

   ceci contredit l'hypothèse $\int_a^b f(x)dx = 0$. Donc $\forall x \in [a,b], f(x) = 0$.

8 Primitives

Définition. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ On dit que : $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ d'une primitive de f si et seulement si $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$

Théorème II.3. Si $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont deux primitives de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ alors il existe une constante C tel que $F_1(x) = F_2(x) + C$

Démonstration. On pose $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$

$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow G'(x) = 0, \forall x \in [a,b]$, le théorème des accroissements finis $\Rightarrow G(x) = G(a), \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = C(a) =$ constante

Théorème II.4 (Théorème fondamental de l'analyse)**.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $x \to \int_a^x f(t)dt$

Alors F est dérivable et $F'(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$

Démonstration. On fixe $x_0 \in]a,b[$: $|\dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)| = |\dfrac{\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt}{h} - f(x_0)|$

$= |\dfrac{\int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt}{h} - f(x_0)| = |\dfrac{\int_a^{x_0} f(t)dt + f(x_0)\int_{x_0}^{x_0+h} dt}{h}| = |\dfrac{\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt}{h}|$

$\leq sup|f(t) - f(x_0)| \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = F(x_0) = f(x_0).$

Corollaire. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ est une primitive de f et toute autre primitive de f s'écrit :

$$\int_a^x f(t)dt + \text{cte}$$

Remarque. $\int\limits_a^x f(t)dt$ s'appelle la primitive de $f(x)$ qui s'annule en $x = a$.

Théorème II.5 (Théorème de changement de variable)**.** Soit $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable et $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\Phi([a,b]) \subset [c,d]$

Alors : $\int\limits_{\Phi(a)}^{\Phi(x)} f(t)dt = \int\limits_a^x fo\Phi(t)\Phi'(t)dt \forall x \in [a,b]$

En particulier : $\int\limits_{\Phi(a)}^{\Phi(x)} f(t)dt = \int\limits_a^b fo\Phi(t)\Phi'(t)dt$

Remarque : L'hypothèse $\Phi[a,b] \subset [c,d]$ assure que la fonction $fo\Phi(t)$ est bien définie.

Démonstration. On pose $F(x) = \int\limits_{\Phi(a)}^{\Phi(x)} f(t)dt$ et $G(x) \int\limits_a^x fo\Phi(t)\Phi'(t)dt$. Soit $K(x) = \int\limits_{\Phi(a)}^{x} f(t)dt, K'(x) = f(x)$

$F(x) = K(\Phi(x))$

$F'(x) = K'(\Phi(x))\Phi'(x) = f(\Phi(x))\Phi'(x)$

$G'(x) = fo\Phi(x).\Phi'(x) \Rightarrow F'(x) = G'(x), \forall x \in [a,b] \Rightarrow F(x) = G(x) + cte \Rightarrow cte = 0$ comme $F(a) = G(a) = 0$

Donc $F(x) = G(x) \forall x \in [a,b]$

Théorème II.6 (Théorème de la moyenne)**.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $\exists c \in]a,b[$tel que :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = f(c)$$

Démonstration. Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $x \to \int\limits_a^b f(t)dt$

On sait que F est dérivable et $F'(x) = f(x)$ D'après le théorème des accroissements finis. Ainsi $\exists c \in]a,b[$ tel que : $\dfrac{F(b) - F(a)}{b-a} = F'(c)$ donc $\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = \frac{\int\limits_a^b f(t)dt - \int\limits_a^a f(t)dt}{b-a} = f(c) \Rightarrow \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(t)dt = f(c)$

Théorème II.7. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et F une primitive de f. Alors $\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Démonstration. On sait que toute primitive de f est de la forme $\int\limits_a^b f(t)dt + cte \Rightarrow \exists$ ctec telle que $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt + c$.

$F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(t)dt + c - (\int\limits_a^a f(t)dt + c) = \int\limits_a^b f(t)dt$

Remarque. $\int\limits_a^b f(t)dt$ est indépendant de la variable t. On l'appelle variable muette.

Théorème II.8 (Théorème de l'intégration par partie)**.** Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On a :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Démonstration. Comme $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ alors $f(x)g(x)$ et une primitive de $f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$. Donc $\int\limits_a^b f'(x)g(x) + g'(x)f(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$

Théorème II.9. Soient $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable et $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\phi([a, b]) \subset [c, d]$. On définit : $G(x) = \int\limits_c^{\phi(x)} f(t)dt$
Alors G est dérivable et on a : $G'(x) = fo\phi(x).\phi'(x)\ \forall x \in [c, d]$.

Démonstration. On pose : $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ donc $G(x) = Fo\phi(x)$
L'hypothèse $\phi([a, b]) \subset [c, d] \Rightarrow$ la fonction $Fo\phi$ est bien définie. Donc G est dérivable car F et ϕ sont dérivables.
$G'(x) = (Fo\phi)'(x) = F'o\phi(x).\phi'(x) = fo\phi(x).\phi'(x)$.

9 Primitives usuelles

Fonctions	Domaine	Primitives
$e^{ax}, a \neq 0$	$\mathbb{R}$	$\frac{e^{ax}}{a} + cte$
$\frac{1}{x}$	$x > 0$	$ln(x)$
$-\frac{1}{x}$	$x < 0$	$ln(-x)$
$x^m, m \neq -1$	$x > 0$	$\frac{x^{m+1}}{m+1}$
$x^n, n \in \mathbb{Z}$	$x \in \mathbb{R}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$	$sin(x)$
$sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$	$-cos(x)$
$\frac{1}{cos^2(x)}$	$x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$	$tan(x)$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$x \in$ domaine	$ln\lvert u(x)\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$	$arcsin(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$	$arctan(x)$

Méthode de calcul intégral

IPP. Voir maths spé ou fonda ou outils maths.
Exemple : Calculer les primitives de $xcos(x)$: $\int tcos(t)dt = [tsin(t)] - \int sin(t)dt = xsin(x) + cos(x) = xsin(x) + cos(x) + cos(t)$
Remarque : Pour calculer les primitives de $x^n cos(x)$ ou $x^n e^x$ on fait une IPP.

Décomposition en éléments simple. Voir Maths fonda ou Algèbre.
On veut calculer les primitives de $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$. On cherche A et B tel que : $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b}$
On trouve les coefficients en multipliant par $(x - \text{pôle})$.

On veut calculer la primitive de $f(x) = \frac{1}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}, \alpha \neq 0$

— Si $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ alors on peut écrire : $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-a)(x-b)$
$f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x-a)(x-b)}$ On utilise les primitives de $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$

— Si $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$ alors $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-a)^2$
Donc $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(1-a)^2} \Rightarrow \int f(t)dt = -\dfrac{1}{\alpha(x-a)} + \text{cte}$

— Si $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0, f(x) = \frac{1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$
En général : $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x^2 + \dfrac{\beta x}{\alpha} + \dfrac{\gamma}{\alpha}) = \alpha[(x+\dfrac{\beta}{2\alpha})^2 - (\dfrac{\beta}{2\alpha})^2 + \dfrac{\gamma}{\alpha}] = \alpha[(x+\dfrac{\beta}{2\alpha})^2 + \dfrac{-\beta^2+4\alpha\gamma}{4\alpha^2}]$
On pose $A^2 = \dfrac{-\beta 2 + 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha((x+\dfrac{\beta}{2\alpha})^2+A^2) = \alpha A^2[(\dfrac{1}{A}(x+\dfrac{\beta}{2a))^2+1}]$. Ainsi $\int \dfrac{1}{\alpha t^2+\beta t+\gamma}dt = \int \dfrac{1}{\alpha A^2[\frac{1}{A^2}(t+\frac{\beta}{2\alpha})^2+1]}dt =$
$\dfrac{1}{\alpha A^2}\int \dfrac{1}{\frac{1}{A^2}(t+\frac{\beta}{2\alpha})^2+1} = \int \dfrac{1}{\alpha t^2+\beta t+\gamma}dt = \dfrac{1}{\alpha A^2}\int \dfrac{1}{A^{-2}.(t+\frac{\beta}{2\alpha})^2+1}dt$
Changement de variable $y = t + \dfrac{\beta}{2\alpha}, dy = dt$
$\dfrac{1}{\alpha A^2}\int \dfrac{1}{A^{-2}y^2+1}dy = \dfrac{1}{\alpha A^2}\int \dfrac{1}{Z^2+1}Adz = \dfrac{1}{\alpha A}\int^{\frac{1}{A}(x+\frac{\beta}{2\alpha})} \dfrac{1}{Z^2+1}dz$
Changement de variable $z = A^{-1}y, \dfrac{dz}{dy} = A^{-1}$
$= \dfrac{1}{\alpha A}\arctan(\dfrac{1}{A}(x+\dfrac{\beta}{2\alpha})) + \text{cte}$

Théorème II.10. Soit $f(x) = \dfrac{1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ avec $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$ Les primitives de f sont :

$$\frac{1}{\alpha A}\arctan(\frac{1}{A}(x+\frac{\beta}{2\alpha})) + cte \text{ avec } A = \frac{\sqrt{-\beta^2+4\alpha\gamma}}{2|\alpha|}$$

Troisième partie

Formule de Taylor

10 Fonction de classe C^k

Définition. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ on dit que f est de classe C^1 si et seulement si f est dérivable et $f':[a,b]\to\mathbb{R}$ est continue.
On dit que f est de classe C^2, si f' est de classe C^1.
En général , on dit que f est de classe C^k si f' est de classe C^{k-1} C'est à dire f est k fois dérivable et sa dérivée $k-$ième $f^{(k)}$ est continue.

11 Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}. Pour tout $x, x_0\in[a,b]$, on a :
$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+...+\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+...+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt.$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\int\limits_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$$

En particulier si $x_0=0$, on a : $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int\limits_{0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$

Preuve (par récurrence).

— Pour n=0 : $f(x)=f(x_0)+\int\limits_{x_0}^{x}f'(t)dt$ (pour n=0, c'est le théorème fondamental de l'analyse)
On suppose que la formule de Taylor est vraie pour $f\in C^n$
C'est à dire $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+...+\dfrac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)dt.$

— Si $f\in C^{n+1}$, alors $g=f\in C^n$, on applique l'hypothèse de récurrence à g : $g(y)=g(x_0)+g'(x_0)(y-x_0)+...+\dfrac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(y-x_0)^k+...+\dfrac{g^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(g-x_0)^{n-1}+\int\limits_{x_0}^{y}\dfrac{(y-t)^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n)}(t)dt$
On intègre entre x_0 et x $\int\limits_{x_0}^{x}g(y)dy=\int\limits_{x_0}^{x}g(x_0)dy+\int\limits_{x_0}^{x}g'(x_0)(y-x_0)dy+...+\int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(y-x_0)^kdy+...+\int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{g^{(n+1)}(x_0)}{(n-1)!}(y-x_0)^{n-1}dy+\int\limits_{x_0}^{x}(\int\limits_{x_0}^{y}\dfrac{(y-t)^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n)}(t)dt)dy.$

— Comme $g=f'$ alors f est une primitive de g : $\int\limits_{x_0}^{x}g(y)dy=f(x)=f(x_0)=g(x)(x-x_0)+g'(x_0)[\frac{(y-x_0)^2}{2}]_{x_0}^{x}+...+\dfrac{g^{(k)}(x_0)}{k!}[\dfrac{(y-x_0)^{k+1}}{k+1}]_{x_0}^{x}+...+\dfrac{g^{(n+1)}(x_0)}{(n-1)!}[\dfrac{(y-x_0)^n}{n}]_{x_0}^{x}+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{y}\dfrac{(y-t)^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n)}(t)dtdy$.

— Comme $g=f'$ alors $g^{(k)}=f^{(k+1)}$:
$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\dfrac{(x-x_0)^2}{2}+...+\dfrac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}\dfrac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)}+...\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}\dfrac{(x-x_0)^n}{n}+$

$\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{y}\dfrac{(y-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n+1)}(t)dtdy.$

$= f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\dfrac{(x-x_0)^2}{2!}+...+\dfrac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}+...+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{y}\frac{(y-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n+1)}(t)dtdy.$

On intègre $\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{y}\frac{(y-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n+1)}(t)dtdy = \int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$. (voir TD)

Corollaire. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe C^{n+1}. Alors $\forall x, x_0 \in [a,b]$ on a : $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + ... + \int\limits_0^1\dfrac{(1-t)^n}{n!}f^{(n+1)}((1-t)x_0+tx)dt(x-x_0)^{n+1}$.

Preuve. On sait que $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$.
Pour simplifier on suppose que $x_0 = 0$
$\int\limits_0^x\dfrac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$ On pose $t = yx$ (x est fixé). $= \int\limits_0^1\dfrac{(x-yx)^n}{n!}f^{(n+1)}(yx)xdy = \int\limits_0^1\dfrac{(1-y)^n}{n!}f^{(n+1)}(yx)dyx^{n+1} = \int\limits_0^1\dfrac{(1-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(tx)dtx^{n+1}$.

