Mathématiques

Calcul Intégral Semestre 4

Notations et Conventions

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs, $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers, $\mathbb{Q}$, l'ensemble des rationnels $\cdots$

Table des matières

Première partie

Calcul différentiel de fonction vectorielle

Définition 0.1. Une FONCTION VECTORIELLE définie sur un intervalle (réel) I est une fonction $f : I \to \mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$.

Remarque 0.1. Si $n = 1$, on a des fonctions "numériques" classiques, c'est à dire des fonctions réelles à variable réelle.

Exemple 0.1. $f : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, avec $f(t) = (1,t)\ \forall t \in [0,1]$
$g : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, avec $g(t) = (cos(t), \exp(-\arctan(t)), t^2 + 2)$.
Il sera utile d'écrire une fonction vectorielle en termes de ses coordonnées, plus précisément, si $f : I \to \mathbb{R}^n$, alors, $f(t) = (f(t), \dots, f_n(t))$ avec $f_i : I \to \mathbb{R}\ \forall i = 1, \cdots, n$ avec $f_i := \pi_i of$ où $\pi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_i \end{cases}$ pour tout $i = 1, \cdots, n$.

Remarque 0.2 (Idée)**.** Développer un calcul différentiel (continuité, dérivabilité, intégration) pour des fonctions vectorielles.

1 Continuité des fonctions vectorielles

Remarque 1.1. Une NORME sur $\mathbb{R}^n$ est une application $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ avec

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \in \mathbb{R}^n$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Remarque 1.2. Nous rappelons les définitions suivantes

— $\|(x_1, \cdots, x_n)\|_p = (\sum\limits_{i=1} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$
— $\|(x_1, \cdots, x_n)\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$
— $\|(x_1, \cdots, x_n)\|_\infty = \max\limits_{i=1,\cdots,n} |x_i|$

Exemple 1.1. Une norme sur $\mathbb{R}^n$ donne une distance sur $\mathbb{R}^n$, ($d_{\|.\|}(x,y) = \|x - y\|$) donc une notion de "être proche".

Proposition 1.1. *Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes c'est à dire la notion de "être proche" dans $\mathbb{R}^n$ ne dépend pas du choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.*

Définition 1.1. Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Une fonction vectorielle $f : I\mathbb{R}^n$ est CONTINUE en $x_0 \in I$ si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I, |x - x_0| < \delta \text{ alors } \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$$

Remarque 1.3. La définition ne dépend pas du choix de $\|.\|$ grâce à la proposition précédente.

Définition 1.2. $f : I \to \mathbb{R}^n$ est dite CONTINUE SUR I si f est continue en x_0 $\forall x_0 \in I$.

Proposition 1.2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ alors f est continue si et seulement si toute coordonnée de f est continue.*

Démonstration. D'une part ($\Rightarrow$) considérons $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la i-ème projection. Elle est une fonction continue (au sens topologique). Alors $f_i = \pi_i o f$ donc f_i est continue état composition de fonctions continues (preuve alternative, plus directe en TD).

D'autre part ($\Leftarrow$) on suppose que $f = (f_i, \cdots, f_n)$ et $f_1, \cdots, f_n$ sont continues en $x_0 \in I$ ($f_i : I\mathbb{R}$). Par définition $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_i > 0 |x - x_0| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(x_0)| < \frac{\epsilon}{n}$. On veut prouver que f est continue choisissons par exemple la norme 1, $\|.\|_1$. Soit $\epsilon > 0$ et prenons $\delta = \min \delta_i > 0$ alors si $|x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow |x - x_0| < \delta_i \ \forall i = 1, \cdots, n \\
&\Rightarrow |f_i(x) - f_i(x_0)| < \frac{\epsilon}{n} \ \forall i = 1, \cdots, n \\
&\Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |f_1(x) - f_i(x_0)| < \epsilon
\end{aligned}$$

donc f est continue en x_0. □

Exemple 1.2. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ et $t \mapsto (1, t)$ est continue.

Exemple 1.3. $g : \begin{cases} [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (\delta_0, t) \end{cases}$ n'est pas continue (symbole de Kronecker).

Il suffit d'avoir une composante pas continue pour ne pas avoir continuité de la fonction vectorielle.

2 Dérivabilité des fonctions vectorielle

Définition 2.1. Une fonction vectorielle $f : I \to \mathbb{R}^n$ est dite DÉRIVABLE en $x_0 \in I$ si la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe dans $\mathbb{R}^n$. Das ce cas, la limite s'appelle la DÉRIVÉE de f en x_0 et elle est notée $f'(x_0) \in \mathbb{R}^n$. La fonction f est dite DÉRIVABLE SUR I si elle est dérivable en tout point $x_0 \in I$.

Remarque 2.1. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = v$ si $\|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - v\| \to 0$ peu importe quelle norme $\|.\|$ de $\mathbb{R}$.

Proposition 2.1. *$f : I \to \mathbb{R}^n$ est dérivable en $x_0 \in I$ si et seulement si chaque coordonnée est dérivable en x_0 et on a*

$$f'(x_0) = (f_1'(x_0), \cdots, f_n'(x_0))$$

Démonstration. D'une part ($\Rightarrow$) soit f dérivable en x_0, $f'(x_0) = ((f'(x_0))_1, \cdots, (f'(x_0))_n)$. La définition de limite (avec la norme $\|.\|_\infty$) nous dit que

$$\|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - ((f'(x_0)), \cdots, (f'(x_0))_n)\|_\infty \to 0$$

De plus

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = (\frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0}, \cdots, \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0})$$

On a donc par la définition de $\|.\|_\infty$

$$\max_{i=1,\cdots,n} |\frac{f_i(x)-f_i(x_0)}{x-x_0} - (f'(x_0))| \to 0$$

donc en particulier

$$|\frac{f_i(x)-f_i(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)_i| \to 0$$

$$\frac{f_i(x)-f_i(x_0)}{x-x_0} \to (f'(x_0))_i \in \mathbb{R}$$

donc f_i est dérivable en x_0.

$$f_i'(x_0) = (f'(x_0))_i \ \forall i = 1, \cdots, n$$

Donc $f'(x_0) = f$ donc la limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = (f'(x_0), \cdots, f_n'(x_0)) \in \mathbb{R}^n$$

f est dérivable en x_0 et de dérivée

$$f'(x_0) = (f_1'(x_0), \cdots, f_n'(x_0))$$

D'autre part ($\Leftarrow$) supposons que $\forall i = 1, \cdots, n, f_i$ est dérivable en x_0 de dérivée $f_i'(x_0)$. Choisissons $\|.\|_\infty$

$$\|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - (f_1'(x_0)\cdots f_n'(x_0)\|_\infty = \max_i |\frac{f_i(x)-f_i(x_0)}{x-x_0} - f_i(x_0)| \to 0$$

donc la limite $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = (f_1'(x_0)\cdots f_n'(x_0))$ donc f est dérivable en x_0 et de dérivée

$$f'(x_0) = (f_1'(x_0)\cdots f_n'(x_0))$$

□

Remarque 2.2. On peut définir aussi les dérivées à droite et à gauche des fonctions vectorielles. Encore une fois, on a les liens avec les dérivées à droite et à gauche des coordonnées.

Proposition 2.2. *Soit les propriétés suivantes*

1. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}^n$ avec f, g dérivables en $x_0 \in I$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha d + \beta g$ est dérivable e x_0 et $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$ (linéarité de la dérivée).*
2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ avec I intervalle ouvert. Si $f'(x) = 0 \forall x \in I$, alors f est (un vecteur) constant.*
3. *Soient I, J deux intervalles réels, $\phi : I \to J$ dérivable sur I et $f : J \to \mathbb{R}^n$ dérivable. Alors $fo\phi : I \to \mathbb{R}^n$ est dérivable et de dérivée*

$$(fo\phi)'(x) = \phi'(x)f'(\phi(x))$$

pour tout $x \in I$

Démonstration. .

1. Il suffit de vérifier que toutes les coordonnées de $\alpha f+\beta g$ sont dérivables. Mais $(\alpha f+\beta g)_i = \alpha f_i+\beta g_i, \forall i = 1, \cdots, n$. Mais f_i et g_i sont dérivables. $\alpha f_i + \beta g_i$ est dérivable, selon le cours d'Analyse 1. Donc $\alpha f + \beta g$ est dérivable et de dérivée

$$(\alpha f_1' + \beta g_1', \cdots, \alpha f_n' + \beta g_n') = \alpha(f_1', \cdots, f_n') + \beta(g_1', \cdots, g_n') = \alpha f' + \beta g'$$

2. Exercice
3. Exercice

□

Et pour le produit ? Mieux vaut considérer des formes bilinéaires.

