Calcul intégral

Exercice 0 Prouver que $f : I \to \mathbb{R}^n$: $f = (f_1, \dots, f_n)$ est continue si et seulement si f_i est continue $\forall i = 1, \dots, n$ (en utilisant $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$).

Définition : • $f : I \to \mathbb{R}$ est dite continue si

$\forall x_0 \in I \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \rho > 0, \; |x - x_0| < \rho \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

• $\|.\|_\infty : \forall x \in \mathbb{R}^n, \; x = (x_1, \dots, x_n), \; \|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} (x_i)$

$\Rightarrow$ f continue en a donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \rho > 0, |x - a| < \rho \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_\infty < \varepsilon$

$$f(x) - f(x_0) = \begin{pmatrix} f_1(x) - f_1(a) \\ \vdots \\ f_n(x) - f_n(a) \end{pmatrix}$$

d'où $\|f(x) - f(x_0)\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \{|f_i(x) - f_i(a)|\}$

ainsi $\|f(x) - f(a)\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \; |f_i(x) - f_i(x)| < \varepsilon$

Donc $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \rho > 0 \; |x - a| < \rho \Rightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon$

ie f_i continue en a.

$\Leftarrow$ Supposons f_i continue en a $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

ie $\forall i \in \mathbb{N}^* \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \rho > 0 \; |x - a| < \rho_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon$

Prenons $\rho = \min_{i \in \mathbb{N}^*} \{\rho_i\} > 0$

Alors $|x - a| < \rho \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}$ $|x - a| < \rho_i \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} |f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \max_{i \in \{1,\dots,n\}} \{|f_i(x) - f_i(a)|\} < \varepsilon$ Donc $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \rho > 0, |x - a| < \rho$

$\Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_\infty < \varepsilon$ $\Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_\infty < \varepsilon$

ie f continue en a

Exercice 1 f est continue si et seulement chacune de ses coordonnées est continue (prop prouvée en cours)

a) $f(x) = \begin{pmatrix} 1 + x \\ x^2 \end{pmatrix}$ $\to$ $f_1(x) = 1 + x$ continue sur $\mathbb{R}$

$f_2(x) = x^2$ continue sur $\mathbb{R}$

car ce sont des polynômes

Donc f est continue.

f est dérivable si et seulement si chacune de ses coordonnées est dérivable et la dérivée de f est $f' = (f_1', \dots, f_m')$

f_1 et f_2 dérivables sur $\mathbb{R}$ (car des polynômes) donc

$f'(x) = \cancel{\frac{1}{2x}}\,(1, 2x)$

b) $x^2 + x + 1 > 0 \Rightarrow g_1$ continue sur $\mathbb{R}$

(composée de f^a continues)

- $1 + x^2 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g_2$ est continue (composée de
- $\rightarrow \frac{x}{1+x^2} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ fonctions continues)

donc g est continue

g_1 dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée

$g_1'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{1+x+x^2}}$

g_2 dérivable sur $\mathbb{R}$ composée

$\Rightarrow g_2'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} \times \cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$

$= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \times \cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$

Exercice 2

f_1 est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$

($f_1(x)$ est un polynôme)

f_2 continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$f_2(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{R}_*^+ \\ -x & x \in \mathbb{R}_*^- \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ continue dérivable.

$\lim_{x \to 0^+} f_2(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$

idem en 0 et 0^- $\Rightarrow f_2$ continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$

pas dérivable en 0.

$f_3(x) = \sin(x)$ est sinusoïdal donc continue et dérivable

$f_4(x) = x^2$ polynôme donc continue et dérivable.

$f_5(x) = x|x|$ continue et dérivable (définition de la dérivée)

$f_6 = \sin(|x|)$

- continue sur $\mathbb{R}$ comme composée car $x \to |x|$ continue sur $\mathbb{R}$ et $\sin x$ aussi.
- dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$

car $x \mapsto |x|$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\sin x$ sur $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin|x| - \sin(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(-x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin(x)}{x} = -1$$

donc f n'est pas dérivable en 0.

$f_7 = f_1 \circ f_2$

$= |x|^2 = x^2$

$f_8 = f_3 - f_2 = \sin(x) - |x|$ continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$

b) $f_9 = (f_1, f_2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ parce que f_1, f_2 sont continues sur $\mathbb{R}$ parce que f_1, f_2 sont continues sur $\mathbb{R}$ et on utilise la proposition du cours.

Idem dérivée, ainsi f_9 n'est pas dérivable en 0.

f_{10} continue sur $\mathbb{R}$

dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 3

a) $f(x) = \begin{cases} \sin(x^k) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

pour $x \neq 0$, $f(x)$ dérivable en tant que composé de fonctions dérivable pour $x = 0$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x^k) - 0}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x^{k-1}$

donc pour $k \geq 1$, $f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) $g_k(x) = \begin{cases} x^k \sin(1/x) & \text{ici } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$k = 0$, $g_0(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^k \sin(1/x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x^{k-1} \sin(1/x)$ existe si $k \neq 0$

Lemme Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et soit $x_0 \in I$

Supposons que

- f est dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existe finie, L

alors f est dérivable en x et $f'(x_0) = L$

preuve : utiliser le théorème des accroissements finies

prouver que $f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_0 + \varepsilon} G(t)\,dt$ avec G le prolongement par continuité.

Proposition Il existe des fonctions dérivables, de dérivées non continue.

Exemple $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- f est dérivable

si $x \neq 0$:

$f'(x) = 2x \sin(1/x) + x^2(-1/x^2) \cos(1/x)$

$= 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$

$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} (x^2 \sin(1/x)) = 0$

$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

f' n'est pas continue (en $x = 0$) parce que $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ n'existe pas

Exercice 4 Rappel : si $f : I \to \mathbb{R}$ et f est dérivable, alors

$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \frac{R(x)}{x-a} = 0$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dérivable en a $\Rightarrow$ $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en a $\forall i \in [1, \dots, n]$

$\Rightarrow f_i(x) = f_i(a) + (x-a) f_i'(a) + (x-a)\varepsilon_i(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_i(x) = 0$

