Physique

Mécanique des fluides Semestre 4

Table des matières

Première partie

Statique de fluides

1 Description des fluides

1.1 Description macroscopique des 3 états de la matière

Solides et fluides. On appelle fluides les corps, liquide ou gaz, qui prennent la forme des récipients dans lesquels on les verse. De plus, on ne considère que les ilieux continus (la farine n'est pas considéré comme un fluide, mais comme un état granulaire).
Au contraire, les solides ont une forme bien définie qui ne dépend pas des récipients dans lesquels on les pose.

Différenciation des liquides et des gaz - Compressibilité. Les liquides, comme tous les fluides, prennent la forme du récipient dans lequel on les verse, mais ils ne le remplissent pas forcément : il ont un volume bien défini.
Un gaz par conte occupe la totalité du volume qui lui est accessible.
On place un fluide dans un récipient que l'on ferme avec un piston placé juste au-dessus de la surface libre. Si le fluide est un liquide, il est très difficile de diminuer le volume occupé en poussant le piston : on dit qu'un liquide est quasiment incompressible. Par exemple considérons un cube de $1m$ de côté contenant de l'eau. Si, sur la surface de $1m^2$, on exerce une force de 10^5N (soit l'équivalent d'un poids de 10 tonnes), le volume d'eau diminue de $5cm^3$! La surface sur laquelle on appuie s'enfonce de $5\mu m$.
Si le fluide est un gaz, il est beaucoup plus facile de diminuer le volume : les gaz sont très compressibles.

1.2 Masse volumique et densité

La masse volumique est le rapport entre la masse et le volume occupé par le fluide

$$\rho = \frac{M}{V}$$

La masse volumique s'exprime en $kg.m^{-3}$ ou parfois en $g.cm^{-3}$. La densité d'un liquide correspond au rapport de sa masse volumique avec celle de l'eau pure (à $3.98°C$ et à une pression de 1 atmosphère)

$$d = \frac{\rho_{liq}}{\rho_{eau}}$$

La densité d'un gaz correspond au rapport de sa masse volumique avec celle de l'air (dans les mêmes conditions de température et de pression)

$$d = \frac{\rho_{gaz}}{\rho_{air}}$$

La densité est un nombre sans dimension.

2 La pression

2.1 Définition de la pression

Les particules (atomes ou molécules) d'un fluide (liquide ou gaz), porté à une température T et mis dans un récipient, sont en agitation incessante (les particules sont "à l'arret" lorsque la température est de $0K$). Les articules se déplacent à grande vitesse et viennent heurter les parois du récipient. Ces chocs engendrent la force de pression.

On introduit la notion de pression pour caractériser les forces de contact entre 2 corps. Cette force de contact peut être décomposée en

— Une composante parallèle à la surface (frottements)

— Une composante perpendiculaire à la surface

La pression est le coefficient de proportionnalité entre la composante de la force perpendiculaire à la surface et l'aire de cette surface

$$F_{\perp} = pS\vec{n}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à la surface. On a ainsi que la pression est le rapport de la force perpendiculaire à la surface sur l'aire de la surface

$$p = \frac{F_{\perp}}{S}$$

Par exemple, on considère un récipient cylindrique de section $S = 10cm^2$sur lequel agit un piston. Le piston est poussé par une force $F = 100N$ perpendiculaire à la surface du piston. La pression exercée est donc de

$$p = \frac{F}{S} = 10^5 N.m^{-2}$$

2.2 Unités de pression

L'unité du système International pour la pression est la **Pascal**, de symbole Pa. Exprimée dans les unités fondamentales du Système International, l'unité de pression est le $N.m^{-2}$.

Comme la pression est une notion de physique fondamental, on trouve plusieurs unités inventées au cours du temps que l'on retrouve facilement dans la littérature scientifique et dans le langage courant. Citons

— Le bar ou millibar très utilisé en météorologie

— Le Barye, système CGS, très rependu dans la littérature anglo-saxonne

— L'atmosphère utilisé en météorologie

— Le kilo de pression utilisée pour la pression des pneus

— Le millimètre de mercure, aussi appelé torr

— Le millimètre d'eau ou le centimètre d'eau utilisé en médecine

— Le pound per square inch (psi), unité anglo saxonne, très utilisé en hydrostatique et oléohydraulique

2.3 Mise en évidence de la pression

Mise en évidence dans les liquides. Considérons un tonneau plein d'un liquide et percé. Le liquide s'écoule avec un jet perpendiculaire à la surface du trou. Ce mouvement initial ne peut pas être dû à la pesanteur, sinon le mouvement serait vertical descendant.
Lorsque le tonneau n'est pas percé, il faut que celui-ci exerce sur le liquide une force qui contrebalance l'effet observé lorsqu'il est percé : la paroi exerce donc une force perpendiculaire à elle-même sur le liquide. Réciproquement, le liquide exerce sur la paroi cette même force en sens inverse : c'est la force de pression.

Mise en évidence dans les gaz. La mise en évidence de la pression atmosphérique a été faire par le scientifique allemand Otto von Guericje en 1654, avec une expérience très célèbre faite à Magdebourg. Deux hémisphères de cuivre de 51 cm de diamètre sont raccordés bord à bord et le vide est fait à l'intérieur. Il attache ensuite les extrémités des hémisphères à un attelage de 8 chevaux : ceux-ci ne sont pas parvenu à détacher les hémisphères. Lorsqu'il fit rentré de l'air dans le système, les chevaux sont parvenus à détacher les deux hémisphères. Durant l'année, il répéta cette expérience à Berlin avec un attelage de 24 chevaux qui ne parvinrent pas non plus à détacher les hémisphères.
En faisant le vide à l'intérieur, il ne peut pas y avoir de pression. Par contre, à l'extérieur, c'est la pression atmosphérique qui s'exerce sur la surface des deux hémisphères. La surface de "la boule" est $S = 4\pi r^2 = 0.817m^2$. La pression extérieur est la pression atmosphérique de valeur $p = 101325Pa$. Ainsi la force de pression est de

$$F = pS = 82.8 \times 10^3 N$$

Si le vide n'est pas fait à l'intérieur, la pression atmosphérique s'exerce de chaque côté des coques hémisphériques et les forces de pression externe et interne se compensent : il est alors facile de décoller les deux hémisphères.