Proposition 2.3. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}^n$ dérivables en $x_0 \in I$ et soit $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire alors $b(f, g) : I \to \mathbb{R}$*

$$b(f, g) : x \mapsto b(f(x), g(x))$$

est dérivable en x_0 et de dérivée

$$(b(f, g))'(x_0) = b(f'(x_0), g(x_0)) + b(f(x_0), g'(x_0))$$

Démonstration. Voir en TD □

Exemple. Pour $n = 1$ et $b : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy \end{cases}$ on a $b(f, g) = fg$ donc l'énoncé coïncide avec celui d'Analyse 1 pour le produit.

Exemple. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$ ($\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}\ \forall x \in \mathbb{R}^n$) et soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable. Calculer la dérivée de $\|f\|_2 : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \|f(x)\|_2 \end{cases}$.

On a que

— $\langle f, f \rangle : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I

— ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Donc D'après Analyse 1 on a que $\|f\|_2 = \phi o(\langle f, f \rangle)$ est dérivable pour x tel que $\langle f(x), f(x) \rangle \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 0$ et la dérivée est

$$\begin{aligned}
(\|f\|_2')(x) &= (\langle f, f \rangle)'(x).\phi'(\langle f, f \rangle(x)) \\
&= (\langle f', f \rangle + \langle f, f' \rangle)(x) \times \frac{1}{2\sqrt{\langle f, f \rangle(x)}} \\
&= 2\langle f, f' \rangle(x) \times \frac{1}{2\|f(x)\|_2} \\
&= \frac{\langle f(x), f'(x) \rangle}{\|f(x)\|_2}
\end{aligned}$$

3 Fonctions de Classe C^k par morceaux

3.1 Fonctions de classe C^k

On supposera toujours I dérivable ouvert et non vide

Définition 3.1. Une fonction vectorielle $f : I \to \mathbb{R}^n$ est dite de classe C^k sur I si f est k-fois dérivable sur I et la dérivée k-ième $f^{(k)}$ est continue. On écrire $f \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$

Remarque 3.1. $C^0(I, \mathbb{R}^n) = \{f : I \to \mathbb{R}^n \text{ continue}\}$

Remarque 3.2. Si $l \geq k$ $C^l(I, \mathbb{R}^n) \supseteq C^k(I, \mathbb{R}^n)$.
En fait soit $f \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$, donc f est k fois dérivable donc f est l fois dérivable. Il reste a prouver que $f^{(l)}$ est continue mais

— si $l = k$, trivial

— si $l < k$, $f^{(l)}$ est dérivable (parce que f admet la dérivée d'ordre $l + 1$) mais dérivable implique continue.

Remarque 3.3. On peut aussi donner la définition de C^k par récurrence sur K, c'est à dire

— f est de classe C^0 si f est continue

— f est de classe C^{k+1} (avec $k \geq 0$) si f est dérivable et $f' \in C^k$.

Définition 3.2. Une fonction vectorielle $f : I \to \mathbb{R}^n$ est dite de classe C^∞ sur I si f est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. On écrira $f \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$.

Remarque 3.4. $C^\infty(I, \mathbb{R}^n) = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} C^k(I, \mathbb{R}^n)$

Exemple 3.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \begin{cases} 0 \text{ si} x \leq 0 \\ x^2 \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

$$f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}, f'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ 2x \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Exemple 3.2.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (log(x); x^2 + \sin(x)) \end{cases}$$

Corollaire 3.1. *$f : I \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^k sur I c'est équivalent à dire que chaque coordonnée de f est de classe C^k.*

Proposition 3.1.
1. *$C^k(I, \mathbb{R}^n)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$*
2. *si $f \in C^k(I, \mathbb{R})$ et $g \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$, alors le produit scalaire $fg = (fg_1, \cdots, fg_n)$ est dans $C^k(I, \mathbb{R}^n)$*
3. *si $f \in C^k(I, \mathbb{R}^n), \phi \in C^k(J, I)$ avec J, I intervalles ouverts réels, alors $fo\phi \in C^k(J, \mathbb{R}^n)$*

Démonstration.
1. exercice (utiliser le corollaire)
2. .

3. on utilise la définition par récurrence sur k.
   — $k = 0$ (composition des fonctions continues est continu)
   — supposons que le résultat est vrai pour k fixé positif. On le prouve pour $k+1$. Donc f et ϕ sont dérivables donc $fo\phi$ est dérivable et $(fo\phi)'(x) = \phi'(x).f'(\phi(x))\forall x \in J$ donc par hypothèse de récurrence $f'o\phi \in C^k(J, \mathbb{R}^n)$.
   D'autre part, on utilise 2) pour déduire que $(fo\phi)' = \phi'(f'o\phi)$ est de classe C^k donc par définition $fo\phi \in C^{k+1}(I, \mathbb{R}^n)$.

□

3.2 C^k- Difféomorphismes

Dans cette section on s'intéresse uniquement à des fonctions réelles des variables réelles

Définition 3.3. Soient I, J deux intervalles ouverts : réels. Une fonction $f : I \to J$ est dite un C^k difféomorphisme (avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) si

1. f bijective
2. $f \in C^k(I, J)$
3. $f^{-1} \in C^k(J, I)$

Exemple 3.3. exp : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ elle est bijective, de réciproque log : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Comme exp $\in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ et log $\in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ alors exp est un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^+$.

Proposition 3.2. *Soient I un intervalle ouvert réel. $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^k(I, \mathbb{R})$ avec $k \geq 1$ alors f est un C^k difféomorphisme de I vers $f(I)$ est équivalent $f'(x) \neq 0 \forall x \in I$.*

Démonstration. D'une part ($\Rightarrow$) Si f est un C^k-difféomorphisme, alors en particulier, f est inversible, donc il existe f^{-1} avec $f^{-1}of = id$.
Or, $(f^{-1}of)(x) = x\forall x \in I$. Mais, D'après la définition de C^k difféomorphisme et comme $k \geq 1$, f, f^{-1} sont dérivables, donc $1 = (f^{-1}of)'(x) = (f-1)'(f(x)).f'(x)\forall x \in I \Rightarrow f'(x) \neq 0\forall x \in I$.
D'autre part ($\Leftarrow$) il faut prouver que

— f bijective
— $f \in C^k(I, f(I))$ (déjà vérifié par hypothèse)
— $f^{-1} \in C^k(f(I), I)$

Prouvons d'abord que f est bijective sur son image comme $f \in C^1(I, \mathbb{R}), f'$ est continue sur I, mais par hypothèse, $f'(x) \neq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f'(x) > 0\forall x \in I$ ou $f'(x) < 0\forall x \in I$ ainsi f est strictement monotone et donc f est bijective sur son image $f(I)$.
Donc il existe $f^{-1} : f(I) \to I$. On va prouver que $f^{-1} \in C^k(f(I), I)$. On voit D'après Analyse 1 que f^{-1} est dérivable sur $f(I)$, de dérivée

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Pour prouver que $f^{-1} \in C^k(f(I), I)$ on peut prouver que $(f^{-1})' \in C^{k-1}(f(I), I)$ mais

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$$

Par récurrence , $f^{-1} \in C^k$.

— $k = 0$ implique f^{-1} est continue (Analyse I)

— Supposons que $f^{-1} \in C^k(k > l \geq 0)$ prouvons que $f^{-1} \in C^{l+1}$. Si $f^{-1} \in C^l, f' \in C^{k-1} \subseteq C^l \Rightarrow f'of^{-1} \in C^l \Rightarrow \dfrac{1}{f'of^{-1}} \in C^l \Rightarrow (f^{-1})' \in C^l \Rightarrow f^{-1} \in C^{l+1}$.

Comme on peut utiliser la récurrence pour tout $l < k$, on obtient (à la dernière étape) $f^{-1} \in C^k(f(I), I)$. □

3.3 Fonctions de classe C^k par morceaux

Définition 3.4. Une fonction $f : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est dite de classe C^k par morceaux sur (a, b) (avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) si ils existent $a_0, \cdots, a_r \in [a, b]$ donc $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_{r-1} < a_r = b$ avec

1. $f_{]a_i,a_{i+1}[} \in C^k((a_i, a_{i+1}), \mathbb{R}^n) \forall i = 0, \cdots, r-1$
2. la limite droite de f et la limite gauche de f est finie pour tout point de discontinuité.