Corollaire. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe C^{n+1}. Alors $\forall x, x_0 \in [a,b]$ on a : $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int\limits_0^1\dfrac{(1-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(tx)dtx^{n+1}$

Théorème III.1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^{n+1}. Soit $M_n = sup|f^{(n+1)}(t)|$ on a : $\forall x_0, x \in [a,b]$.

$$|f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k| \leq M_n\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Preuve. On sait que :
$f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \int\limits_0^1\dfrac{(1-t)^n}{n!}f^{(n+1)}((1-t)x_0+tx)dt(x-x_0)^{n+1}$
$|f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \leq sup|f^{(n+1)}(g)|\int\limits_0^1\dfrac{(1-t)^n}{n!}dt|x-x_0|^{n+1} = M|x_0-x|^{n+1}[-\dfrac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}]_0^1 = M_n\dfrac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$

12 Formule de Taylor avec une fonctions à valeur réelles

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^{n+1}. Alors $\forall x_0, x \in [a,b]$ il existe c entre x et x_0 tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Remarque. Pour $n = 0$, on obtient : $f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(c)$ C'est donc la généralisation du théorème des accroissements finis.

Remarque. On rappelle que le théorème des accroissements fini n'est pas valable pour une fonction f à valeur dans $\mathbb{C}$ En effet :
$f : [a, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \to e^{it} = cos(t) + isin(t)$
$f'(t) = -sin(t) + icos(t) = i(cos(t) + isin(t)) = ie^{it}$

$|f'(t)| = 1 \Rightarrow f'(t) \neq 0 \forall t \in [0, 2\pi]$

Donc le théorème des accroissements finis ne s'applique pas à f.

Preuve. On définit $\phi(t) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}A$, ici x est fixe, t est la variable et A une constante.

Comme $f^{(k)}$ pour k de 0 à n sont dérivables (car $f \in C^{n+1}$) et $t \to (x-t)^k$ est dérivable. Alors $t \to \phi(t)$ est dérivable. $\phi(x) = 0$ On fixe la constante A tel que $\phi(x_0) = 0$

D'après le **théorème de Rolle** il existe c entre x_0 et x tel que $\phi'(c) = 0$.

$\phi'(t) = -\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1} + (n+1)\dfrac{(x-t)^n}{(n+1)!}A$

$= \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} + \dfrac{(x-t)^n}{n!}A$

On pose $p = k+1$: $= \sum\limits_{p=0}^{n} \dfrac{f^{(p)}(t)}{(p-1)!}(x-t)^{p-1} + \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{f^{(p)}(t)}{(p-1)!} + \dfrac{(x-t)^n}{n!}A.$

$= -f^{(n+1)}(t)\dfrac{(x-t)^n}{n!} + \dfrac{(x-t)^n}{n!}A.$

$\phi'(c) = 0 \Leftrightarrow -f^{(n+1)}(c)\dfrac{(x-c)^n}{n!} - \dfrac{(x-c)^n}{n!}A = 0 \Leftrightarrow A = f^{(n+1)}(c)$

$\phi(t) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$

Comme $\phi(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) = 0.$

$\Leftrightarrow \exists\, c$ entre x_0 et x tel que $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} + \dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$

Remarque. c est un point entre x_0 et $x \Leftrightarrow t \in [0,1]/c = (1-t)x_0 + tx$.

Corollaire. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^{n+1}, alors pour tout $x_0, x \in [a,b], \exists t \in [0,1]$ tel que :

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}((1-t)x_0 + tx).$

En particulier si $x_0 = 0 \in [a,b]$, on a :

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(tx).$

13 Formule de Taylor - Young

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction n-fois dérivable sur $[a,b]$. Soit $x_0 \in [a,b]$, on suppose que $f^{(n)}$ est dérivable au point x_0. Alors on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k)!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^{n+1})$$

Preuve (par récurrence). **Initialisation :** $n = 0$, l'hypothèse f est dérivable en x_0. On pose $\epsilon(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), x \neq x_0$ et $\epsilon(x_0) = 0$.

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\epsilon x$, $\lim\limits_{x \to x_0} \epsilon x = \lim\limits_{x \to x_0} [\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)] = 0.$

On suppose que la formule de Taylor est vraie jusqu'à $(n-1)$. On applique la formule de Taylor à $g = f'$

$f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}x_0}{k!}(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$.

$\Leftrightarrow f'(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}x_0}{k!}(t-x_0)^k + (t-x_0)^n \epsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t \to x_0} = 0$

$\Rightarrow \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)dt = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1}x_0}{k!} \int\limits_{x_0}^{x} (t-x_0)^k dt + \int\limits_{x_0}^{x} (t-x_0)^n \epsilon(t)dt.$

$f(x) - f(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}x_0}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1} + \int\limits_{x_0}^{x} (t-x_0)^n \epsilon(t)dt$

$= f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} . \frac{1}{(x-x_0)^{n+1}} \int\limits_{x_0}^{x} (t-x_0)^n \epsilon t dt$

On pose $\tilde{\epsilon}(x) = \frac{1}{(x-x_0)^{n+1}} \int\limits_{x_0}^{x} (t-x_0)^n \epsilon t dt$

Il reste donc à prouver que $\lim\limits_{x \to x_0} \tilde{\epsilon}(x) = 0$. On sait que $\lim\limits_{t \to x_0} \epsilon(t) = 0 \Leftrightarrow \forall h > 0, \exists \eta > 0, |t - x_0| < \eta \Rightarrow |\epsilon(t)| < h$

$| \int\limits_{x_0}^{x} (t-x_0)^x \epsilon(t)dt| \leq h| \int\limits_{x_0}^{x} |t-x_0|^n dt| \forall |x-x_0| < \eta \leq h \frac{|x-x_0|^{n+1}}{n+1}$

$\Rightarrow | \frac{1}{(x-x_0)^{n+1}} \int\limits_{x_0}^{x} (t-x_0)^n \epsilon(t)dt| = |\epsilon(\tilde{x})|^{n+1} \leq \frac{h}{n+1} \frac{|x-x_0|^{n+1}}{|x-x_0|^{n+1}} = \frac{h}{n+1}$

Conclusion : $\forall h > 0, \exists \eta > 0, |x-x_0| < \eta \Rightarrow |\tilde{\epsilon}(x)| \leq \frac{h}{n+1} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \tilde{\epsilon}(x) = 0$

14 Applications des formules de Taylor

On applique la formule de Taylor à $f(x) = ln(1+x)$

$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \int\limits_{0}^{1} \frac{(1-t)^2}{2!} f^{(3)}(tx)dtx^3 = x - \frac{x^2}{2} + \int\limits_{0}^{1} \frac{(1-t)^2}{2} \frac{2}{(1+tx)^3} dtx^3 \geq x - \frac{x^2}{2}$ car $\int\limits_{0}^{1} \frac{(1-t)^2}{2} \frac{2}{(1+tx)^3} dtx^3 > 0$

$\leq x - \frac{x^2}{2} + \int\limits_{0}^{1} (1-t)^2 dtx^3$ car $\frac{1}{(1+tx)^3} \leq 1, \forall t > 0, x > 0.$

Quatrième partie

Somme de Riemann

Définition. Soit $\{c_0, c_1, ..., c_n\}$ une subdivision de $[a,b]$. C'est à dire $c_0 = a < c_1 < c_2... < c_{n-1} < c_n = b$. Soit $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1}$ des points tel que $\xi_i \in [c_1, c_{i+1}]$. On appelle somme de Rieman associée à $\{c_0, ..., c_n\}$ et f la somme :

$$S^f_{\{c_0,...c_i\}} = \sum_{i=0}^{n-1}(C_{i+1} - C_i)f(\xi_i)$$

Lemme. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1. On a : $|f(x) - f(g)| \leq |x - y| sup|f'(t)|$

Démonstration. $f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)dt \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |\int_x^y f'(t)dt| \leq |\int_y^x |supf'(t)|dt| = |x-y|sup|f'(t)|$

Remarque. En général si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction telle qu'il existe M tel que :

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

On dit que f est lipschitzienne. Le lemme précédent montre que si f est C^1 alors f est lipschitzienne.

Théorème IV.1.

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue. Soit $\sigma = \{c_0, c_1, ..., c_n\}$ une subdivision de $[a,b]$. Alors $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$, tel que si $|c_{i+1} - c_i| \leq \eta, i = 0, ..., n$ alors $|\int_a^b f(x)dx| - \sum_{i=0}^{n-1}(c_{i+1} - c_i)f(\xi_i) \leq \epsilon$
   On rappelle que $\xi_i \in [c_i, c_{i+1}], i = 0, ..., n-1$

2. Si f est C^1 alors $|\int_a^b f(x)dx| - \sum_{i=0}^{n-1}(c_{i+1} - c_i)f(\xi_i) \leq |b - a|sup|f'(t)|.sup|c_{i+1} - c_i|$

Démonstration. On fait la démonstration pour $f \in C'$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a=c_0}^{c_i} f(x)dx + \int_{c_i}^{c_2} f(x)dx + ... + \int_{c_i}^{c_i+1} f(x)dx + ... + \int_{c_{n-1}}^{c_n=b} f(x)dx. = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)dx$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(c_{i+1} - c_i)f(\xi_i) = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(\xi_i)dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1}(c_{i+1} - c_i)f(\xi_i) = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1}\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(\xi_i)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{c_i}^{c_{i+1}}(f(x) - f(\xi_i))dx$$

$$\Rightarrow |\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1}(c_{i+1} - c_i)f(\xi_i)| \leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{c_i}^{c_{i+1}} |f(x) - f(\xi_i)|dx$$

D'après le lemme précédent :

$$|f(x) - f(\xi_i)| \leq |x - \xi_i|sup|f'(t)|$$

$$\Rightarrow |\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1}(c_{i+1} - c_i)f(\xi_i)| \leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{c_i}^{c_{i+1}} sup|f'(t)||x - \xi_i|dx = \sum_{i=0}^{n-1} sup|f'(t)| \int_{c_i}^{c_{i+1}} |x - \xi_i|dx \ (*).$$

$$\int_{c_i}^{c_{i+1}} |x-\xi_i|dx = \int_{c_i}^{\xi_i} [x-\xi_i|dx + \int_{\xi_i}^{c_{i+1}} |x-\xi_i|dx = -\int_{c_i}^{\xi_i}(x-\xi_i)dx + \int_{\xi_i}^{c_{i+1}}(x-\xi_i)dx$$
$$= -[\frac{(x-\xi_i)^2}{2}]_{c_i}^{\xi_i} + [\frac{(x-\xi_i)^2}{2}]_{\xi_i}^{c_{i+1}} = \frac{(c_i-\xi_i)^2}{2} + \frac{(c_{i+1}-\xi_i)^2}{2} \le \frac{(c_i-c_{i+1})^2}{2} + \frac{(c_{i+1}-c_i)^2}{2} = |c_{i+1}-c_i|^2$$
$$\Rightarrow \int_{c_i}^{c_{i+1}} |x-\xi_i| \le (c_{i+1}-c_i)^2$$
$$(*) \Rightarrow |\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1}(c_{i+1}-c_i)f(\xi_i)| \le \sum_{i=0}^{n-1} sup|f'(t)|(c_{i+1}-c_i)^2 \le su^|c_{i+1}-c_i|(\sum_{i=0}^{n-1}(c_{i+1}-c_i))sup|f'(t)$$
$= sup|c_{i+1}-c_i|(b-a)sup|f'(t)| \Rightarrow$ 2. du théorème.

D'après 1. Soit $\epsilon > 0$: soit $\eta = \dfrac{\epsilon}{(b-a)sup|f'(t)|}$

D'après (2), on a :

$|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1}(c_{i+1}-c_i)f(\xi_i)| \le supf'(t)(b-a)sup|c_{i+1}-c_i| \Rightarrow$Si$|c_{i+1}-c_i| \le \eta = \dfrac{\epsilon}{(b-a)sup|f'(t)|}$ alors :
$|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1}(c_{i+1}-c_i)f(\xi_i)| \le \epsilon \Rightarrow$ 1. du théorème.

Corrolaire. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $c_i = a + i\frac{b-a}{n}$ pour $i \in \{0,...,n\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
$c_0 = a, c_i = a + \dfrac{b-a}{n}, c_2 = a + 2\dfrac{(b-a)}{n}, ..., c_n = b(c_{i+1}-c_i) = \dfrac{b-a}{n}$
Aisni $\dfrac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \to \int_a^b f(x)dx$
En particulier :

1. $(\xi_i = c_i = a + i\dfrac{b-a}{n})\dfrac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\dfrac{b-a}{n}) \to \int_a^b f(x)dx$ (Somme de Rieman à gauche)
2. $(\xi_i = c_{i+1} = a + (i+1)\dfrac{b-a}{n})\dfrac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+(i+1)\dfrac{b-a}{n}) \to \int_a^b f(x)dx$ (Somme de Rieman à droite)
3. (Méthode de trapèze), ξ_i tel que $f(\xi_i) = \dfrac{f(c_i)+f(c_{i+1})}{2}\dfrac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\dfrac{f(c_i)+f(c_{i+1})}{2} = \dfrac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\dfrac{f(a+i\frac{b-a}{n})+f(a+(}{2}$
$\int_a^b f(x)dx$

Si de plus $f \in C^2$, alors il $\exists M > 0$: $|\int_a^b f(x)dx - \dfrac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\dfrac{f(a+i\frac{b-a}{n})+f(a+(i+1)\frac{b-a}{n})}{2}| \le M\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}$

Démonstration. On applique le théorème précédent à la substitution $c_i = a + i\dfrac{(b-a)}{n}, i = 0,...,n-1$.

Exercice. Soit $u_n = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}, n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\lim u_n$.