Prenons $L = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_n'(a) \end{pmatrix}$ $\quad \varepsilon(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(x) \\ \vdots \\ \varepsilon_n(x) \end{pmatrix}$ $\quad (\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n)$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) + (x-a) f_1'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x) \\ \vdots \\ f_n(a) + (x-a) f_n'(a) + (x-a)\varepsilon_n(x) \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_n(a) \end{pmatrix} + (x-a)\begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_n'(a) \end{pmatrix} + (x-a)\begin{pmatrix} \varepsilon_n(x) \\ \vdots \\ \varepsilon_n(x) \end{pmatrix}$$

$$f(x) = f(a) + (x-a)L + (x-a)\varepsilon(x)$$

$\|\varepsilon(x)\|_\infty = \max\limits_{i \in \{1, \dots, n\}} |\varepsilon_i(x)|$ on a $\max|\varepsilon_i(x)| \underset{x \to a}{\to} 0$

donc $\|\varepsilon(x)\|_\infty \underset{x \to a}{\to} 0$

Supposons que $f(x) = f(a) + (x-a)L + (x-a)\varepsilon(x)$

avec $\varepsilon(x) \mapsto 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(a) + (x-a)L + (x-a)\varepsilon(x) - f(a)}{x-a}$$
$$= \lim_{x \to a} L + \varepsilon(x)$$
$$= L + \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = L \in \mathbb{R}^n$$ donc f dérivable

en a et $f'(a) = L$

Proposition $f : I \to \mathbb{R}^n$ est dérivable en $a \in I$

$\exists L \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon : I \to \mathbb{R}^n$ avec $\lim\limits_{x \to a} \|\varepsilon(x)\| = 0$

tels que $f(x) = f(a) + L(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$

[et on appelle L la dérivée]

Exercice 5

B une application bilinéaire

$B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$B((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_m)) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n,m} \beta_{ij} x_i y_j$

$f : I \to \mathbb{R}^n$ $\quad B(f,g) \quad I \to \mathbb{R}$

$g : I \to \mathbb{R}^m$ $\quad B(f,g) = B(f(t), g(t)) = B((f_1(t), \dots, f_n(t)), (g_1(t), \dots,$
$g_m(t)) = \sum B_{ij} f_i(t) g_j(t)$

On veut montrer que B est C^1

f et g sont de classe $C^1 \Leftrightarrow f_i$ et g_j sont de classe C^1 $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $\forall j \in \{1, \dots, m\}$ donc $B(f,g)$ est une combinaison linéaire de produit $C^1 \Rightarrow B(f,g)$ est de classe C^1

Exercice 6

a) f injective $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$

$df(x)(h) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} h \neq$ donc isomorphisme

$\Rightarrow C^1$ difféomorphisme

b) h est injective

$h'(x) = 3x^2$ s'annule en 0 $dh(x)$ n'est pas un isomorphisme sur $\mathbb{R}$. Donc h n'est pas un C^1 difféo sur $\mathbb{R}$

g est C^0, g est une bijection, $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ est C^0

Exercice 7

$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 + x + 2 \end{cases}$

1) • f est un polynôme $\Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

• $f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1$

Donc grâce à la proposition du cours f est un C^∞ difféomorphisme

$\frac{5}{\text{dm } 7}$

2) $(f^{-1})'(0)$ — $f^{-1}(0)$ est l'une des valeurs de x qui vérifie $f(x) = 0$ (car f bijection) $\Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0$, $x = 1$

$(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

$(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f^{-1}(f'(0))}$

Donc $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{4}$

Exercice 10

Rappel : $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ est dans $\mathcal{M}\mathcal{C}^k([a,b], \mathbb{R}^n)$

$\exists\ a_0 < \dots < a_n$ tels que

1) $f_{|]a_i, a_{i+1}[} \in \mathcal{C}^k((a_i, a_{i+1}), \mathbb{R}^n)$ $\forall i = 0, \dots, n-1$

2) la limite droite (et à gauche) jusqu'à l'ordre k existe finie dans les a_i

1) les $\mathcal{M}\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ en 0

2) $\in \mathcal{M}\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$

3) les deux

Exercice 9

Feuille 2 : Intégrales de Riemann de fonctions vectorielles

Exercice 0

• Prouvons par récurrence que $f^{(k)}(x) = \frac{P_k}{x^{3k}} e^{-1/x^2}$

Initialisation : $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$

Hérédité : on suppose que $f^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{x^{3k}} e^{-1/x^2}$ est vraie

$$f^{(k+1)}(x) = \frac{P_k'(x)x^{3k} - P_k 3k x^{3k-1}}{x^{6k}} e^{-1/x^2} + \frac{P_k(x)}{x^{3k}} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$$

$$= \frac{x^{3k-1}(P_k'(x)x - 3kP_k)}{x^{6k}} e^{-1/x^2} + \frac{2P_k(x)}{x^{3(k+1)}} e^{-1/x^2}$$

$$= e^{-1/x^2}\left(\frac{P_k'(x)x - P_k(x)3k}{x^{3k+1}} + \frac{2P_k(x)}{x^{3(k+1)}}\right)$$

$$= e^{-1/x^2}\left(\frac{P_k'(x)x^3 - P_k(x)3kx^2 + 2P_k(x)}{x^{3(k+1)}}\right)$$

On pose $P_{k+1}(x) = \underbrace{P_k'(x)x^3}_{\deg P_k+2} - \underbrace{P_k(x)3kx^2}_{\deg P_k+2} + \underbrace{2P_k(x)}_{\deg P_k}$

Polynôme de degré au plus $\deg P_k + 2$

Par récurrence $\deg P_{k+2} \leq 2(k+1)$

• $\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0$ donc f continue en $x=0$

$\lim_{x\to 0}$ " $f(x) = f(0)$ comme e^{-1/x^2} continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

f est continue sur $\mathbb{R}$

• f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car elle coïncide avec e^{-1/x^2}

• On a que $\lim_{x\to 0} f^{(k)}(x) = \lim_{x\to 0} \frac{P_k(x)}{x^{3k}} e^{-1/x^2} = 0$

• Donc d'après le théorème de prolongement de fonction $\mathcal{C}^\infty$ f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$ $f^{(k)}(0) = \lim_{x\to 0} f^{(k)}(x) = 0$

Exercice 1

$$\varphi(x) = |x^3| + 2\cos(x) + 1$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} \arctan\sqrt{x^2+2} \\ \ln(3+x^2) \end{pmatrix}$$

1.a)

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

Comme $\arctan\sqrt{x^2+2}$ et $\ln(3+x^2)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$

Alors F est dérivable.

$2\cos(x) + 1$ est dérivable. Montrons que $|x^3|$ l'est aussi.

Soit $g(x) = |x^3| \begin{cases} x^3 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^3 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} 3x^2 = 0$ Comme g est continue en 0 et sa

$\lim\limits_{x \to 0^-} 3x^2 = 0$ dérivée aussi, alors g est dérivable en 0

(depuis le théorème de prolongement de fonctions C^1)

Ainsi comme g est dérivable, φ est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. D'après un théorème du cours $F \circ \varphi$ est dérivable.

