

Exercice 0 Prouver que $g: I \rightarrow \mathbb{R}^m$: $g = (g_1, \dots, g_m)$ est continue si et seulement si g est continue $\forall i=1, \dots, m$ (en utilisant $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^m$).

Définition : $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite continue si

$$\forall x_0 \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists p > 0, |x - x_0| < p \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$$

$$\bullet \|\cdot\|_\infty : \forall x \in \mathbb{R}^m, x = (x_1, \dots, x_m), \|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} (x_i)$$

$\Rightarrow g$ continue en a donc $\forall \varepsilon > 0, \exists p > 0, |x - a| < p \Rightarrow \|g(x) - g(a)\|_\infty < \varepsilon$

$$g(x) - g(a) = \begin{pmatrix} g_1(x) - g_1(a) \\ \vdots \\ g_m(x) - g_m(a) \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \|g(x) - g(a)\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} \{ |g_i(x) - g_i(a)| \}$$

$$\text{ainsi } \|g(x) - g(a)\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\}, |g_i(x) - g_i(a)| < \varepsilon$$

$$\text{Donc } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists p > 0 \quad |x - a| < p \Rightarrow |g_i(x) - g_i(a)| < \varepsilon$$

ie g_i continue en a .

$\Leftarrow$ Supposons g_i continue en $a \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$

$$\text{ie } \forall i \in \mathbb{N}^* \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists p_i > 0 \quad |x - a| < p_i \Rightarrow |g_i(x) - g_i(a)| < \varepsilon$$

$$\text{Posons } p = \min_{i \in \mathbb{N}^*} \{ p_i \} > 0$$

$$\text{Alors } |x - a| < p \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad |x - a| < p_i \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad |g_i(x) - g_i(a)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \{ |g_i(x) - g_i(a)| \} < \varepsilon$$

$$\text{Donc } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists p > 0, |x - a| < p$$

$$\Rightarrow \|g(x) - g(a)\|_\infty < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|g(x) - g(a)\|_\infty < \varepsilon$$

ie g continue en a

Exercice 1

g est continue si et seulement chacune de ses coordonnées est continue (prop prouvée en cours)

$$a) g(x) = \begin{pmatrix} 1+x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow g_1(x) = 1+x \quad \text{continue sur } \mathbb{R}$$

$$g_2(x) = x^2 \quad \text{continue sur } \mathbb{R}$$

car ce sont des polynômes

Donc g est continue.

g est dérivable si et seulement si chacune de ses composées est dérivable et la dérivée de g est $g' = (g'_1, \dots, g'_m)$

g_1 et g_2 dérivables sur $\mathbb{R}$ (car des polynômes) donc

$$g'(x) = \frac{d}{dx} (-1, 2x)$$

b) $x^2 + x + 1 > 0 \Rightarrow g_1$ continue sur $\mathbb{R}$

(composée de g^a continues)

$\cdot 1 + x^2 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow g_2$ est continue (composée de

$\rightarrow \frac{x}{1+x^2} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

fonctions continues)

donc g est continue

g_1 dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée

$$g'_1(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{1+x+x^2}}$$

g_2 dérivable sur $\mathbb{R}$ composée

$$\Rightarrow g'_2(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} \times \cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$$

$$= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \times \cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$$

Exercice 2

g_1 est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$

($g_1(x)$ est un polynôme)

g_2 continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$$g_2(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{R}_+^* \\ -x & x \in \mathbb{R}_-^* \\ 0 & x = 0 \end{cases} \text{ continue dérivable.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

idem en 0 et $0^- \Rightarrow g_2$ continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$

pas dérivable en 0 .

$g_3(x) = \sin(x)$ est sinusoïdal donc continue et dérivable

2
int

$g_4(x) = x^2$ polynôme donc continue et dérivable.

$g_5(x) = x|x|$ continue et dérivable (définition de la dérivée)

$g_6 = \sin(|x|)$

• continue sur $\mathbb{R}$ comme composée car $x \mapsto |x|$ continue sur $\mathbb{R}$ et sur x aussi.

• dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$

car $x \mapsto |x|$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\sin x$ sur $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin|x| - \sin(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin(x)}{x} = -1$$

donc g n'est pas dérivable en 0.

$$g_7 = g_1 \circ g_2 \\ = |x|^2 = x^2$$

$g_8 = g_3 - g_2 = \sin(x) - |x|$ continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$

b) $g_9 = (g_1, g_2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ parce que g_1, g_2 sont continues sur $\mathbb{R}$ parce que g_1, g_2 sont continues sur $\mathbb{R}$ et on utilise la proposition du cours.

Idem dérivée, ainsi g_9 n'est pas dérivable en 0.

g_{10} continue sur $\mathbb{R}$
dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 3

$$a) g(x) = \begin{cases} \sin(x^R) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

pour $x \neq 0$, $g(x)$ dérivable en tant que composée de fonctions dérivable

pour $x = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^R) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{R-1}$

donc pour $R > 1$, $g(x)$ est dérivable en 0.

b) $g_R(x) = \begin{cases} x^R \sin(1/x) & \text{ici } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$R = 0$, $g_0(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^R \sin(1/x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{R-1} \sin(1/x)$ existe si $R > 0$

Lemme Soit $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et soit $x_0 \in I$

Supposons que

- g est dérivable en $I \setminus \{x_0\}$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} g'(x)$ existe finie, L

alors g est dérivable en x_0 et $g'(x_0) = L$

preuve : utiliser le théorème des accroissements finis

montrer que $g(x_0 + \varepsilon) = g(x_0) + \int_{x_0}^{x_0 + \varepsilon} g'(t) dt$ avec ε le prolongement par continuité.

Proposition Il existe des fonctions dérivables, de dérivée non continue.