Proposition 3.3. *Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ avec I un intervalle réel ouvert $f \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ alors f constante est équivalente à $f'(x) = 0$ $\forall x$ où f est dérivable.*

Démonstration. D'une part ($\Rightarrow$) trivial.

D'autre part ($\Leftarrow$) on sait que il existe $a_0, \cdots, a_{r-1}$ avec f est dérivable (et de dérivée nulle) sur chaque $]a_i, a_{i+1}[, i \in \{0, \cdots, r-1\}$ alors $f_{|]a_i,a_{i+1}[}(x) = c_i$ pour tout $i \in \{0, \cdots, r-1\}$ avec $c_i \in \mathbb{R}^n$. Mais f est continue, donc $\forall i \in \{1, \cdots, r-1\}, c_{i-1} = \lim\limits_{x \to a_i^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a_i^+} f(x) = c_i$ Donc $c_0 = c_1 = \cdots = c_{r-1} = c$. Alors $f(x) = c$ sur I. □

4 Intégration

Motivation

Les intégrales sont omniprésentes dans les mathématiques (et dans les autres domaines) en analyse, en probabilité etc... On va voir une application des intégrales à la théorie des nombres.

Théorème 4.1. $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Démonstration. (Niven, 1946) On présente la preuve dûe à Niven, voir [?] Par contradiction on suppose que $\pi \in \mathbb{R}$ ie $\pi = \dfrac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}$. On défini la famille de fonctions suivantes

$$f_n(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!}$$

$$F_n(x) = f_n(x) - f_n^{(2)}(x) + f_n^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)$$

1. Montrons que $f_n(\pi - x) = f_n(x)$

$$\begin{aligned}
f_n(\pi - x) &= \frac{(\pi - x)^n (a - b(\pi - x))^n}{n!} \\
&= \frac{(a/b - x)^n (a - a + bx)^n}{n!} \\
&= \frac{b^n (a/b - x)^n x^n}{n!} \\
&= \frac{(a - bx)^n x^n}{n!} = f_n(x)
\end{aligned}$$

2. Montrons que $f_n^{(j)}(0) \in \mathbb{Z}$ et $f_n^{(j)}(\pi) \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
df_a(x) &= x^n (a - bx)^n \\
&= x^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_k^n a^{n-k} b^k x^k
\end{aligned}$$

Niven

Si $j < n$ on a $f_n^{(j)}(0) = 0$. Si $j \in \{n, 2n\}$ on a

$$f_n^{(j)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=j-n}^{n} (-1)^k a^{n-k} b^k C_k^n (n+k)(n+k-1)\cdots(n+k-j+1)x^{n+k-j}$$

$f_n^{(j)}(0) = \dfrac{1}{n!}(-1)^{j-n} a^{n-j+n} b^{j-n} C_{j-n}^n j! =$ entier $\dfrac{j!}{n!} \in \mathbb{Z}$ parce que $f_n^{(j)}(\pi) \in \mathbb{Z}$ depuis 1) et $f_n^{(j)}(0) \in \mathbb{Z}$ (après calcul différentiel).

3. Calculons la dérivée suivante

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(F'n(x)\sin(x) - F_n(x)\cos(x)) &= F_n''(x)\sin(x) + F_n'(x)\cos(x) - F'(x)\cos(x) + F_n \sin(x) \\
&= (F_n''(x) + F_n(x))\sin(x) \\
&= ((f_n(x) - f_n^{(2)}(x) + \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x))'' \\
&+ (f_n(x) - f_n^{(2)}(x) + \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)))\sin(x) \\
&= (f_n^{(2)}(x) - f_n^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^{n-1} f_n^{(2n)}(x) \\
&+ f_0(x) - f_n^{(2)}(x) + f_n^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x))\sin(x) \\
&= f_n(x)\sin(x)
\end{aligned}$$

4. On a donc que $\int\limits_0^\pi f_n(x)\sin(x)dx = [F'(x)\sin(x) - F(x)\cos(x)]_0^\pi = F_n(\pi) + F_n(0) \in \mathbb{Z}$ par 2
5. Montrons que $\forall x \in]0, \pi[$

$$0 < f_n(x)\sin(x) < \frac{\pi^n a^n}{n!}$$

D'une part $sin(x) > 0$ si $x \in]0, \pi[$ donc $f_0(x) = \dfrac{x^n}{n!}(a - bx)^n > 0$. D'autre part $\sin(x) \leq 1$ et donc $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}(a - bx)^n$

6. En conclusion par monotonie de l'intégrale on a $\int\limits_0^\pi 0dx < \int\limits_0^\pi f_n(x)\sin(x)dx < \int\limits_0^\pi \dfrac{\pi^n a^n}{n!}dx$ et donc $0 < \int_0^\pi f_n(x)\sin(x)dx < \dfrac{\pi^{n+1}a^n}{n!}$ Pour n assez grand et donc $\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)dx$ doit être un entier dans $]0, 1[$

ce qui n'est pas le cas autrement dit on a une contradiction.

□

4.1 Rappel sur l'intégrale de Riemann

Définition 4.1. Une partition d'un intervalle compact $[a,b]$ et une famille $\{I_1, I_2, \cdots, I_n\}$ avec I_i un sous intervalle de $[a,b] \forall i = \{1,2,\cdots,n\}$ et $\bigcup_{i=1}^{r} I_i = [a,b]$ et $I_i \cap I_j$ consiste d'au plus un point si $i \neq j$.

Définition 4.2. Le VOLUME d'un intervalle compact $[a,b]$ est $vol([a,b]) = b - a$

Définition 4.3. Soit $P = \{I_1, I_2, \cdots, I_n\}$ une partition de $[a,b]$. La TAILLE de P est le maximum des volumes de $I_i, i \in \{1, \cdots, n\}$.

Exemple 4.1. Soit $[0,1]$ et $P = \{[0,1/2],[1/2,3/4],[3/4,1]\}$ la taille de P est $1/2$.

Définition 4.4. Une PARTITION POINTÉE de $[a,b]$ est une famille $\{(I_1,p_1),(I_2,p_2),\cdots,(I_r,p_r)\}$ avec

— $\{I_1, I_2, \cdots, I_r\}$ une partition de $[a,b]$

— $p_i \in I \forall i \in \{1,2,\cdots,r\}$

Définition 4.5. Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$ et soit $\tilde{P} = \{(I_1,p_1),(I_2,p_2),\cdots,(I_r,p_r)\}$ une partition pointée de $[a,b]$ alors la SOMME DE RIEMANN de f par rapport à $\tilde{P}$ est

$$\mathcal{R}(f,\tilde{P}) = \sum_{i=1}^{r} f(p_i) vol(I_i)$$

La fonction f est dite Riemann-intégrable et l'intégrale $l \in \mathbb{R}$ si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que pour toute partition pointée $\tilde{P}$ de $[a,b]$ de taille au plus δ on a $|\mathcal{R}(f,\tilde{P}) - l| < \epsilon$.
On écrire dans ce cas $l = \int_a^b f(t)dt$. Les normes de Riemann de f convergent vers une limite finie pour des partitions assez fine. Si f est continue, l est l'aire sous le graphe de la fonction.

Problème. La définition est très difficile à utiliser

Théorème 4.2. *Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$. On a que f est Riemann-intégrable si et seulement si $\forall \epsilon > 0 \exists P$ une partition de $[a,b]$ avec $\sum_{i=1}^{n} (\sup_I f - \inf_I f) vol(I_i) < \epsilon$*

Démonstration. Admise □

Question. Est ce qu'ils existent des fonctions bornées sur $[a,b]$ qui ne sont pas Riemann-intégrable ?

Exemple 4.2. Soit les exemples suivants

— $f : \delta_i$ sur $[0,2]$ est Riemann-Intégrable $\forall \epsilon > 0$, on peut choisir la partition $P = \left\{[0, 1-\frac{\epsilon}{3}],[1-\frac{\epsilon}{3}, 1+\frac{\epsilon}{3}],[1+\frac{\epsilon}{3},2]\right\}$ et on a

$$(\sup_{I_1}(f) - \inf_{I_1}(f)) vol(I_1) + (\sup_{I_2} - \inf_{I_2}) vol(I_2) + (\sup_{I_3}(f) - \inf_{I_3}(f)) vol(I_3) = \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon$$

— $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tel que $f = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases} = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ cette fonction n'est pas Riemann intégrable parce que en utilisant le théorème on a que pour toute partition P de $[0,1]$

$$\sum_{i=1}^{n} (\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f) vol(I_i) = \sum_{i=1}^{n} vol(I_i) = 1$$

Des fonctions avec une suffisante régularité sont Riemann-intégrables.