3 Poussée d'Archimède

Le théorème d'Archimède se résume à "on pèse moins lourd dans l'eau"

3.1 Histoire

En -265, le roi Hiéron II de Syracuse avait fait appel à Archimède pour vérifier si la couronne en or que le roi avait achétée à un orfèvre était vraiment en or, ou si l'orfère avait utilisé un mélange d'or et d'argent. La forme de la couronne était trop complexe pour calculer son volume géométriquement et Archimède n'avait pas le droit de l'abîmer. L'histoire ou la légende dit qu'Archimède avait observé dans les bains publics que les objets flottaient de différentes manières, et que cela l'inspira pour vérifier la teneur en or de la couronne. Il serait alors sorti nu dans la rue en criant eureka (qui veut dire j'ai trouvé). L'idée d'Archimède est que des objets de composition différentes, mais de même volume, n'ont pas le même poids apparent dans l'eau, c'est à dire que les objets n'ont pas la même masse volumique. Comme la masse volumique de l'argent est $\rho_{Ag} = 10500kg.m^{-3}$ et celle de l'or $\rho_{Au} = 19300kg.m^{-3}$, une couronne faite d'un mélange d'or et d'argent est plus légère qu'une couronne de même volume composée exclusivement d'or.

3.2 La poussé d'Archimède

Considérons un solide que l'on maintient immergé à l'équilibre dans un fluide. Le solide est soumis à

— son poids $\vec{P}$

— la force exercée par l'opérateur $\vec{f}$

— la résultante des forces de pression $\vec{F_p} = \int_{Surf} d\vec{F_p}$

Considérons maintenant une enveloppe imaginaire de fluide de même volume que le solide précédent. Le volume du fluide est en équilibre et est soumis à

— son poids $\vec{P'}$

— la résultante des forces de pression $\vec{F'_p}$ dû au reste du fluide environnant

Puisqu'il y a équilibre

$$\vec{F'_p} = -\vec{P'}$$

Or la résultante des forces de pression est la même dans les 2 cas

$$\vec{F_p} = \vec{F'_p} = -\vec{P'}$$

Tout corps plongé dans un fluide subit de la part du fluide une force verticale dirigée de bas en haut et égale au poids du volume de fluide déplacé

Le point d'application de la poussée d'Archimède est appelé **centre de poussée** : c'est le centre de gravité du volume équivalent de fluide déplacé (qui ne coïncide par forcément avec le centre de gravité du solide immergé, si ce dernier n'est pas homogène). Le théorème d'Archimède est valable pour les corps plongés dans les liquides, les gaz et aussi dans les superpositions de plusieurs fluides.

3.3 Poids apparent dans un fluide

Un solide de volume V immergé dans un fluide est soumis à

— son poids $\vec{P}$, dirigé vers le bas

— la poussée d'Archimède $\vec{F_A}$ dirigée vers le haut

Le poids apparent du solide est alors

$$\vec{P}_{app} = \vec{P} - \vec{F_A}$$

Les vecteurs étant équipollents, on peut écrire

$$||\vec{P}_{app}|| = ||\vec{P}|| - ||\vec{F_A}||$$

$$||\vec{P}_{app}|| = (\rho_{solide} - \rho_{fluide})Vg$$

3.4 Vérification expérimentale

On réalisé l'expérience suivante. Sur une balance à fléau, on réalise l'équilibre entre, d'un côté une suspension constituée d'un cylindre plein surmonté d'un cylindre creux de même volume, et de l'autre côté une tare. On plonge le cylindre plein dans un récipient rempli de fluide. L'équilibre est rompu. Les forces de pression qui agissent sur le cylindre plein engendrent une poussée d'Archimède verticale dirigée vers le haut qui correspond en intensité au poids du volume de fluide déplacé, le cylindre plein "pèse moins lourd", le système des deux cylindres apparaît plus léger. On rempli le cylindre creux avec le même fluide que celui du récipient. Comme les deux cylindres ont même volume, on rajoute au système des cylindres un poids correspond au volume de fluide déplacé dans le récipient. Ce poids vient compenser la poussée d'Archimède et l'équilibre revient. On montre ainsi que la différence de poids est due au poids du volume de flide déplacé par le cylindre plein.

3.5 Applications de la poussée d'Archimède

— Bateaux - Un bateaux est en équilibre lorsque le poids du volume d'eau déplacé par la partie de coque immergée est égal au poids du bateau.

— Sous-marin - Pour qu'un sous marin entièrement immergé soit en équilibre dans l'eau il faut que la masse volumique globale du sous-marin soit égale à celle de l'eau. Pour arriver à cela, les réservoirs internes (les ballasts) du sous marin sont en partie remplis d'eau. Le volume du sous-marin étant constant, si les réservoirs intérieurs sont entièrement remplis d'eau, on augmente la masse volumique et le sous-marin descend. Réciproquement, si les réservoirs sont remplis d'air, la masse volumique diminue et le sous-marin remonte (ceci est effectué par l'injection d'aire comprimé qui évacue l'eau des ballasts).

— Montgolfières - On utilise le fait que l'air chaud est moins lourd que l'air froid. Si on remplit l'enveloppe d'une montgolfière d'air plus chaud que l'aire extérieur, on diminue la masse volumique du ballon.Lorsque la masse volumique globale de la montgolfière est plus faible que la masse volumique de l'air, la montgolfière monte. Si on arrête d'alimenter l'enveloppe en air chaud, l'air se refroidit et le ballon descend.