Solution. $u_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ Soit $f : [0,,1] \to \mathbb{R}, x \to \frac{1}{1+x}, a = 0, b = 1$
$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(k/n) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = u_n \to \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \Rightarrow \lim u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = ln(2)$$

Cinquième partie

Arcs paramétrés

15 Définition et généralité

Rappel. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa borne canonique $\vec{i} = (1,0), \vec{j} = (0,1)$. tout vecteur $\vec{u} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ s'écrit $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ $(a,b) \in \mathbb{R}^{\not{2}}$ uniques, on les appelle coordonné du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

Soit P le plan affine. On fixe un point O du plan P, on considère le repère orthonormée $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Tout point du plan M s'écrit $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, (x,y) sont les coordonnées de M dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$. On note $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Définition de la norme. On appelle une fonction norme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, toute fonction $\phi : \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}^+$ tel que :

1. $\phi(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $y = 0$.
2. $\phi(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\phi(x,y)\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$
3. $\phi(x+z, y+t) \leq \phi(x,y) + \phi(z,t) \Leftrightarrow (x+z, y+t) = ((x,y) + (z,t))$

Exemple. $N_1 : \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}^+$, $(x,y) \to \sqrt{x^2+y^2}$. C'est la forme canonique dans $\mathbb{R}^2$. On note aussi $N_1(x,y) = \dfrac{||(x,y)||}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$N_2 : \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}^+$, $(x,y) \to max(|x|,|y|)$.

1. $N(x,y) = 0 \Rightarrow max(|x|,|y|) = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$ et $|y| = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$
2. $N(\lambda x, \lambda y) = max(|\lambda x|,|\lambda y|) = max(|\lambda||x|,|\lambda||y|) = |\lambda| max(|x|,|y|) = |\lambda| N_1(x,y)$
3. $N_2((x,y)+(z,t)) = N_2(x+z,y+t) = max(|x+z|,|y+t|) \leq max(|x|,|y|) + max(|z|,|t|) = N_2(x,y) + N_2(z,t)$

16 Fonctions vectorielles

Définition. Soit I une partie de $\mathbb{R}$. On appelle fonction vectorielle dans $\mathbb{R}^2$ toute fonction $F : \begin{cases} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \to (x(t),y(t)) \end{cases}$

Remarque. La donnée d'une fonction vectorielle dans $\mathbb{R}^2$ est équivalent à la donnée de deux fonctions numériques :

$$x : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ t \to x(t) \end{cases} \quad \text{et } y : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ t \to y(t) \end{cases}$$

Définition de la limite. Soit $F : I \to \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle. Soit $t_0 \in I$. On dit que F admet une limite tel que $t \to t_0$. S'il existe un vecteur $\vec{l} = (a, b)$ tel que :
$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, |t - t_0| < \eta, ||F(t) - \vec{l}|| \leq \epsilon$
$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, |t - t_0| < \eta \Rightarrow ||F(t) = (x(t), y(t) - (a, b)|| = ||(x(t) - a, y(t) - b)|| = \sqrt{(x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2} \leq \epsilon$. On note $\lim\limits_{t \to t_0} F(t) = \vec{l}$.

Remarque. Toute les propriétés de la limite (somme, produit par fonction numérique) restent valables.

Définition de la continuité. Soit $F : I \to \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle. Soit $t_0 \in I$ On dit que F est continue en t_0 si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} F(t) = F(t_0)$.
On dit que F est continue sur I si et seulement si F est continue en tout point $t_0 \in I$.

Remarque. Toute les propriétés de la continuité restent valables (somme, produit par fonction numérique).

Définition de la dérivabilité. Soit $F : I \to \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle et $t_0 \in I$. On dit que F est dérivable en t_0, s'il existe un vecteur $\vec{l} = (a, b)$ tel que :

$$\lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \vec{l}$$

On note $\vec{l} = \vec{f} = F'(t_0)$. On dit que F est dérivable sur I si et seulement si F est dérivable en tout point t_0 de I.

Remarque. Toute les propriétés de dérivabilité restent valable (somme, produit par fonction numérique) restent valable.

Théorème. Soit $F : \begin{cases} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \to (x(t), y(t)) \end{cases}$ une fonction vectorielle. Étudier la continuité, la dérivabilité de F est équivalent à étudier les continuités, les dérivabilités de deux fonctions numériques : $\begin{cases} x : t \to x(t) \\ y : t \to y(t) \end{cases}$.

Rappel. Soit $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$ deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$. On définit la déterminant de $(\vec{u}, \vec{v})$ par :

$$det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

En particulier les familles $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre si et seulement si $det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$ On rappelle que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une famille libre si et seulement si $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$.

Définition de la famille libre. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une famille libre si et seulement si $\vec{u} \neq 0, \vec{v} \neq 0$ et l'un ne s'écrit pas sous la forme d'une combinaison linéaire de l'autre.

Définition de la base. Une base $(\vec{u}, \vec{v})$ dans $\mathbb{R}^2$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$ composé de deux vecteurs. Autrement dit de vecteur qui forment une famille libre est une base de $\mathbb{R}^2$.

Base directe et indirecte. Soit $\vec{i}, \vec{j}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $\vec{u} = c\vec{i} + d\vec{j}$ une autre base de $\mathbb{R}^2$

1. Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$ alors on dit que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base directe.
2. Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} < 0$ alors on dit que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base indirecte.

17 Arcs paramétrés

Définition. Soit I une intervalle de $\mathbb{R}$ et $F : \begin{cases} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \to (x(t), y(t)) \end{cases}$ une fonction vectorielle. On appelle arc paramétré que l'on note $\mathcal{C}$ l'ensemble $\{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2, t \in I\}$. Donc c'est l'ensemble des points du plan $M(t) = (x(t), y(t))$ lorsque $t \in I$. On dit que $t \to (x(t), y(t))$ est une représentation paramétrique de la courbe $\mathcal{C}$.

Exemple. La représentation paramétrique d'un cercle est $\begin{cases} t \to (cos(t), sin(t)) \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$.

Remarque. En général il y a plusieurs représentations paramétriques d'une courbe $\mathcal{C}$.

Exemple. $f : x \in I \to f(x) \in \mathbb{R}$ une fonction numérique. La courbe $\mathcal{C}$ associé à f est $C_p = (x, f(x)), x \in I$.

Représentation géométrique. Soit $(0, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé. Soit $(I, \vec{F})$ un arc paramétré. $\vec{F} : \begin{cases} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \to (x(t), y(t)) \end{cases}$.
On considère le point $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$ dans $(0, \vec{i}, \vec{j})$ c'est à dire $O\vec{M}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.
Étudier la courbe $\mathcal{C}$ associé à l'arc paramétré $(I, \vec{F})$ est équivalent à étudier le mouvement du point mobile $M(t)$ par rapport à t

1. $\mathcal{C}$ est appelé la trajectoire du mouvement.
2. $\vec{F}'(t)$ c'est la vitesse de M à l'instant t.
3. $\vec{F}''(t)$ c'est l'accélération de M à l'instant t

Définition (Point double). Soit $(I, \vec{F}), \vec{F} : \begin{cases} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \to (x(t), y(t)) \end{cases}$ un arc paramétré. Soit $M(t)$ le point tel que $\vec{F}(t) = (x(t), y(t)) = O\vec{M}(t)$.
On dit que M est point double s'il existe $t_1, t_2 \in I, t_1 \neq t_2$ et $\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$
c'est à dire $M(t_1) = M(t_2), t_1 \neq t_2$
En général, on dit que M est un point de multiplicité K s'il existe $t_1, t_2, ...t_k \in I$ avec $t_i \neq t_j$ pour $i \neq j$ et $M(t_1) = M(t_2) = ... = M(t_k)$.

18 Étude locale

Définition (tangente). Soit $\vec{F} : \begin{cases} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \to (x(t), y(t)) \end{cases}$ un arc paramétré. Soit $t_0 \in I$, on suppose que $\vec{F}$ est défini dans un voisinage de t_0.

On pose $\vec{G(t)} = \dfrac{M(t_0)\vec{M}(t)}{||M(t_0)\vec{M}(t)||} \Leftrightarrow M(t_0)\vec{M}(t) = (x(t)-x(t_0), y(t)-y(t_0)) \Leftrightarrow ||M(t_0)\vec{M}(t)|| = \sqrt{(x(t)-x(t_0))^2 + (y(t)-y(t_0$

$\vec{G(t)} = \dfrac{1}{\sqrt{(x(t)-x(t_0))^2 + (y(t)-y(t_0))^2}}(x(t)-x(t_0), y(t)-y(t_0))$

Définition.

1. Si $\vec{\gamma}_+ = \lim\limits_{t \to t_0^+} \vec{G(t)}$ existe on dit que la courbe admet au point $M(t_0)$ une demi-tangente à droite de direction $\vec{\gamma}_+$
2. Si $\vec{\gamma}_- = \lim\limits_{t \to t_0^-} \vec{G(t)}$ existe, on dit que la courbe admet au point $M(t_0)$ une demi-tangente à gauche de direction $\vec{\gamma}_-$
3. Si $\vec{\gamma} = \lim\limits_{t \to t_0} \vec{G(t)}$ existe on dit que la courbe C admet au point $M(t_0)$ une tangente de direction $\vec{\gamma}$.

Théorème V.1. Soit $\vec{F} : \begin{cases} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \to (x(t), y(t)) \end{cases}$ un arc paramétré de classe C^1. Soit $t_0 \in I$,si $\vec{F}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0,0)$ alors la courbe $\mathcal{C}$ admet au point $M(t_0)$ un tangente de direction $\vec{F}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$. De plus l'équation de la tangente au point $M(t_0)$ est $(x - x(t_0))y'(t_0) = (y - y(t_0))x'(t_0)$.

Démonstration. Par définition la direction de la tangente est $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{M(t_0)\vec{M}(t)}{||M(t_0)\vec{M}(t)||}$

$M(t_0)\vec{M}(t) = (x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0))$

$\Leftrightarrow \dfrac{M(t_0)\vec{M}(t)}{t - t_0} = (\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}, \dfrac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}) \to (x'(t_0), y'(t_0))$

$||M(t_0)M(t)|| = \sqrt{(x(t)-x(t_0))^2 + (y(t)-y(t_0))^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{||M(t_0)\vec{M}(t)||}{|t - t_0|} = \sqrt{(\dfrac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0})^2 + (\dfrac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0})^2}$

$\Rightarrow \sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}$

$\Rightarrow \dfrac{M(t_0)\vec{M}(t)}{||M(t_0)\vec{M}(t)||} = \dfrac{M(t_0)\vec{M}(t)}{|t-t_0|} \dfrac{1}{\dfrac{||M(t_0)\vec{M}(t)||}{|t-t_0|}} \to \frac{x'(t_0), y'(t_0)}{||\vec{F}'(t_0)||}$

$\dfrac{M(t_0)\vec{M}(t)}{||M(t_0)\vec{M}(t)||} \to \dfrac{F'\vec{(t_0)}}{||F'(t_0)||} = \vec{F}'(t_0)$

Rappel. L'équation d'une droite Δ qui passe par le point (x_0, y_0) et qui a pour direction le vecteur $\vec{u} = (a, b)$

$$\Delta : (x - x_0).b = (y - y_0).a$$

$M=(x,y)\in\Delta \Leftrightarrow M_0\vec{.}M//\vec{u} \Leftrightarrow (x-x_0,y-y_0)//\vec{u}=(a,b) \Leftrightarrow (x-x_0)b-a(y-y_0)=0.$

19 Tangente d'un point singulier

Définition (Point singulier). Soit $\vec{F}:\begin{cases} I\to\mathbb{R}^2 \\ t\to(x(t),y(t))\end{cases}$ un arc paramétré. On dit qu'on a un point singulier en t_0 si et seulement si $x'(t_0)=y'(t_0)=0$.

Théorème V.2 (Tangente en un point singulier)**.** Soit $\vec{F}:\begin{cases} I\to\mathbb{R}^2 \\ t\to(x(t),y(t))\end{cases}$ un arc paramétré de classe C^∞. Soit $t_0\in I$. On suppose que $x'(t_0)=y'(t_0)=0$.

Soit p le plus petit entier non nul$(x^{(p)}(t_0),y^{(p)}(t_0))\neq(0,0)$ on rappelle que $x^{(p)}(t_0)$ est la dérivée d'ordre en t_0. Alors l'équation de la tangente de la courbe C associée à l'arc paramétré $(I,\vec{F})$ est la droite d'équation :

$$(x-x(t_0)).y^{(p)}(t_0)=(y-y(t_0)).x^{(p)}(t_0)$$

Démonstration. Soit p le plus petit entier non nul tel que $(x^{(p)}(t_0),y^{(p)}(t_0))\neq(0,0)$. D'après la formule de Taylor -Young on a :

$x(t)=x(t_0)+\dfrac{(t-t_0)^p}{p!}x^{(p)}(t_0)+o((t-t_0)^p)$ car $x'(t_0)=x^{(p-1)}(t_0)=0$

$y(t)=y(t_0)+\frac{t-t_0)^p}{p!}y^{(p)}(t_0)+o((t-t_0)^p)$

$\Rightarrow (x(t)-x(t_0),y(t)-y(t_0))=(\dfrac{(t-t_0)^p}{p!}x^{(p)}(t_0)+o(t-t_0),\dfrac{(t-t_0)^p}{p!}y^{(p)}(t_0)+o((t-t_0)^p)$

$\Rightarrow M(t_0\vec{)}M(t)=\dfrac{(t-t_0)^p}{p!}(x^{(p)}(t_0)+o(1),y^{(p)}(t_0)+o(1))$

$\Rightarrow \dfrac{M(t_0)\vec{.}M(T)}{\dfrac{(t-t_0)^p}{p!}}\to(x^{(p)}(t_0),y^{(p)}(t_0))$

$\Rightarrow \dfrac{||M(t_0\vec{)}M(t)||}{\dfrac{(t-t_0)^p}{p!}}\to||(x^{(p)}(t_0),y^{(p)}(t_0))||=\sqrt{(x^{(p)}(t_0))^2+(y^{(p)}(t_0))^2}$

$\Rightarrow \dfrac{M(t_0\vec{)}M(t)}{||M(t_0\vec{)}M(t)||}\to\dfrac{(x^{(p)}(t_0),y^{(p)}(t_0))}{\sqrt{(x^{(p)}(t_0))^2+(y^{(p)}(t_0))^2}}$

C'est un vecteur qui a la même direction que $(x^{(p)}(t_0),y^{(p)}(t_0))$

Conclusion. L'équation de la tangente au point $M(t_0)=(x(t_0),y(t_0))$ est la droite qui passe par $M(t_0)$ et de direction le vecteur $(x^{(p)}(t_0),y^{(p)}(t_0))\Rightarrow$ l'équation de la tangente est $(x-x(t_0)).y^{(p)}(t_0)=(y-y(t_0)).x^{(p)}(t_0)$

Allure de la courbe pris d'un point $M(t_0)$. Soit $\vec{F}:\begin{cases} I\to\mathbb{R}^2 \\ t\to(x(t),y(t))\end{cases}$ un arc paramétré de classe C^∞. Soit $t_0\in I$. Soit p le plus petit entier non nul tel que $(x^{(p)}(t_0),y^{(p)}(t_0))\neq(0,0)$.