Théorème 4.3 (Heine-Cantor). *Une fonction continue sur un intervalle compacte est uniformément continue*

Définition 4.6. On rappelle les définitions suivantes

— Continuité : $\forall \varepsilon > 0 \forall x, y \in I \exists \delta > 0, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \delta$

— Continuité uniforme : $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in I$ tel que $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \delta$

Théorème 4.4. *Soit $f \in \mathcal{CM}^0([a,b], \mathbb{R})$ alors f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$*

Démonstration. Comme f est continue par morceaux sur $[a,b]$, on a $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_r = b$ telle que $f_{|]a_{i,i+1}[}$ est continue et $\lim_{x\to a_i^+}$ et $\lim_{x\to a_{i+1}^-} f(x)$ existent finies $\forall i = 0, 1, \cdots, r-1$ donc on peut définir des fonctions $\tilde{f}_i : [a_i, a_{i+1}] \to \mathbb{R}$ continues et bornées (prolongement par continuïté).
Soit $\epsilon > 0$. On voudrait utiliser le théorème de caractérisation de l'intégrabilité à la Riemann. Grâce au théorème de Heine-Cantor les fonctions $\tilde{f}_i$ sont uniformément continues sur $[a_i, a_{i+1}] \Rightarrow \exists \delta_i > 0$ tel que si $x, y \in [a_i, a_{i+1}], |x-y| < \delta_i$ alors $|\tilde{f}_i(x) - \tilde{f}_i(y)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$.
Soit $R = \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f$ ($< \infty$ car f bornée). On peut supposer que $R \neq 0$ (sinon $f = cte$ et donc elle est Riemann intégrable). Posons $0 < \delta < \min \left\{ \delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_{r-1} \frac{\epsilon}{4nR} \right\}$. Soit P une sous partition de $\{[a_0, a_1], [a_1, a_2], \cdots, [a_{r-1}, a_r]\}$ de taille inférieur à δ. On note $P = \{I_1, I_2, \cdots, I_r\}$. Cette partition vérifie le théorème de caractérisation de l'intégrabilité de Riemann, donc on a l'énoncé $\sum_{i=1}^{r} (\sup_{I_i} - \inf_{I_i} f) vol(I_i) < \epsilon$

$$\begin{aligned}
\underbrace{\sum_{i=1}^{r}}_{\text{au moins un } \delta_{ij}} (\sup_{I_i} - \inf_{I_i} f) vol(I_i) + \underbrace{\sum_{i=1}^{r}}_{\text{aucun } \delta_{ij}} (\sup_{I_i} - \inf_{I_i} f) vol(I_i) \\
&< \sum R.\delta + \sum_{I \in [a_i, a_{i+1}]} (\max_I \tilde{f}_k - \min_I \tilde{f}_k) vol(I_i) \\
&< R\delta \# \{I_i \text{ qui contiennent des } \delta_j\} + \sum_{I_i \subseteq]a_k, a_{k+1}[} \frac{\epsilon}{2(b-a)} vol(I_i) \\
&= R\delta 2r + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{I_i \subseteq]a_k, a_{k+1}[} vol(I_i) \\
&< R\delta 2r + \frac{\epsilon}{2(b-a)} vol([a,b]) \\
&< R2r \frac{\epsilon}{4Rr} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

□

Corollaire 4.1. *En particulier, toute fonction continue sur un intervalle compact est Riemann-intégrable.*

Démonstration. Admise □

L'intégrale de Riemann rejouït des propriétés suivantes.

Proposition 4.1. *Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors*

1. *(linéarité) $\lambda f + g$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et*

$$\int_a^b (\lambda f + g)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

2. *(additivité, rotation de Chasles) si $c \in [a,b]$, alors f est Riemann-intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ et*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

3. $$\int_a^a f(t)dt = 0$$

4. *(monotonie) si $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a,b]$, alors*

$$\int_a^b f(t) \leq \int_a^b g(t)dt$$

Démonstration. admise □

Notation. Si $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ et est Riemann intégrable sur $[a,b]$ on note

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

Question. Si f est positive et $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors $f(t) = 0$. L'affirmation est vraie si f est continue, mais pas en général.

Définition 4.7. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ la **fonction caractéristique** de A est la fonction $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$$

Exemple 4.3. Soit $a < c < d$. La fonction $\chi_{\{c\}} : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable et $\int_a^b \chi_{\{c\}}(t)dt = 0$

Remarque 4.1. Plus généralement la valeur de l'intégrale de Riemann de f ne dépend pas des valeurs prises par f dans un ensemble fini de points, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction Riemann intégrable sur $[a,b]$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = f(x) \forall x \in [a,b] \setminus S, \#S < \infty$, alors g est Riemann intégrable et

$$\int_a^b g(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

En effet, on a que

$$g = f + \sum_{s\in S}(g(s) - f(s))\chi_{\{s\}}(x) \;\; \forall x \in [a,b]$$

(en outre, si $x_0 \in [a,b] \setminus S, f(x_0) + \sum\limits_{s\in S}(g(s) - f(s))\chi_{\{S\}}(< x_0) = f(x_0) = g(x_0)$ et si $x_0 \in S, f(x_0) + \sum\limits_{s\in S}(g(s) - f(s))\chi_{\{S\}}(x_0) = f(x_0) + (g(x_0) - f(x_0)).1 = g(x_0)$).

Maintenant on sait que f est Riemann intégrable (hypothèse) et que $\chi_{\{S\}}$ est Riemann intégrable (exemple) alors $g = f + \sum\limits_{s\in S}(g(s) - f(s))\chi_{\{S\}}$ est une combinaison linéaire finie de fonction Riemann intégrable, donc g est Riemann intégrable depuis la proposition en partie 1. Le même énoncé affirme que

$$\int_a^b g(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \sum_{s\in S}(g(s) - f(s))\int_a^b \chi_{\{S\}}(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

Exemple 4.4. Soit $f : \begin{cases} [1,1000] \to \mathbb{R} \\ \log(\dfrac{x}{x^2+1}) - \arctan(\exp(\sin(x))) \end{cases}$. Elle est Riemann intégrable parce que f est continue sur $[1,1000]$. Soit maintenant $g : [1,1000] \to \mathbb{R}$ définie comme

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{6x} \text{ si } x \in N \\ f(x) \text{ autrement} \end{cases}$$

La remarque permet de conclure que g est Riemann-intégrable sur $[1,1000]$.

4.2 Intégrales de Riemann des fonctions vectorielles

(I est un intervalle réel, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

Définition 4.8. Une fonction vectorielle $f : I \to \mathbb{R}^n$ est dire BORNÉE sur I si il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $\|f(x)\| \leq C \forall x \in I$ (pour n'importe quel choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$).

Définition 4.9. Prouver que effectivement la définition ne dépend pas de choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 4.2. *Une fonction vectorielle est bornée en I si et seulement si chacune de ses coordonnées l'est.*

Démonstration. D'une part ($\Rightarrow$) soit $f : I \to \mathbb{R}^n, f = (f_1, \cdots, f_n)$ une fonction bornée alors, $\exists C \in \mathbb{R}, \|f(x)\|_\infty \leq C \forall x \in I$. Mais alors pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$

$$|f_i(x)| \leq \max_{j\in\{1,\cdots,n\}} |f_j(x)| = \|f(x)\|_\infty \leq C \;\forall x \in I$$

donc f_i est bornée.

D'autre part ($\Leftarrow$) soit $f = (f_1, \cdots, f_n)$, avec $f_1, \cdots, f_n$ fonctions (numériques) bornées alors $\exists c_1, \cdots, c_n$ telle que $|f_i(x)| \leq c_i \forall x \in I, \forall i \in \{1, \cdots, n\}$. Prenons $C = \max\{c_1, \cdots, c_n\}$ on a que $\forall x \in I, \|f(x)\|_\infty = \max\limits_{i\in\{1,\cdots,n\}} |f_i(x)| \leq C$ donc $f$est bornée. $\square$

On peut maintenant définir l'intégrale de Riemann pour des fonctions vectorielles bornées.