4 Hydrostatique

4.1 Pression dans un fluide au repos dans le champ de pesanteur

Considérons un volume de fluide (liquide ou gaz). Considérons dans ce volume une partie de fluide de forme parallélépipédique avec deux faces horizontales. Le parallélépipède de fluide possède un poids $\vec{P}$. De plus 6 forces de pression, notées $\vec{F_i}$, s'exercent sur le parallélépipède. Cette partie de fluide est en équilibre, on a donc

$$\sum_{i=1}^{6} \vec{F_i} + \vec{P} = \vec{0}$$

Rappelons qu'une force de pression correspond au produit de la pression par la surface sur laquelle elle agit, soit $F = pS$. Faisons la projection vectorielle de cette relation sur l'axe Ox, on obtient :

$$F_2 - F_4 = 0 \Rightarrow F_2 = F_4 \Rightarrow p_2 S'' = p_4 S'' \Rightarrow p_2 = p_4$$

En projection sur l'axe (Oy), on obtient

$$F_1 - F_3 = 0 \Rightarrow F_1 = F_3 \Rightarrow p_1 S' = p_3 S' \Rightarrow p_1 = p_3$$

A l'intérieur d'un fluide en équilibre soumis à la pesanteur, la pression est la même pour tous les points situés sur un même plan horizontal.

Faisons maintenant la projection vectorielle de cette relation sur l'axe (Oz), on obtient

$$F_6 - F_5 - P = 0 \Rightarrow p_6 S - p_5 S = P$$

or

$$P = mg = \rho V g = \rho S h g$$

On a donc

$$p_6 - p_5 = \rho g h$$

Par cette relation, on voit que la différence de pression entre le niveau du dessous et le niveau du dessus est positif et vaut $\delta p = \rho g h$, où h est la différence de hauteur entre les deux niveaux. La pression qui existe à un niveau en dessous d'un autre est donc plus forte : c'est pourquoi, en plongée sous marine, on a mal aux oreilles lorsque l'on descend.
Le terme ρh correspond à la masse de fluide contenu dans un cylindre de hauteur h et de section unité $S = 1$ (dans le système d'unité choisi par exemple m^2), c'est à dire $m = \rho v = \rho S h = \rho h$

Dans un fluide en équilibre soumis à la pesanteur, la différence de pression entre 2 niveaux d'altitudes h et $h - \Delta h$ est égale au poids d'une colone de fluide de section unité et hauteur égale) la différence d'altitude δh des niveaux

$$p(h - \Delta h) - p(h) = \rho g \delta h$$

4.2 Équation fondamentale de la statique des fluides

On a vu que le principe de l'hydrostatique pour un fluide au repos dans le champ de pesanteur est décrit par

$$p(h - \Delta h) - p(h) = \rho g \Delta h$$

où la pression $p(h - \Delta h)$ est la pression qui se trouve à un niveau en dessous du niveau où règne la pression $p(h)$. En se mettant à un niveau juste-au-dessus, on peut aussi écrire de manière équivalente

$$p(h) - p(h + \Delta h) = \rho g \Delta h$$

Considérons alors un référentiel $O(x, y, z)$, avec l'axe Oz dirigé verticalement vers le haut. Le volume de fluide considéré est un parallélépipède de côtés dx, dy et dz. La relation précédente s'écrit

$$p(z) - p(z + dz) = \rho g dz$$

Que l'on peut écrire

$$\frac{p(z) - p(z + dz)}{dz} = \rho g$$

On reconnaît ici, au signe près, la forme de la dérivée de la pression $p(z)$, donc

$$-\frac{dp(z)}{dz} = \rho g$$

Mais la pression est une quantité scalaire qui se décrit en tout point de coordonnées (x, y, z). Or on a vu que la variation de pression ne se fait sentir que verticalement et non horizontalement. On peut écrire la relation de manière plus générale

$$-\vec{grad}(p) = -\rho\vec{g}$$

Pour un fluide homogène au repos, de masse volumique ρ dans le champ de pesanteur, l'équation fondamentale de la statique des fluides se présente sous la forme de l'équation différentielle

$$-\vec{grad}(p(z)) + \rho\vec{g} = \vec{0}$$

4.3 Principe de l'hydrostatique dans les liquides - Théorème de Pascal

Les liquides étant incompressibles, leurs masses volumiques sont constantes. Considérons des récipients de diverses formes. Si les récipients sont remplis du même liquide, la pression à la base des récipients (donc en A) est indépendante de la forme du récipient et est toujours égale à

$$p_A = p_B + \rho gh$$

Théorème I.1. (de Pascal) Un changement de pression δp en un point quelconque d'un fluide liquide incompressible se transmet immédiatement à tous les autres poiunts du liquide. Ainsi, si $p'_B = p_B + \delta p$

$$p'_A = p'_B + \rho gh = p_B + \delta^+ \rho gh \Rightarrow p'_A = p_A + \delta p$$

4.4 Principe de l'hydrostatique dans les gaz

Les gaz sont incompressibles. Aussi leurs masses volumiques varient avec la pression.
Regardons ce qui ce passe si on applique le principe de l'hydrostatique à l'atmosphère en considérant la masse volumique constant.
La pression atmosphérique (moyenne) au sol est $p(0) = p_{atm} = 101325Pa$ et la masse volumique de l'air, au sol, est $\rho_{air} = 1,29349kg/m^3$.
A 10 000 m d'altitude (altitude de vol des avions longue ligne), la pression serait

$$p(0) = p(h) + \rho gh$$

$$p(10000) = p(0) - \rho gh = 101325 - 1,29349 \times 9,81 \times 10000 = -25566Pa$$

Soit une pression négative ce qui est impossible.
Donc pour des différences d'altitude importantes dans l'atmosphère, il faut tenir compte que la masse volumique dépend de la pression p et de la température T lorsque l'altitude augmente. Les calculs deviennent alors plus compliqués.