Soit q le plus petit entier tel que $q > p$ et les vecteurs $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0)), (x^{(q)}(t_0), y^{(q)}(t_0))$ ne sont pas colinéaires. On pose $\begin{cases} \vec{u} = (x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0)) \\ \vec{v} = (x^{(q)}(t_0), y^{(q)}(t_0)) \end{cases}$ $(M(t_0), \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan.

Formule de Taylor Young :

Soit :

$$x(t) - x(t_0) = \frac{(t-t_0)^p}{p!} x^{(p)}(t_0) + ... + \frac{x^{(q)}(t_0)}{q!}(t-t_0)^q + o(t-t_0)^q$$
$$y(t) - y(t_0) = \frac{(t-t_0)^p}{p!} y^{(p)}(t_0) + ... + \frac{x^{(q)}(t_0)}{q!}(t-t_0)^q + o(t-t_0)^q$$

Ainsi :

$\Rightarrow M(t_0)\vec{)}M(t) = (x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0)) =$ Application de la formule de Taylor

$= \frac{(t-t_0)^p}{p!}\vec{u} + \frac{(t-t_0)^{p+1}}{(p+1)!}\vec{w} + \frac{t-t_0)^p}{q!}\frac{v}{+}(o(t-t_0)^q, o(t-t_0)^q)$ avec $\vec{w}//\vec{u}$

$= \frac{(t-t_0)^p}{p!}\vec{u}(1 + o(t-t_0)) + \frac{(t-t_0)^q}{q!}(\vec{v} + (o(1), o(1)) \sim \frac{(t-t_0)^p}{p!}\vec{u} + \frac{(t-t_0)^q}{q!}\vec{v}$

Conclusion. $M(t_0)\vec{)}M(t) \sim \frac{(t-t_0)^p}{p!}\vec{u} + \frac{(t-t_0)^q}{q!}\vec{v}$
Donc dans le représentation $(M(t_0), \vec{u}, \vec{v})$ $M(t)$ a pour coordonnées $(\frac{(t-t_0)^p}{p!}, \frac{(t-t_0)^q}{q!})$

1. Si p est impair et q est paire on a un point ordinaire.
2. Si p est impair et q est impair on a un point d'inflexion.
3. Si p est pair et q impair c'est un point de rebroussement de premier espèce.
4. Si p et q pair on a un on a un point de rebroussement de second espèce.

Résumé.

q \ p	Impaire	Paire
Paire	Point ordinaire	Rebroussement de second espèce
Impaire	Point d'inflexion	Rebroussement de premier espèce

20 Etude des branches infinies

Soit $\vec{F} : \begin{cases} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \to (x(t), y(t)) \end{cases}$ est un arc paramétré, $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ avec t_0 un point de l'extrémité de l'intervalle I.

On dit qu'on a une branche infinie en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \infty$ ou $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \infty$

1. Si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = a$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \infty$ alors la courbe admet une asymptote d'équation $x = a$

2. Si $\lim_{t\to t_0} y(t) = b$ et $\lim_{t\to t_0} x(t) = \infty$ alors la courbe admet une asymptote d'équation $y = b$

3. Si $\lim_{t\to t_0} x(t) = \infty$ et $\lim_{t\to t_0} y(t) = \infty$. On étudie $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$.

   (a) Si $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \infty$. Donc on a une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

   (b) Si $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$. Donc on a une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

   (c) Si $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a$. Donc il faut étudier $\lim_{t\to t_0} (y(t) - ax(t))$

      i. Si $\lim_{t\to t_0} y(t) - a.x(t) = b$ alors la courbe admet une asymptote d'équation $y = ax + b$

      ii. Si $\lim_{t\to t_0} y(t) - a.x(t) = \infty$. On dit que la courbe admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$.

Remarque. Pour connaître la position de la courbe par rapport à l'asymptote $y = ax + b$. Il faut étudier le signe de $y(t) - ax(t) - b$ lorsque $t \to t_0$.

21 Symétrie d'une courbe

On cherche une fonction $\phi : I \to I$ tel que :

1. $\begin{cases} x(\phi(t)) = x(t) \\ y(\phi(x)) = -y(t) \end{cases}$ $\Rightarrow$ la courbe a une symétrie par rapport à l'axe (Ox).

2. $\begin{cases} x(\phi(t)) = -x(t) \\ y(\phi(x)) = y(t) \end{cases}$ $\Rightarrow$ la courbe a une symétrie par rapport à l'axe (Oy).

3. $\begin{cases} x(\phi(t)) = -x(t) \\ y(\phi(x)) = -y(t) \end{cases}$ $\Rightarrow$ la courbe est symétrique par rapport à l'origine.

4. $\begin{cases} x(\phi(t)) = y(t) \\ y(\phi(x)) = x(t) \end{cases}$ $\Rightarrow$ la courbe est symétrique par rapport à l'axe $y = x$.

22 Plan d'étude d'un arc paramétré

Soit $\begin{cases} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \to (x(t), y(t)) \end{cases}$ un arc paramétré.

1. On détermine le domaine de $t \to x(t)$ et $t \to y(t)$.

2. On détermine les symétries de la courbe $\mathcal{C}$ associées à $(I, \vec{F})$.

3. On réduit le domaine d'étude si il y a des symétries.
4. On calcule $x'(t)$ et $y'(t)$.
5. On étudie les variations de $x(t)$ et $y(t)$.
6. On calcule les limites de $t \to x(t)$ et $t \to y(t)$ pour t dans le bord de l'intervalle.
7. Tableau de variations
8. On détermine les points singuliers : $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$.
   (a) On cherche le plus petit entier $p > 1$ tel que : $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0)) \neq (0,0)$.
   Ensuite on cherche le plus petit entier $q > p$ tel que : $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0))$ et $(x^{(q)}(t_0), y^{(q)}(t_0))$ ne sont pas colinéaires.
   (b) Écrire la tangente en point $M(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$, $(x - x(t_0))y^{(p)}(t_0) = (y - y(t_0))x^{(p)}(t_0)$
   (c) On détermine la nature du point $M(t_0)$ (pour comprendre l'allure de la courbe au voisinage de $M(t_0)$)
9. On cherche les points tel que :
   (a) $x'(t_1) = 0$ et $y'(t_1) \neq 0$ (tangente verticale au point $M(t_0)$)
   (b) $x'(t_2) \neq 0$ et $y'(t_2) = 0$ (tangente horizontale)
10. Étudier les branches infinies, déterminer les positions des asymptotes par rapport à la courbe.
11. Déterminer les points multiples.
12. Tracer la courbe C.

Exemple

Étudier la courbe $\mathcal{C}$ définie par :

$$t \to \begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{t-1} \\ y(t) = t + \dfrac{4}{t} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$$

Dérivées.

$$x'(t) = \frac{2t}{t-1} - \frac{t^2}{(t-1)^2} = \frac{2t(t-1) - t^2}{(t-1)^2} = \frac{t^2 - 2t}{(t-1)^2} = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$$

$$y'(t) = 1 - \frac{4}{t^2} = \frac{t^2 - 4}{t^2} = \frac{(t-2)(t+2)}{t^2}$$

Limites.

- $\lim_{t\to-\infty} x(t) = -\infty$
- $\lim_{t\to 0} x(t) = 0$
- $\lim_{t\to 1^-} x(t) = -\infty$
- $\lim_{t\to 1^+} x(t) = +\infty$
- $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$

- $\lim_{t\to-\infty} y(t) = -\infty$
- $\lim_{t\to 0^-} y(t) = -\infty$
- $\lim_{t\to 0^+} y(t) = +\infty$
- $\lim_{t\to 1} y(t) = 5$
- $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$

Tableau de variation.

t	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

t	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$y(t)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$y'(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Point singulier. Au point $M(2)$ on a un point singulier.

$$x'(t) = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$$
$$x^{(2)}(t) = \frac{2}{t-1} - \frac{2t(t-2)}{(t-1)^2}$$
$$x^{(3)}(t) = \frac{-2}{(t-1)^2} - \frac{4t-4}{(t-1)^2} + \frac{6t(t-2)}{(t-1)^4}.$$

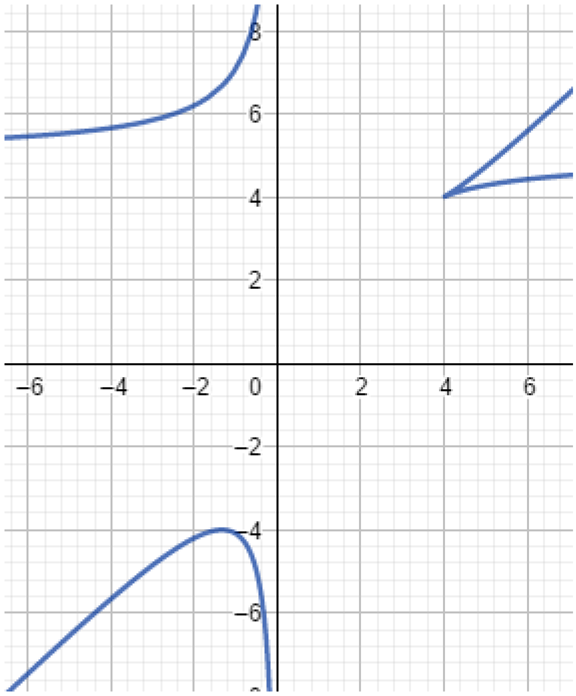
$$y'(t) = 1 - \frac{4}{t^2}$$
$$y^{(2)}(t) = \frac{8}{t^3}$$
$$y^{(3)}(t) = \frac{-24}{t^4}$$

Ainsi : $x^{(2)}(2) = 2$ et $y^{(2)}(2) = 1$ de plus $x^{(3)}(t) = -6$ et $y^{(3)}(2) = -\frac{3}{2}$. Donc au point $M(2)(p = 2, q = 3)$ on a un point de rebroussement de première espèce en $M(2)$.

Branche infinie. $\lim_{t\to-\infty} x(t) = -\infty$, $\lim_{t\to-\infty} y(t) = -\infty \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 1.$

On étudie donc $\lim_{t\to+\infty} y(t) - x(t) = \lim_{t\to+\infty} (t + \frac{4}{t} - \frac{t^2}{t-1}) = -1 + \frac{3}{t} - \frac{1}{t^2} + o(\frac{1}{t^2}) = -1.$

$\Rightarrow$ la droite d'équation $y - x = -1$ est une assymptote à la courbe en ∞ pour connaitre la position de la droite $y - x = -1$ et la courbe $(t \to \infty)$ on cherche le signe de $y(t) - x(t) + 1 \sim \frac{3}{t}$. Donc la courbe est au dessus de la droite.


8
6
4
2
−6
−4
−2
0
2
4
6
−2
−4
−6

Sixième partie

Dénombrements

23 Ensembles

Dans tout ce chapitre on considère des ensembles finis.

Définition. On appelle un ensemble fini un ensemble ayant un nombre fini d'éléments distincts.

Définition (ensemble vide). On appelle ensemble vide un ensemble qui contient aucun élément. On note $\emptyset$.

Définition (cardinal d'un ensemble). Le nombre fini d'un ensemble A est appelé cardinal de A, noté $card[A]$ (ou aussi $|A|$).

Remarque. Dans un ensemble, l'ordre et la répétition n'ont d'importance c'est à dire $A\{1,2,3,4\} = \{2,3,1,4\}$.