Définition 4.10. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction bornée sur $[a,b]$. Soit $P = \{(I_1, p_1), \cdots, (I_r, p_r)\}$ une partition pointée de $[a,b]$. La SOMME DE RIEMANN DE f PAR RAPPORT À LA PARTITION P est

$$\mathcal{R}(f,P) := \sum_{i=1}^{r} f(p_i) vol(I_i) \in \mathbb{R}^n$$

La fonction f est Riemann-intégrable si il existe $L \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que pour toute pointée P de taille plus petite que δ on a

$$\|\mathcal{R}(f,P) - L\| < \varepsilon$$

(pour n'importe quel choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$). Dans ce cas, le vecteur L est appelé l'INTÉGRALE DE RIEMANN de f sur $[a,b]$ et noté $\int\limits_a^b f(t)dt$.

Proposition 4.3. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction bornée alors f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si chacun de ses coordonnées est Riemann intégrable sur $[a,b]$. Mais on a que*

$$\int_a^b f(t)dt = (\int\limits_a^b f_1(t)dt, \cdots, \int\limits_a^b f_n(t)dt)$$

Démonstration. D'une part ($\Rightarrow$) On suppose que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, $L = \int\limits_a^b f(t)dt \in \mathbb{R}^n$, $L = (L_1, \cdots, L_n)$. Fixons $i \in \{1, \cdots, n\}$ et on prouve que f est Riemann-intégrable.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est Riemann intégrable, on sait que $\exists \delta > 0$. Pour toute partition pointée P de taille inférieur à δ on a $\|\mathcal{R}(f,P) - L\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow \max\limits_{i \in \{1,\cdots,n\}} |(\mathcal{R}(f,P) - L)_i| < \varepsilon \Rightarrow \max |\mathcal{R}(f_i,P) - L_i| < \varepsilon \Rightarrow |\mathcal{R}(f_i,P) - L_i| < \varepsilon$
D'autre part ($\Leftarrow$) soit $f = (f_1, \cdots f_n)$ avec $f_1, \cdots, f_n$ Riemann intégrables sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$. Donc $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$ $\exists \delta_i > 0$ tel que pour toute partition pointée P de taile inférieur à δ_i o a

$$|\mathcal{R}(f_i,P) - \int\limits_a^b f_i(t)dt| < \varepsilon$$

Donc, posons $\delta = \min\limits_{i \in 1,\cdots,n} \delta_i$ alors, pour toute partition pointée P de $[a,b]$ de taille inférieur à δ on a

$$\|\mathcal{R}(f,P) - (\int\limits_a^b f_1(t)dt, \cdots, \int\limits_a^b f_n(t)dt)\|_\infty = \|(\mathcal{R}(f_1,P) - \int\limits_a^b f_1(t)dt, \cdots, \mathcal{R}(f_n,P) - \int\limits_a^b f_n(t)dt)\|_\infty$$

$$= \max_{i \in \{1,\cdots,n\}} |\mathcal{R}(f_i,P) - \int_a^b f_i(t)dt| < \varepsilon$$

Donc f est Riemann intégrable et $\int\limits_a^b f(t)dt = (\int\limits_a^b f_1(t)dt, \cdots, \int\limits_a^b f_n(t)dt)$.

Cette proposition permet de trouver les propriétés analogues pour pour l'intégrale de Riemann des fonctions vectorielles $\square$

Proposition 4.4. *Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors*
1. (linéarité) $\lambda f + g$ est Riemann intégrable et

$$\int\limits_a^b (\lambda f + g)(t)dt = \lambda \int\limits_a^b f(t)dt + \int\limits_a^b g(t)dt$$

2. *(additivité, relation de Chasles) si $c \in [a,b]$ alors f est Riemann intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ et*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

3. $$\int_a^a f(t)dt = 0$$

Démonstration. Nous prouvons les trois

1. $f = (f_1, \cdots, f_n)$ et $g = (g_1, \cdots, g_n)$. D'après la proposition précédente $f_1, \cdots, f_n, g_1, \cdots, g_n$ sont Riemann-intégrables sur $[a,b]$. D'après le résultat analogue sur les fonctions numériques (voir la proposition de ce matin) $\lambda f_i + g_i$ est Riemann intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b (\lambda f_i + g_i)(t)dt = \lambda \int_a^b f_i(t)dt + \int_a^b g_i(t)dt$.
   Mais $\lambda f + g = \lambda(f_1, \cdots, f_n) + (g_1, \cdots, g_n) = (\lambda f_1 + g_1, \cdots, \lambda f_n + g_n)$ et pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $\lambda f_i + g_i$ est Riemann-intégrable donc $\lambda f + g$ est Riemann intégrable et

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\lambda f + g)(t)dt &= (\int_a^b (\lambda f_1 + g_1)(t)dt, \cdots, \int_a^b (\lambda f_n + g_n)(t)dt) \\
&= (\lambda \int_a^b f_1(t)dt + \int_a^b g_1(t)dt, \cdots, \lambda \int_a^b f_n(tpdt + \int_a^b g_n(t)dt) \\
&= \lambda(\int_a^b f_1(t)dt, \cdots, \int_a^b f_n(t)dt) + (\int_a^b g_1(t)dt, \cdots, \int_a^b g_n(t)dt) \\
&= \lambda \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt
\end{aligned}$$

2. Comme f est Riemann-intégrable $f_1, \cdots, f_n$ sont Riemann-intégrable. D'après la proposition précédente, $f_1, \cdots, f_n$ sont Riemann intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ et

$$\int_a^b f_i(t)dt = \int_a^c f_i(t)dt + \int_c^b f_i(t)dt$$

   donc

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)dt = (\int_a^b f_1(t)dt, \cdots, \int_a^b f_n(t)dt) &= (\int_a^c f_1(t)dt + \int_c^b f_1(t)dt, \cdots, \int_a^c f_n(t)dt + \int_c^b f_n(t)dt) \\
&= (\int_a^c f_1(t)dt, \cdots, \int_a^c f_n(t)dt) + (\int_c^b f_1(t)dt, \cdots, \int_c^b f_n(t)dt) \\
&= \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt
\end{aligned}$$

3. $\int_a^a f(t)dt = (\int_a^a f_1(t)dt, \cdots, \int_a^a f_n(t)dt) = (0, \cdots, 0) = 0$

□

On peut comparer la norme de l'intégrale d'une fonction vectorielle avec l'intégrale d'une fonction vectorielle avec l'intégrale de la norme.

Proposition 4.5. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ alors, $\|f\| : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et*

$$\|\int_a^b f(t)dt\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt$$

Remarque 4.2. Si $n = 1$ la proposition affirme que $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$. Donc la proposition généralise le cas commun des fonctions numériques (en fait un peu plus, car on prouve aussi que si f est Riemann intégrable alors $|f|$ est Riemann intégrable)

Remarque 4.3. La proposition affirme que f est Riemann intégrable alors $\|f\|$ est Riemann intégrable. La réciproque n'est pas vraie par exemple soit $f : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} - \chi_{\mathbb{Q}^c\cap[0,1]} \end{cases}$. Autrement dit $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ -1 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. On a que $|f| = 1$, qui est Riemann intégrable, mais f n'est pas Riemann intégrable.

Corollaire 4.2. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ est Riemann- intégrable et $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$*

$$\|\int_a^b f(t)dt\| \leq (b-a)\sup_{[a,b]} \|f\|$$

Démonstration. (depuis la Proposition 4.5)

$$\|\int_a^b f(t)dt\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt \leq \int_a^b \sup_{[a,b]} \|f\|dt = (b-a)\sup_{[a,b]} \|f\|$$

□

Démonstration. (de la propriété) Comme toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\|x\| \leq C.\|x\|_1 \forall x \in \mathbb{R}^n$. On veut prouver que $\|f\|$ est Riemann-intégrable. Fixons $\varepsilon > 0$ comme f est Riemann-intégrable, $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$ la fonction $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable depuis la proposition. Depuis le théorème de caractérisation de la Riemann Intégrabilité des fonctions numériques. Il existe une partition $P_i = \{I_{ij}, \cdots, I_{ir}\}$ telle que

$$\sum_{j=1}^{r} (\sup_{I_{ij}} f_i - \inf_{I_{ij}} f_i) vol(I_{ij}) < \epsilon$$

considérons un raffinement $P = \{I_1, \cdots, I_n\}$ de $P_1, P_2, \cdots, P_n$. Remarquons que P satisfait

$$\sum_{k=1}^{m} (\sum_{I_k} \sup_{I_k} f_i - \inf_{I_k} f_i) vol(I_k) < \frac{\varepsilon}{nC} \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\} \tag{1}$$

alors on a que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} (\sup_{I_k} \|f\| - \inf_{I_k} \|f\|) vol(I_k) &= \sum_{k=1}^{m} \sup_{x,y \in I_k} (\|f(x)\| - \|f(y)\|) vol(I_k) \\
&\leq C \sum_{k=1}^{m} \sup_{x,y \in I_k} \|f(x) - f(y)\|_1 vol(I_k) \\
&= C \sum_{k=1}^{m} \sup_{x,y \in I_k} (\sum_{l=1}^{n} |f_l(x) - f_l(y)|) vol(I_k) \\
&\leq C \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} (\sup_{I_k} f_l - \inf_{I_k} f_l) vol(I_k) \\
&\leq C \sum_{l=1}^{n} \frac{\varepsilon}{nC} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc $\|f\| : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable. Soit $\varepsilon > 0$ aléatoire. D'après la définition de l'intégrabilité de Riemann $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$ tels que pour toute partition pointée P_i de $[a,b]$ de taille inférieur à δ_i avec $i = 1, 2$.