Il n'y a pas vraiment de loi de variation de la pression avec l'altitude, sauf quelques formules empiriques. Par contre, l'équation d'état des gaz permet de mettre en relation de manière rigoureuse la pression, le volume et la température. L'équation d'état la plus simple est celle du gaz parfait. On entend par gaz parfait, un gaz réel à basse pression, dans ce cas, les molécules du gaz sont suffisamment éloignées que l'on peut considérer qu'il n'y a pas d'interaction entre elles. L'équation d'état du gaz parfait s'écrit

$$pV = nRT$$

On a $R = \mathcal{N}_A.k_B$, où $\mathcal{N}_A = 6,022 \times 10^{23} mol^{-1}$ est le nombre d'Avogadro représentant le nombre de particules par mole, et $k_B = 1,38 \times 10^{-23} J.K^{-1}$ est la constante de Boltzmann. Ainsi, l'équation d'état des gaz parfait peut aussi s'écrire

$$pV = n\mathcal{N}_A k_B T = N k_B T$$

Comme en mécanique des fluides, les formules s'expriment plutôt à l'aide de la masse volumique, on établit la loi des gaz parfait comme ceci

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{nM_{mol}}{V}\frac{R}{M_{mol}}T$$

Ici nM_{mol} correspond à la masse du gaz et la masse volumique $\rho = nM_{mol}/V$. Et on appelle r la constante spécifique (ou individuelle) du gaz $r = \frac{R}{M_{mol}}$. Ainsi l'équation d'état du gaz parfait exprimée en fonction de la masse volumique du gaz est

$$p = \rho r T$$

L'équation fondamentale de la statique des fluides $-\vec{}(p) + \rho\vec{g} = \vec{0}$, s'écrit aussi

$$-\frac{dp}{dz} - \rho g = 0$$

Ainsi, on a

$$-\frac{dp}{dz} - \frac{p}{rT}g = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{g}{rT}dz$$

On obtient alors une équation différentielle correspondant à la variation spatiale selon Oz de la pression en fonction de la température. A partir de lois de variation de la température avec l'altitude, on peut formuler la loi de variation de la pression en fonction de l'altitude. Par exemple :

— sur des petites différences d'altitude, on peut faire l'approximation de la loi de l'air isotherme

$$T(z) = T_0 \Rightarrow \frac{dp(z)}{p} = -\frac{g}{rT_0}dz$$

— sur des différences d'altitudes plus grandes, jusqu'à la limite de la troposause, on peut faire l'approximation de la loi de variation linéaire

$$T(z) = Az + T_0 \Rightarrow \frac{dp(z)}{p} = -\frac{g}{r(Az + T_0)}dz$$

Cependant, si on s'intéresse aux variations de pression sur des dénivelés de l'ordre de quelques dizaines de mètres, on peut appliquer le principe de l'hydrostatique, ou même, sachant que $\rho_{gaz} << \rho_{liq}$, considérer la pression constante, car dans ce cas les variations de pression sont très inférieures à la pression. En effet, la variation de pression est de

$$p(0) - p(h) = \rho g h$$

Une variation de pression de 1% correspond à une variation de

$$\Delta p = p(0) - p(h) = 101325 - 101325 \times (1 - \frac{1}{100}) = 1013,25Pa$$

Soit pour une altitude

$$h = \frac{p(0) - p(h)}{\rho g} = 80m$$

4.5 Conséquences et applications du principe de l'hydrostatique

Les vases communicants. La surface libre des liquides au repos dans le champ de pesanteur est toujours horizontale. Considérons un récipient rempli de liquide tel que présenté sur la figure.
Appliquons le principe de l'hydrostatique entre le point O et les points de surface A et B

$$p_0 = p_A + \rho g h = p_B + \rho g h'$$

Les pressions en A et B sont identiques et valent la pression atmosphérique, $p_A = p_B)p_{atm}$ on a

$$p_{atm} + \rho g h' \Rightarrow h = h'$$

Ainsi, pour qu'il y ait équilibre, il faut que la pression en tout point d'un plan horizontal soit constante : c'est le principe des vases communicants.

Les châteaux d'eau. Les châteaux d'eau permettent d'avoir une distribution en eau dans les habititions "à tous les étages". Ce sont des constructions de 10 à 20 mètres de haut. Pour pouvoir couler du robinet, la pression de l'eau en sortie doit être supérieure à la pression atmosphérique. Donc la hauteur de l'eau dans les châteaux d'eau doit être supérieure à la hauteur des habitations.
En effet, en haut du château d'eau (en A), l'eau est à la pression atmosphérique, et le principe de l'hydrostatique permet d'écrire

$$p_O = p_A + \rho g h_A = p_B + \rho g h_B$$

Donc, si l'on veut que $p_B > p_A$, il faut que $h_B < h_A$.
Pour des immeubles de grande dimension, il est fait usage de pompes électriques pour acheminer l'eau jusqu'en haut de l'immeuble.

La presse hydraulique. Les presses de fortes puissances reposent sur le principe de l'hydrostatique et sur le théorème de Pascal. Imaginons un système de deux vases communicants contenant un liquide dont unn des côtés possède un piston de petite dimension de surface s et l'autre côté est surmonté d'une plaque de grande surface S.
On appuie sur le piston en A avec une force $\vec{f}$. Cette force engendre une variation de pression δp_A. Le théorème de Pascal dit que toute modification de pression créeée en A se transmet à tous les autres points du liquide. On

retrouve donc en B, une variation de pression $\delta p_B = \delta p_A$.

La variation de pression δp_A est créée par la force $\vec{f}$, soit

$$\delta p_A = \frac{||\vec{f}||}{s}$$

La variation de pression δp_B ressentie en B, engendre une force de pression $\vec{F}$

Deuxième partie

Phénomènes de surface

5 Tension superficielle

5.1 Définition

Une des propriétés distinguant les états solide, liquide et gazeux est la distance moyenne séparant les atomes ou les molécules à l'échelle microscopique. Dans des conditions données de pression et température, plusieurs états d'une même substance peuvent cohabiter, la surface de séparation entre deux phases différentes étant appelée **interface**.

Dans un liquide, les liaisons intermoléculaires sont changeantes : les molécules s'attirent les unes aux autres. Dans un gaz, les particules sot trop éloignées pour s'attirer. Aussi une molécule située à un interface liquide-gaz sera attirée vers l'intérieur du liquide. Le liquide raène les molécules de la surface vers le volume et prend donc une forme telle que la surface de séparation est minimale et compatible avec les autres containrtes (pesanteur, pression,...à. L'effort fourni est alors minimum.

