Calcul intégral de fonction vectorielle

Semestre 4

Continuité des fonctions vectorielles

Définition de la continuité : $I \to \mathbb{R}^n$ est continue en $x_0 \in I$ si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$

$$\forall x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| < \epsilon$$

f est continue si et seulement si toute coordonnée de f est continue.

Fonction de classe C^k

Si une fonction est de classe C^k alors chacune de ses composantes est de classe C^k.
Une fonction f est un C^k difféomorphisme si f est bijective $f \in C^k(I, J)$ et $f^{-1} \in C^k(J, I)$.

f est un C^k difféomorphisme de I vers $f(I)$ est équivalent à $f'(x) \neq 0$.

Une fonction est dite C^k par morceaux sur (a, b) si ils existent $a_0 = a < a_1 < ... < a_{r-1} < a_r = b$ avec $f_{1(a_i, a_{i+1})} \in C^k((a_i, a_{i+1}), \mathbb{R}^n)$.

Intégrales de Riemann

Une fonction est bornée si chacune composante l'est.

Somme de Riemann de f par rapport à la partition P

$$\mathcal{R}(f, P) := \sum_{i=1}^{r} f(p_i) vol(I_i)$$

$$||\int_a^b f(t)dt|| \leq \int_a^b ||f(t)||dt$$

$$||\int_a^b f(t)dt|| \leq (b - a) \sup_{[a,b]} ||f||$$

Application de l'intégrale

Inégalités des accroissements finis:

$$||f(b) - f(a)|| \leq c(b - a)$$

Prolongement des fonctions de classe C^k
si f est continue sur I, de classe C^k sur $I \setminus \{x_0\}$ et $l_r = \lim_{x \to x_0} f^{(k)}(x)$ alors f est de classe C^k sur I et $f^{(r)}(x_0) = l_r$.

Dérivabilité des fonctions vectorielles

La fonction f est dérivable en x_0 si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe dans $\mathbb{R}^n$.

f est dérivable en x_0 si et seulement si chaque coordonnée est dérivable en x_0.
Si f, g sont dérivable alors

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

$$(f o \phi)'(x) = \phi'(x) f'(\phi(x))$$

Soit une forme bilinéaire

$$(b(f, g))'(x_0) = b(f'(x_0), g(x_0)) + b(f(x_0), g'(x_0))$$

Rappel sur l'intégrale de Riemann

Volume : $vol([a, b]) = b - a$
Taille : maximum des volumes
Partition pointée : $\{(I_1, p_1), ..., (I_r, p_r)\}$
Somme de Riemann :

$$\mathcal{R}(f, P) = \sum_{n=1}^{r} f(p_i) vol(I_i)$$

Riemann-intégrable :

$$\sum_{i=1}^{n} (\sup f - \inf f) vol(I_i) < \epsilon$$

Si f est **continue par morceaux** alors f est Riemann-intégrable.

Une fonction continue sur un intervalle compacte est uniformément continue.

Propriétés : linéarité, additivité, monotonie.

Les théorèmes fondamentaux

Premier théorème fondamental du calcul intégral: $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est une antidérivée de f qui s'annule en $x = a$.

Deuxième théorème fondamental du calcul intégral: Soit f une fonction bornée si F_1 et F_2 existent alors $F_1 = F_2 + cte$, la fonction F_a est unique, si F est une anti dérivée alors

$$\int_a^b f(t)dt = [F]_a^b = F(b) - F(a)$$

Calcul différentiel de fonction vectorielle

Semestre 4

Méthodes d'intégration

$$\int_a^b \tilde{f}(t)dt = f(b) - f(a)$$

$$\int_a^b \tilde{\phi}'(t)f(t)dt = [\phi f]_a^b - \int_a^b \phi(t)\tilde{f}'(t)dt$$

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Définition

Soit f bornée, Riemann-intégrable sur un compact de I

$$\int_I f(t)dt = \lim_{x\to\inf(I)} \int_x^{x_0} f(t)dt + \lim_{x\to\sup(I)} \int_x^{x_0} f(t)dt$$

Formules utiles :

- $\int\limits_{[1,+\infty[} \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge si $\alpha > 1$ vers $\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$
- $\int\limits_{]0,1]} \frac{1}{t^\beta}dt$ converge si $\beta < 1$ vers $\frac{1}{1-\beta}$

Critère d'intégrabilité

Si f est positive alors f est intégrable si $\exists M > 0$ tel que $\int_a^b f(t)dt \leq M$.
Si f est borné alors f est intégrable.
f est intégrable si et seulement si F est bornée.

Comparaison à une série

La série $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable si f est positive décroissante.

Limites et intégrales

Convergence dominée de Lebesgue : On suppose $\|f_l(t)\| \leq \|g(t)\|$ et $\lim_{t\to+\infty} f_l(t) = f(t)$ alors

$$\lim_{t\to+\infty} \int_I f_l(t)dt = \int_I f(t)dt$$

Formules de Taylor

$$P_{f,n,x_0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Taylor avec reste intégral :

$$f(x) - P_{f,n,x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!}\tilde{f}^{(n+1)}(t)dt$$

Taylor Lagrange:

$$||f(x) - P_{f,n,x_0}(x)|| \leq \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}c$$

Propriétés

La linéarité et additivité.
Théorème fondamental pour les intégrales impropres : Soit $f \in \mathcal{CM}(I)$ et soit F une anti-dérivée

$$\int_I f(t)dt = \lim_{x\to\sup(I)} F(x) - \lim_{x\to\inf(I)} F(x)$$

Si f est continue positive et Riemann-intégrable alors

$$\int_I f(t)dt = 0 \Rightarrow f(t) = 0$$

Intégration par partie :

$$\int_I \tilde{\phi}'(t)f(t)dt = \lim_{x\,\sup(I)} \phi(x)f(x) - \lim_{x\to\inf(f)} \phi(x)f(x) - \int_I \phi(t)\tilde{f}'(t)dt$$

Normes et intégrales impropres

Si on a $\lim_{x\to a} f(x) = \underbrace{l} \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f_i(x) = l_i$, f est intégrable si et seulement si f_i est intégrable

$$\|\int_I f(t)dt\| \leq \int_I \|f(t)\|dt$$