$$\|\mathcal{R}(f,P) - \int_a^b f(t)dt\| < \varepsilon \tag{2}$$

$$|\mathcal{R}(\|f\|, P_i) - \int_a^b \|f\|(t)dt| < \varepsilon \tag{3}$$

Soit maintenant $P = \{(I_1, p_1), \cdots, (I_r, p_r)\}$ pointée de $[a,b]$ de taille plus petite que $\min(\{\delta_1, \delta_2\})$ alors P satisfait (2) et (3). En général on a que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{R}(f,P)\| &= \|\sum_{i=1}^{r} f(p_i)vol(I_i)\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{r} \|f(p_i)vol(I_i)\| \\
&= \sum_{i=1}^{r} \|f(p_i)\|vol(I_i) = \mathcal{R}(\|f\|, P)
\end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned}
\|\int_a^b f(t)dt\| &= \|\int_a^b f(t)dt - \mathcal{R}(f,P) + \mathcal{R}(f,P)\| \\
&\leq \|\int_a^b f(t)dt - \mathcal{R}(f,P)\| + \|\mathcal{R}(f,P)\| \\
&\underbrace{<}_{(2)} \varepsilon + \|\mathcal{R}(f,P)\| \\
&\underbrace{\leq}_{(3)} \varepsilon + \mathcal{R}(\|f\|, P) = \varepsilon + \mathcal{R}(\|f\|, P) - \int_a^b \|f\|(t)dt + \int_a^b \|f\|(t)dt \\
&\underbrace{<}_{(2)} 2\varepsilon + \int_a^b \|f\|(t)dt
\end{aligned}$$

On a donc que

$$\|\int_a^b f(t)dt\| < \int_a^b \|f\|(t)dt + 2\varepsilon$$

avec $\varepsilon > 0$ arbitraire, donc

$$\|\int_a^b f(t)dt\| \leq \int_a^b \|f\|(t)dt$$

$\square$

4.3 Les théorèmes fondamentaux du calcul intégral

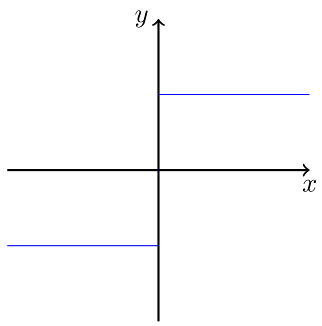
On va explorer la relation entre la dérivée et l'intégrale de Riemann d'une fonction vectorielle

But. Prouver que

$$\int_a^b f(t)dt = [F]_a^b$$

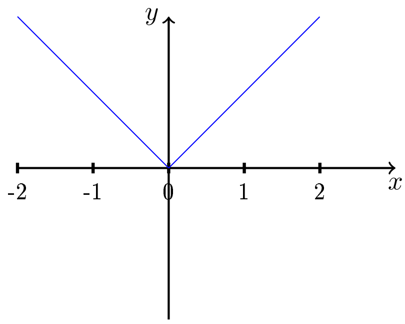
Définition 4.11. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle. Une **antidérivée** de f est une fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continue et telle que pour tout point $x \in [a,b]$ où f est continue on a F dérivable en x et $F'(x) = f(x)$.

Exemple 4.5. Soit $f : \begin{cases} [-2,2] \to \mathbb{R} \\ \chi_{]0,2]} - \chi_{[-2,0[} \end{cases}$ alors :



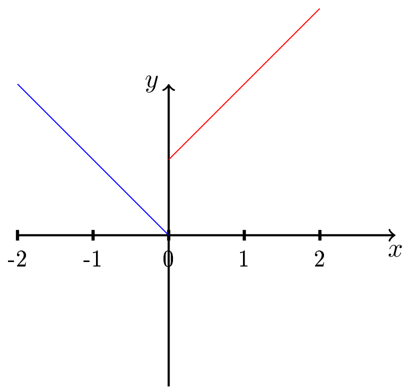
$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in]0,2] \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -1 \text{ si } x \in [-2,0[\end{cases}$$

Une antidérivée de f est



$$F : \begin{cases} [-2,2] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{cases}$$

Cependant la fonction dans $[-2,2] \to \mathbb{R}$:



$$G(x) = \begin{cases} x+1 \text{ si} x \in [0,2] \\ -x \text{ si} x \in [-2,0[\end{cases}$$

n'est pas une antidérivée de f car g n'est pas continue.

Remarque 4.4. Si F est une antidérivée de f et $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$, alors $F + \underline{c}$ est aussi une antidérivée de f, parce que $F + \underline{c}$ est continue (car somme de fonctions continues) et $\forall x$ où f est continue $F + \underline{c}$ est dérivable en x et $(F + \underline{c})'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$

Remarque 4.5. Si $f \in \mathcal{MC}^0([a,b], \mathbb{R}^n)$ et F est une antidérivée de f, alors $F \in \mathcal{MC}^1([a,b], \mathbb{R}^n)$. En effet, $\exists a = a_0 < a_1 < \cdots < a_r = b$ telle que $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ est continue $\forall i \in \{0, \cdots, r-1\}$ alors $\lim\limits_{x \to a_i^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a_{i+1}^-} f(x)$ existent et sont finies. Mais alors F est continue, $F_{|]a_i,a_{i+1}[}$ est dérivable et de dérivée continue (depuis la définition d'antidérivée, $(F_{|]a_i,a_{i+1}[})' = f(|]a_i, a_{i+1}[) \forall i \in \{0, \cdots, r-1\}$ de plus

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a_i^+} F'(x) = \lim\limits_{x \to a_i^+} f(x) \\ \lim\limits_{x \to a_{i+1}^-} F'(x) = \lim\limits_{x \to a_{i+1}^-} f(x) \end{cases}$$

existent finies $\forall i \in \{0, \cdots, r-1\}$.

Est ce que on peut toujours trouver des antidérivée ?

Théorème 4.5 (Premier théorème fondamental du calcul intégral)**.** *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *une fonction Riemann-intégrable sur* $[a, b]$*. La fonction*

$$F_A : \begin{cases} [a, b] \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto \int\limits_a^x f(t)dt \end{cases}$$

est une antidérivée de f *qui s'annule en* $x = a$

Démonstration. Prouvons que F_A est continue

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow \|F(x) - F(x_0)\| < \varepsilon$$

Soit $\|.\|$ une norme de $\mathbb{R}^n$ et fixons $\varepsilon > 0$. Soit $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\sup\limits_{[a,b]} \|f\|}$ (si $\sup\limits_{[a,b]} \|f\| \neq 0$, mais si $\sup\limits_{[a,b]} \|f\| = 0$ alors $f \equiv 0 \Rightarrow F_a \equiv cte$ continue).