On peut faire l'expérience suivante : prenons un récipient rempli d'eau et une aiguille. Si nous huilons l'aiguille (ce qui peut se faire juste en la frottat sur les doigts) on peut la déposer à l'horizontal sur l'eau : l'aiguille, bien que de masse volumique plus grade que celle de l'eau, floterra sur la surface de l'eau. En coupe, on observe une déformation de la surface de l'eau.

Aussi, si la surface est déformée, il apparaît une force macroscopique visant à diminuer cette surface. L'aiguille est maintenue à la surface de l'eau par cette force macroscopique. C'est la force de **tension superficielle**. On peut montrer que cette tension superficielle est proportionnelle à la longueur de l'aiguille (plus tige est longue, plus la force crée est importante), c'est à dire que si onn considère un élément de lonngueur Δl, la tension superficielle ΔF engendrée est constante

$$\Delta F = A\Delta l$$

Cette constante A est le coefficient de tension superficielle.

Cette force de tension superficielle s'oppose à la déformation, en fait à l'augmentation de la surface du liquide. Pour augmenter la surface de la quantité ΔS, il faut fournir ΔW. On définit le coefficient de tension superficielle comme le rapport du travail ΔW à l'augmentation de surface ΔS

$$A = \frac{\Delta W}{\Delta S}$$

La travail s'exprime en joule, et la surface en mètre carré, ainsi le coefficient de tension superficielle s'exprime en joule par mètre carré. Mais de manière équivalente, le coefficient de tension superficielle s'écrit comme le rapport d'une force sur une longueur $A = \Delta F/\Delta l$, et donc s'exprime en nexton par mètre.

C'est la force de tension superficielle superficielle qui permet aux Gerris de se maintenir et de glisser sur l'eau.

5.2 Mise en évidence

Considérons un appareil composé d'un fil métallique en U (inversé), d'une tige AB, de longueur l horizontale et mobile, capable de coulisser le long du fil en U, et d'une petite masse m suspendue au fil mobile (cf. figure). On forme un film de savon dans la surface délimitée par la tige AB et le fil en U. La tige AB possède une masse qui engendre une force de poids $\vec{P}_{AB}$ et la masse attachée à la tige engendre une force de poids $\vec{P}$ qui s'additione au poids de AB. Si la masse m est très grande ,la tige AB chute et le film de savon est rompu. Mais on peut atteindre un équilibre pour un choix particulier de la masse m. La tige AB est alors immobile : elle est soumise à deux forces de poids $(\vec{P} + \vec{P}_{AB})$ et à une force verticale $\vec{F}$ qui s'oppose aux forces de poids.

$$\vec{P} + \vec{P} + \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow F = P + P_{AB}$$

Cette force $\vec{F}$ est la force de tensio superficielle et est engedrée par les deux surfaces du film de savon (interfaces savon-air).

L'action de la tension superficielle $\vec{F}$se fait sur la tige AB. Mais en fait, sur la tige s'exerce une force pour chaque interface, ce qui correspond à une force qui s'exerce qui correspond à une force qui s'exerce sur une logueur $2l$. On a donc

$$F = 2Al$$

En conaissant le poids $\vec{F}$. On peut doc mesurer la valeur du coefficient de tension superficielle A. Les forces de surface sont faibles.

Troisième partie

Notions de mécanique des milieux continus

Introduction

Il existe trois états de la matière, solide, liquide et gazeux, les états liquides et gazeux composent les fluides. Dans un solide les atomes occupent des positions moyennes dans un réseaux cristallin bien défini qu'il est difficile de modifier, leurs déplacements sont donc limités.
A contrario dans les liquides la distance qui séparent les molécules est plus grande ainsi les forces intermoléculaires sont plus faibles que dans les solides. La structure est donc un amas de molécule qui est beaucoup plus désordonné que dans les solides. La masse volumique est assez grande et comparable à celle des solides :

"l'eau c'est lourd", *Baste Jean-Stéphane*

Le liquide ne possède pas de forme propre, il occupe l'espace qui lui est octroyé, les couches glissent les une par rapport aux autres, le liquide peut **s'écouler**. Cependant son volume est bien défini et le liquide est incompressible.
Le gaz occupe tout l'espace octroyé, les forces intermoléculaires sont très faibles, la masse volumique de même. Le gaz est très compressible.

6 Notion de continuité

On utilise le **concept de milieu continu** qui correspond à une modélisation de la réalité physique à 1 échelle donnée, induite par l'expérience. Dans ce cours on assimile la matière à une milieu continu.

Proposition A. Un milieu est continu lorsque ses propriétés varient de façon continue d'un point à l'autre. Une particule possède unne position et une vitesse en un point central. De plus une particule possède une masse Δm et un volume ΔV on peut donc définir la masse volumique moyenne

$$\rho_{moy} = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

et donc la masse volumique du point P est

$$\lim_{\Delta V \to 0} (\frac{\Delta m}{\Delta V}) = \rho(P) \underbrace{=}_{\text{continuité}} \frac{dm}{dV}$$

Les propriétés physiques du milieu vont déprendre du point d'application.

$$\Phi \underbrace{\mapsto}_{\text{masse en } P} \varphi(P)$$

puisque que le milieu est continu, lorsque l'on s'écarte du point P :

1. soit φ ne varie pas.

2. soit φ varie très peu autour de P, la propriété Φ est continue dans le milieu continu.

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz$$

3. soit φ n'est pas continu donc le milieu n'est pas continu.

Proposition B. Lors d'une déformation d'un milieu continu, deux points voisins restent voisins et donc, des portions initialement distinctes restent distinctes (pas de superposition). Une particule M à l'instant t_0 se trouve au coordonnées (x_0, y_0, z_0) et à l'instant t elles se trouve au coordonnées $(x_1, y_1, z_1) = (f_1, f_2, f_3)$.

Proposition C. Il y a évolution continue si les fonctions f_1, f_2 et f_3 sont continues, uniforme (injective), de classe C^1.