$(F\circ\varphi)' = F'(\varphi(x)) \times \varphi'(x)$

$$F'(x) = \begin{matrix} \dfrac{x}{(x^2+3)\times\sqrt{x^2+2}} & L_1 \\ \dfrac{2x}{x^2+3} & L_2 \end{matrix} = \frac{x}{x^2+3}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2\sin(x) & \text{si } x \geq 0 \\ -3x^2 - 2\sin(x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$(F\circ\varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \times \varphi'(x)$$
$$= \frac{\varphi(x)}{\varphi^2(x)+3}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}} \\ 2 \end{pmatrix} \times \varphi'(x)$$

b) $I_m = \displaystyle\int_0^m \frac{x}{x^2+3}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}} \\ 2 \end{pmatrix} dx \quad , m \geq 0$

On remarque que F est une antidérivée de f. (D'après le TFC II). comme f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ on a

$$I_m = \int_0^m f(x)\,dx = F(M) - F(0) = \left(\frac{\arctan\sqrt{M^2+2}}{\ln(3+M^2)}\right) - \left(\frac{\arctan\sqrt{x}}{\ln(3)}\right)$$

$$= \left(\frac{\arctan(\sqrt{M^2+2}) - \arctan\sqrt{x}}{\ln\left(\frac{3+M^2}{3}\right)}\right)$$

Comme $\lim_{M\to+\infty} \ln\left(\frac{3+M^2}{3}\right) = +\infty$

alors I_M n'a pas de limite

$(f\circ g)'(x) \leq f$

Exercice 2

$f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ $\qquad I(\lambda) = \int_a^b \| \lambda f(t) + g(t)\|^2 dt \quad , \lambda \in \mathbb{R}$

$g : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

Montrons que $\left| \int_a^b \langle f(t), g(t)\rangle dt \right| \leq \left(\int_a^b \|f(t)\|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_a^b \|g(t)\|^2 dt\right)^{1/2}$

$$I(\lambda) = \int_a^b \langle \lambda f(t) + g(t), \lambda f(t) + g(t)\rangle dt$$
$$= \int_a^b \left[\langle \lambda f(t), \lambda f(t)\rangle + 2\langle \lambda f(t), g(t)\rangle + \langle g(t), g(t)\rangle \right] dt$$
$$= \int_a^b \left[\lambda^2 \|f(t)\|^2 + 2\lambda \langle f(t), g(t)\rangle + \|g(t)\|^2 \right] dt$$
$$= \lambda^2 \int_a^b \|f(t)\|^2 dt + 2\lambda \int_a^b \langle f(t), g(t)\rangle dt + \int_a^b \|g(t)\|^2 dt$$

$I(\lambda)$ est un polynôme de degrés 2 de la variable λ. De plus, par définition de $\|.\|$. $\|f(t) + g(t)\|^2 \geq 0 \ , \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Donc $I(\lambda) = \int_a^b \|\lambda f(t) + g(t)\|^2 dt \geq 0 \quad , \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Donc $I(\lambda)$ admet au plus une racine.

D'où $\Delta \leq 0$

$$\Leftrightarrow \left(2\int_a^b \langle f(t), g(t)\rangle dt\right)^2 - 4\left(\int_a^b \|f(t)\|^2 dt\right)\left(\int_a^b \|g(t)\|^2 dt\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left|\int_a^b \langle f(t), g(t)\rangle dt\right| \leq \left(\int_a^b \|f(t)\|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_a^b \|g(t)\|^2 dt\right)^{1/2}$$

Exercice 3

a) $u(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto u(x) = \alpha + \int_a^x f(t)g(t)\,dt$$

α est dérivable. Montrons que $\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ l'est aussi.

D'après le résultat du cours, on sait que si h est Riemann intégrable sur $[a,b]$ alors $\int_a^b h(t)dt$ est dérivable et de dérivée $h(x)$ (TFCI I) $\forall x$ où h est continue. Donc h est ~~donc~~ Riemann intégrable.

Ainsi $\int_a^x f(t)g(t)\,dt$ est dérivable et de dérivée $f(x)g(x)$ $\forall x \in [a, ~~+\infty~~[$

Donc u est dérivable sur $[a,b]$ et $u'(x) = f(x)g(x)$

or $f(x) \leq u(x)$ et $g(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)g(x) \leq u(x)g(x)$

$\Leftrightarrow u'(x) \leq u(x)g(x)$

b) $v : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto v(x) = u(x)\exp\left(-\int_a^x g(t)dt\right)$$

u est dérivable et $\exp\left(-\int_a^x g(t)dt\right)$ aussi $\Rightarrow v$ est dérivable

$$v'(x) = u'(x)\exp\left(-\int_a^x g(t)\,dt\right) + u(x)\left(-g(x)\exp\left(-\int_a^x g(t)dt\right)\right)$$

$$= [u'(x) - u(x)g(x)]\exp\left(-\int_a^x g(t)\,dt\right) \leq 0$$

donc v décroissante sur $[a,b] \Rightarrow v(x) \leq v(a) = \alpha \quad \forall x$

or $v(a) = u(a)\underbrace{\exp\left(-\int_a^a g(t)\,dt\right)}_{1} = u(a) = \alpha + \underbrace{\int_a^a f(t)g(t)\,dt}_{0} = \alpha$ ($= u(a)$)

$\Rightarrow v(x) \leq \alpha \quad \forall x \in [a,b]$

c) On a $f(x) \leq x + \int_a^x f(t)g(t)\,dt = u(x)$ *

or $v(x) = u(x)\exp\left(-\int_a^x g(t)\,dt\right)$

$\Rightarrow u(x) = u(x)\exp\left(-\int_a^x g(t)\,dt\right)$

$\Rightarrow u(x) = v(x)\exp\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)$

(*) $\Leftrightarrow f(x) \leq v(x)\exp\left(\int_a^x g(t)dt\right)$

$\leq \alpha\exp\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)$

Lemme Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue, alors la fonction $\|f\| : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x)\|$ est continue

preuve Soit $x_0 \in [a,b]$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$ $\Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

Montrons $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\|f(x)\| - \|f(x_0)\|| < \varepsilon$

Sous lemme Soit a et b dans $\mathbb{R}^n$ alors $\|a - b\| \geq |\|b\| - \|a\||$

preuve $\|a\| = \|a + b - b\| \leq \|a - b\| + \|b\| \Rightarrow \|a - b\| \geq \|a\| - \|b\|$

donc $\|f(x) - f(x_0)\| \geq |\|f(x)\| - \|f(x_0)\||$

donc $\forall x$ tel que $|x - x_0| < \delta$ on a

$|\|f(x)\| - \|f(x_0)\|| \leq \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$

donc $\|f\|$ est continue en x_0. Par arbitralité de x_0, $\|f\|$ est continue sur $[a,b]$ donc sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ est continue. Montrons que si $\|f(x)\| \leq \int_a^x \|f(t)\| dt$ alors $f(x) = 0$

Prenons $\alpha = 0$, $h(x) = \|f(x)\|$ et $g(x) = 1$

D'après le lemme h est continue car f est continue et g continue car constante.