Soit $x \in [a, b] : |x - x_0| < \delta = \dfrac{\epsilon}{\sup\limits_{[a,b]} \|f\|}$ alors

$$\|F_a(x) - F_a(x_0)\| = \|\int\limits_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\| = \|\int\limits_{x_0}^x f(t)dt\| \leq |x - x_0| \sup\limits_{[a,b]} \|f\| < \frac{\epsilon}{\sup\limits_{[a,b]} \|f\|} \sup\limits_{[a,b]} \|f\| = \epsilon$$

Donc F_a est continue en x_0 ce qui implique par arbitrarieté du choix de x_0 F_a est continue sur $[a, b]$.
Il reste à démontrer que si x_0 est une point où f est continue, alors F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow \|\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\| < \epsilon$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme f est continue en $x_0, \exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$. Donc

$$\begin{aligned}
\|\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\| &= \|\frac{1}{x - x_0} \int\limits_{x_0}^x f(t)dt - f(x_0)\| \\
&= \|\frac{1}{x - x_0} \int\limits_{x_0}^x f(t)dt - \frac{1}{x - x_0} \int\limits_{x_0}^x f(x_0)dt\| \\
&= \|\frac{1}{x - x_0} \int\limits_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt\| \\
&= \frac{1}{|x - x_0|} \|\int\limits_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt\| \\
&\leq \frac{1}{|x - x_0|} \int\limits_{x_0}^x \|f(t) - f(x_0)\|dt
\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que $\forall t \in [0, x], |t - x_0| \leq |x - x_0| < \delta$, donc $\|f(t) - f(x_0)\| < \epsilon$ donc par monotonie de l'intégrale

$$\leq \frac{1}{|x - x_0|} \int\limits_{x_0}^x \epsilon dt = \frac{1}{|x - x_0|} \epsilon |x - x_0| = \epsilon$$

Donc F_a est dérivable en x_0 de dérivée $f(x_0)$ donc F_a est une antidérivée de f □

Remarque 4.6. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction Riemann-Intégrable sur $[a, b]$ et $c \in [a, b]$ alors

$$F_c : \begin{cases} [a, b] \to \mathbb{R}^n \\ F_c(x) = \int\limits_c^x f(t)dt \end{cases}$$

alors F_c est aussi une antidérivée de f.
En effet, de l'additivité

$$\begin{aligned} F_c(x) &= \int_c^x f(t)dt \\ &= \int_a^x f(t)dt - \int_a^c f(t)dt \\ &= F_a(x) - \text{ vecteur constant} \end{aligned}$$

Et depuis la réciproque précédente on a $F_c = F_a +$ vecteur constant est aussi une antidérivée de f (car F_a l'est).

Théorème 4.6 (Deuxième théorème fondamental du calcul intégral)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction bornée et continue par morceaux sur $[a, b]$ alors*

1. *si F_1, F_2 sont deux antidérivées de f, alors $F_1 = F_2 +$ vecteur constant (deux antidérivées de f différent par une constante)*
2. *la fonction F_a introduite dans le Théorème 4.5 précédent est l'unique antidérivée de f qui s'annulle en $x = a$*
3. *si F est une antidérivée de f, alors*

$$\int_a^b f(t)dt = [F]_a^b = F(b) - F(a)$$

Démonstration. 1. Soient F_1, F_2 deux antidérivées de f alors F_1 et F_2 sont continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux depuis la remarque précédente. Ainsi $F_1 - F_2$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux si $x \in [a, b]$ est un point de continuité pour f, $F_1 - F_2$ est dérivable en x et $(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Donc $F_1 - F_2$ est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et de dérivée nulle où dérivable donc par la proposition $F_1 - F_2 =$ vecteur constant.

2. La fonction F_a est une antidérivée de f (voir le 1)) et

$$F_a(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

Soit F une antidérivée de f qui s'annule $x = a$. D'après 1) on doit avoir que $F = F_a + \underline{c}$ avec $\underline{c} \subset \mathbb{R}^n$. Mais $\underline{0} = F(a) = F_a(a) + \underline{c} = \underline{c}$ donc $\underline{c} = \underline{0} \Rightarrow F = F_a$.

3. Soit F une antidérivée de f, alors $F = F_a + \underline{c}$ pour $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$ alors

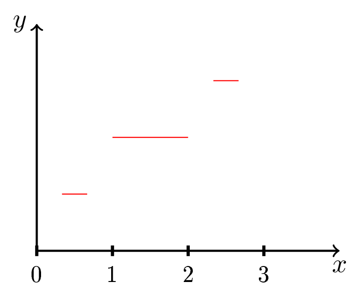
$$F(b) - F(a) = (F_a(b) + \underline{c}) - (F_a(a) + \underline{c}) = F_a(b) + \underline{c} - F_a(a) - \underline{c} = F_a(b) - F_a(c) = \int_a^b f(t)dt$$

□

Remarque 4.7. Ce théorème n'est pas forcément vrai pour des fonctions Riemann-intégrables générales. Par exemple prenons l'ensemble de Cantor.

$$C := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

on sait que C est fermé et sa mesure de Lebesgue est 0, mais il est non-dénombrable on défini une fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ comme suit (premières étapes représentées)



La fonction f est continue pour tout $x \in C$ et $\forall x \notin C$, f est dérivable en x et $f'(x) = 0$. Donc f est une antidérivée de χ_c, mais la propriété 3) n'est pas vraie parce que

$$\int_0^1 \chi_c(t)dt = 0$$

(thoérème de la mesure de Lebesgue) et donc on n'a pas $f(1) - f(0) = 1$.

4.4 Méthodes d'intégration

Notation. Si une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur un intervalle I, on notera par $\tilde{f}'$ une extension arbitraire de la dérivée de f. Plus précisément, $\exists a_0 = a < a_1 < \cdots < a_r = b$ avec $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ de classe $\mathcal{C}^1$ (donc dérivable) $\forall i \in \{0, \cdots, r-1\}$ alors $\tilde{f}' : [a,b] \to \mathbb{R}$ est n'importe quelle fonction telle que $\tilde{f}'(x) = f'(x) \forall x$ où f est dérivable.

Exemple 4.6. Si $f(x) = |x|$ alors $\tilde{f}'(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ \alpha \text{ si } x = 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.6. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a,b]$ alors*

$$\int_a^b \tilde{f}'(t)dt = f(b) - f(a)$$

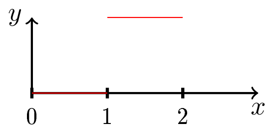
Démonstration. f est une antidérivée de $\tilde{f}'$ et on peut utiliser le deuxième théorème fondamental de l'analyse. On a en effet que f est continue, si $x \in [a,b]$ est un point de continuité de $\tilde{f}'$ alors f est dérivable en x et $f'(x) = \tilde{f}'(x)$ aussi, $\tilde{f}'$ est continue par morceaux parce que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Donc depuis le deuxième théorème fondamental du calcul intégral.

$$\int_a^b \tilde{f}'dt = [f]_a^b = f(b) - f(a)$$

□

Remarque 4.8. L'égalité n'est pas vraie en général sans demander que f soit continue. Par exemple :

$$f : \begin{cases} [0,2] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \chi_{[1,2]} \end{cases}$$



et soit $\tilde{f}' \equiv 0$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, mais $\int_0^2 \tilde{f}'(t)dt = 0$. On utilisera cette proposition pour prouver la formule d'intégration par partie et la formule de changement de variables (pour fonctions vectorielles)

Proposition 4.7 (Intégration par parties)**.** *Soient $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a,b]$ alors*

$$\int_a^b \tilde{\phi}'(t)f(t)dt = [\phi f]_a^b - \int_a^b \phi(t)\tilde{f}'(t)dt$$

Démonstration. La fonction

$$\phi.f : \begin{cases} [a,b] \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto \phi(t).f(t) \end{cases}$$

est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Quand elle est définie, la dérivée de $\phi.f$ est

$$\begin{aligned}(\phi f)'(x) &= ((\phi f_1)'(x), \cdots, (\phi f_n)'(x)) \\ &= (\phi'(x)f_1(x) + \phi(x)f_1'(x), \cdots, \phi'(x)f_n(x) + \phi(x)f_n'(x)) \\ &= \phi'(x)(f_1(x), \cdots, f_n(x)) + \phi(x)(f_1'(x), \cdots, f_n'(x)) \\ &= \phi'(x)f(x) + \phi(x)f'(x)\end{aligned}$$

Donc

$$(\tilde{\phi f})' = \tilde{\phi}'.f + \phi.\tilde{f}'$$

Maintenant d'après la proposition précédente comme $\phi.f$ continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux on a

$$[\phi f]_a^b = \int_a^b (\tilde{\phi f})'(t)dt = \int_a^b (\tilde{\phi}'f + \phi\tilde{f}')(t)dt = \int_a^b \tilde{\phi}'(t)f(t)dt + \int_a^b \phi(t)\tilde{f}'(t)dt$$

□

Exemple 4.7.

$$\begin{aligned}\int_0^1 t.\begin{cases}\arctan(t) \\ 1\end{cases} dt &= [\frac{t^2}{2}\begin{cases}\arctan(t) \\ 1\end{cases}]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{2}\begin{cases}\dfrac{1}{1+t^2} \\ 0\end{cases} dt \\ &= \frac{1}{2}\begin{cases}\dfrac{\pi}{4} \\ 0\end{cases} - \int_0^1 \begin{cases}\dfrac{t^2+1-1}{1+t^2} \\ 0\end{cases} dt\end{aligned}$$

Proposition 4.8 (Changement de variables)**.** *Soient $\phi : [a,b] \to [c,d]$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $f : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue par morceaux sur $[c,d]$ alors*

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Démonstration. Posons $F : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ une antidérivée de f. La fonction $Fo\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ est continue (parce que F et ϕ sont continues) et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (parce que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ et F est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux car antidérivée d'une fonction continue par morceaux).
Aussi pour tout $x \in [a,b]$ où $Fo\phi$ est dérivable

$$\begin{aligned}\overline{(Fo\phi)'(x)} &= (Fo\phi)'(x) \\ &= \phi'(x).F'(\phi(x)) \\ &= \phi'(x).f(\phi(x))\end{aligned}$$

alors la proposition nous dit que

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt &= \int_a^b \overline{(Fo\phi)}'(t)dt \\ &= (Fo\phi)(b) - (Fo\phi)(a) \\ &= F(\phi(b)) - F(\phi(a)) \\ &\underbrace{=}_{\text{II TFdCI}} \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt\end{aligned}$$

□

4.4.1 Des applications de la formule de changement de variables aux fonctions périodiques

Rappelons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est dite T-périodique ou périodique de période T, avec $T \in \mathbb{R}$ si $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f(x+T) = f(x)$.