Les trois propositions forment les 3 **notions de continuité**. Cependant l'hypothèse de continuité des transformations n'est pas vérifiée par

1. la formation de trou par fissure dans les solides et la cavitation dans les fluides. Pour traiter ce cas on conserve l'hypothèse de continuité partout sauf sur la surface de **discontinuité**, cette surface est caractérisé par une surface **libre**.
2. le glissement relatif de 2 parties du milieu par le glissement dans les solides et le sillage dans les fluides. Pour traiter ce cas on conserve l'hypothèse de continuité partout sauf sur la surface de **glissement**, cette surface sera traité grâce aux forces de glissement.
3. choc de deux veines fluides. Pour traiter ce cas on conserve l'hypothèse de continuité partout sauf sur la surface de **choc**, cette surface sera traité grâce aux force de chocs.

7 Cinématique des milieux continus - déformations

Soit un milieu continu qui subit une transformation, le point d'origine est P_0 et $P_0\vec{P} = \vec{D}$ le déplacement. Si le poit Q_0 voisin de P_0 subit la même transformation que P_0 il se déplace à Q' et $Q_0\vec{Q'} = \vec{D}$ alors la transformation de la matière est une simple **translation**.
Si le point Q_0 n'a pas la même translation que P_0 il se déplace à Q et $Q_0\vec{Q} = \vec{X}$ ce qui induit une **déformation**. C'est la différence de déplacement qui crée la déformation.

$$\vec{Q_0}Q = \vec{X}(Q_0) = \vec{D}(P_0) + d\vec{X}(Q_0 \text{ , déformation})$$

La transformation déformante implique l'apparition de $d\vec{X}$ donc la déformation correspond à $d\vec{X}$. Soit

$$P_0\vec{Q_0} = \vec{d}_{10} = \begin{cases} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{cases} \quad \text{et } d\vec{X} = \begin{cases} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{cases}$$

Une transformation continue d'un milieu continu est donc, d'après C, $d\vec{X}$ est continu donc

$$d\vec{X} = \begin{cases} dX_1 = gr\vec{a}d(X_1).\vec{d}_{10} \\ dX_2 = gr\vec{a}d(X_2).\vec{d}_{10} \\ dX_3 = gr\vec{a}d(X_3).\vec{d}_{10} \end{cases}$$

$$\left\{d\vec{X}\right\} = \begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

$$d\vec{X} = \vec{G}.\vec{d}_{10}$$

"$3 \times 3 = 9$" *Baste Jean Stéphane*

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i}) + \frac{1}{2}(\frac{\partial X_i}{\partial x_i} + \frac{\partial X_j}{\partial x_i}) = \omega_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

où $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ et $\omega_{ii} = 0$. $\omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$ et donc

$$X_i = D_i + \sum_j \omega_{ij} dx_j + \sum_j \sum \varepsilon_{ij} dx_j$$

Etude de ω_{ij}. On note $\vec{\omega} = \begin{cases} \omega_1 = \omega_{32} \\ \omega_2 = \omega_{13} \\ \omega_3 = \omega_{21} \end{cases}$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{d}_{20} = \begin{cases} \omega_{13} dx_3 - \omega_{21} dx_2 \\ \omega_{21} dx_1 - \omega_{32} dx_3 \\ \omega_{32} dx_2 - \omega_{13} dx_2 \end{cases} = \begin{cases} \omega_{12} dx_2 + \omega_{13} dx_3 \\ \omega_{21} dx_1 + \omega_{23} dx_3 \\ \omega_{31} dx_1 + \omega_{32} dx_2 \end{cases}.$$

De plus si $\varepsilon_{ij} = 0$ on a $\begin{cases} X_1 = D_1 + \cancel{\omega_{11} dx_1} + \omega_{12} dx_2 + \omega_{13} dx_3 \\ X_2 = D_2 + \omega_{21} dx_1 + \cancel{\omega_{22} dx_2} + \omega_{23} dx_3 \\ X_3 = D_3 + \omega_{31} dx_1 + \omega_{32} dx_2 + \cancel{\omega_{33} dx_3} \end{cases}$ et donc

$$\vec{\omega} \wedge \vec{d}_{10} = Q_0\vec{P}_0 \wedge \vec{\omega}$$

On remarque que c'est l'équation de rotation d'ensemble d'un solide indéformable. Donc la partie antisymétrique de ω de la matrice de Transformation G n'est pas déformante. Elle décrit une rotation d'ensemble sans **déformation**.

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} r\vec{o}t(\vec{X})$$

Étude de ε_{ij}. Une transformation dans le plan (1,2) d'un segment P_0Q_0 parallèle à l'axe $\vec{1}$ ($dx_2 = 0$). On a alors

$$dX_1 = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} dx_1 + \cancel{\frac{\partial X_1}{\partial x_2} dx_2}$$

$$dX_1 = \varepsilon_{11} dx_1 = \overline{Q_1Q'}$$

d'où on a $\varepsilon_{11} = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} = \frac{Q_1Q'}{P_0Q_0} = \frac{\overline{Q_1Q'}}{\overline{PQ_1}} = \frac{\text{allongement suivant l'axe 1}}{\text{longueur initiale suivant 1}}$.
Ainsi ε_{ii} représente l'allongement relatif par rapport à l'axe i. C'est une dilatation linéaire, une extension ainsi $\overline{Q_1Q} = \overline{P_0Q_0}\varepsilon_1 1$

$$\overline{PQ'} = \overline{P_0Q_0}(1 + \varepsilon_{11})$$

Lors de la rotation de 1 vers 2 on a Q' très voisin de Q ainsi $PQ' = PQ$ on a donc $\overline{Q'Q} = dX_2$.

$$\begin{aligned} tan(\theta) &= \frac{dX_2}{dx_1(1+\varepsilon_{11})} \\ &= \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dx_1(1+\varepsilon_{11})} \\ &= \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \frac{1}{1+\varepsilon_{11}} \\ &= \frac{G_{21}}{1+\varepsilon_{11}} \end{aligned}$$

On a ε_{11} petit devant 1 on a donc θ petit et finalement $\theta \sim G_{21}$.
Les termes diagonaux sont responsables de l'extension et les termes non diagonaux sont responsables de la distorsion. On a donc $\theta_1 = G_{21}$ ce qui représente la rotation de 1 vers 2 et $\theta_2 = G_{12}$ ce qui représente la rotation de 2 vers 1.