$g(x) = 1 > 0$ $\forall x$

$h(x) \leq \int_a^x h(t) dt$ d'après Gronwall on a $h(x) \leq \exp(\int_a^x dt)\, \alpha \leq 0$

Or $h(x) = \|f(x)\| \Rightarrow h(x) \geq 0$ $\forall x$

Donc $h(x) = 0$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \|f(x)\| = 0$

Exercice 7 Montrons que $|\int_a^b f(t) dt| = \int_a^b |f(t)| dt$ si et seulement si $f(x) \geq 0$ ou $f(x) \leq 0$

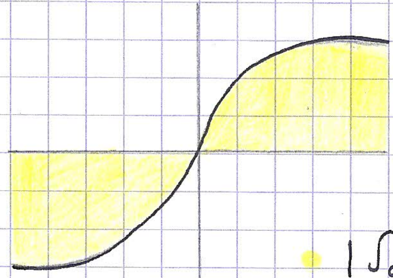
Si $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b |f(t)| dt = \int_a^b f(t) dt$ car $f \geq 0$

$= |\int_a^b f(t) dt|$

Si $f(x) \leq 0$ idem

Montrons que si f prend des valeurs strictement positives ou négatives ou les deux

alors $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \neq \int_a^b |f(t)|\,dt$



f

$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right|$

$$f_-(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

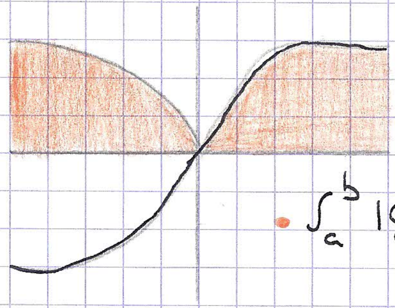
$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f_+ et f_- continues

$f(x) = f_+(x) + f_-(x)$

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^b f_-(t)\,dt + \int_a^b f_+(t)\,dt\right|$$

$$= |A+B| = B - A$$



f

$\int_a^b |f(t)|\,dt$

$$\int_a^b |f(t)|\,dt \; = -\int_a^b f_-(t)\,dt + \int_a^b f_+(t)\,dt$$

$$= B - A$$

$|f(x)| = f_+(x) - f_-(x)$

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & f(x) \geqslant 0 \\ -f(x) & f(x) \leqslant 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f_+(x) + f_-(x) \\ f_+(x) - f_-(x) \end{cases}$$

$|A+B| = B - A \quad \Rightarrow \quad A = 0, \; B = 0$

preuve : $|A+B| = \begin{cases} A+B & \text{si } A+B \geqslant 0 \\ -A-B & \text{si } A+B \leqslant 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} A+B = -A+B \\ +A+B = A-B \end{cases} \qquad \begin{matrix} A = 0 \\ B = 0 \end{matrix}$$

Donc $\int_a^b f_-(t)\,dt = 0$ et $f_-(x) = 0$ continue $\forall x$

$\Rightarrow f_-(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow f(x) = f_+(x) \quad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a,b]$

Si $B = 0$, $\int_a^b f_+(t)\,dt = 0$, continue et $f_+(x) = 0 \;\forall x$

De même $\Rightarrow f(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in [a,b]$

Exercice 5

$\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)dt = c\int_a^b g(t)\,dt$

- si $\int_a^b g(t)\,dt \neq 0$ $\quad c = \dfrac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt}$
- si $\int_a^b g(t)\,dt = 0 \underset{\substack{g \text{ continue} \\ \geq 0}}{\Rightarrow} g(x) = 0 \Rightarrow \int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0$

alors pour n'importe quel $\xi \in [a,b]$ marche.

De plus $\forall \lambda \in [a,b]$ $\inf\limits_{t\in[a,b]} f(t) \leq f(t) \leq \sup\limits_{t\in[a,b]} f(t)$

$\forall t \in [a,b]$

$\inf\limits_{t\in[a,b]} f(t) \times g(t) \leq f(t)\,g(t) \leq \sup\limits_{t\in[a,b]} f(t)g(t)\,dt$

Ainsi par monotonie de l'intégrale car $g(x) \geq 0 \;\forall x$

$\int_a^b \inf(f(t))\,g(t)dt \leq \underbrace{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}_{c\int_a^b g(t)dt} \leq \int_a^b \sup(f(t))\,g(t)\,dt$

donc $\inf\limits_{t\in[a,b]} f(t) \leq c \leq \sup\limits_{t\in[a,b]} f(t)$ Par le TVI

$\exists \xi \in [a,b]$ tel que $c = f(\xi)$

Définition Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. On dit que α est l'inf de A si

- $\alpha \leq a \quad \forall a \in A$ (minorant)
- $\forall \varepsilon > 0 \;\exists\; a \in A \quad \alpha \leq a \leq \alpha + \varepsilon$

Remarque

- l'inf n'est pas toujours dans A
- l'inf est le plus grand des minorants de A
- inf est unique.

Définition Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ si $(\inf A) \in A$ est appelé le minimum de A

Théorème Soit $A \in \mathbb{R}$, A est bornée inférieurement $(\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall a \in A, \alpha \leq a)$

Alors il existe le maximum de l'ensemble des minorants de A et

$\max\{\text{minorants de } A\} = \inf A$

Exercice 7

a) $\lambda > 0$

$\langle Ax, x\rangle \geqslant \lambda \|x\|^2$

$x'(t) = -Ax(t) + b(t) \quad , \quad t \geqslant 0$

Montrons que $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|x(t)\|^2) + \lambda\|x(t)\|^2 \leqslant \|b(t)\|.\|x(t)\|$

$$\frac{d}{dt}(\|x(t)\|^2) = \frac{d}{dt}(\langle x(t), x(t)\rangle)$$
$$= 2\langle x'(t), x(t)\rangle$$

proposition $\frac{d}{dt}\langle u(t), v(t)\rangle = \langle u'(t), v(t)\rangle + \langle u(t), v'(t)\rangle$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|x(t)\|^2) + \lambda\|x(t)\|^2 \leqslant \langle x'(t), x(t)\rangle + \langle Ax, x\rangle$$
$$= \langle x'(t) + Ax(t), x(t)\rangle$$
$$= \langle b(t), x(t)\rangle$$
$$\leqslant \|b(t)\|.\|x(t)\|$$

b) Montrons que $2ab \leqslant \frac{b^2}{\lambda} + \lambda a^2$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$

