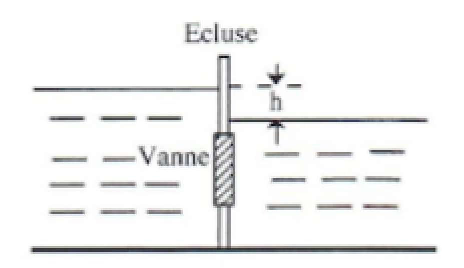
Physique

Mécanique des fluides Semestre 4

Exercice 1 Vanne d'écluse. Une écluse sépare deux masses d'eau. La différence de hauteur est la dénivellation notée h. On désigne par p_0 la pression atmosphérique, ρ la masse volumique de l'eau et g l'accélération de pesanteur.



1. Déterminer le diagramme des forces élémentaires de pression sur l'écluse.
2. Calculer en fonction de h, la résultant des forces de pression exercées sur une vanne de section S. Quel est son point d'application ?

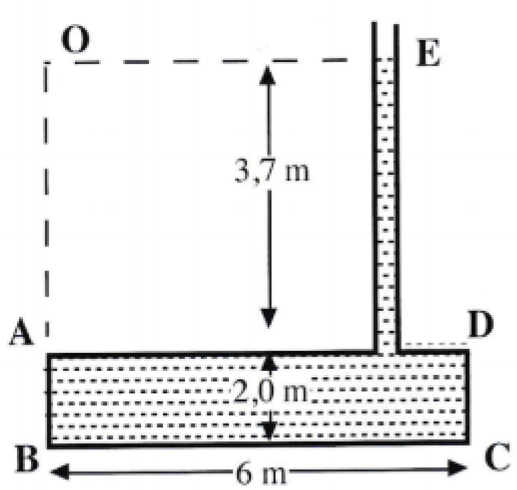
Corrigé 1

1. Sur la vanne le diagramme de pression correspond à un rectangle la pression, sur la hauteur h il y a un fluide à gauche et non à droite le diagramme est donc un triangle la pression est de $\rho g z$.
2. $dF = pdS = \rho g h dS \Rightarrow F = \rho g h S$ où $S = L \times H$.

$$OG.F = \int_S zdF \Rightarrow \frac{1}{F}\int_0^H \rho g L z dz = \frac{1}{F}\rho g L \times \frac{H^2}{2} = \frac{H}{2}$$

La force s'applique donc au centre de la vanne.

Exercice 2 Réservoir à conduit. L'eau monte jusqu'au niveau E dans le conduit, d'aire 0.10 m^2, fixé au reservoir $ABCD$ de la figure. On négligera le poids du réservoir, du conduit et la pression atmosphérique.



1. Déterminer et positionner la force résultante agissant sur la surface AB qui a 2.50 m de large.
2. Déterminer la force totale s'exerçant sur le fond du réservoir.
3. Comparer cette force totale avec le poids total de l'eau, expliquer la différence et écrire l'équilibre du système.

Corrigé 2

1. $dF = pdS \Rightarrow F_{AB} = \int_S pdS = \int_0^{2.5}(\int_{3.7}^{5.7} pdz)dx \Rightarrow F_{AB} = 2.5 times\frac{\rho g}{2}(5.7^2 - 3.7^2) = 2.3 \times 10^7 N.$

On cherche le point d'application :

$$
\begin{aligned}
\vec{OG} \wedge \vec{F} &= \int_S \vec{OA_i} \wedge d\vec{F} \\
OG.F_{AB} &= \int_S OA_i dF_{AB} \quad \text{(car ils sont orthogonaux)} \\
&= \int_S z^2 \rho g dS \\
&= \frac{1}{F_{AB}} \times \int_0^{2.5} dx \int_{3.7}^{5.7} \rho g z^2 dz = 4.77m
\end{aligned}
$$

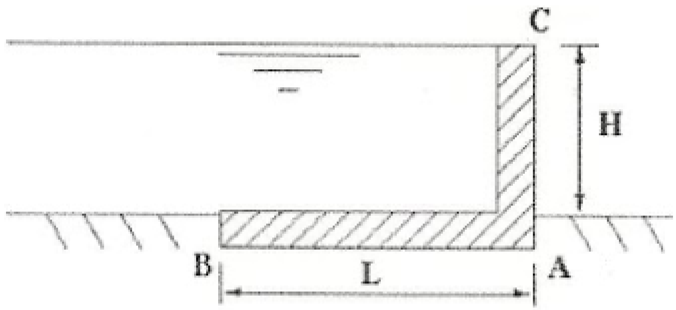
2. $F_{BC} = \int_S pdS = \rho g \times 5.7 \times \int_S dS \Rightarrow F_{BC} = 8.39 \times 10^5 N$
3. $P = gM = g(\rho \times 6 \times 2.5 \times 2 + \rho \times 3.7 \times 0.1) = 2.98 \times 10^5 N$.
   Il faut remarquer que $\vec{F}_{tot}$ n'est pas égal à $\vec{F}_{BC}$ cependant $\vec{F}_{tot} = \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{DA}$. On cherche $\vec{F}_{DA}$.