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\underbrace{\frac{\partial X_2}{\partial x_1}}_{G_{21}} + \underbrace{\frac{\partial X_1}{\partial x_2}}_{G_{12}}) = \varepsilon_{21}$$

Soit $\gamma = \frac{\pi}{2} - (\theta_1 + \theta_2)$ ainsi

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - (G_{21} + G_{12}) = \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon_{12}$$

La variation d'angle est le fait des termes non diagonaux qui induisent une distorsion et donc

$$\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon_{12}$$

Le $2\varepsilon_{ij}$ représente la modification d'angle droit entre la direction Ox_i et Ox_j c'est **l'angle de glissement**.

Propriété de la matrice de déformation.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}$$

La matrice est symétrique et donc elle est diagonalisable dans un repère principal de déformation. On dit que ϵ_i est l'**extension principale** de plus si $i \neq j$ on a $\epsilon_{ij} = 0$ la forme est conservée.

De plus la trace de la matrice est un invariant donc

$$div(\vec{X}) = tr(\epsilon_{ij}) = \frac{\Delta V}{V} \qquad \text{(dilatation volumique)}$$

$$\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = cte = \theta$$

8 Équilibre des milieux continus - contrainte

Forces s'exerçant sur une portion (de) continu

"Si les petites cuillères sont tordues c'est parce qu'on les a touchées" *Baste Jean Stéphane*

Les forces de contact vont de l'extérieur vers l'intérieur. Cette force de contact va dépendre du point ce qui induit un **champ de force de contact**. Il possédera une densité moyenne de force $\frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S}$ et une densité de force de contact en $P = \lim_{\Delta S \to 0} (\frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S}) = \vec{T}$.
Il y a apparition d'une tension mécanique $\vec{T}(P, \vec{N})$ en $N.m^{-2}$ qui est une action par unité de surface de l'extérieur sur l'intérieur. Pour connaître $\vec{T}$ les 3 paramètre de position du point x, les deux cosinus directeurs α par rapport à $\vec{N}$ et l'intensité de la force. La région autour du point P porte la normale on a

$$\begin{aligned} T_n &= \vec{T}\vec{N} \text{ projection de } \vec{T} \text{ sur la normale } \vec{N} \\ \vec{T_n} &= (\vec{T}\vec{N})\vec{N} \\ \vec{t} = \vec{t} &= \vec{N} \wedge \vec{T} \wedge \vec{N} \\ &= \vec{T} - \vec{T_n} \\ &= \vec{T} - (\vec{N}.\vec{T})\vec{N} \end{aligned}$$

$\vec{t}$ est le vecteur de cission. L'action vers l'extérieur est une traction positive $T_n > 0$ et l'action vers l'intérieur implique une traction négative $T_n < 0$.
Soit trois facettes orientées suivant les axes 1,2,3 sur la facette i s'exerce la tension $\vec{T_i}$. On peut établir une matrice

$$\begin{pmatrix} T_{n1} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & T_{n2} & t_{32} \\ t_{31} & t_{32} & T_{n3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

On nomme cette matrice la matrice de composantes, elle représente sur l'horizontal l'axe normal à la facette et sur la verticale la contrainte suivant l'axe. La matrice est diagonalisable car symétrique on a $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, il existe un repère principal de contrainte.
Connaissant la matrices des contraintes en P, calculons la tension qui s'exerce sur une facette quelconque.

$$\overline{\sigma}(P) \to \vec{T}(P, \vec{N})$$

Sur la normale, on prend un point Q voisin de P. A partir de Q, un plan normal à la normale parallèle à la facette. On cherche à faire l'équilibre de ce tétraèdre. Soit la surface $ABC = \Sigma$, $APC = \Sigma_2 = \Sigma\alpha_2$, $APB = \sum_3 = \Sigma\alpha_3$

et $BPC = \Sigma_1 = \Sigma\alpha_1$. On note $\alpha_i =$ le cosinus directeur de $\vec{N}$ tel que $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i^2 = 1$. Sur ces 4 faces s'exercent des forces de contact :

— sur ABC : $\vec{T}\Sigma \begin{cases} T_1\Sigma \\ T_2\Sigma \\ T_3\Sigma \end{cases}$

— sur APC : $\begin{cases} \sigma_{12}\Sigma_2 \\ \sigma_{22}\Sigma_2 \\ \sigma_{32}\Sigma_2 \end{cases}$

— sur APB : $\begin{cases} \sigma_{13}\Sigma_3 \\ \sigma_{23}\Sigma_3 \\ \sigma_{32}\Sigma_3 \end{cases}$

— sur BPC : $\begin{cases} \sigma_{11}\Sigma_1 \\ \sigma_{21}\Sigma_1 \\ \sigma_{31}\Sigma_1 \end{cases}$

On note la condition d'équilibre : $\vec{1} : T_1\Sigma = \sigma_{11}\underbrace{\Sigma_1}_{\alpha_1\Sigma} + \sigma_{12}\underbrace{\Sigma_2}_{\alpha_2\Sigma} + \sigma_{13}\underbrace{\Sigma_3}_{\alpha_3\Sigma}$.

$\vec{1} : T_1 = \sigma_{11}\alpha_1 + \sigma_{12}\alpha_2 + \sigma_{13}\alpha_3$

$\vec{2} : T_2 = \sigma_{21}\alpha_1 + \sigma_{22}\alpha_2 + \sigma_{23}\alpha_3$

$\vec{3} : T_3 = \sigma_{31}\alpha_1 + \sigma_{32}\alpha_2 + \sigma_{33}\alpha_3$ $\{\vec{T}\} = (\sigma_{ij}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$

$\{\vec{T}\} = (\sigma_{ij})\{\vec{N}\}$.