Exemple

$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

g est dérivable

si $x \neq 0$:

$g'(x) = 2x \sin(1/x) + x^2 (-1/x^2) \cos(1/x)$
 $= 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$

$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (x^2 \sin(1/x)) = 0$

$g'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

g' n'est pas continue

(en $x=0$) parce que

$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x)$ n'existe pas

Exercice 4

Rappel : si $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ et g est dérivable, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + R(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{x-a} = 0$$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ dérivable en $a \Rightarrow g_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}$$

$$\Rightarrow g_i(x) = g_i(a) + (x-a)g'_i(a) + (x-a)\varepsilon_i(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_i(x) = 0$$

$$\text{Preons } L = \begin{pmatrix} g'_1(a) \\ \vdots \\ g'_m(a) \end{pmatrix} \quad \varepsilon(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(x) \\ \vdots \\ \varepsilon_m(x) \end{pmatrix} \quad (\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m)$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(a) + (x-a)g'_1(a) + (x-a)\varepsilon_1(x) \\ \vdots \\ g_m(a) + (x-a)g'_m(a) + (x-a)\varepsilon_m(x) \end{pmatrix}$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(a) \\ \vdots \\ g_m(a) \end{pmatrix} + (x-a) \begin{pmatrix} g'_1(a) \\ \vdots \\ g'_m(a) \end{pmatrix} + (x-a) \begin{pmatrix} \varepsilon_1(x) \\ \vdots \\ \varepsilon_m(x) \end{pmatrix}$$

$$g(x) = g(a) + (x-a)L + (x-a)\varepsilon(x)$$

$$\|\varepsilon(x)\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} |\varepsilon_i(x)| \quad \text{on a} \quad \max_i |\varepsilon_i(x)| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

$$\text{donc } \|\varepsilon(x)\|_\infty \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

$$\text{Supposons que } g(x) = g(a) + (x-a)L + (x-a)\varepsilon(x)$$

$$\text{avec } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(a) + (x-a)L + (x-a)\varepsilon(x) - g(a)}{x-a} \\ = \lim_{x \rightarrow a} L + \varepsilon(x)$$

$$= L + \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = L \in \mathbb{R}^m \quad \text{donc } g \text{ dérivable}$$

$$\text{en } a \quad \text{et } g'(a) = L$$

Proposition $g: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dérivable en $a \in I$

$$\exists L \in \mathbb{R}^m \quad \text{et} \quad \varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \|\varepsilon(x)\| = 0$$

$$\text{tels que } g(x) = g(a) + L(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$$

[et on appelle L la dérivée]

Exercice 5

B une application bilinéaire

$$B: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$B((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m)) = \sum_{i,j=1}^m B_{ij} x_i y_j$$

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$B(f, g) \quad I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g: I \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$B(f, g) = B(f'(t), g(t)) = B((f'_1(t), \dots, f'_m(t)), (g_1(t), \dots,$$

$$g_m(t)) = \sum_{i,j} B_{ij} f'_i(t) g_j(t)$$

On veut montrer que B est C^1

f et g sont de classe $C^1 \Leftrightarrow f_i$ et g_j sont de classe

$$C^1 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \\ \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

donc $B(f, g)$ est une combinaison

linéaire de produit $C^1 \Rightarrow B(f, g)$

est de classe C^1

Exercice 6

a) g injective $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$

et

$$dg(x)(h) = \frac{1}{\cos^2(x)} h \neq 0 \quad \text{donc isomorphisme}$$

$\Rightarrow C^1$ difféomorphisme

b) h est injective

$h'(x) = 3x^2$ s'annule en 0 $dh(x)$ n'est pas un isomorphisme en 0. Donc h n'est pas un C^1 difféo en 0

g est C^∞ , g est une bijection, $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ est C^∞

Exercice 7

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 + x + 2 \end{cases}$$

1) $\bullet$ f est un polynôme $\Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\bullet f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1$$

Donc grâce à la proposition de cours f est un C^∞ difféomorphisme

$$2) (g^{-1})'(c)$$

$$(g^{-1})'(c) = \frac{1}{g'(g^{-1}(c))}$$

$$(g^{-1})'(c) = \frac{1}{g'(g^{-1}(c))}$$

$g^{-1}(c)$ est l'une des valeurs de

x qui vérifie $g(x) = c$

(car g bijectif) $\Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0$

$$\text{Donc } (g^{-1})'(c) = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{1}$$

Exercice 10 Rappel : $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dans $\mathcal{B}^R([a, b], \mathbb{R}^m)$

$\exists a_0 < \dots < a_n$ tel que

$$1) \forall i=0, \dots, n-1, g|_{[a_i, a_{i+1}]} \in \mathcal{B}^R([a_i, a_{i+1}], \mathbb{R}^m) \quad \forall i=0, \dots, n-1$$

2) la limite droite (et à gauche) jusqu'à l'ordre R existe
similaire dans les a_i

$$1) \text{ Pas } \mathcal{B}^R([a, b], \mathbb{R}) \quad \text{en } 0$$

$$2) \in \mathcal{B}^R([a, b], \mathbb{R})$$

3) les deux

Exercice 9

Feuille 2 : Intégrales de Riemann de fonctions vectorielles

Exercice 0

• Prouvons par récurrence que $f^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{x^{3k}} e^{-1/x^2}$

Initialisation : $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$

Hérédité : on suppose que $f^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{x^{3k}} e^{-1/x^2}$ et on a

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \frac{P_k'(x) x^{3k} - P_k(x) 3k x^{3k-1}}{x^{6k}} e^{-1/x^2} + \frac{P_k(x)}{x^{3k}} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} \\ &= \frac{x^{3k-1} (P_k'(x) x - 3k P_k(x))}{x^{6k}} e^{-1/x^2} + \frac{2 P_k(x)}{x^{3(k+1)}} e^{-1/x^2} \\ &= e^{-1/x^2} \left(\frac{P_k'(x) x - P_k(x) 3k}{x^{3k+1}} + \frac{2 P_k(x)}{x^{3(k+1)}} \right) \\ &= e^{-1/x^2} \left(\frac{P_k'(x) x^3 - P_k(x) 3k x^2 + 2 P_k(x)}{x^{3(k+1)}} \right) \end{aligned}$$

On pose $P_{k+1}(x) = \frac{P_k'(x) x^3 - P_k(x) 3k x^2 + 2 P_k(x)}{x^{3(k+1)}}$

deg P_{k+1} deg $P_k + 2$ deg P_k

Polynôme de degré au plus $\deg P_k + 2$

Par récurrence $\deg P_{k+1} \leq 2(k+1)$

• $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} = 0$ donc f continue en $x=0$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ comme e^{-1/x^2} continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

f est continue sur $\mathbb{R}$

• f est de classe C^∞ on elle coïncide avec e^{-1/x^2}

• On a que $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(k)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_k(x)}{x^{3k}} e^{-1/x^2} = 0$

• Donc d'après le théorème de prolongement de fonction C^∞ f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$ $f^{(k)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f^{(k)}(x) = 0$

Exercice 1

$$\varphi(x) = |x^3| + 2\cos(x) + 1$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} \arctan(\sqrt{x^2+2}) \\ \ln(3+x^2) \end{pmatrix}$$

1.a)

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Comme $\arctan(\sqrt{x^2+2})$ et $\ln(3+x^2)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$

Alors F est dérivable.