$$
\begin{aligned}
F_{DA} &= \int_S pdS \\
&= \rho g \times 3.7 \times \int_S dS \\
&= 5.41 \times 10^5 N
\end{aligned}
$$

Au final on a bien $\sum \vec{F} = 0$, le système est donc à l'équilibre.

Exercice 3 Barrage en équerre. Un barrage de hauteur H en forme de dièdre parfaitement rigide en béton armé ou en métal, dont on négligera le poids, reste en équlibre grâce aux forces de pression qui agissent sur la ase de ce dièdre de largeur L. La pression atmosphérique est négligée et on admettr que les réactions du sol sur le barrage varient linéairement le long de la base entre une pression maximale en A et une pression nulle en B.

1. Déterminer le diagramme des pressions sur ce barrage.
2. Calculer la longueur L nécessaire à l'équilibre du barrage :
   (a) en négligeant les réactions du sol sur le barrage
   (b) en prenant en compte ces réactions



Corrigé 3

1. Un trapèze sur CA provoqué par le fluide, un rectangle sur AB provoqué par le fluide, un rectangle sur CA provoqué par l'air, un triangle sur BA (maximum en A) provoqué par le sol.
2. Le barrage est équilibré on a donc $\sum \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum \vec{\mathcal{M}}(\vec{F}) = \vec{0}$
   (a) On calcule $\vec{F}_{AB} = \int_S pdS = LlH\rho g \Rightarrow BG = \dfrac{L}{2}$ et $\vec{F}_{AC} = \int_S pdS = \int_0^H l\rho g z dz = l\rho g \dfrac{H^2}{2} \Rightarrow CG' = \dfrac{2}{3}H$.

On a donc à l'équilibre

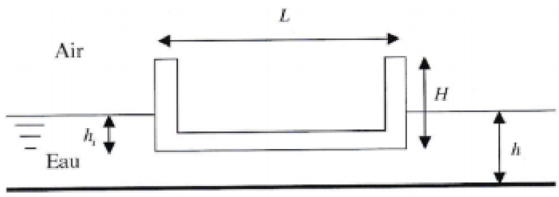
$$\vec{AG} \wedge \vec{F}_{AB} + \vec{AG'} \wedge \vec{F}_{AC} = \vec{0} \Rightarrow \frac{L}{2} \times L2H\rho g - \frac{H}{3} \times l\rho g \frac{H^2}{2} = 0 \Rightarrow \rho g H l (\frac{L^2}{2} - \frac{H^2}{6}) = 0 \Rightarrow H = L\sqrt{3}$$

(b) Sur l'axe z, l'équilibre implique $\vec{F}_{AB} = \vec{R}_{sol} \Rightarrow \vec{R}_{sol} = LlH\rho g \Rightarrow BG'' = \frac{2}{3}L$ On obtient donc à l'équilibre

$$L = H$$

Exercice 4 Flottabilité d'une barge. Une barge parrallélépipédique ouverte de longueur L, de largeur l et de hauteur H et de masse m flotte dans l'eau douce.

1. Déterminer h_i la hauteur d'immersion de la barge dans l'eau ?
2. Quelle masse m_p de pierrre faut-il placer dans la barge pour la faire reposer au fond d'un bassin dont la profondeur d'eau est h plus petite que H ?



On prendra $L = 10\ m$, $l = 4\ m$, $H = 5\ m$, $m = 54000\ kg$, $h = 4\ m$, $\rho_{eau} = 1000\ kg.m^{-3}$.

Corrigé 4

1. On est à l'équilibre donc la poussée d'Archimède compense le poids de la barge on a donc

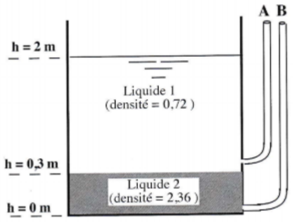
$$m\vec{g} - \rho\vec{g}V = \vec{0}$$
$$m = \rho \times (L \times l \times h_i)$$
$$h_i = \frac{m}{\rho L l} = 1.35m$$

2. On a le même principe que à la première question cependant la masse est désormais la masse de la barge plus la masse de pierre on a donc

$$m + M = \rho \times (L \times l \times h)$$
$$M = \rho L l h - m$$
$$= 106000kg$$

Exercice 5 Deux liquides non miscibles dans un réservoir. Un réservoir ouvert possède deux piézomètres A et B et contient deux liquides non miscibles.