$(\lambda a - b)^2 = \lambda^2 a^2 - 2a\lambda b + b^2 \geqslant 0$

$\lambda^2 a^2 + b^2 \geqslant 2a\lambda b$

$\lambda a^2 + \frac{b^2}{\lambda} \geqslant 2ab$

c) Montrons que $\frac{d}{dt}(\|x(t)\|^2) + \lambda\|x(t)\|^2 \leqslant \frac{\|b(t)\|^2}{\lambda}$

On a $\frac{d}{dt}(\|x(t)\|^2) + 2\lambda\|x(t)\|^2 \leqslant 2\underbrace{\|b(t)\|}_{b}\underbrace{\|x(t)\|}_{a}$

$$\leqslant \frac{\|b(t)\|^2}{\lambda} + \lambda\|x(t)\|^2$$

$$\frac{d}{dt}(\|x(t)\|^2) + \lambda\|x(t)\|^2 \leqslant \frac{\|b(t)\|^2}{\lambda}$$

d) Montrons que $\cancel{\frac{d}{dt}(\|x(t)\|^2) + \lambda}\ \|x(t)\|^2 \leqslant \|x(0)\|^2 e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda}\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\|b(s)\|^2 ds$

$$\left[\frac{d}{dt}(\|x(s)\|^2) + \lambda\|x(s)\|^2\right]e^{-\lambda(t-s)} \leqslant \frac{\|b(s)\|^2}{\lambda}e^{-\lambda(t-s)} \qquad t \geqslant 0, \ s \geqslant 0$$

Par monotonie de l'intégrale

$$\int_0^t \left[\frac{d}{ds}(\|x(s)\|^2)\, e^{-\lambda(t-s)} + \lambda \|x(s)\|^2 e^{-\lambda(t-s)}\right] dS$$

$$\leqslant \int_0^t \frac{\|b(s)\|^2}{\lambda} e^{-\lambda(t-s)} dS$$

$$\left[\|x(s)\|^2 e^{-\lambda(t-s)}\right]_0^t \leqslant \int_0^t \frac{\|b(s)\|^2}{\lambda} e^{-\lambda(t-s)} dS$$

$$\|x(t)\| \leqslant \|x(0)\|^2 e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda}\int_0^t \|b(s)\|^2 e^{-\lambda(t-s)} dS$$

e) Montrons que $\|x(t)\|^2 \leqslant \|x(0)\|^2 + \frac{B^2}{\lambda^2}$ $t \geqslant 0$

On sait $\|x(t)\|^2 \leqslant \|x(0)\|^2 e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda}\int_0^t \|b(s)\|^2 e^{-\lambda(t-s)} dS$

$$\Leftrightarrow \|x(t)\|^2 \leqslant \|x(0)\|^2 e^{-\lambda t} + \frac{B^2}{\lambda}\int_0^t \cancel{\|b(s)\|^2} e^{-\lambda(t-s)} dS$$

$$\leqslant \|x(0)\|^2 + \frac{B^2}{\lambda}\left[\tfrac{1}{\lambda} e^{-\lambda(t-s)}\right]_0^t$$

$$= \|x(0)\|^2 + \frac{B^2}{\lambda}\left[\frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]$$

$$= \|x(0)\|^2 + \frac{B^2}{\lambda^2}(1 - e^{-\lambda t})$$

$$\leqslant \|x(0)\|^2 + \frac{B^2}{\lambda^2}$$

g) limite b_∞ de $b(t)$ lorsque $t \to +\infty$

~~alors~~ $Ax_\infty = b_\infty$

$u(t) = x(t) - x_\infty$ pour $t \in \mathbb{R}$

Montrons que ~~$\|u(t)\|^2 \leqslant \|u(0)\|^2 e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda}\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}$~~ $\|b(s) - b_\infty\|^2 dS$ $t \geqslant 0$

$u'(t) = -A u(t) + b(t) - b_\infty$

maintenant on applique la proposition suivante

Proposition Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $a > 0$ tels que $\langle Ay, y\rangle \geqslant \lambda \|y^2\|$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$, soit $x(t)$ une solution de $x'(t) = -A x(t) + b(t)$ $t \geqslant 0$ et bornée alors

$$\|x(t)\|^2 \leqslant \|x(0)\|^2 . e^{-\lambda t} + \frac{1}{t}\int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \|b(s)\|^2 dS$$

où $u(t)$ est solution de $u'(t) = -A u(t) + \underbrace{b(t) - b_\infty}_{\tilde{b}(t)}$

$\|\tilde{b}(t)\| \leqslant \|b(t)\| + \|b_\infty\| \leqslant B + \|b_\infty\| = \tilde{B} \in \mathbb{R}$

alors on a $\quad \|u(t)\|^2 \leq \|u(0)\|^2 e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \|b(s) - b_\infty\|^2 dS \quad (*)$

On déduit que $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = x_\infty$

On veut montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} \|u(t)\|^2 = 0$

mais $0 \leq \|u(t)\|^2 \leq (*)$ donc si on arrive à montrer que

$\lim\limits_{t\to+\infty} (*) = 0$ on a gagné.

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \|b(s) - b_\infty\|^2 dS = 0$$

Soit $\varepsilon > 0$ comme $\lim\limits_{s\to+\infty} b(s) = b_\infty$ il existe $t_1 > 0$ tel que $\forall s \geq t_1$

$\|b(s) - b_\infty\| < \varepsilon$ alors

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \|b(s) - b_\infty\|^2 dS = \lim_{t\to+\infty} \left(\int_0^{t_1} e^{-\lambda(t-s)} \|b(s) - b_\infty\|^2 dS + \int_{t_1}^t e^{-\lambda(t-s)} \|b(s) - b_\infty\|^2 dS \right)$$

$$\leq \lim_{t\to+\infty} \left(\int_0^{t_1} e^{-\lambda(t-s)} \tilde{B}^2 dS + \int_{t_1}^t e^{-\lambda(t-s)} \varepsilon^2 dS \right)$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(\tilde{B}^2 \left[\frac{e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda} \right]_0^{t_1} + \varepsilon^2 \left[\frac{e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda} \right]_{t_1}^t \right)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \lim_{t\to+\infty} \left(\tilde{B}^2 \left(e^{-\lambda(t-t_1)} - e^{-\lambda t} \right) + \varepsilon^2 \left(1 - e^{-\lambda(t-t_1)} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cancel{e^{-\lambda t}} \varepsilon^2$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim\limits_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \|b(s) - b_\infty\|^2 dS < \frac{1}{\lambda} \varepsilon^2$

alors par arbitrarité de ε, $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \|b(s) - b_\infty\|^2 dS = 0$