$2\cos(x) + 1$ est dérivable. Montrons que $|x^3|$ l'est aussi.

$$\text{Soit } g(x) = |x^3| = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^3 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x^2 = 0$$

Comme g est continue en 0 et sa

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 3x^2 = 0$$

dérivée aussi, alors g est dérivable en 0

(depuis le théorème de prolongement de fonctions

$\mathbb{C}^1$)

Ainsi comme g est dérivable, φ est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. D'après un théorème du cours

$F \circ \varphi$ est dérivable.

$$(F \circ \varphi)' = F'(\varphi(x)) \times \varphi'(x)$$

$$F'(x) = \begin{matrix} \frac{x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+2}} & L_1 & = & \frac{x}{x^2+3} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \right) \\ \frac{2x}{x^2+3} & L_2 & & \frac{2}{2} \end{matrix}$$

$$\varphi'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2\sin(x) & \text{si } x \geq 0 \\ -3x^2 - 2\sin(x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \times \varphi'(x)$$

$$= \frac{\varphi(x)}{\varphi^2(x)+3} \left(\frac{1}{\sqrt{\varphi^2(x)+2}} \right) \times \varphi'(x)$$

$$b) I_m = \int_0^m \frac{x}{x^2+3} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \right) dx, m \geq 0$$

On remarque que F est une antiderivée de g . (D'après le

TF(II), comme g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ on a

$$I_m = \int_0^m g(x) dx = F(m) - F(0) = \left(\arctan \sqrt{m^2 + 2} \right)_{p_m(3+m^2)} - \left(\arctan \sqrt{x} \right)_{p_m(3)} \quad \text{int}$$

$$\text{Comme } \lim_{m \rightarrow +\infty} p_m \left(\frac{3+m^2}{3} \right) = +\infty \quad = \left(\arctan(\sqrt{m^2+2}) - \arctan \sqrt{x} \right)_{p_m \left(\frac{3+m^2}{3} \right)}$$

alors I_m n'a pas de limite

$$(f \circ g)'(x) \notin \mathbb{R}$$

Exercice 2

$$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m \quad I(\lambda) = \int_a^b \|\lambda g(t) + g(t)\|^2 dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\text{Montrons que } \left| \int_a^b \langle g(t), g(t) \rangle dt \right| \leq \left(\int_a^b \|g(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b \|g(t)\|^2 dt \right)^{1/2}$$

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_a^b \langle \lambda g(t) + g(t), \lambda g(t) + g(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b [\langle \lambda g(t), \lambda g(t) \rangle + 2 \langle \lambda g(t), g(t) \rangle + \langle g(t), g(t) \rangle] dt \\ &= \int_a^b [\lambda^2 \|g(t)\|^2 + 2\lambda \langle g(t), g(t) \rangle + \|g(t)\|^2] dt \\ &= \lambda^2 \int_a^b \|g(t)\|^2 dt + 2\lambda \int_a^b \langle g(t), g(t) \rangle dt + \int_a^b \|g(t)\|^2 dt \end{aligned}$$

$I(\lambda)$ est un polynôme de degré 2 de la variable λ . De plus, par définition de $\|\cdot\|$, $\|g(t) + g(t)\|^2 \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{Donc } I(\lambda) = \int_a^b \|\lambda g(t) + g(t)\|^2 dt \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Donc $I(\lambda)$ admet au plus une racine.

$$\text{D'où } \Delta \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2 \int_a^b \langle g(t), g(t) \rangle dt \right)^2 - 4 \left(\int_a^b \|g(t)\|^2 dt \right) \left(\int_a^b \|g(t)\|^2 dt \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \int_a^b \langle g(t), g(t) \rangle dt \right| \leq \left(\int_a^b \|g(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b \|g(t)\|^2 dt \right)^{1/2}$$

Exercice 3

a) $u(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto u(x) = \alpha + \int_a^x g(t) g(t) dt$$

x est dérivable. Montrons que $\int_a^b g(t) g(t) dt$ l'est aussi.

D'après le résultat du cours, on sait que si h est Riemann intégrable sur $[a, b]$ alors $\int_a^b h(t) dt$ est dérivable et de dérivée $h(x)$ (TFCI I) $\forall x$ où h est continue. Donc h est donc Riemann intégrable.

Ainsi $\int_a^x g(t) g(t) dt$ est dérivable et de dérivée $g(x)g(x)$

$$\forall x \in [a, b]$$

Donc u est dérivable sur $[a, b]$ et $u'(x) = g(x)g(x)$

$$\text{on } g(x) \leq u(x) \text{ et } g(x) \geq 0 \Rightarrow g(x)g(x) \leq u(x)g(x)$$

$$\Leftrightarrow u'(x) \leq u(x)g(x)$$

b) $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto v(x) = u(x) \exp\left(-\int_a^x g(t) dt\right)$$

u est dérivable et $\exp\left(-\int_a^x g(t) dt\right)$ aussi $\Rightarrow v$ est dérivable

$$v'(x) = u'(x) \exp\left(-\int_a^x g(t) dt\right) + u(x)(-g(x) \exp\left(-\int_a^x g(t) dt\right))$$

$$= [u'(x) - u(x)g(x)] \exp\left(-\int_a^x g(t) dt\right) \leq 0$$

donc v décroissante sur $[a, b] \Rightarrow v(x) \leq v(a) = \alpha \quad \forall x$

$$\text{on } v(a) = u(a) \underbrace{\exp\left(-\int_a^a g(t) dt\right)}_1 = u(a) = \alpha + \underbrace{\int_a^a g(t)g(t) dt}_0 = \alpha$$

$$\Rightarrow v(x) \leq \alpha \quad \forall x \in [a, b]$$

c) On a $g(x) \leq \alpha + \int_a^x g(t)g(t) dt = u(x)$

$$\text{on } v(x) = u(x) \exp\left(-\int_a^x g(t) dt\right)$$

$$\Rightarrow u(x) = v(x) \exp\left(\int_a^x g(t) dt\right)$$

$$\Rightarrow u(x) = v(x) \exp\left(\int_a^x g(t) dt\right)$$

$$(*) \Leftrightarrow g(x) \leq v(x) \exp\left(\int_a^x g(t) dt\right)$$

$$\leq \alpha \exp\left(\int_a^x g(t) dt\right)$$

Lemme Si $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction continue, alors ⁷
la fonction $\|g\|: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue
 $x \mapsto \|g(x)\|$

preuve Soit $x_0 \in [a, b] \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$

$$\Rightarrow \|g(x) - g(x_0)\| < \varepsilon.$$

Montrons $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \|g(x)\| - \|g(x_0)\| \right| < \varepsilon$