1. Quelle est la hauteur de la surface liquide dans le piézomètre A ?
2. Quelle est la hauteur de la surface liquide dans le piézomètre B ?
3. En négligeant la pression atmosphérique, déterminer la pression dans le fond du réservoir.



CORRIGÉ 5

1. On veut $p(h = 2m) = p_A$ on applique donc la loi de l'hydrostatique

$$p_0 - \rho g h = p_0 - \rho g h_A$$
$$h_A = 2m$$

2. On veut $p(h = 0m) = p_F$ avec F un point au fond du piézomètre B, on applique donc la loi de l'hydrostatique

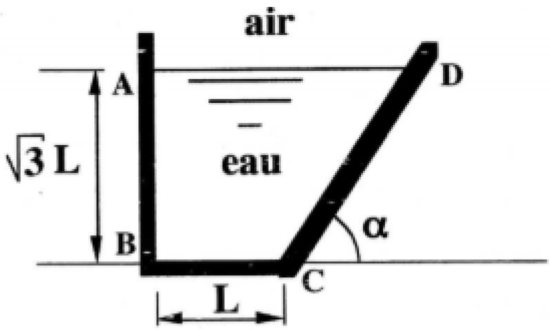
$$p_0 + (\rho_1 g \times 1.7 + \rho_2 g \times 0.3) = p_0 + \rho_2 g h_B$$
$$h_B = 0.82m$$

3. On applique la loi de l'hydrostatique entre un point à la surface du réservoir et un point au fond du réservoir on a donc $p_0 - \rho_2 g h_B = p_0 - \rho_2 g h_B$ on trouve que la pression au fond du réservoir vaut $\rho_2 g h_B = 18953Pa$.

EXERCICE 6 RÉSERVOIR À PAROI INCLINÉE. Un réservoir de largeur l est rempli d'eau. On veut caractériser l'action de l'eau sur chacune des parois AB,BC et CD de ce réservoir. La paroi CD est inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. $\sqrt{3}L$ est la hauteur de la surface libre par rapport à la base du réservoir. On désigne par ρ la masse volumique de l'eau et g l'accélération de la pesanteur ; La pression atmosphérique p_0 sera négligée.

1. Tracer le diagramme des forces de pression exercées par le fluide sur ce réservoir.
2. Calculer les résultants F_{AB}, F_{BC} et F_{CD} et leur point d'application, des forces de pression qui s'exercent sur les parois AB, BC et CD.
3. Calculer la résultante F, et son point d'application, des forces de pressions exercées par le fluide sur ce réservoir.

On prendra $g = 9.81 m.s^{-2}$ et $\rho = 1000 kg.m^{-3}$ et on donne $L = 20m$, $\alpha = 45°$ et $l = 100m$.



CORRIGÉ 6

1. On a un rectangle sur le fond du réservoir, un triangle sur AB avec un maximum en B, un triangle incliné d'un angle α sur CD avec un maximum en C.

2. On cherche à calculer les différentes forces :

$$\begin{aligned} F_{AB} &= \int_0^l (\int_0^{\sqrt{3}L} \rho gzdz)dx \\ &= l \times \frac{\rho g}{2}(\sqrt{3}L)^2 \\ &= 5.886 \times 10^8 N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OG.F &= \int_S zdF \\ &= \int_0^{\sqrt{3}L} z \times l\rho gzdz \\ &= l \times \frac{\rho g}{3}(\sqrt{3}L)^3 \\ OG &= \frac{2}{3}(\sqrt{3}L) = 23.09m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{BC} &= \int_0^l (\int_0^L pdy)dx \\ &= l \times L \times \sqrt{3}L\rho g \\ &= 6.796 \times 10^8 N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BG.F &= \int_S ydF \\ &= \int_0^l (\int_0^L \sqrt{3}L\rho g \times ydy)dx \\ &= l \times \sqrt{3}L\frac{\rho g}{2}L^2 \\ BG &= \frac{L}{2} = 10m \end{aligned}$$