Exercice 8

$g : [0,1] \to \mathbb{R}^n$

Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n g(t) dt = 0$

c'est à dire il faut montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\int_0^1 t^n g(t) dt - 0\| = 0$

$$0 \leq \|\int_0^1 t^n g(t) dt\| \leq \int_0^1 \|t^n g(t)\| dt$$

$$= \int_0^1 |t^n| \|g(t)\| dt$$

$$= \int_0^1 t^n \|g(t)\| dt$$

g est continue donc $\|g\|$ est continue sur $[0,1]$

alors $\|g\|$ est bornée sur $[0,1]$. Donc $\|g(t)\| < C$ pour tout $t \in [0,1]$

Donc $\int_0^1 t^n \|g(t)\| dt < \int_0^1 t^n C dt$

~~Donc $\int_0^1 t^n \|g(t)\|$~~

$$= C \int_0^1 t^n dt$$

$$= \frac{C}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exercice 9 | $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$f : [0, +\infty[$ fonction continue déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$

Soit F une antidérivée de f. Alors $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} [F(t)]_0^t$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} (F(x) - F(0))$

$= F'(0) = f(0)$

Remarque Le résultat reste vrai pour des fonctions Riemann - intégrables en général

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\int_0^x f(t)dt - \int_0^0 f(t)dt}{x - 0}$

$= f(0)$

Exercice 11 | $G(x) = \begin{cases} x & x \in]-\infty, 1[\\ 0 & x = -1 \\ x^2 & x \in]-1, +\infty[\end{cases}$

a) $G_1(x) = x$ continue sur $]-\infty, 1[$ et dérivable $G_1'(x) = 1$ continue

donc $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ $\lim\limits_{x \to -1^-} G_1(x) = -1$ existe finie

$\lim\limits_{x \to -1^-} G_1'(x) = +1$ "

$G_2(x) = x^2$ continue et dérivable sur $]-1, +\infty[$

$G_2'(x) = 2x$ continue sur $]-1, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -1^+} G_2(x) = 1$ existe finie Donc $G(x)$ est $\mathcal{C}^1$ par

$\lim\limits_{x \to -1^+} G_2'(x) = -2$ " morceau sur $\mathbb{R}$.

Donc $G(x)$ $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$

Rappelons que $\tilde{G}'$ est prolongement de la dérivée de G, par

exemple $\tilde{G}'(x) = \begin{cases} 1 & x \in]-\infty, -1[\\ \pi/600 & x = -1 \\ 2x & x \in]-1, +\infty[\end{cases}$

b) $F(x) = \begin{cases} x + C_1 & x \in]-\infty, -1[\\ \pi/600 + C_2 & x = -1 \\ x^2 + C_3 & x \in]-1, +\infty[\end{cases}$

$C_3 = 0$ car $F(x) = 0$ (énoncé)

$\lim\limits_{x \to -1^+} F(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} F(x) = F(-1)$

$\Leftrightarrow \quad 1 = -1 + C_1 = C_2 - \frac{\pi}{600}$

$\Leftrightarrow \quad C_1 = 2, \quad C_2 = 1 + \frac{\pi}{600}$

Donc $F(x) = \begin{cases} x + 2 & x \in]-\infty, 1[\\ 1 & x = 1 \\ x^2 & x \in]-1, +\infty[\end{cases}$

Exercice 19

a) I théorème fondamental du calcul intégral

b) Idem

c) x croissant sur $\mathbb{R}$, $\frac{x^2}{2}$ pas croissant sur $\mathbb{R}$

d) $f > 0$, $x < 0$ alors F est négative.

e) comme F est dérivable, $F \nearrow \Leftrightarrow F'$ positive

$\Leftrightarrow f$ positive

f) vrai si $\int_0^T f(t)dt = 0$

g) $F(-x) = \int_0^{x} f(t)\,dt = \int_0^{-x} f(-t)dt$

$= -\int_0^{x} f(t)dt$

Exercice 20

a) $f(x) = (x, x^2 - 2x, x^4)$ en 0 $(0,0,0)$

$f'(x) = (1, 2x-2, 4x^3)$ $(1,-2,0)$

$f''(x) = (0, 2, 12x^2)$ $(0,2,0)$

$f^{(3)}(x) = (0, 0, 24x)$ $(0,0,0)$

d'après Taylor $f(x) = (0,0,0) + (1,-2,0)(x) + \frac{1}{2}(0,2,0)(x)^2$

$+ \frac{1}{6}(0,0,0)\,x^3 + R(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{x^3} = 0$

$= (x, x^2 - 2x, 0) + R(x)$

b)

Feuille d'exercice 3 : Intégrales impropres

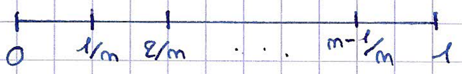
Exercice 11

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6n^3}(n(n+1)(2n+1)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}$$

Si non voit u_n comme une somme de Riemann de f sur l'intervalle compact $[0,1]$

Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

et $\tilde{P}$ est la partition pointée de $[0,1]$ donné par



$$\tilde{P} = \left\{ \left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right], \frac{k}{n} \right) \right\}_{k=1,\dots,n}$$

$$R(f, \tilde{P}_n) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \operatorname{vol}\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} \frac{1}{n} =: o$$

Mais la fonction $f(x) = x^2$ est Riemann intégrable sur $[0,1]$

Donc pour $n \to \infty$ la partition $\tilde{P}_n$ est de taille $\to 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} R(f, \tilde{P}_n) = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1+k/n}}$$ idem $\lim_{n\to+\infty} R(f, \tilde{P}_n) = \int_0^1 f(t)\,dt$

$$= \int_0^1 (1+t)^{-1/2} dt = 2(\sqrt{2}-1)$$

Exercice 4

Supposons que $l = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ n'est pas zéro

~~Soit~~ Sans perte de généralité, soit $l > 0$

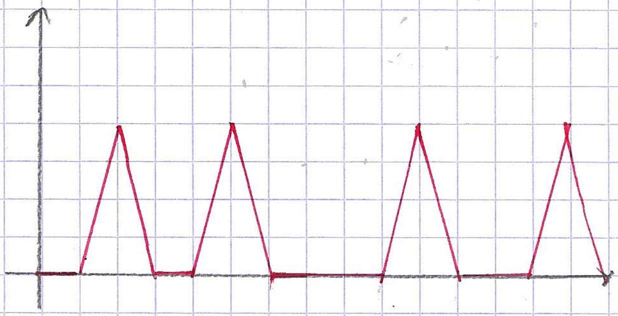
Donc il existe $x_0 \in [0, +\infty[$ tel que $f(x) > l/2$ $\forall x \geq x_0$

donc $\forall x \in [x_0, +\infty[$, $f(x) > l/2$ (et f et $l/2$ sont deux fonctions positives).