Soit lemme Soit a et b dans $\mathbb{R}^m$ alors $\|a - b\| \geq \left| \|a\| - \|b\| \right|$

preuve $\|a\| = \|a + b - b\| \leq \|a + b\| + \|b\| \Rightarrow \|a - b\| \geq \|a\| - \|b\|$

$$\text{donc } \|g(x) - g(x_0)\| \geq \left| \|g(x)\| - \|g(x_0)\| \right|$$

donc $\forall x$ tel que $|x - x_0| < \delta$ on a

$$\left| \|g(x)\| - \|g(x_0)\| \right| \leq \|g(x) - g(x_0)\| < \varepsilon$$

donc $\|g\|$ est continue en x_0 . Par arbitralité de x_0 , $\|g\|$ est continue sur $[a, b]$ donc sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue. Montrons que si
 $\|g(x)\| \leq \int_a^x \|g(t)\| dt$ alors $g(x) = 0$

Preons $x = 0$, $h(x) = \|g(x)\|$ et $g(x) = 1$

D'après le lemme g est continue car g est continue et g continue car constante.

$$g(x) = 1 > 0 \quad \forall x$$

$$h(x) \leq \int_a^x h(t) dt \quad \text{d'après Gronwall on a } h(x) \leq \exp\left(\int_a^x dt\right) \times \underset{\leq 0}{h(a)}$$

$$\text{Or } h(x) = \|g(x)\| \Rightarrow h(x) \geq 0 \quad \forall x$$

$$\text{Donc } h(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \|g(x)\| = 0$$

Exercice 4 Montrons que $\left| \int_a^b g(t) dt \right| = \int_a^b |g(t)| dt$ si et seulement si
 $g(x) \geq 0$ ou $g(x) \leq 0$

$$\text{Si } g(x) \geq 0 \quad \text{alors} \quad \int_a^b |g(t)| dt = \int_a^b g(t) dt \geq 0 \quad \text{car } g \geq 0 \\ = \left| \int_a^b g(t) dt \right|$$

$$\text{Si } g(x) \leq 0 \quad \text{idem}$$

Montrons que si g prend des valeurs strictement positives ou négatives sur les deux
alors $|\int_a^b g(t) dt| \neq \int_a^b |g(t)| dt$

$$g_-(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } g(x) \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g_+(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } g(x) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

g_+ et g_- continues

$$g(x) = g_+(x) + g_-(x)$$

$$|\int_a^b g(t) dt| = |\int_a^b g_-(t) dt + \int_a^b g_+(t) dt|$$

$$= |A+B| = B-A$$

$$\int_a^b |g(t)| dt = -\int_a^b g_-(t) dt + \int_a^b g_+(t) dt$$

$$= B-A$$

$$|g(x)| = g_+(x) - g_-(x)$$

$$|g(x)| = \begin{cases} g(x) & g(x) \geq 0 \\ -g(x) & g(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} g_+(x) + g_-(x) \\ g_+(x) - g_-(x) \end{cases}$$

$$|A+B| = B-A \Rightarrow \begin{matrix} A=0 \\ B=0 \end{matrix}$$

preuve: $|A+B| = \begin{cases} A+B & \text{si } A+B \geq 0 \\ -A-B & \text{si } A+B \leq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} A+B = -A+B \\ A+B = A-B \end{cases}$$

$$\begin{matrix} A=0 \\ B=0 \end{matrix}$$

Donc $\int_a^b g_-(t) dt = 0$ et $g_-(x) = 0$ continue $\forall x$

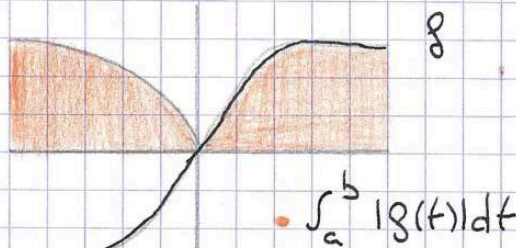
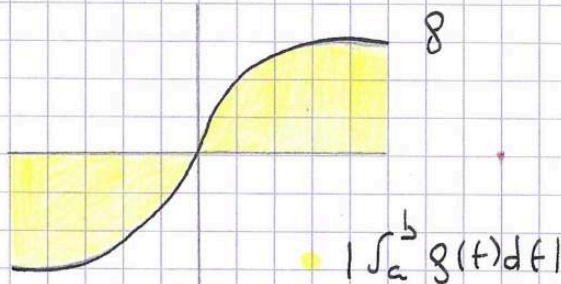
$$\Rightarrow g_-(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow g(x) = g_+(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

Si $B=0$, $\int_a^b g_+(t) dt = 0$, continue et $g_+(x) = 0 \quad \forall x$

De même $\Rightarrow g(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$



Exercice 5

8
im 2

$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ tel que } \int_a^b g(t) g(t) dt = c \int_a^b g(t) dt$$

$$\bullet \text{ si } \int_a^b g(t) dt \neq 0 \quad c = \frac{\int_a^b g(t) g(t) dt}{\int_a^b g(t) dt}$$

$$\bullet \text{ si } \int_a^b g(t) dt = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow \int_a^b g(t) g(t) dt = 0$$

$\uparrow$
g continue
 ≥ 0

alors pour n'importe quel $\xi \in [a, b]$ marche.

$$\text{De plus } \forall \lambda \in [a, b] \quad \inf_{t \in [a, b]} g(t) \leq g(\lambda) \leq \sup_{t \in [a, b]} g(t)$$

$$\forall t \in [a, b]$$

$$\inf_{t \in [a, b]} g(t) \times g(t) \leq g(t) g(t) \leq \sup_{t \in [a, b]} g(t) g(t)$$

Ainsi par monotonie de l'intégrale

con $g(x) \geq 0 \quad \forall x$

$$\int_a^b \inf_{t \in [a, b]} g(t) g(t) dt \leq \int_a^b g(t) g(t) dt \leq \int_a^b \sup_{t \in [a, b]} g(t) g(t) dt$$

$$\quad \quad \quad c \int_a^b g(t) dt$$

$$\text{donc } \inf_{t \in [a, b]} g(t) \leq c \leq \sup_{t \in [a, b]} g(t)$$

Par le TVI

$$\exists \xi \in [a, b] \text{ tel que } c = g(\xi)$$

Définition Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. On dit que α est l'inf de A si

$$\bullet \alpha \leq a \quad \forall a \in A \quad (\text{minorant})$$

$$\bullet \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad \alpha \leq a \leq \alpha + \varepsilon$$

Remarque

$$\bullet \text{ l'inf n'est pas toujours dans } A$$

$$\bullet \text{ l'inf est le plus grand des mineurs de } A$$

$$\bullet \text{ inf est unique}$$

Définition Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ si $(\inf A) \in A$ est appelé le minimum de A

Théorème Soit $A \subseteq \mathbb{R}$, A est bornée inférieurement ($\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall a \in A, \alpha \leq a$)