La tension en un point sur une facette quelconque :

$$\vec{T}(P, \vec{N}) = \overline{\overline{\sigma}}(P)\vec{N}$$

Equation d'équilibre : Un corps est soumis à des forces de volume (ex : poids, inertie) : $d\vec{\rho} = \vec{a}\rho\ dv$ et soumis à des forces de contact entre l'extérieur et l'intérieur. Calculons la résultante des forces suivant l'axe $\vec{1}$ sur les 2 facettes avant et arrière. Par continuité, $\sigma_{II_{AV}}$, $(\sigma_{II})_{AR} = (\sigma_{II})_{AV} + \frac{\partial \sigma_{II}}{\partial x_1} dx_1$. La résultante est donc $\frac{\partial \sigma_{II}}{\partial x_1} dx_1\ dx_2\ dx_3$.

Résultante des forces (à l'équilibre) : $\begin{matrix} \vec{1} \\ \vec{2} \\ \vec{3} \end{matrix}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \alpha_1\rho = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \alpha_2\rho = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \alpha_3\rho = 0 \end{cases}$$

La relation générale d'équilibre dans les milieux continus. $\sum_j \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\right) + \rho\alpha_i = 0$
$\vec{div}\ \overline{\overline{\sigma}} + \rho\vec{a} = \vec{0}$

9 Lois de comportement - solide - fluide

Les relations entre sollicitation et déformation

$$\overline{\overline{\sigma}} = f(\overline{\overline{\epsilon}})$$

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \phi(\overline{\overline{\sigma}})$$

expriment le comportement du milieu c'est à dire ses propriétés physiques. Un modèle de milieu continu, homogène (même propriété en tout point) , isotrope (même propriété dans toutes les directions) et linéaire (milieu liant par son comportement). Si milieu est homogène et isotrope on a ϵ et σ ont les mêmes axes principaux

$$\overline{\overline{\sigma}} \to \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \leftarrow \overline{\overline{\epsilon}}$$

Le milieu est linéaire si σ_i est fonction linéaire de ϵ_i. La relation de comportement d'un milieu continu, homogène, isotrope, linéaire en repère principal on a

$$\sigma_i = \lambda\boxed{\theta} + 2\mu\epsilon_i + \varpi$$

avec $\boxed{\theta} = tr(\epsilon) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$ dans un repère quelconque on a

$$\sigma_{ij} = (\varpi + \lambda\boxed{\theta})\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}$$

Cas des solides La forme propre est l'état naturel au repos on a $\overline{\overline{\sigma}} \Rightarrow \varpi = 0$. On a donc les équations de Lamé qui décrivent le comportement linéaire d'un solide isotrope.

$$\sigma_i = \lambda\boxed{\theta} + 2\mu\epsilon_i$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\boxed{\theta} + 2\mu\epsilon_{ij}$$

Cas des fluides Pas de forme propre pas de déformation au repos, $\epsilon_{ij} = 0 \Rightarrow \mu = 0, \boxed{\theta} = 0$. Dans un repère quelconque

$$\sigma_{ij} = (\varpi + \lambda\boxed{\theta})\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \varpi & 0 & 0 \\ 0 & \varpi & 0 \\ 0 & 0 & \varpi \end{pmatrix}$$

toutes les directions sont principales. Un fluide n'existe que si il est soumis à une sollicitation de traction négative (compression)

$$\varpi = -p$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

donc on a $p > 0$, un fluide est parfait dans le changement de forme ne nécsessite aucun travail

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

"Il faut se méfier des gens qui se disent parfaits" *Baste Jean Stéphane*

"Si les fluides étaient parfaits on ne pourrait pas vivre" *Baste Jean Stéphane*

Cas des fluides réels. On prend en compte la viscosité du liquide, un travail est nécessaire pour produire un écouleemnt (changement de forme)

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \text{matrices des contraintes de viscosité}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

"Le mouvement d'un fluide n'est pas gratuit" *Baste Jean Stéphane*

Fluide newtonien, coefficient de viscosité. Ce sont des forces qui s'opposent au mouvement du fluide, les forces de viscosité sont les forces de frottement du fluide. Ces forces de frotements font que en plus de la pression qui s'exerce il y a une composante tangentielle qui s'opposent au mouvement. Les contraintes ne dépendent que de l'instant même, il est isotrope et les contraintes ne dépendent que du champ des vitesses, en particulier du tenseur des vitesses de déformation

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$$

Ces 4 hypothèses conduisent au modèle de fluide newtonien

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda d_{mm}\delta_{ij} + 2\mu d_{ij}$$

où $d_{mm} = \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} = div(\vec{u})$. Avec p qui est le seul à être présent au repos, d_{mm} qui représente la dilatation ou la contraction (coefficient de compressibilité) et le dernier terme qui représente le gradient tranversaux du champs des vitesses, μ est le coefficient de viscosité.

Calculons σ_{ij}

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}] + \mu[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}]$$

Les $\sigma_{12} = \mu \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} = \sigma_{21} = \mu k$.

$\mu = \dfrac{contrainte}{gradientdevitesse}$ en $kg.m^{-1}s^{-1}$. Pour un liquide on a

$$\mu = Ae^{\frac{B}{T}}$$

et pour un gaz on a

$$\mu = \frac{A\sqrt{T}}{1 + \frac{B}{T}}$$

10 Equations de continuité

Quatrième partie

Introduction à la mécanique des fluides

11 Définition d'un fluide

12 Statique des fluides

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

$$\rho\vec{\gamma} + d\vec{i}v(\vec{\sigma}) = \vec{0}$$
$$\rho\vec{\gamma} + d\vec{i}v(-p\delta_{ij}) = \vec{0}$$
$$\rho\vec{\gamma} - gr\vec{a}dp = \vec{0}$$

Cas particulier. Forces de champs derivent d'un potentiel u

$$\vec{\gamma} = -gr\vec{a}du$$

$$\rho gr\vec{a}du + gr\vec{a}dp = 0$$

13 Dynamique des fluides parfaits

14 Les fluides réels

FIN.