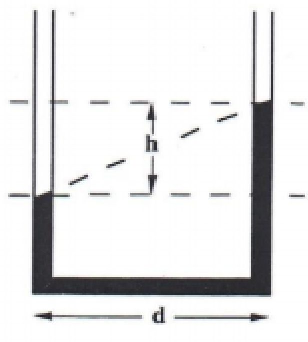
$$\begin{aligned} F_{CD} &= \int_0^l \int_0^{\sqrt{3}L} \rho gz\frac{dz}{\sin(\alpha)} \\ &= l \times \frac{\rho g}{2}\frac{(\sqrt{3}L)^2}{\sin(\alpha)} \\ &= 8.324 \times 10^8 N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OG.F &= \int_S zdF \\ &= \int_0^{\sqrt{3}L} z\rho gzl\frac{dz}{\sin(\alpha)} \\ &= \frac{l}{\sin(\alpha)} \times \frac{\rho g}{3} \times (\sqrt{3}L)^3 \\ OG &= \frac{2}{3}(\sqrt{3}L) = 23.09m \end{aligned}$$

3. $\vec{F}_{tot} = \sum \vec{F} = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{CD} = \rho g\sqrt{3}lL^2\vec{z} + \frac{3}{2}\rho glL^2\frac{\vec{z}}{\tan(\alpha)}$. On a donc $F_{tot} = 1.268 \times 10^9 N$. La force s'applique au centre de gravité du réservoir.

Exercice 7 Accéléromètre à liquide.

Il est possible de connaître l'accélération a d'un véhicule à partir de la différence h des niveaux d'un liquide dans le branche d'un tube en U qu'il transporte. La distance des branches du tube est d. Quelle est la valeur de l'accélération ? Application numérique : $h/d = 0577$



Corrigé 7

On applique le principe fondamental de la dynamique

$$-\vec{grad}p + \rho\vec{\gamma} = \vec{0}$$

avec $\vec{\gamma} = \vec{g} - \vec{a}$

$$gr\vec{a}dp = \rho(\vec{g} - \vec{a})$$
$$\frac{\partial p}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{e}_z = -\rho(g\vec{e}_y - a\vec{e}_x)$$

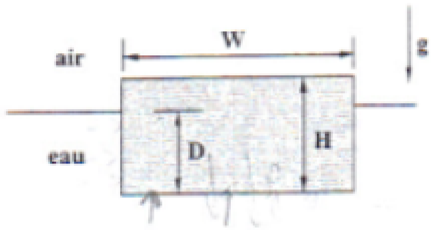
$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = \rho a \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \qquad \Rightarrow p = -\rho(gy - ax) + cte \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Sur une surface isobare on a $dp = 0$ et donc on obtient

$$\rho a dx - \rho g dy = 0 \Leftrightarrow a = g\frac{dy}{dx} = 5.66 m.s^{-2}$$

Exercice 8 Morceau de savon.

Un morceau de savon flotte à la surface de l'eau. Son fond est immergé d'une distance D sous la surface de l'eau. Ce morceau a une largeur W, une épaisseur H et une longueur L normale au plan de la figure. Déterminer la densité du savon , rapport entre sa masse volumique et celle de l'eau.



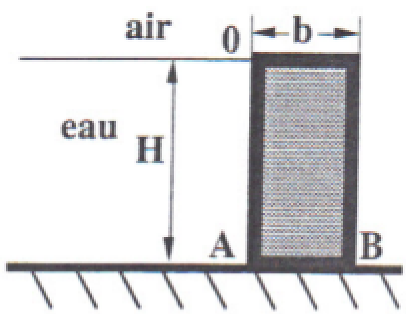
Corrigé 8

Le système est à l'équilibre donc $\sum \vec{F} = 0$ ainsi le poids compense la force d'Archimède donc

$$m\vec{g} - \rho\vec{g}V = \vec{0}$$
$$\rho_S LHW - \rho_e LDW = 0$$
$$d = \frac{D}{H}$$

Exercice 9 Barrage à poids.

Un barrage parallélépipédique de hauteur H, de largeur L, parfaitement rigide en béto armé, reste en équilibre grâce aux réactions du sol qui agissent sur la base du barrage de longueur b. C'est donc le poids propre du barrage qui assure sa stabilité et empêche le basculement autour du point B.
La pression atmosphérique est négligée et on admettra que les réactions du sol sur le barrage varient linéairement le long de la base entre une pression maximale en B et une pression nulle en A.



1. Calculer la résultante F des forces de pression qui s'exercent sur la paroi OA de ce barrage et la hauteur de son point d'application.
2. Quelles sont les forces extérieures qui agissent sur le barrage ?
3. En considérant l'équilibre de ce barrage, déterminer la réaction horizontale du sol G empêchant le glissement du barrage et la résultante V de réactions verticales du sol sur le barrage.
4. Quelle est la position du point d'application C de la résultante V des réactions verticales du sol sur le barrage ? Quelle est la valeur de la réaction du sol au point B ?
5. En considérant l'équilibre de ce barrage et en particulier la somme nulle des moments au point A, par exemple, calculer la longueur b minimale nécessaire à l'équilibre du barrage.

Corrigé 9