Alors il existe le maximum de l'ensemble des mineurs de A et

$$\max \{ \text{mineurs de } A \} = \inf A$$

Exercice 7

a) $\lambda > 0$

$$\langle Ax, x \rangle \geq \lambda \|x\|^2$$

$$x'(t) = -Ax(t) + b(t), \quad t \geq 0$$

Montrons que $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|x(t)\|^2) + \lambda \|x(t)\|^2 \leq \|b(t)\| \cdot \|x(t)\|$

$$\frac{d}{dt} (\|x(t)\|^2) = \frac{d}{dt} (\langle x(t), x(t) \rangle)$$

$$= 2 \langle x'(t), x(t) \rangle$$

proposition $\frac{d}{dt} \langle u(t), v(t) \rangle = \langle u'(t), v(t) \rangle + \langle u(t), v'(t) \rangle$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|x(t)\|^2) + \lambda \|x(t)\|^2 \leq \langle x'(t), x(t) \rangle + \langle Ax, x \rangle$$

$$= \langle x'(t) + Ax(t), x(t) \rangle$$

$$= \langle b(t), x(t) \rangle$$

$$\leq \|b(t)\| \cdot \|x(t)\|$$

b) Montrons que $2ab \leq \frac{b^2}{\lambda} + \lambda a^2$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ et } \lambda > 0$$

$$(\lambda a - b)^2 = \lambda^2 a^2 - 2\lambda ab + b^2 \geq 0$$

$$\lambda^2 a^2 + b^2 \geq 2\lambda ab$$

$$\lambda a^2 + \frac{b^2}{\lambda} \geq 2ab$$

c) Montrons que $\frac{d}{dt} (\|x(t)\|^2) + \lambda \|x(t)\|^2 \leq \frac{\|b(t)\|^2}{\lambda}$

$$\begin{aligned} \text{Comme } \frac{d}{dt} (\|x(t)\|^2) + 2\lambda \|x(t)\|^2 &\leq 2 \underbrace{\|b(t)\|}_{b} \underbrace{\|x(t)\|}_{a} \\ &\leq \frac{\|b(t)\|^2}{\lambda} + \lambda \|x(t)\|^2 \\ \frac{d}{dt} (\|x(t)\|^2) + \lambda \|x(t)\|^2 &\leq \frac{\|b(t)\|^2}{\lambda} \end{aligned}$$

d) Montrons que $\frac{d}{dt} (\|x(t)\|^2) + \lambda \|x(t)\|^2 \leq \|x(0)\|^2 e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \|b(s)\|^2 ds$

$$\left[\frac{d}{dt} (\|x(s)\|^2) + \lambda \|x(s)\|^2 \right] e^{-\lambda(t-s)} \leq \frac{\|b(s)\|^2}{\lambda} e^{-\lambda(t-s)} \quad \begin{matrix} t \geq 0 \\ s \geq 0 \end{matrix}$$

Par monotonie de l'intégrale

int

$$\int_0^t \left[\frac{d}{ds} (\|x(s)\|^2) e^{-\lambda(t-s)} + \lambda \|x(s)\|^2 e^{-\lambda(t-s)} \right] ds$$

$$\leq \int_0^t \frac{\|b(s)\|^2}{\lambda} e^{-\lambda(t-s)} ds$$

$$\left[\|x(s)\|^2 e^{-\lambda(t-s)} \right]_0^t \leq \int_0^t \frac{\|b(s)\|^2}{\lambda} e^{-\lambda(t-s)} ds$$

$$\|x(t)\| \leq \|x(0)\| e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} \int_0^t \|b(s)\|^2 e^{-\lambda(t-s)} ds$$

e) Montrons que $\|x(t)\|^2 \leq \|x(0)\|^2 + \frac{B^2}{\lambda^2} \quad t \geq 0$

On sait $\|x(t)\|^2 \leq \|x(0)\|^2 e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} \int_0^t \|b(s)\|^2 e^{-\lambda(t-s)} ds$

$$\Rightarrow \|x(t)\|^2 \leq \|x(0)\|^2 e^{-\lambda t} + \frac{B^2}{\lambda} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} ds$$

$$\leq \|x(0)\|^2 + \frac{B^2}{\lambda} \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda(t-s)} \right]_0^t$$

$$= \|x(0)\|^2 + \frac{B^2}{\lambda} \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right]$$

$$= \|x(0)\|^2 + \frac{B^2}{\lambda^2} (1 - e^{-\lambda t})$$

$$\leq \|x(0)\|^2 + \frac{B^2}{\lambda^2}$$

g) Limite b_∞ de $b(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$

alors $Ax_\infty = b_\infty$

$u(t) = x(t) - x_\infty$ pour $t \in \mathbb{R}$

Montrons que $\|u(t)\|^2 \leq \|u(0)\|^2 e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \|b(s) - b_\infty\|^2 ds \quad t \geq 0$

$u'(t) = -A u(t) + b(t) - b_\infty$

maintenant on applique la proposition suivante

Proposition Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\alpha > 0$ tel que $\langle Ay, y \rangle \geq \alpha \|y\|^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$,

soit $x(t)$ une solution de $x'(t) = -Ax(t) + b(t) \quad t \geq 0$

et bornée alors

$$\|x(t)\|^2 \leq \|x(0)\|^2 e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \|b(s)\|^2 ds$$

où $u(t)$ est solution de $u'(t) = -A u(t) + \underbrace{b(t) - b_\infty}_{\tilde{b}(t)}$

$$\|\tilde{b}(t)\| \leq \|b(t)\| + \|b_\infty\| \leq B + \|b_\infty\| = \tilde{B} \in \mathbb{R}$$

alors on a $\|u(t)\|^2 \leq \|u(0)\|^2 e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \|b(s) - b_\infty\|^2 ds$ (*)

On déduit que $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = u_\infty$

On veut montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t)\|^2 = 0$

mais $0 \leq \|u(t)\|^2 \leq (*)$ donc si on arrive à montrer que

$\lim_{t \rightarrow +\infty} (*) = 0$ on a gagné.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \|b(s) - b_\infty\|^2 ds = 0$$

Soit $\varepsilon > 0$ comme $\lim_{s \rightarrow +\infty} b(s) = b_\infty$ il existe $t_1 > 0$ tel que $\forall s \geq t_1$

$$\|b(s) - b_\infty\| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \|b(s) - b_\infty\|^2 ds &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{t_1} e^{-\lambda(t-s)} \|b(s) - b_\infty\|^2 ds + \int_{t_1}^t e^{-\lambda(t-s)} \|b(s) - b_\infty\|^2 ds \right) \\ &\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{t_1} e^{-\lambda(t-s)} \tilde{B}^2 ds + \int_{t_1}^t e^{-\lambda(t-s)} \varepsilon^2 ds \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\tilde{B}^2 \left[\frac{e^{-\lambda(t-s)}}{-\lambda} \right]_0^{t_1} + \varepsilon^2 \left[\frac{e^{-\lambda(t-s)}}{-\lambda} \right]_{t_1}^t \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\tilde{B}^2 (e^{-\lambda(t-t_1)} - e^{-\lambda t}) + \varepsilon^2 (1 - e^{-\lambda(t-t_1)}) \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} \varepsilon^2 \end{aligned}$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$ $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \|b(s) - b_\infty\|^2 ds < \frac{1}{\lambda} \varepsilon^2$

alors par arbitraire de ε , $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \|b(s) - b_\infty\|^2 ds = 0$