Définition (complémentaire d'un ensemble). Soit Ω un ensemble et A un sous ensemble de Ω. $(A \subset \Omega)$. On appelle ensemble **complémentaire** de A dans Ω que l'on note $\Omega \setminus A$ (ou $C_\Omega^A, \overline{A}$)

$$x \in \Omega \setminus A \Leftrightarrow x \in \Omega \text{ et } x \notin A$$

Propriétés. Soit Ω un ensemble et A, B, C des sous ensembles de Ω. On a :

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$
2. $A \cup \emptyset = A$
3. $A \cup B = B \cup A$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
6. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
7. $C_\Omega^{A \cup B} = C_\Omega^A \cap C_\Omega^B$
8. $C_\Omega^{A \cap B} = C_\Omega^A \cup C_\Omega^B$

Remarque. Dire "Soit $x \in A$" est en général faux, il faut supposer avant que $A \neq 0$

Définition (produit cartésien). Soit E et F deux ensembles non vides. On définit l'ensemble noté $E \times F$ par :

$$E \times F = \{(x, y), x \in E \text{ et } y \in F\}$$

D'une manière générale si E_1, E_2 sont des ensembles non vides alors $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n), x_1 \in E_1, i = 1, ..., n\}$.

Propriétés (cardinal). Soit A et B deux ensembles de nombres finis. On a :

1. $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$
2. $card(A \times B) = card(A) \times card(B)$

3. Si A est un sous ensemble de Ω. Alors $card(C_{\Omega}^{A}) = card(\Omega) - card(A)$.
4. Si $A \cap B = \emptyset$ alors $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$

Définition. Soit A et B deux ensembles. On dit que A et B sont disjoints (ou A et B sont incompatibles) si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

24 Dénombrements.

Dans un ensemble fini E , la problématique consiste en :

— la constitution de collections d'ensemble ayant une caractéristique commune

— comptabiliser le nombre d'objets constituants cette collection.

Dans le dénombrement il y a deux problèmes : l'ordre et la répetition.

Définition (Répétition). Lors de la constitution des collections, chaque élément de E peut être comptabilisé plusieurs fois.

Définition. Pour distinguer deux collections on peut tenir compte de l'ordre des éléments qui les composent.

25 Nombre de parties d'un ensemble fini

Définition (partie). Soit E un ensemble on dit que A est une partie de E. Si A est un ensemble contenu dans E.

Remarque. L'ensemble vide est toujours une partie d'un ensemble E.

Théorème VI.1. Soit E_n un ensemble contenant n éléments. Alors il y a 2^n partie distinctes de E_n.

Démonstration (récurrence sur n).

Initialisation : Si $n = 0$, $E_{\emptyset} = \emptyset$ la seule partie du vide c'est le vide.

Hérédité : Supposons que l'hypothèse de récurrence est vrai pour n. Soit E_{n+1} un ensemble de $(n+1)$ éléments. On peut écrire que $E_{n+1} = E_n \cup \{x_{n+1}\}$ avec $x_{n+1} \notin E_n$.

Soit A une partie de $E_{n+1} \Leftrightarrow x_{n+1}$ ou $x_{n+1} \notin A$.

$\Leftrightarrow A \subset E_n$ ou A contient x_{n+1}

$\Leftrightarrow A \subset E_n$ ou $A = \{x_{n+1}\} \cup B$ avec $B \subset E_n$

$\Leftrightarrow A$ est une partie de E_n ou A est une partie $\{x_{n+1}\} \cup B$

$card\,\{x_{n+1} \cup B, \text{avec } B \text{une partie de } E_n\} = card\,\{B, B \text{ partie de } E_n\} = 2^n$. $\Rightarrow card$(l'ensemble des parties de $E_{n+1}) = card(\{\text{partie de } E_n\} + card(\{\text{partie } E_n\}) = 2^{n+1}$.

26 Notion de p-listes

Définition. Soit E_n un ensemble contenant n éléments. Une p-liste d'élément de E_n est une liste ordonnée de p éléments de E_n avec répétition possible.

Théorème VI.2. Soit E_n un ensemble contenant n éléments distincts. Le nombre de p-listes distinctes de l'ensemble E_n est n^p.

Démonstration. Une p-liste de E_n c'est un élément de $\underbrace{E_n \times E_n \times ... \times E_n}_{p-\text{fois}}$. Une p-liste c'est un élément du produit cartésien. $E_n \times E_n \times ... \times E_n$. Donc le nombre de p-listes $= card(E_n \times E_n \times ...\times) = card(E_n) \times ... \times card(E_n) = card(n)^p = n^p$.

27 Arrangement

Définition. Un arrangement à p éléments d'un ensemble E_n (de n éléments) est un échantillon ordonné sans remise de p éléments de E_n.

Proposition. Soit E_n un ensemble de n éléments distincts. Soit $p \in \mathbb{N}$.

1. Si $p > n$ alors le nombre d'arrangements de p éléments de E_n est égal à 0
2. Si $p \leq n$ alors le nombre d'arrangements de p éléments est égal à $n(n-1)...(n-p+1)$ que l'on note

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Démonstration. Soit $p > n$

— Si on choisit le premier élément, il y a n choix.
— Si on choisit le deuxième élément, il y a $n-1$ choix.
— $\vdots$
— Si on choisit le n^{eme} élément, il y a 1 choix.

Il n'y a plus de choix si $p > n$. Donc le nombre d'arrangement est égal à 0. Il y a A_n^p si $p \leq n$.

28 Permutation

Définition. Une permutation d'un ensemble E_n (à n éléments) est un échantillon ordonnée de n élément de E_n.

Proposition. Soit E_n un ensemble tel que $card(E_n) = n$ le nombre de permutation de $E_n = A_n^n = n!$

Remarque. Si on a n éléments il y a $n!$ façon pour les ordonner.

29 Combinaisons

Définition. Soit E_n un ensemble de n éléments. Une combinaison de p éléments de E_n est un échantillon non ordonné sans remise de p éléments de E_n.

Proposition. Soit E_n un ensemble tel que $card(E_n) = n$. Soit $p \in \mathbb{N}$:

1. Si $p > n$ le nombre de combinaisons de p éléments de $E_n = 0$.
2. Si $p \leq n$ le nombre de combinaisons de p éléments de $E_n = \dfrac{A_n^p}{p!}$ que l'on note

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Démonstration. Si on a p éléments on peut l'ordonner de $p!$ façons $\Rightarrow A_n^p = p! C_n^p = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leq n \end{cases}$

30 Résumé

Soit E_n un ensemble de n éléments le nombre de choix de p éléments de E_n est donnée par le tableau suivant :

	Remise		Sans remise	
	nom	nombre d'échantillon	nom	nombre échantillon
ordre	listes	n^p	arrangements	A_n^p
sans ordre	pas de nom	C_{n+p-1}^p	combinaison	C_p^n

Exercice. Soit E et F deux ensembles tel que $card(E) = n$ et $card(F) = p$

1. Déterminer le nombre d'applications de E dans F
2. Déterminer le nombre d'applications injectives de E dans F

Solution. Soit $E = \{1, 2, ..., n\}$ $\qquad F = \{1, 2, ..., p\}$
Une application est totalement déterminée si on sait $(f(1), f(2), ..., f(n))$, $f(i)$ est un élément de F. Donc $\begin{cases} (f(1), f(2), ..., f(n)) \\ (f(2), f(1), ..., f(n)) \end{cases}$ est une liste de n éléments de F. Le nombre d'application de E dans F est le nombre de listes de n éléments parmi un ensemble de p éléments. Ainsi le nombre d'application de E dans F vaut p^n.

$f : E \to F$ est une application injective si et seulement si $f(i) \neq f(j)$ si $i \neq j$.

Pour $f(1)$ on a p choix possible.

Pour $f(2)$ on a $(p-1)$ choix possibles.

$\vdots$

Pour $f(k)$ on a $(p-k+1)$ choix possible. Pour que f soit injective il est nécessaire que $card(F) \geq card(E)$.

Si $p < n$ il 'y a aucune application injective de E dans F.

Si $p \geq n$ il y a A_n^p application injective de E dans F.

Théorème VI.3 (Forumules de calcul).

1. $C_n^p = C_n^{n-p}$

2. $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$
3. $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

Démonstration

1. Le nombre de combinaison de p éléments parmis n éléments est égal au nombre de combinaisos de $(n-p)$ éléments parmi n éléments. En effet si on choisit une combinaisons de p éléments il nous reste une combiaison de $(n-p)$ éléments.
2. $C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^p = \dfrac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!}+\dfrac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} = (n-1)!\left\{\dfrac{1}{(p-1)!(n-p)!}+\dfrac{1}{p!(n-p-1)!}\right\} = (n-1)!\left\{\dfrac{p+n-p}{p!(n-p)!}\right\} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
3. $(a+b) = (a+b)(a+b) \Rightarrow (a+b) = \sum\limits_{k+b=n} \gamma_{kl} a^k b^l$ le coefficient de a^k est égal au nombre de combinaison possibles de k éléments parmis n éléments $\Rightarrow \gamma_{kl} = C_n^k$

Applications (Exemples de tirages)

On dispose d'une urne où se trouvent N boules de k couleurs différentes $(k \leq N)$. On note $N_i, i \in \{1, ..., k\}$ le nombre de boules de la couleur i. On a $N_1 + N_2 + ... + N_k = N$. On tire au hasard n boules de cette urne.

Tirage avec remise. On tire les n boules une à une, en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne. Le résultat est un n-uplet de boules de l'urne. Ce nombre est

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!} N_1^{n_1} \times N_2^{n_2} \times ... \times N_k^{n_k}$$

Tirage sans remise ordonné. On tire un par un les boules sans remise. Quelle est le nombre de n-uplets constitués de n_1 boules de couleur 1,..., de n_k boules de couleur k. Le résultat est

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!} A_{N_1}^{n_1} A_{N_2}^{n_2} ... A_{N_k}^{n_k}$$

Tirage sans remise non ordonné. On tire singulièrement n boules parmi les N boules. Quelle est le nombre de n-uplets constitués de n_1 boules de couleurs 1,..., n_k boules de k. Le résultat est

$$C_{N_1}^{n_1} C_{N_2}^{n_2} ... C_{N_k}^{n_k}$$

Septième partie

Probabilités sur un univers fini

31 Épreuve

Définition. On dit qu'une expérience ou une épreuve est aléatoire si on obtient des résultats différents lorsqu'on répète les mêmes expériences avec les mêmes données.

Exemple.

— Lancer une pièce de monnaie.

— Tirage d'une carte parmi 32 cartes.

32 Ensemble des éventualités (ou univers)

Définition. Considérons une épreuve aléatoire. L'ensemble des éventualités à cette épreuve est l'ensemble des résultats possible. On note cet ensemble Ω.

Exemple.

— Lancer une pièce de monnaie une fois : $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}$

— Lancer une pièce de monnaie deux fois : $\Omega = \{(\text{Pile}, \text{Face}), (\text{Pile}, \text{Pile}), (\text{Face}, \text{Pile}), (\text{Face}, \text{Face})\}$

— Le cardinal d'une telle expérience est $card(\Omega) = 2^k$

Définition. Soit Ω l'espace des éventualités associé à une épreuve aléatoire. On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Chaque élément de $\mathcal{P}(\Omega)$ (c'est à dire chaque partie de Ω) est appelé un événement.

Exemple. Si on lance une pièce de monnaie 3 fois. $A = \{(P, P, F), (P, P, P)\}$ est un événement.

Événements particuliers.

1. $\emptyset$ est appelé événement impossible.
2. Ω est appelé événement certain.
3. Soit A et B deux parties de Ω deux parties de Ω donc A et B sont incompatibles si
$$A \cap B = \emptyset$$
4. Chaque partie de Ω constitué par un seul élément est appelé événement élémentaire. (Un événement élémentaire est une éventualité).

33 Probabilité fini.

Définition Soit Ω un univers et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de Ω. Une probabilité p est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ qui vérifie la propriétés suivantes :

$$p : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$$

1. $p(\emptyset) = 0$, $p(\Omega) = 1$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus A \cap B = \emptyset$ on a $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ est appelé espace de probabilité.

Corollaire. Si $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace de probabilité, alors $\forall A_1, A_2, ..., A_n \in (\mathcal{P}(\Omega), p)$ est un espace de probabilité alors $\forall A_i \cap A_j = \emptyset \ i \neq j$, on a :

$$p(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$$

Démonstration par récurrence. Par hypothèse pour A_1, A_2 tel que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ on a $p(A_1 \cup A_2) = p(A_1)+p(A_2)$ supposons que $p(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = p(A_1)+p(A_2)+...+p(A_n)$ alors $p(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup A_{n+1}) = p(A_1) + ... + p(A_n) + p(A_{n+1})$. Hypothèse de récurrence est vraie pour $n + 1$.

Théorème VII.1. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace de probabilité. Soit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ alors on a :

1. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
2. $p(\Omega \setminus A) = 1 - p(A)$
3. Si $A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$

Démonstration.