mais la fonction $l/2$ est positive et pas intégrable sur $[x_0, +\infty[$ (parce que $l > 0$) Donc par la proposition de comparaison des fonctions positives f non intégrable sur $[0, +\infty[$

4) b) Il existe des fonctions intégrables sur $[0,+\infty[$ mais qui n'ont pas de limite pour $x \to +\infty$

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$



Riemann intégrable sur chaque sous intervalle compact

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\,\frac{2}{(n+1)^2} = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} < \infty$$

Exercice 1

	$]0,1]$	$[1,+\infty[$	$]0,+\infty[$	$\mathbb{R}$	
1	oui	non	non	non	
t	oui	non	non	non	
e^{-t}	oui ↳ continue	oui ↳ comparaison $1/t^2$	oui	non	
$e^{-\lvert t\rvert}$	oui	$=e^{-t}$ oui	oui	oui	
te^{-t^2}	oui	oui	oui	oui	$o(1/t^2)$
e^{-t^2+2t}	oui	oui	oui	oui	

$\frac{1}{\sqrt{t}}\sin(1/t)$ majoré par $\frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable en 0 :

$$\left|\frac{1}{\sqrt{t}}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{t}}\left|\sin(t)\right|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{t}}$$ donc f_8 intégrable en 0

en $+\infty$ $\quad \sin(1/t) \sim \frac{1}{t} \qquad \frac{1}{\sqrt{t}}\sin\left(\frac{1}{t}\right) \sim \frac{1}{t^{3/2}}$

Par PROPOSITION du cours $3/2 > 1$

	$]0,1]$	$[1,+\infty[$	$]0,+\infty[$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}\sin(1/t)$	oui	oui	oui	oui
$\sin(t)$	oui	non	non	non
$\frac{1}{(1+\lvert t\rvert)(\lvert t\rvert+2)}$	oui	oui	oui	oui

$\frac{1}{\cosh(t)}$	oui	oui	oui	oui
$\frac{1-\cos(t)}{t^2}$	oui	oui	oui	oui
$\frac{\log\|t\|}{(1+\|t\|)^2}$	oui $o(1/\sqrt{t})$	oui $o(1/t^{3/2})$	oui	oui

Exercice 8

$I_n = \int_{[0,+\infty[} \frac{e^{-nt}}{1+t^2}\,dt$ pour $t>0$

$\lim_{n\to+\infty} e^{-nt} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-nt}}{1+t^2}$ converge simplement

vers $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t=0 \\ 0 & \text{si } t>0 \end{cases}$

$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 0$

Donc par le théorème de convergence dominée $t \mapsto f_n(t)$

est continue sur $[0,+\infty[$

On cherche une fonction g intégrable telle que $|f_n(t)| \leq g(t)$

$\forall n \geq n_0$

Soit $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$ g est bien intégrable sur $[0,+\infty[$

et $\left|\frac{e^{-nt}}{1+t^2}\right| = \frac{e^{-nt}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$

Convergence dominée

$\lim_{n\to+\infty} \int f_n(t)\,dt = \int \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt = \int f(t)\,dt = 0$

$L_n = \int_{[0,+\infty[} \frac{t^n}{t^{2n}+1}\,dt$ Si $0 \leq t < 1$ $t^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

Soit $f_n(t) = \frac{t^n}{t^{2n}+1}$ $t^{2n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

donc $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

Si $t=1$ $f_n(1) = 1/2$

$t>1$ $t^n \to +\infty$ $t^{2n} \to +\infty$ $f_n(t) = \underset{\downarrow 0}{\frac{t^n}{t^{2n}}} \times \underset{\downarrow 1}{\frac{1}{1+t^{-2n}}} =$

Donc $\lim_{n \to +\infty} f_n(t) = f(t)$ avec $f(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 1 \\ 1/2 & t = 1 \end{cases}$

$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 0$

Pour appliquer le théorème de convergence dominée montrons la domination uniforme par 0.

Une fonction intégrable :

$$\left|\frac{t^n}{t^{2n}+1}\right| \leq \begin{cases} 1 & t \leq 1 \\ 1/t^2 & t \geq 1 \end{cases} \quad \text{si } n \geq 2$$

car pour $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t^n \leq 1$

$$0 \leq \frac{1}{t^{2n}+1} \leq 1$$

pour $t \geq 1$

$$\frac{t^n}{t^{2n}+1} \leq \frac{t^n}{t^{2n}} = \frac{1}{t^n}$$

$$1 + t^{2n} \geq t^{2n} \Rightarrow \frac{1}{1+t^{2n}} \leq \frac{1}{t^{2n}}$$

Ainsi $|f_n(t)| \leq g(t)$ avec $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 1 \\ 1/t^2 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

$$(1/t)^n = \frac{1}{t^2} \times \left(\frac{1}{t}\right)^{n-2} \leq \frac{1}{t^2} \quad \text{si } t \geq 1$$

$$\leq \frac{1}{t^2}$$

On peut appliquer le théorème de convergence ~~uniforme~~ dominée et déduire que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{t^{2n}+1}\,dt = 0$

$$M_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{t^{n+2}+1}\,dt$$

$$f_n(t) = \frac{t^n}{t^{n+2}+1} \longrightarrow \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1/2 & t = 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

$t \geq 1$ $$\frac{t^n}{t^{n+2}+1} = \frac{t^n}{t^{n+2}\left(1 + \frac{1}{t^{n+2}}\right)} = \frac{1}{t^2} \times \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{1}{t^{n+2}}}}_{\downarrow\, 1}$$

D'où $\lim_{n \to +\infty} f_n(t) = f(t)$ avec $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1/2 & t = 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^1 f(1)\,dt + \int_1^{+\infty} f(t)\,dt$$

$$= 0 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$$

$$= \left[-1/t\right]_1^{+\infty}$$

Domination : $|f_n(t)| \leq g(t) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

avec $g(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 1/t^2 & t \geq 1 \end{cases}$

- pour $0 \leq t \leq 1$

$0 \leq t^n \leq 1$

$\dfrac{1}{t^{n+2}+1} \leq 1$

- pour $t \geq 1$ $\quad \dfrac{t^n}{t^{n+2}+1} \leq \dfrac{t^n}{t^{n+2}} = \dfrac{1}{t^2}$ $\quad g$ est intégrable.