Exercice 8

$$g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Montrons que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^m g(t) dt = 0$

c'est à dire il faut montrer que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left\| \int_0^1 t^m g(t) dt - 0 \right\| = 0$

$$\begin{aligned} 0 \leq \left\| \int_0^1 t^m g(t) dt \right\| &\leq \int_0^1 \|t^m g(t)\| dt \\ &= \int_0^1 t^m \|g(t)\| dt \\ &= \int_0^1 t^m \|g(t)\| dt \end{aligned}$$

g est continue donc $\|g\|$ est continue sur $[0, 1]$

alors $\|g\|$ est bornée sur $[0, 1]$. Donc $\|g(t)\| < C$ pour tout $t \in [0, 1]$

$$\text{Donc } \int_0^1 t^m \|g(t)\| dt < \int_0^1 t^m C dt$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \int_0^1 t^m \|g(t)\| dt &= C \int_0^1 t^m dt \\ &= \frac{C}{m+1} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Exercice 9

$N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$g: [0, +\infty[$ fonction continue déterminée $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt$

Soit F une antiderivée de g . Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} [F(t)]_0^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (F(x) - F(0))$$

$$= F'(0) = g(0)$$

Remarque Le résultat reste vrai pour des

fonctions Riemann-intégrables en général

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x g(t) dt - \int_0^0 g(t) dt}{x - 0} = g(0)$$

Exercice 11

$$G(x) = \begin{cases} x & x \in]-\infty, -1[\\ 0 & x = -1 \\ x^2 & x \in]-1, +\infty[\end{cases}$$

a) $G_1(x) = x$ continue sur $]-\infty, -1[$ et dérivable $G_1'(x) = 1$ continue

donc $\mathcal{E}^1$ sur $]-\infty, -1[$ $\lim_{x \rightarrow -1^-} G_1(x) = -1$ existe limite

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} G_1'(x) = +1 \quad "$$

$G_2(x) = x^2$ continue et dérivable sur $]-1, +\infty[$

$G_2'(x) = 2x$ continue sur $]-1, +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} G_2(x) = 1$ existe limite

Donc $G(x)$ est $\mathcal{E}^1$ par

$\lim_{x \rightarrow -1^+} G_2'(x) = -2$ "

morceaux sur $\mathbb{R}$.

Donc $G(x)$ $\mathcal{E}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$

Rappelons que G' est prolongement de la dérivée de G , par

exemple $G'(x) = \begin{cases} 1 & x \in]-\infty, -1[\\ \pi/600 & x = -1 \\ 2x & x \in]-1, +\infty[\end{cases}$

$$b) F(x) = \begin{cases} x + C_1 & x \in]-\infty, -1[\\ \pi/600 + C_2 & x = -1 \\ x^2 + C_3 & x \in]-1, +\infty[\end{cases}$$

$C_3 = 0$ car $F(x) = 0$ (énoncé)

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} F(x) = F(-1)$$

$$\Leftrightarrow 1 = -1 + C_1 = C_2 - \frac{\pi}{600}$$

$$\Leftrightarrow C_1 = 0, C_2 = 1 + \frac{\pi}{600}$$

$$\text{Donc } F(x) = \begin{cases} x+2 & x \in]-\infty, -1[\\ 1 & x = -1 \\ x^2 & x \in]-1, +\infty[\end{cases}$$

Exercice 18

- a) I théorème fondamental du calcul intégral
- b) Idem
- c) x croissant sur $\mathbb{R}$, $\frac{x^2}{2}$ croissant sur $\mathbb{R}$
- d) $g > 0$, $x < 0$ alors F est négative.
- e) comme F est dérivable, $F' \geq 0 \Rightarrow F'$ positive
- f) vrai si $\int_0^T g(t) dt = 0 \Rightarrow g$ positive
- g) $F(-x) = \int_0^x g(t) dt = \int_0^{-x} g(-t) dt$
 $= -\int_0^x g(t) dt$

Exercice 20

a) $g(x) = (x, x^2 - 2x, x')$ en 0 $(0, 0, 0)$
 $g'(x) = (1, 2x - 2, 12x^2)$ $(1, -2, 0)$
 $g''(x) = (0, 2, 24x)$ $(0, 2, 0)$
 $g^{(3)}(x) = (0, 0, 24)$ $(0, 0, 0)$

d'après Taylor $g(x) = (0, 0, 0) + (1, -2, 0)(x) + \frac{1}{2} (0, 2, 0)(x)^2$
 $+ \frac{1}{6} (0, 0, 0) x^3 + R(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x)}{x^3} = 0$
 $= (x, x^2 - 2x, 0) + R(x)$

b)

Feuille d'exercice 3: Intégrales impropres

Exercice 11

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6n^3} (n(n+1)(2n+1)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}$$

Si on voit u_n comme une somme de Riemann de g sur l'intervalle compact $[0, 1]$

Si $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$

et $\tilde{P}$ est la partition pointée de $[0, 1]$ donnée par

$$0 \quad 1/n \quad 2/n \quad \dots \quad n-1/n \quad 1$$

$$\tilde{P} = \left\{ \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right], \frac{k}{n} \right\}_{k=1, \dots, n}$$

$$\begin{aligned} R(g, \tilde{P}_n) &= \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right) \text{val}\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} \frac{1}{n} = 0 \end{aligned}$$

Mais la fonction $g(x) = x^2$ est Riemann intégrable sur $[0, 1]$

Donc pour $n \rightarrow \infty$ la partition $\tilde{P}_n$ est de taille $\rightarrow 0$ donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(g, \tilde{P}_n) = \int_0^1 g(t) dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{n^2}}} \quad \text{idem} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R(g, \tilde{P}_n) = \int_0^1 g(t) dt = \int_0^1 (1+t^2)^{-1/2} dt = 2(\sqrt{2}-1)$$

Exercice 4

Supposons que $P = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
n'est pas zéro

Soit par contre de généralité, soit $P > 0$

Donc il existe $x_0 \in [0, +\infty[$ tel que $g(x) > P/2 \quad \forall x \geq x_0$

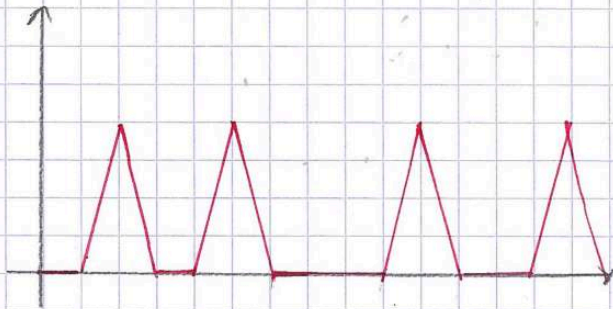
donc $\forall x \in [x_0, +\infty[$, $g(x) > P/2$ (et g et $P/2$ sont deux fonctions positives).

mais la fonction $P/2$ est positive et pas intégrable sur $[x_0, +\infty[$

(puisque $P > 0$) Donc par la proposition de comparaison des fonctions positives g non intégrable sur $[0, +\infty[$.