1. $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$
   $\Leftrightarrow p(A \cup B) = p(A \setminus B) + p(B \setminus A) + p(A \cap B)$
   $\Leftrightarrow A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ et $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$
   $\Leftrightarrow p(A) = p(A \setminus B) + p(A \cap B)$ et $p(B) = p(B \setminus A) + p(A \cap B)$
   Donc $p(A \cup B) = (p(A) - p(A \cap B)) + p(B) - p(A \cap B) + p(A \cap B)$
2. $\Omega = (\Omega \setminus A) \cup A, (\Omega \setminus A) \cap A = \emptyset$
   $\Leftrightarrow p(\Omega) = p(\Omega \setminus A) + p(A) = 1 \Rightarrow p(\Omega \setminus A) = 1 - p(A)$
3. Si $A \subset B$ alors $B = A \cup (B \setminus A)$ on a $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$
   $p(B) = p(A) + p(B \setminus A) \geq p(A)$ car $\forall c \in \mathcal{P}(\Omega), p(c) \geq 0$

34 Équiprobabilité

Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace de probabilité. On dit que deux événements élémentaires sont équiprobables si $p(\{a_1\}) = p(\{a_2\})$

Théorème VII.2. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace de probabilité tel que tout les événements élémentaires sont équiprobables. (On rappelle que Ω est un ensemble fini). Alors on a :

1. $\forall a \in \Omega, p(\{a\}) = \dfrac{1}{card(\Omega)}$
2. $\forall A \in (\Omega), p(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$

Démonstration. $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ alors $p(\Omega) = p(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \{a_i\}) = \sum\limits_{i=1}^{n} p(\{a_i\}) = 1 = np(\{a_i\}$ car $p(\{a_i\}) = p(\{a_i\})\forall i, j$
$\Rightarrow p(\{a_i\}) = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{card(\Omega)}$.
Soit $A\,\{a_1, a_2, ..., a_k\} \subset \Omega$ et $p(A) = p(\{a_1, a_2, ..., a_k\}) = \sum\limits_{i=1}^{k} p(\{a_i\}) = kp(\{a_i\} = \dfrac{k}{n} = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$

35 Partition

Définition. Soit Ω un univers et $(A_i)_{i\in I}$ un famille d'événements. On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de Ω si et seulement si :

1. $A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall i \neq j$
2. $\bigcup\limits_{i\in I} = \Omega$

Exemple. L'ensemble des événement élémentaires d'un univers Ω et une partition de Ω. $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{a_i\}$

Théorème VII.3. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace de probabilité. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition de Ω. Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$. On a : $p(B) = \sum\limits_{i\in I} p(A_i \cap B)$.

Démonstration. $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega \Rightarrow B \cap (\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = B = \bigcup\limits_{i\in I} (B \cap A_i)$.
$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap (A_i \cap A_j) = \emptyset$ si $i \neq j \Rightarrow$
$p(B) = p(\bigcup\limits_{i\in I} (A_i \cap B)) = \sum\limits_{i\in I} p(A_i \cap B)$.

Exercice. On lance n fois une pièce de monnaie.

1. Déterminer l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire.
2. Calculer la probabilité d'avoir au moins une fois pile.

Solution.

1. $E = \{P, F\}$, $\Omega = E \times E \times E \times ... \times E = \{(a_1, a_2, ..., a_n)a_i = P$ ou $a_i = F\}$.
   $card(\Omega) = \overbrace{card(E) \times card(E) \times ... \times card(E)}^{n \text{ fois}} = 2^n$
   Les événements élémentaires sont équiprobables. Si $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \Omega^{\text{fixe}}, a_i \in \{P, I\}$.
   $p(\{a_1, ..., a_n\}) = \dfrac{1}{2^n}$.
2. Soit $A = \{$avoir au moins un fois pile$\}$.
   $\Omega \setminus A = \{$avoir au pile$)\} = \{(F, F, ..., F)\}$.
   $p(\Omega \setminus A) = p(\{(F, F, ..., F)\}) = \dfrac{1}{2^n}$.
   $\Leftrightarrow p(A) = 1 - p(\Omega \setminus A) = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.

36 Indépendance

Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace de probabilité. Soit A, B deux événements. On dit que A et B sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

37 Probabilités conditionnelles

Théorème VII.4. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace de probabilité. Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ in suppose $p(B) \neq 0$. On définit sur Ω une probabilité, notée p_B sur Ω par :

$$p_B : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1] \\ A \to p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} \end{cases}$$

$p_B(A)$ est appelé la probabilité conditionnelle de A sachant B.

Démonstration. Il faut démontrer que p_B est bien une probabilité.

1. $p_B(\emptyset) = \dfrac{p(\emptyset \cap B)}{p(B)} = 0$
2. $p_B(\Omega) = \dfrac{p(B \cap \Omega)}{p(B)} = 1$
3. $p_B(C \cup D) = \dfrac{p(C \cup D \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(C \cup D \cap B)}{p(B)}$
4. $p_B(C \cup D) = \dfrac{p(C \cap B)}{P(B)} + \dfrac{p(D \cap B)}{p(B)} = p_B(C) + p_b(D)$

Propriétés.

1. Si $A \subset B$, $p_B(A) = \dfrac{p(A)}{p(B)}$
2. Si $B \subset A$, $p_B(A) = \dfrac{p(B)}{p(B)} = 1$

Théorème VII.5 (Théorème de Bayes)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace de probabilité. Soit $A, B \in \mathcal{P}(B)$ tel que $p(B) \neq 0$ et $p(A) \neq 0$.

$$p(A)p_A(B) = p(B)p_B(A)$$

Démonstration. $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$ et $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{P(B)}$ ainsi $\Rightarrow p(A \cap B) = p(A)p_A(B) = p(B)p_B(A)$

Remarque. Soit Ω un univers et $p : \Omega \begin{cases} \{x_1, x_2, ..., x_n\} \to [0,1] \\ x_i \to a_i \end{cases}$ application. Pour que p soit une probabilité sur Ω il faut et il suffit que :

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = 1$$

En effet $p(\Omega) = p(\{x_1, x_2, ..., x_n\}) = a_1 + a_2 + ...a_n = 1$. Ensuite si $A \subset \Omega$ alors A est une disjointe de $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \Rightarrow p(A) = p(\{x_i\} + ... + p(\{x_k\})$

Exemple. $\Omega = \{P, F\}$ $p : \begin{cases} \Omega \to [0,1] \\ P \to \frac{1}{4} \\ F \to \frac{1}{2} \end{cases}$. Comme $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \neq 1$, p n'est pas une probabilité sur $\Omega\,\{P, F\}$

Huitième partie

Variables aléatoires discrètes

38 Introduction et généralités

Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace de probabilité, une variable aléatoire sur Ω est une application de Ω dans $\mathbb{R}$, notée (en général) : $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Exemple.

1. Pour un dé on a : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ on a $p(\{k\}) = \frac{1}{6}$

$$X : \begin{cases} \Omega = \{1,2,...,6\} \to \mathbb{R} \\ k \to k \end{cases}$$

   X est une variable aléatoire (va) sur Ω

2. Lancer de 2 pièces de monnaie successivement $\Omega\,\{PP, PF, FF, FP\}$

Définition (variable discrètes). $\mathbb{N}$: est un ensemble discret, $\mathbb{Q}$: n'est pas un ensemble discret car $\forall a, b$ on a $]a, b[\cap Q \neq \emptyset$ Tout ensemble fini de $\mathbb{R}$ est discret.

Remarque. Soit $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ univers fini et X une variable aléatoire $X \to \mathbb{R}$. X est appelé variable aléatoire discrète car $X(\Omega)$ est un ensemble discret dans $\mathbb{R}$.

39 Loi d'une variable aléatoire.

Théorème et démonstration Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire. La loi de X est la probabilité , notée p_X définie par :

$$p_X : \begin{cases} X(\Omega) \to [0,1] \\ x \to p_X(x) = p(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}) \end{cases}$$

Démonstration. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}, X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_k\} = \{X(\omega_1), X(\omega_2), ..., X(\omega_n)\}$ avec $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$.

$P_X(x_i) = p\{\omega \in \Omega_i, X(\omega) = x_i\}$

$P_X(\{x_1, x_2, ..., x_k\}) = p_X(x_1) + p_X(x_2) + ... + p_X(x_k) = p(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_i, i = 1, ..., k\}) = p(\omega \in \Omega; X(\omega) \in X(\Omega)) = p(\Omega) = 1$

$\Rightarrow p_X$ est une probabilité sur $X(\Omega)$.

Exemple. $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ lancement de deux pièces de monnaie :

$X =$ nombre de P

$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$P_X(0) = p(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = 0\}) = p(\{FF\}) = \frac{1}{4}$

$P_X(1) = p(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = 1\}) = p(\{FP, PF\}) = \frac{1}{2}$

$P_X(2) = p(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = 2\}) = p(\{PP\}) = \frac{1}{4}$

40 Fonction de répartition.

Définition Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire sur Ω. On définit une application sur $\mathbb{R}$, appelée fonction de répartition par :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R} \to [0,1] \\ x \to F(x) = p(\{\omega \in \Omega_i, X(\omega) \leq x\}) \end{cases}$$

Théorème. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire associé à X. On a :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(X) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
2. F est une fonction croissante.
3. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, F(b) - F(a) = p(\{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leq b\}$

Démonstration. Soit $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ avec $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$

$F(x) = p(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \geq x\})$

$x < x_i : F(x) = 0$ car $X(\omega) \leq x_2$

$x \leq x_k : F(x) = p\,\{\omega \in \Omega, X(\omega) \geq x\} = p\,\{\omega \in \Omega; X(\omega) \geq x_k\} = p(\Omega) = 1$

$x = x_i, i = 1, 2, ..., k : F(x_i) = p(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \geq x_i\}) = p(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_j, j = 1, ..., i\}) = \sum\limits_{j=1}^{i} p(\{\omega \in \Omega_i, X(\omega) = x_j\}) = \sum\limits_{j=1}^{i} p_X(x_j)$

Si $x \in]x_i, x_{i+1}[$: $F(x) = p(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \geq x\} = p(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \geq x_i\}) + p(\{\omega \in \Omega, x_i < X(\omega) \geq x\}$
$= p(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \geq x_i\}) = F(x_i)$

Notations. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire. On note :

$p(X = a) = p(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = a\})$

$p(a < X < b) = p(\{\omega \in \Omega, a < X(\omega) < b\})$

En particulier $P_X(x) = p(X = x)$ et $F(x) = p(X \geq x)$.

41 Espérance d'une variable aléatoire

Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire. On suppose que $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. On définit le réel noté $E(X)$ que l'on appelle l'espérance de X le nombre :

$$E(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i p(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_i\}) = \sum_{i=1}^{k} x_i p(X = x_i)$$

Propriétés sur les variables aléatoires. Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace de probabilité, X et Y deux variables aléatoires sur Ω, a et b deux réels. Alors $aX + bY$ est aussi une variable aléatoire.

Théorème. Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace de probabilité, X et Y deux variables aléatoires sur Ω. Alors :

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y), \forall a, b \in \mathbb{R}$$

42 Variance d'une variable aléatoire

Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire. On définit la variance de X que l'on note $V(X)$ le réel positif :g

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

Théorème VIII.1.

$$V(X) = E(X^2) - (E(X)^2)$$

Démonstration. $(X - E(X))^2 = X^2 - 2E(X)X + E^2(X)$ donc $V(X) = E(X^2 - 2E(X)X + E^2(X) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$.

Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{P}, p)$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire sur Ω. On appelle écart type de X que l'on note $\sigma(X)$ le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ où $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ est la variance de X.

Théorème VIII.2. Soit $(\Omega, \mathcal{P}, p)$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire sur Ω. Alors $\forall a, b \in \mathbb{R}$ on a :

1. $V(aX + b) = a^2 V(X)$
2. $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$

Démonstration. $V(aX + b) = E((aX + b)^2) - (E(aX + b))^2 = E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - (aE(X) + b)^2 = a^2E(X^2) + 2abE(x) + b^2 - (a^2(E(X))^2 + 2abE(X) + b^2) = a^2[E(X^2) - (E(X))^2] = a^2V(X)$
On a donc $\sigma(aX + b) = \sqrt{V(aX + b)} = \sqrt{a^2V(X)} = |a|\sigma(X)$.

Remarque. Si $X = 1, E(X) = 1$ car si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ alors :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

Si $X(\omega) = 1 \forall \omega \in \Omega$ alors :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p(X = x_1) = p(\Omega) = 1$$

Définition. Soit X une variable aléatoire. La variable aléatoire $Y = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelé une variable aléatoire centrée réduit associée à X.

Théorème VIII.3. Soit X une variable aléatoire et Y la variable aléatoire centrée réduit associée a X. Alors :

$$E(Y) = 0, V(Y) = 1$$

Démonstration. $E(Y) = E(\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}) = \dfrac{1}{\sigma(X)}[E(X) - E(E(X))] = \dfrac{1}{\sigma(X)}[E(X) - E(X)] = 0$

$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = E(Y^2) = E((\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)})^2) = E(\dfrac{1}{\sigma(X)^2}(X - E(X))^2) = \dfrac{1}{\sigma(X)^2} E(X - E(X))^2 = \dfrac{V(X)}{\sigma(X)^2} = 1$

Théorème VIII.4 (Intégrale de Tchebycher)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace de probabilité et X un variable sur Ω. On pose $m = E(X)$. Alors $\forall \epsilon > 0$, on a : $p(|X - m| \geq \epsilon) \leq \dfrac{\sigma^2(X)}{\epsilon^2} = \dfrac{V(X)}{\epsilon^2}$
$p(|X - m| \leq \epsilon) = p(\{\omega \in \Omega, |X(\omega) - m| \leq \epsilon\})$

Démonstration. Supposons que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. On a donc :
$V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p(X = x_i)$
Soit $J = \{i, |x_i - m| \geq \epsilon\}$. Ainsi $V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p(X = x_i) \geq \sum_{i \in J} (x_i - m)^2 p(X = x_i) \geq \epsilon^2 \sum_{i \in J} p(X = x_i) = \epsilon^2 \sum_{j \in J} p\{\omega \in Z, X(\omega) = m\} = \epsilon^2 p(\{\omega \in i|X(\omega) - m|\} \geq \epsilon) \Leftrightarrow V(X) \geq \epsilon^2 p(|X - m| \geq \epsilon)$
$\{\omega \in \Omega; |X(\omega) - m|\} \geq \epsilon = \bigcup_{i=1}^{n} \left\{\omega \in \Omega, X(\omega) = \bigcup_{i \in J} \omega \in \Omega, X(\omega) = x\text{et}|x_i - m| \geq E\right\} \Rightarrow p(|X - m| \geq \epsilon) \leq \dfrac{V(X)}{\epsilon^2} = \dfrac{\sigma^2(X)}{\epsilon^2}$

Exercice. Un sac contient 3 boules rouges et 3 boules vertes. On tire une à une les 6 boules (sans remise). Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage des six boules associe le nombre de boules vertes tirée avant l'apparition pour la première fois d'une boule rouge.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Quelle est la loi de X ?
3. Déterminer la fonction de répartition associé à X ?