Donc le théorème de convergence dominée $\lim\limits_{n \to +\infty}$ et l'intégrale

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} M_n = \int_0^{+\infty} \cancel{\#} f(t)\,dt = 1$

$N_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$

avec $f_n(t) = \begin{cases} (1+t/n)^n e^{-2t} & \text{si } t \leq n \\ 0 \quad \text{si} & t > n \end{cases}$

Rappel : $\ln(1+u) \leq u \quad u > 0$

$\ln(1+t/n) = \dfrac{t}{n} + o(t/n)$

quand $n \to +\infty$

Donc $n \ln(1+ \cancel{n}t/n) = t + o(1)$

D'où $e^{n \ln(1+t/n)} \xrightarrow{\cancel{n \to +\infty}} e^t$

Ainsi pour $t > 0$ fixé et $n \geq t$ on a

$f_n(t) = (1+t/n)^n e^{-2t}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t) = e^t e^{-2t}$
$= e^{-t}$

Domination $|f_n(t)| \leq e^{-t}$

car $e^{-2t} e^{n \ln(1+t/n)} \leq e^{n(t/n)} e^{-2t}$

t

$\leq e^{-t}$

Théorème de convergence dominée on a

$\lim\limits_{n \to +\infty}$

$J_m = \int_0^{\pi/4} (\tan(t))^m \, dt$

$\lim\limits_{m\to+\infty} \tan(t)^m = 0 \quad t \in [0, \pi/4[$
$= 1 \quad t = \pi/4$

Riemann intégrable $|(\tan t)^m| \leq 1$ or $g \mapsto 1$ est intégrable sur $[0, \pi/4]$

Théorème de convergence dominée $\lim\limits_{m\to+\infty} \int_0^{\pi/4} (\tan(t))^m \, dt$
$= 0$

$K_m = \int_{[0,+\infty[} \frac{\sin(t)^m}{t^2} \, dt$

soit $f_m(t) = \frac{\sin^m(t)}{t^2}$ est Riemann intégrable sur tout intervalle compact de $]0, +\infty[$ car elle est continue. sur $]0, +\infty[$

$\lim\limits_{m\to+\infty} \frac{\sin^m(t)}{t^2} = \begin{cases} 0 & t \notin \{\pi/2 + k\pi\} \\ 1/t^2 & t \in \{\pi/2 + 2k\pi\} \\ \text{pas} & t \in \{-\pi/2 + 2k\pi\} \end{cases}$

Soit $\tilde{f}_m(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t^2} & t \in [0, +\infty[\\ 0 & t \in \{-\pi/2 + 2k\pi\} \end{cases}$

$K_m = \int_{[0,+\infty[} \tilde{f}_m(t) dt$

Soit $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 1 \\ 1/t^2 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{m\to+\infty} \tilde{f}_m(t) dt$

Domination de $\tilde{f}_m(t)$ on a $|\tilde{f}_m(t)| \leq g(t)$ pour $m \geq 2$

car $|\sin^2 t| \leq t^m = t^2 \times t^{m-2} \leq t^2$

pour $t \leq 1$

si $m \geq 2$

$|\tilde{f}_m(t)| \leq g(t)$

$\left|\frac{\sin^m(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$

g est bien intégrable car continue sur $[0, +\infty[$ et $1/t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

Par théorème $\Rightarrow \lim\limits_{m\to+\infty} K_m = \int_0^{+\infty} \lim \tilde{f}_m(t) dt$

$= 0$

Exercice 4

1) Soit $g(x,t) = e^{-t^2} e^{itx}$

$t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Domination $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|g(x,t)| < \varphi(t)$ avec $\varphi(t) = e^{-t^2}$

$|g(x,t)| = |e^{-t^2} e^{itx}| = e^{-t^2} |e^{itx}| = e^{-t^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$

D'après le théorème de continuité d'une intégrale généralisée à paramètre, on déduit la continuité de g.

$t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$x \mapsto g(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = it e^{-t^2} e^{itx}$

$x \mapsto \frac{dg}{dx}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$

$t \mapsto \frac{dg}{dx}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$

Domination $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \right| = \left| it e^{-t^2} e^{itx} \right|$

$= |t| e^{-t^2}$

Ainsi $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \right| = \psi(t)$

avec $\psi(t) = |t| e^{-t^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue sur $\mathbb{R}$ et $\psi(t) = o(1/t^2)$

g est dérivable de dérivée

$$g'(x) = \int_{\mathbb{R}} it e^{-t^2} e^{itx} dt$$

2) Par IPP $\quad v'(t) = te^{-t^2} \quad u(t) = ie^{itx}$

$v(t) = -\frac{1}{2} e^{-t^2} \quad u'(t) = -xe^{itx}$

D'où $g'(x) = \left[-\frac{i}{2} e^{itx} e^{-t^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} e^{-t^2} x e^{itx} dt$

$= -\frac{x}{2} g(x)$

car $\lim_{x \to \pm\infty} \left| -\frac{i}{2} e^{itx} e^{-t^2} \right| = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{-t^2}}{2} = 0$

$g(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{itx}\, dt$ alors $g(x) = C e^{-x^2/4}$ or $g(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$

D'où $g(x) = \sqrt{\pi}\, e^{-x^2/4}$

3) $f(u) = e^{-u^2/2}$

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iu\xi} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

changement de variable $u = \sqrt{2} t$

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\sqrt{2}t\xi} e^{-t^2} \sqrt{2}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{it(-\sqrt{2}\xi)} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, g(-\sqrt{2}\,\xi)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{(-\sqrt{2}\xi)^2}{4}}$$

$$= e^{-\xi^2/2} = f(\xi)$$

Exercice 2

$$F(x) = \int_{[0,+\infty[} e^{-tx} f(t)\, dt$$

1) f est bornée, continue sur $\mathbb{R}$, montrons que $F \in C^1(]0,+\infty[)$

$g(x,t) = e^{-tx} f(t)$

- $t \mapsto g(x,t)$ continue sur $\mathbb{R}^+$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$
- $x \mapsto g(x,t)$ dérivable sur $\mathbb{R}^+$ de dérivée $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -te^{-tx} f(t)$
- $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ $\forall x \in]0,+\infty[$

$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ $\forall t \in [0,+\infty[$

Domination $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = |t| e^{-tx} |f(t)|$

$\leq M t e^{-tx}$ $(|f(t)| \leq M)$

F est dérivable sur $]0,+\infty[$ ssi f est dérivable sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$

Il suffit donc d'obtenir la domination sur $[a, +\infty[$ $a > 0$

Pour tout $x \in [a, +\infty[$ $te^{-tx} \leq te^{-at}$

Ainsi il existe $\varphi : t \mapsto te^{-at}$ intégrable sur $[a, +\infty[$

tel que $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi_a(t)$

Du théorème de dérivabilité on déduit F est dérivable sur $[a, +\infty[$ $\forall a > 0$ alors F est dérivable sur $]0, +\infty[$