4) b) Il existe des fonctions intégrables sur $[0, +\infty[$ mais qui n'ont pas de limite pour $x \rightarrow +\infty$

Soit $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$



Riemann intégrable sur chaque sous-intervalle compact

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x g(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{2}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < +\infty$$

Exercice 1

	$]0, 1]$	$[1, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$\mathbb{R}$
1	oui	non	non	non
t	oui	non	non	non
e^{-t}	oui → continue	oui → comparaison $1/t^2$	oui	non
e^{-t+1}	oui	$= e^{-t}$ oui	oui	oui
te^{-t^2}	oui	oui	oui	oui $O(1/t^2)$
e^{-t^2+2t}	oui	oui	oui	oui
$\frac{1}{\sqrt{t}} \sin(1/t)$	majoré par $\frac{1}{\sqrt{t}}$ et intégrable en 0 ?			

$$\left| \frac{1}{\sqrt{t}} \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \left| \sin(t) \right|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{donc } g_8 \text{ intégrable en } 0$$

$$\text{en } +\infty \quad \sin(1/t) \sim \frac{1}{t} \quad \frac{1}{\sqrt{t}} \sin\left(\frac{1}{t}\right) \sim \frac{1}{t^{3/2}}$$

Par Proposition du cours $3/2 > 1$

	oui	oui	oui	oui
$\sin(t)$	oui	non	non	non
1	oui	oui	oui	oui
$(1+t)(1+t+2)$				

$\frac{1}{\cosh(t)}$	oui	oui	oui	oui
$\frac{1 - \cos(t)}{t^2}$	oui	oui	oui	oui
$\frac{\log(t)}{(1+t)^2}$	oui $O(1/t^2)$	oui $O(1/t^{3/2})$	oui	oui

Exercice 8

$$I_m = \int_{0+\infty} \frac{e^{-mt}}{1+t^2} dt \quad \text{pour } t > 0$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} e^{-mt} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{e^{-mt}}{1+t^2} \text{ converge simplement}$$

$$\text{vers } g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} g(t) dt = 0$$

Donc par le théorème de convergence dominée $t \mapsto g_m(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$

On cherche une fonction g intégrable telle que $|g_m(t)| \leq g(t)$ $\forall m \geq m_0$

Soit $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$ g est bien intégrable sur $[0, +\infty[$

$$\text{et } \left| \frac{e^{-mt}}{1+t^2} \right| = \frac{e^{-mt}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

Convergence dominée

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int g_m(t) dt = \int \lim_{m \rightarrow +\infty} g_m(t) dt = \int g(t) dt = 0$$

$$L_m = \int_{0,+\infty} \frac{t^m}{t^{2m+1}} dt$$

$$\text{Si } 0 \leq t < 1 \quad t^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Soit } g_m(t) = \frac{t^m}{t^{2m+1}}$$

$$t^{2m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{donc } g_m(t) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Si } t = 1 \quad g_m(1) = 1/2$$

$$t > 1$$

$$\begin{aligned} t^m &\rightarrow +\infty \\ t^{2m} &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

$$g_m(t) = \frac{t^m}{t^{2m}} \nearrow \frac{1}{1+t^{-2m}} =$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = g(t)$ avec $g(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 1 \\ 1/2 & t = 1 \end{cases}$

$$\int_0^{+\infty} g(t) dt = 0$$

Pour appliquer le théorème de convergence dominée montrons la domination uniforme par 0.

Une fonction intégrable :

$$\left| \frac{t^m}{t^{2m}+1} \right| \leq \begin{cases} 1 & t \leq 1 \\ 1/t^2 & t \geq 1 \end{cases} \quad \text{si } m \geq 2$$

car pour $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t^m \leq 1$

$$0 \leq \frac{1}{t^{2m}+1} \leq 1$$

pour $t \geq 1$

$$\frac{t^m}{t^{2m}+1} \leq \frac{t^m}{t^{2m}} = \frac{1}{t^m}$$

$$1+t^{2m} \geq t^{2m} \Rightarrow \frac{1}{1+t^{2m}} \leq \frac{1}{t^{2m}}$$

Ainsi $|f_n(t)| \leq g(t)$ avec $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 1 \\ 1/t^2 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} (1/t)^m &= \frac{1}{t^2} \times \left(\frac{1}{t}\right)^{m-2} \leq \frac{1}{t^2} \quad \text{si } t \geq 1 \\ &\leq \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

On peut appliquer le théorème de convergence ~~uniforme~~ dominée et

déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^m}{t^{2m}+1} dt = 0$

$$M_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^m}{t^{2m}+1} dt$$

$$f_n(t) = \frac{t^m}{t^{2m}+1} \longrightarrow \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1/2 & t = 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

$$t \geq 1 \quad \frac{t^m}{t^{2m}+1} = \frac{t^m}{t^{m+2} \left(1 + \frac{1}{t^{m+2}}\right)} = \frac{1}{t^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{t^{m+2}}}$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = g(t)$ avec $g(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1/2 & t = 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} g(t) dt &= \int_0^1 g(t) dt + \int_1^{+\infty} g(t) dt \\ &= 0 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \\ &= \left[-1/t\right]_1^{+\infty} \end{aligned}$$

Dominat'ion : $|f_n(t)| \leq g(t) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

avec $g(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 1/t^2 & t \geq 1 \end{cases}$

• pour $0 \leq t \leq 1$

$$0 \leq t^m \leq 1$$

$$\frac{1}{t^{m+2} + 1} \leq 1$$

• pour $t \geq 1$ $\frac{t^m}{t^{m+2} + 1} \leq \frac{t^m}{t^{m+2}} = \frac{1}{t^2}$ g est intégrable.