Solution. X peut prendre les valeurs $0, 1, 2, 3$. Tirer 6 boules $\Leftrightarrow$ ordonner 6 éléments $\Omega =$ l'univers de cette expérience. Ainsi $card(\Omega) = 6!$ et $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ et $X : \Omega \to X(\Omega), p(X = x)$.

$X = 0 \Leftrightarrow$ le premier tirage donne une boule rouge. $E_0 =$ tirer une boule rouge la première fois $card(E_0) = C_3^1 5!$
Ainsi $p(X = 0) = \dfrac{card(E_0)}{card(\Omega)} = \dfrac{C_3^1.5!}{6!} = \frac{1}{2}$.
$X = 1 \Leftrightarrow$ le premier tirage est une boule verte et le second tirage une boule rouge. $E_1 =$ avoir une boule verte le premier tirage et une boule rouge le deuxième tirage. On a $card(E_1) = C_3^1 C_3^1 4!$ et donc $p(X = 1) = \frac{3}{10}$.

$X = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{premier tirage} = \text{boule verte} \\ \text{deuxième tirage} = \text{boule verte} \\ \text{troisième tirage} = \text{boule rouge} \end{cases} = E_2$. On a $card(E_2) = A_3^2 C_3^1 3! = 183!$ et donc $p(X = 2) = \frac{3}{20}$.

$X = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{premier tirage} = \text{boule verte} \\ \text{second tirage} = \text{boule verte} \\ \text{troisième tirage} = \text{boule verte} \end{cases} = E_3$. On a $card(E_3) = A_3^3 A_3^3 = 3!3!$ et donc $p(X = 3) = \frac{1}{20}$.

Neuvième partie

Lois discrètes usuelles

43 Variables aléatoires indépendantes

Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace de probabilité et X, Y deux variables aléatoires. On dit que X et Y sont indépendantes si et seulement si $\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega)$:

$$p([X = x] \cap [Y = y]) = p(X = x) \times p(Y = y)$$

On rappelle que

$$[X = x] \cap [Y = y] = \{\omega \in \Omega; X(\omega) = y\} \cap \{\omega \in \Omega; Y(\omega) = y\}$$

Proposition. Soit X et Y deux variables aléatoire indépendantes. Alors :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Remarque. En général $V(X + Y) \neq V(X) + V(Y)$ mais on a toujours $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Uniforme. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace de probabilité. Soit X un variable aléatoire avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. On dit que X suit un loi uniforme si et seulement si :

$$p(X = x_i) = p(X = x_j) \ \forall i, j$$

Donc $p(X)x_i) = \frac{1}{n}$ car $p(X = x_i) + p(X = x_2) + ... + p(X = x_n) \Rightarrow np(X = x_i) = 1$.

44 Loi uniforme sur $\{1, 2, ..., n\}$

Supposons que $X(\Omega) = \{1, 2, ..., n\}$.

Théorème IX.1. Si X suit une loi uniforme avec $X(\Omega) = \{1, 2, ..., n\}$. Alors

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

Démonstration. $E(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i)$ si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ comme $X(\Omega) = \{1, 2, ..., n\}$ alors $E(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} i \frac{1}{n} = (\sum\limits_{i=1}^{n} i)\frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}$.

45 Loi de Bernoulli

Soit une expérience aléatoire qui à deux résultats possibles. Donc l'univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. On définit sur ω une probabilité avec :

$$p(\omega_1) = p \text{ et } p(\omega_2) = 1 - p$$

La probabilité est bien définie par la donnée de $p(\omega_1) = p$.

On définit la variable aléatoire X par :

$$X : \begin{cases} \Omega = \{\omega_1, \omega_2\} \to \{0, 1\} \\ \omega_1 \to 1 \\ \omega_2 \to 0 \end{cases}$$

Donc la loi de X est : $p(X = 1) = p(\omega_1) = p$

$p(X = 0) = p(\omega_2) = 1 - p$

On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p. On note $X = \mathcal{B}(p)$.

Théorème IX.2. Soit $X = \mathcal{B}(p)$. Alors : $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.

Démonstration. $E(X) = 1p(X = 1) + 0p(X = 0) = p(X = 1) = p$, $V(X) == 1^2 p(X = 1) + 0^2 p(X = 0) - p^2 = p(X = 1) - p^2 = p - p^2 = p(1 - p)$.

46 Loi binomiale de paramètres n et p : $\mathcal{B}(n, p)$

Définition. La loi binomiale de paramètre n et p, notée $\mathcal{B}(n, p)$ est la loi de probabilité d'une variable aléatoire $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ où chaque X_i est une épreuve de Bernoulli de paramètre p_i (ie $X_i = \mathcal{B}(p)$) possédant la propriété suivantes : Les variables aléatoires sont indépendantes. C'est à dire $\forall i \neq j$, X_i et X_j sont indépendants.

Théorème IX.3. X est une variable aléatoire binomiale de paramètre n et p si et seulement si :

1. $X : \Omega \to \{0, 1, 2, ..., n\}$
2. $p(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \forall k = 0, 1, 2, ..., n$

Démonstration. $X_1 = \mathcal{B}(p)$ donc :

$$X_i : \Omega \to \{0, 1\}$$

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n : \Omega \to \{0, 1, 2, ..., n\}$$

Démontrons le 2. par récurrence sur n. Montrons le cas $n = 2$:

$X = X_1 + X_2 : X : \Omega \to \{0, 1, 2\}$.

$p(X = 0) = p(X_1 + X_2 = 0) = p(X_1 = 0 \text{ et } X_2 = 0) = p(X_1 = 0) \times p(X_2 = 0)$

Car X_1 et X_2 sont indépendantes.

$p(X = 0) = p(X_1 = 0) \times p(X_2 = 0)$

$= (1 - p)(1 - p) = (1 - p)^2 = C_2^0 p^0 (1 - p)^2$

$p(X=1)=p(X_1+X_2=1)=p\{X_1=0 \text{ et } X_2=1)\}$ ou $(X_1=1 \text{ et } X_2=0)$

$=p(X_1=0 \text{ et } X_2=1)+p(X_1=1 \text{ et} X_2=0)$

$=p(X_1=0)\times p(X_2=1)+p(X_1=1)\times p(X_2=0)$

$=(1-p)+p(1-p)=2p(1-p)=C_2^1p^1(1-p)^{2-1}$

$p(X=2)=p(X_1+X_2=2)=p(X_1=1 \text{ et } X_2=1)=p(X_1=1)\times p(X_2=1)=p^2=C_2^2p^2(1-p)^{2-2}$

On montre 2. pour $n=2$. On suppose que l'hypothèse de récurrence est vraie jusqu'à n. Soit $X=X_1+X_2+ ... +X_{n+1}:X:\Omega\to\{0,1,...,n+1\}$. Soit $k\in\{0,1,2,...,n+1\}$

$p(X_1+X_2+...+X_{n+1}=k)=p(X_1+X_2+...+X_n=k \text{ et } X_{n+1}=0)+p(X_1+X_2+...+X_n=k-1 \text{ et } X_{n+1}=1)$

$=p(X_1+X_2+...+X_n=k)\times p(X_{n+1}=0)+p(X_1+X_2+...+X_n=k-1)\times p(X_{n+1}=1)$

$=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}(1-p)+C_n^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}p$

$=C_n^kp^k(1-p)^{n+1-k}+C_n^{k-1}p^k(1-p)^{n+1-k}$

$=(C_n^k+C_n^{k-1})p^k(1-p)^{n+1-k}=C_{n+1}^kp^k(1-p)^{n+1-k}$

Montrons que $C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k$

$C_n^k+C_n^{k-1}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}+\dfrac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}+\dfrac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!}=\dfrac{n!}{k!(n+1-k)!}[(n+1-k)+k]=\dfrac{n!}{k!(n+1-k)!}(n+1)=\dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}=C_{n+1}^k.$

Théorème IX.4. Soit $X=\mathcal{B}(n,p)$. On a :

$$E(X)=np$$

$$V(X)=np(1-p)$$

Démonstration. $X=X_1+...+X_n\Leftrightarrow E(X)=E(X_1+...+X_n)=E(X_1)+...+E(X_n)=np.$

$V(X)=V(X_1+...+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+...V(X_n)=np(1-p).$

Exemple. Une urne contient 3 boules blanches, 5 boules rouges et 2 boules noires.

On tire successivement n boules de l'urne, avec remise.

Soit X la variable aléatoire "nombre de boules blanches tirées après n tirages"

A chaque tirage, la probabilité de tirer une boule blanche vaut $\frac{3}{10}$, les tirages sont indépendants donc $X=\mathcal{B}(n,p)$ vec $p=\frac{3}{10}$

La loi de X est $p(X=k)=C_n^k(\frac{3}{10})^k(1-\frac{3}{10})^{n-k}$.

FIN.

Travaux dirigés

1 Série Numérique

Exercice 1. Étudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum cos(n)$
2. $\sum(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n})$
3. $\sum(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
4. $\sum \frac{n}{n^2+4}$
5. $\sum sin(\frac{1}{n^2})$
6. $\sum sin(\frac{1}{n^\beta})$

Exercice 2. Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $\sum \frac{n}{n+3}$
2. $\sum \sqrt{n^4+2} - \sqrt{n^4+1}$
3. $\sum \frac{n}{n^3+2}$
4. $\sum ln(1 + \frac{1}{n^2})$
5. $\sum e^{-\sqrt{n}}$

Exercice 3. Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{1}{(1+\sqrt{n})^n}$
2. $u_n = \frac{n^2}{3^n}$
3. $u_n = \frac{1}{an+b} - \frac{1}{n}$ (discuter selon les valeurs de a et b)
4. $u_n = nlog(1 + \frac{1}{n}) - \frac{2n}{2n+1}$
5. $u_n = \frac{2\sqrt{n}+cos(n)}{n^2+log(n)}$

Exercice 4. Etudier la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{n^2+1}{5n^2+n}$
2. $u_n = \frac{1}{nsin^2(n)}$
3. $u_n = \frac{1}{(\sqrt[n]{2}+ln(n))^{n^2}}$
4. $u_n = \frac{1}{n^{ln(n)}}$
5. $u_n = sin(\frac{n}{n^2+1})$
6. $u_n = (\frac{sin^2(n)}{n})^n$
7. $u_n = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1$
8. $u_n = \frac{e^{-n}}{n}$

Exercice 5. Donner les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{3^n}$
2. $u_n = \frac{1}{\sqrt{10}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$

Exercice 6. Montrer que la série de terme général u_n est convergente et calculer sa somme : $u_n = ln(1 - \frac{1}{n^2})$

Exercice 7. Discuter suivant la valeur de $x > 0$ la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = n!x^{n^2}$
2. $u_n = \frac{x^n}{n^x}$

Exercice 8. On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ On admet que $\sum u_n$ converge.

1. Prouver que $\sum v_n$ diverge.
2. Montrer que $u_n \sim v_n$.
3. Que peut-on en déduire.

2 Intégrales

Exercice 9. Soit $g(x) = \int\limits_0^{2cos(x)} \sqrt{4-t^2}dt$

1. Déterminer le domaine de g
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de g(x)
3. Calculer g'(x)
4. En déduire g(x)

Exercice 10. Soit $F(x) = \int\limits_0^{x} ln(1+e^{-2t})dt$.

1. Déterminer le domaine de f.
2. Etudier les variations de f.
3. Montrer que $\frac{a}{a+1} \leq ln(1+a) \leq a$.
4. Montre que $\frac{ln(2)}{2} - \frac{1}{2}ln(1+e^{-2x}) \leq F(X) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$.

Exercice 11. Calculer les intégrales suivantes.

1. $f(x) = x^2.ln(x)$
2. $g(x) = \frac{1}{(x-1).(x+2)}$
3. $h(x) = x.e^{x^2}$
4. $i(x) = \frac{x^3}{(x^4+1)}$
5. $j(x) = \frac{2x+2}{x^2+1}$

Exercice 12. Calculer les primitives suivantes en précisant le domaine de validité.

1. $\int \dfrac{x^2}{1+x^2}dx$
2. $\int t^4 1+t^5)^5 dt$
3. $\int \dfrac{1}{cos^2(x)}dx$
4. $\int \dfrac{sin(x)}{cos^2(x)}dx$
5. $\int sin(\frac{x}{2}).cos(\frac{x}{2})dx$
6. $\int \dfrac{ln(t)}{t}dt$
7. $\int \dfrac{1}{sin^2(t)}dt$
8. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
9. $\int \dfrac{1}{1+th(x)}dx$
10. $\int tan(x)dx$
11. $\int \dfrac{1}{sin^2(x).cos^2(x)}dx$
12. $\int \dfrac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$

Exercice 13. Vérifier qu'il existe trois réels a, b, c tels que pour tout $x \neq 0$:

$$\frac{1}{x+x^3} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$$

En déduire $\int_1^2 \frac{1}{x+x^3}$

Exercice 14.