Donc le théorème de convergence dominée $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ et l'intégrale

Ainsi: $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \int_0^{+\infty} g(t) dt = 1$

$$N_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$$

avec $f_n(t) = \begin{cases} (1+t/n)^n e^{-2t} & \text{si } t \leq n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$

Rappel: $P_n(1+u) \leq e^u \quad u \geq 0$

$$P_n(1+t/n) = \frac{t}{n} + o(t/n)$$

quand $n \rightarrow +\infty$

Donc $n P_n(1+t/n) = t + o(1)$

D'où $e^{n P_n(1+t/n)} \rightarrow e^t$

Ainsi pour $t > 0$ fixe et $n \geq t$ on a

$$f_n(t) = (1+t/n)^n e^{-2t} \quad \text{alors} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = \frac{e^t e^{-2t}}{e^{-t}} = e^{-t}$$

Dominat'ion $|f_n(t)| \leq e^{-t}$

car $e^{-2t} e^{n P_n(1+t/n)} \leq e^{n(t/n)} e^{-2t} \leq e^{-t}$

Théorème de convergence dominée on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty}$$

$$J_m = \int_0^{\pi/4} (\tan(t))^m dt$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \tan(t)^m = \begin{cases} 0 & t \in [0, \pi/4[\\ 1 & t = \pi/4 \end{cases}$$

Riemann intégrable $1(\tan(t))^m \leq 1$ on $g \mapsto 1$ et intégrable en $[0, \pi/4]$

Théorème de convergence dominée $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/4} (\tan(t))^m dt = 0$

$$K_m = \int_{\mathbb{R}, +\infty[} \frac{\sin(t)^m}{t^2} dt$$

soit $g_m(t) = \frac{\sin^m(t)}{t^2}$ est Riemann intégrable sur tout intervalle compact de $]0, +\infty[$ car elle est continue sur $]0, +\infty[$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\sin^m(t)}{t^2} = \begin{cases} 0 & t \notin \{\pi/2 + k\pi\} \\ 1/t^2 & t \in \{\pi/2 + 2k\pi\} \\ \infty & t \in \{-\pi/2 + 2k\pi\} \end{cases}$$

$$\text{Soit } \tilde{g}_m(t) = \begin{cases} \frac{\sin^m(t)}{t^2} & t \in [0, +\infty[\\ 0 & t \in \{-\pi/2 + 2k\pi\} \end{cases}$$

$$K_m = \int_{\mathbb{R}, +\infty[} \tilde{g}_m(t) dt$$

$$\text{Soit } g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 1 \\ 1/t^2 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}, +\infty[} \tilde{g}_m(t) dt$$

Domination de $\tilde{g}_m(t)$ on a $|\tilde{g}_m(t)| \leq g(t)$ pour $m \geq 2$

$$\text{car } |\sin^2 t| \leq t^m = t^2 \times t^{m-2} \leq t^2$$

pour $t \leq 1$

si $m \geq 2$

$$|\tilde{g}_m(t)| \leq g(t)$$

$$\left| \frac{\sin^m(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$$

g est bien intégrable car continue sur $[0, +\infty[$ et $1/t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

$$\text{Par théorème } \Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} K_m = \int_0^{+\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} \tilde{g}_m(t) dt = 0$$

Exercice 4

4

1) Soit $g(x, t) = e^{-t^2} e^{itx}$

$t \mapsto g(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x \mapsto g(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Domination $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, |g(x, t)| < \varphi(t)$ avec $\varphi(t) = e^{-t^2}$

$|g(x, t)| = |e^{-t^2} e^{itx}| = e^{-t^2} |e^{itx}| = e^{-t^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$

D'après le théorème de continuité d'une intégrale généralisée à paramètre, on déduit la continuité de g .

$t \mapsto g(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x \mapsto g(x, t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = it e^{-t^2} e^{itx}$

$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$

$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$

Domination $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \left| it e^{-t^2} e^{itx} \right|$
 $= |t| e^{-t^2}$

Ainsi $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \varphi(t)$

avec $\varphi(t) = |t| e^{-t^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue sur $\mathbb{R}$ et $\varphi(t) = o(1/t^2)$

g est dérivable de dérivée

$$g'(x) = \int_{\mathbb{R}} it e^{-t^2} e^{itx} dt$$

2) Par IPP $v'(t) = t e^{-t^2} \quad u(t) = i e^{itx}$
 $v(t) = -\frac{1}{2} e^{-t^2} \quad u'(t) = -ix e^{itx}$

D'où $g'(x) = \left[-\frac{i}{2} e^{itx} e^{-t^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} e^{-t^2} x e^{itx} dt$
 $= -\frac{x}{2} g(x)$

car $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left| -\frac{i}{2} e^{itx} e^{-t^2} \right| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{-t^2}}{2} = 0$

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{itx} dt \quad \text{alors} \quad g(x) = C e^{-x^2/4} \quad \text{on} \quad g(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

$$\text{D'où} \quad g(x) = \sqrt{\pi} e^{-x^2/4}$$

$$3) \quad g(u) = e^{-u^2/2}$$

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi u} e^{-u^2/2} du$$

changement de variable $u = \sqrt{2}t$

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\sqrt{2}\xi t} e^{-t^2} \sqrt{2} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{it(-\sqrt{2}\xi)} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} g(-\sqrt{2}\xi)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \sqrt{\pi} e^{-\frac{(-\sqrt{2}\xi)^2}{4}}$$

$$= e^{-\xi^2/2} = g(\xi)$$

Exercice 2

$$F(x) = \int_{[0, +\infty[} e^{-tx} g(t) dt$$

1) g est bornée, continue sur $\mathbb{R}$, montrons que $F \in C^1([0, +\infty[)$

$$g(x, t) = e^{-tx} g(t)$$

• $t \mapsto g(x, t)$ continue sur $\mathbb{R}^+$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$

• $x \mapsto g(x, t)$ dérivable sur $\mathbb{R}^+$ de dérivée $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -te^{-tx} g(t)$

• $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ $\forall x \in]0, +\infty[$

$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ $\forall t \in [0, +\infty[$

$$\text{Domination} \quad \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq |t| e^{-tx} |g(t)|$$

F est dérivable sur $]0, +\infty[$ si g est dérivable sur $[a, +\infty[$

pour tout $a > 0$

Il suffit donc d'obtenir la domination sur $[a, +\infty[$ $a > 0$

$$\text{Pour tout } x \in [a, +\infty[\quad te^{-tx} \leq te^{-at}$$

Ainsi, il existe $\varphi: t \mapsto te^{-at}$ intégrable sur $[0, +\infty[$

$$\text{tel que } \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi_a(t)$$

Du théorème de dérivabilité on déduit F est dérivable sur

$[a, +\infty[\quad \forall a > 0$ alors F est dérivable sur $]0, +\infty[$