1. Déterminer la primitive de $x \to \frac{x-1}{x^2-2x+2}$ qui s'annule en $x = 2$.
2. Déterminer la primitive de $x \to \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ qui s'annule en $x = -1$.
3. Vérifier que $f : x \to ln(x)$ admet des primitives sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$. Déterminer celle qui s'annule en 2.
4. Vérifier que $f : x \to x^{\frac{4}{3}}$ admet des primitives sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$. Déterminer celle qui s'annule en 1.

Exercice 15. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{2\pi} cos(px)cos(qx)dx.((p, q) \in \mathbb{N}^2)$
2. $\int_0^{2\pi} cos(2x)sin(3x)dx.$

Exercice 16. Calculer les primitives suivantes :

1. $\int cos^2(x)dx$
2. $\int cos^3(x)dx$
3. $\int cos^4(x)dx$
4. $\int cos^5(x)dx$

Exercice 17. Par IPP calculer les primitives ou les intégrales suivantes.

1. $\int Arctan(t)dt$
2. $\int \frac{t}{cos^2(t)}dt$
3. $\int e^t cos(t)dt$
4. $\int_0^{\pi/8} (x+2)sin(4x)dx$
5. $\int x^n ln(x)dx$
6. $\int_0^1 2xArctan(x)dx$
7. $\int_0^{\pi/4} \frac{tan(x)}{cos^2(x)}dx$
8. $\int sin(ln(x))dx$

Exercice 18. Par changement de variable calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_2^5 \frac{1}{x(1+ln(x))^3}dx$
2. $\int_0^1 \frac{x^7}{(1+x^4)^2}dx$
3. $\int_0^1 \frac{1}{4+x^2}dx$
4. $\int_{ln(2)}^{ln(5)} \frac{e^x}{(3+e^x).\sqrt{e^x+1}}dx$
5. $\int_0^{\pi} sin^3(x).cos^4(x)dx$

Exercice 19. Calculer les primitives suivantes

1. $\int \dfrac{1}{a^2+x^2}dx$
2. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$
3. $\sqrt{a^2-x^2}dx$

Exercice 20. Calculer les intégrales suivantes

1. $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x^2+2x+2}dx$
2. $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$
3. $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{x^2+2x+5}dx$

Exercice 21. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que si f est paire alors pour tout réel x, $\int\limits_{-x}^{x} f = 2\int\limits_0^x f$
2. Montrer que si f est impaire alors pour tout réel x, $\int\limits_{-x}^{x} f = 0$
3. Montrer que si f est périodique de période $T>0$, alors pour tout réel x, $\int\limits_{x}^{x+T} = \int\limits_0^T f$.

Exercice 22. Pour $p,q\in\mathbb{N}$ on pose $J_{p,q}=\int\limits_0^1 t^p(1-t)^q dt$

1. Montrer que $J_{p,q}=J_{q,p}$
2. Montrer que si $p\geq 1, (q+1)J_{p,q}=pJ_{p-1,q+1}$
3. Calculer $J_{0,p+q}$ puis $J_{p,q}$

Exercice 23. Soit $I=]\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+(k+1)\pi[$ où $k\in\mathbb{Z}$. Déterminer sur I les primitives suivantes :

$$I(x)=\int\frac{cos(x)}{cos(x)-sin(x)}dx\text{et}J(x)=\int\frac{sin(x)}{cos(x)-sin(x)}dx$$

Indication : on pourra calculer $I(x)+J(x)$ et $I(x)-J(x)$.

Exercice 24.

1. Décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{(x+)(x^2-x+1)}$.
2. En déduire les primitives suivantes : $\int\dfrac{1}{x^3+1}dx$, $\int\dfrac{x^3}{x^3+1}dx$
3. Calculer la primitive $\int\dfrac{1}{x^2+\sqrt{x}}$ $(t=\sqrt{x})$

Exercice 25.

1. Décomposer en élément simples $\dfrac{1}{(x+1)(1+x^2)}$
2. Calculer l'intégrale : $J_s=\int\limits_0^s\dfrac{e^x}{(1+e^x)(1+e^{2x})}dx$ où s est une paramètre réel.

Exercice 26.

1. Décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{(x-1)(1+x^2)}$.
2. Calculer l'intégrale : $\int\limits_1^2\dfrac{e^x}{(e^x-1)(e^{2x}+1)}dx$

3 Formule de Taylor

Exercice 27. Établir les inégalités suivantes

1. $\forall x \geq 0, x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3(1+x)^3} \leq ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$
2. $\forall x \geq 0, 0 < \sqrt[3]{1+x} - 1 - \dfrac{x}{3} + \dfrac{x^2}{9} < \dfrac{5}{81}x^3$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$

Exercice 28.

1. Appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre n de la fonction $x \to e^x$ entre 0 et x.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.
$$|e^x - \sum_{k=}^{n} \frac{x^k}{k!}| \leq \frac{|x|^{n+}e^{|x|}}{(n+1)!}$$
   (a) En prenant $n = 4$ en déduire une valeur approché de $1/e$ à 10^{-2} près.
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé.

Exercice 29.

1. Appliquer l'inégalité de Taylor avec reste intégral à l'ordre n de la fonction $x \to ln(1+x)$ entre 0 et 1.
2. En déduire que
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \to ln(2)$$

Exercice 30. Soit x un réel et $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$

1. Montrer que $|u_n(x) - cos(x)| \leq \dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
2. En déduire que la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

4 Somme de Riemann

Exercice 31. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k\sqrt{n^2-k^2}}{n^3}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \sqrt{n^2-k^2}$

5 Arcs paramétrés

Exercice 32. Dans un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan on considère la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{3}{t^2 - 2t} \\ y(t) = \dfrac{t^2 - 3}{t} \end{cases}$$
définie sur le domaine $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

1. Déterminer le tableau de variations des fonctions x et y sur $\mathcal{D}$.
2. La courbe $\mathcal{C}$ possède t-elle un point singulier ?
3. Déterminer les tangentes verticales ou horizontales.
4. Etudier les asymptotes et les branches paraboliques (on précisera la position de l'asymptote par rapport à la courbe).
5. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet un point double que l'on déterminera.
6. Tracer $\mathcal{C}$

Exercice 33. Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan on considère la courbe $\mathcal{C}$:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{1-t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1-t^2} \end{cases} \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

1. Déterminer les symétries de $\mathcal{C}$
2. Déterminer le tableau de variation des fonctions $x(t)$ et $y(t)$
3. Déterminer les points singuliers et leurs natures.
4. Déterminer les tangentes horizontales et verticales.
5. Faire l'étude des branches infinies.
6. Tracer sommairement $\mathcal{C}$.

Exercice 34. Etudier les courbes dont les coordonnées cartésiennes sont définies par les équations suivantes :

1. $$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$$
2. $$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{1+t} + \dfrac{1}{t} \\ y(t) = \dfrac{1}{t-1} + \dfrac{1}{t} \end{cases}$$
3. $$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$$
4. $$\begin{cases} x(t) = 2\cos(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$$

6 Dénombrement

Exercice 35. On considère les mains de 5 cartes qu'on peut extraire d'un jeu de 52 cartes.

1. Combien y'a t-il de mains différentes ?
2. Combien y'a t'il de mains comprenant exactement un as ?
3. Combien y'a t'il de mains comprenant au moins un valet ?
4. Combien y'a t'il de mains omprenant à la fois au moins un roi et au moins une dame ?

Exercice 36. Combien y'a t'il de bijections de $\{1, 2, ..., 12\}$ dans lui même possédant :

1. La propriété : n est pair $\Longrightarrow f(n)$ est paire ?
2. La propriété : n est divisible par 3 $\Longrightarrow f(n)$ est divisible par 3 ?

Exercice 37. Soit E un ensemble à n éléments et $A \subset E$ un sous ensemble de p éléments. quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

Exercice 38. Un étudiant possède 14 livres de quatre matières différentes : 4 livres de mathématiques, 5 d'économie, 3 de philosophie et 2 d'anglais. Il veut ranger ces livres sur une étagère.

1. De combien de façon peut il le faire s'il ne tient pas compte des matières ?
2. De combien de façon peut il le faire s'il range d'abord les livres d'anglais puis ceux d'économie puis ceux de maths et enfin ceux de philosophie ?
3. De combien de façon peut il le faire s'il range les livres par matières ?

Exercice 39. Dans un jeu de 32 cartes on appelle main toute combinaison de 5 cartes.

1. Combien de main contiennent 3 rois ?
2. Combien de main contienne 3 piques ?
3. Combien de main contiennent 3 cartes de même couleur ?

Exercice 40. Une urne contient 5 boules rouges, 4 noires et 3 vertes. On tire trois boules de cette urne successivement en remettant chaque fois la boule tirée avant le tirage suivant.

1. Quel est le nombre de tirage possible ?
2. Combien de fois l'événement "obtenir exactement 3 boules rouges" est réalisé ?
3. Combien de fois l'événement "obtenir exactement 2 boules rouges" est réalisé ?
4. Combien de fois l'événement "obtenir au moins 1 boule rouge" est réalisé ?
5. Combien de fois l'événement "obtenir deux boules vertes et une noire" est réalisé ?
6. Combien de fois l'événement "obtenir 3 boules de la même couleur" est réalisé ?
7. Combien de fois l'événement "obtenir 3 boules de couleur différentes" est il réalisé ?

Exercice 41. Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules rouges indiscernables au toucher. On tire successivement sans remise 3 boules dans l'urne.

1. Quel est le nombre de tirage possible ?
2. Combien de fois l'événement "obtenir exactement 3 boules rouges" est réalisé ?
3. Combien de fois l'événement "obtenir exactement 2 boules rouges" est réalisé ?
4. Combien de fois l'événement "obtenir exactement 4 boules blanches" est réalisé ?

Exercice 42. On dispose de 3 boites et 5 craies de couleur bleue, rouge, jaune, verte et orange.

1. De combien de façon distinctes peut on ranger les craies dans les trois boites ?
2. Même question en laissant une boite vide .
3. Même question si la bleue et la rouge sont rangées ensembles ?
4. Même question si la bleue et la rouge sont rangées ensembles mais seules ?

Exercice 43. On lance 3 fois de suite un dé numéroté de 1 à 6 et on note ainsi le triplet obtenu. Combien y'a t'il de tels triplets ?

7 Probabilité et Variables aléatoires

Exercice 44. Une urne contient une boule rouge, deux boules banches et trois boules noires.

1. On extrait simultanément trois boules de cette urne. On suppose que tous les tirages sont équiprobables. Soit X la variable aléatoire : " nombre de boules blanches parmi les trois boules extraites". Déterminer la loi de X, son espérance et son écart type.
2. On extrait successivement trois boules de cette urne, en remettant après chaque tirage la boule extraite dans l'urne. On suppose que tous les tirages sont équiprobables. Soit Y l variable aléatoire "nombre de tirage où apparaît une boule blanche". Déterminer la loi de Y, son espérance et son écart type.

Exercice 45. On joue à pile ou face avec 2 pièces. Soit X le nombre de piles obtenus. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 46. Trois urnes A, B et C contiennent respectivement 1 boule blanche et 3 noires, 2 blanches et 2 noires, 3 blanches et 1 noire. On tire au hasard une boule dans chacune des 3 urnes, et on désigne par X le nombre de boules blnches obtenues. Doner la loi de X et sa fonction de répartition.

Exercice 47. On lance 2 dés et on appelle Z la v.a.r égale à la valeur absolue de la différence des numéros obtenus. Déterminer la loi de Z, a fonction de répartition, son espérance et sa variance.

Exercice 48. L'oral d'un examen comporte 20 sujets possibles. Le candidat tire 3 sujets au hasard. Ce candidat à révisé seulement 12 sujets. On considère la variable X égale au nombre de sujets révisés parles 3 tirés. Quelle est la loi de probabilité de X ?

Exercice 49. Dans une bibliothèque se trouvent 10 livres en langue étrangère : 5 en anglais, 2 en allemand et 3 en russe. On prélève au hasard 5 de ces livres. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de volumes en russe prélevés. Déterminer la loi de probabilité, puis la fonction de répartition de X et représenter celle-ci.

Exercice 50. Un lot contient 3 pour centre de pièces défectueuses. On prélève au hasard un échantillon de 10 pièces. Les pièces étant très nombreuses, on admet que le tirage peut être considéré comme fait au hasard et avec remise. Soit X la variable "nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon". Déterminer la loi de X. Calculer $P([X = 0]), P([X \geq 1])$, $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 51. Un fabriquant de berlingots possède 3 machines A, B et C qui fournissent respectivement 10,40 et 50 pour cent de la production totale de son usine. Une étude à montré que le pourcentage de berlingots défectueux et de 3.5 pour cent pour la machine A, de 1.5 pour la machine B et de 2.2 pour cent pour la machine C. Après fabrication les berlingots sont versés dans un bac. On tire au hasard un berlingot.

1. Montrer que la probabilité pour que ce berlingot vient de l'usine C et est défectueux est 0.011.
2. Calculer la probabilité pour ce berlingot soit défectueux.
3. Calculer la probabilité pour que ce berlingot vient de l'usine C sachant qu'il est défectueux.
4. On prélève successivement dans le bac 10 berlingots en remettant à chaque fois le berlingot tiré dans le bac. Calculer la probabilité d'avoir au moins un berlingot défectueux.

FIN.