Exemple 4.8. Sinus est 2π périodique parque que $sin(x+2\pi) = sin(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

Remarque 4.9. Une fonction f est T-périodique si et seulement si son graphe est stable par translation

$$x \mapsto x + T$$

Si f est continue par morceaux et T-périodique, alors l'intégrale de f sur tout intervalle de volume T est la même, c'est à dire $\forall a \in \mathbb{R}$, alors $\int\limits_a^{a+T} f(t)dt = \int\limits_0^T f(t)dt$

Démonstration. Comme $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} [(n-1)T, nT]$ alors $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $a \in [(n-1)T, nT]$. Alors l'additivité de l'intégrale donne

$$\int\limits_a^{a+T} f(t)dt = \int\limits_a^{nT} f(t)dt + \int\limits_{nT}^{a+T} f(t)dt$$

La formule de changement des variables dit que

$$\begin{aligned}
\int\limits_a^{nT} f(t)dt &= \int\limits_a^{nT} f(t+T)dt \\
&= \int\limits_a^{nT} f(\phi_T(t)).\phi_T'(t)dt \\
&= \int\limits_{\phi_T(a)}^{\phi_T(nT)} f(t)dt = \int\limits_{a+T}^{(n+1)T} f(t)dt
\end{aligned}$$

Où $\phi_T : x \mapsto x + T$ alors

$$\begin{aligned}
\int\limits_a^{a+T} f(t)dt &= \int\limits_{a+T}^{(n+1)T} f(t)dt + \int\limits_{nT}^{a+T} f(t)dt \\
&= \int\limits_{nT}^{(n+1)T} f(t)dt \\
&= \int\limits_{nT}^{T+nT} f(t-nT)dt \\
&= \int\limits_{\phi_{-nT}(nT)}^{\phi_{-nT}(nT+T)} f(t)dt \\
&= \int\limits_0^T f(t)dt \\
&= \int\limits_0^T f(t)dt
\end{aligned}$$

Donc si I et J sont deux intervalles de volume T, $I = [a, a+1]$ et $J = [b, b+1]$ pour certains $a, b \in \mathbb{R}$ alors

$$\int\limits_a^{a+T} f(t)dt = \int\limits_0^T f(t)dt = \int\limits_b^{b+T} f(t)dt$$

donc les intégrales de f sur J coincident □

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique, continue par morceaux d'antidérivée F alors F est T-périodique si et seulement si la moyenne de f sur une période est nulle (ie $\int\limits_0^T f(t)dt = 0$)

Démonstration. F est T périodique

$$\Leftrightarrow F(x) = F(x+T) \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow F(x+T) - F(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

Mais $F(x+T) - F(x) = [F]_x^{x+T} = \int\limits_x^{x+T} f(t)dt = \int\limits_0^T f(t)dt$. Par exemple comme $\int\limits_0^{2\pi} sin(t)dt = 0$ alors une antidérivée de sin est aussi 2π-périodique (pas surprenant c'est $-cos$). Par contre, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := sin(x) + 1$ Elle est 2π périodique sur

$$\int\limits_0^{2\pi} f(t)dt = \int\limits_0^{2\pi} sin(t)dt + \int\limits_0^{x} 1dt = 2\pi \neq 0$$

□

4.5 Deux applications de l'intégrale

On va prouver deux théorèmes classiques mais dans le contexte plus général des fonctions vectorielles continues par morceaux.

Théorème 4.7 (Inégalités des accroissements finis)**.** *L'idée est de donner une relation entre la pente de la droite $(a, f(a)), (b, f(b))$ et la dérivée de f dans l'intervalle $[a, b]$.*
Soient $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ est $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ qui satisfait

1. *f continue sur $[a, b]$*
2. *f dérivable sur $]a, b[$ sauf pour un nombre (au plus) fini de points*
3. *$\exists c \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|f'(t)\| \leq c \forall t \in [a, b]$ où f est dérivable alors $\|f(b) - f(a)\| \leq c(b - a)$*

Démonstration. 1. On suppose d'abord que f est dérivable partout sur $]a, b[$ et on prouve l'inégalité pour une telle fonction. Soit $\epsilon > 0$, comme f est continue en a et en b, $\exists \delta > 0$ tel que $\|f(a) - f(a+\delta)\| < \epsilon$ et $\|f(b) - f(b-\delta)\| < \epsilon$. On peut supposer $\delta < \dfrac{b-a}{2}$, dans ce cas $a + \delta < b - \delta$ et $[a+\delta, b-\delta] \subseteq]a, b[$ (car $\delta > 0$) donc f est dérivable sur $[a+\delta, b-\delta]$ alors

$$\begin{aligned}
\|f(b) - f(a)\| &= \|f(b) - f(b-\delta) + f(b+\delta) - f(a) - f(a+\delta) + f(a+\delta)\| \\
&\leq \|f(b) - f(b-\delta)\| + \|f(a+\delta) - f(a)\| + \|f(b-\delta) - f(a+\delta)\| \\
&< \|f(b-\delta) - f(a+\delta)\| + 2\epsilon \\
&= \|\int\limits_{a+\delta}^{b-\delta} f'(t)dt\| + 2\epsilon \\
&\leq \int\limits_{a+\delta}^{b-\delta} \|f'(t)\|dt + 2\epsilon \\
&\leq \int\limits_{a+\delta}^{b-\delta} cdt + 2\epsilon \\
&= c(b - a - 2\delta) + 2\epsilon \\
&< c(b-a) + 2\epsilon
\end{aligned}$$

Donc $\forall \epsilon > 0$

$$\|f(b) - f(a)\| < c(b-a) + 2\epsilon$$

donc $\|f(b) - f(a)\| \leq c(b-a)$.

2. Dans le cas général, soient $a = c_0 < c < \cdots < c_r = b$ tels que f est dérivable dans $]c_i, c_{i+1}[\forall i \in \{0, \cdots, r\}$ donc la restriction $f_{|[c_i, c_{i+1}}$ est continue et dérivable sur $]c_i, c_{i+1}[$ et satisfait $\|f'_{]c_i,c_{i+1}[}(t)\| \leq c \forall t \in]c_i, c_{i+1}[$ donc $f_{|[c_i, c_{i+1}]}$ satisfait les hypothèses du 1) et alors

$$\|f(c_{i+1}) - f(c_i)\| \leq c(c_{i+1} - c_i) \tag{4}$$

$\forall i \in \{0, \cdots, r-1\}$ alors

$$\begin{aligned}
\|f(b)-f(a)\| &= \|f(c_r)-f(c_{r-1})+f(c_{r-1})-f(c_{r-2})-f(c_1)+f(c_1)-f(c_0)\| \\
&\leq \sum_{i=0}^{r-1} \|f(c_{i+1}-f(c_i)\| \\
&\underbrace{\leq}_{(1)} \sum_{i=0}^{r-1} C(c_{i+1}-c_i) = C\sum_{i=0}^{r-1}(a_{i+1}-a_i) \\
&= C(c_r - c_{r-1} + c_{r-1} - c_{r-2} + \cdots + c_1 - c_0) \\
&= C(b-a)
\end{aligned}$$

□

Remarque 4.10. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors sur chaque intervale de dérivabilité la dérivée s'étend à une fonction continue sur un intervalle compact, donc

$$C_f = \sup\{\|f'(t)\|, t \in [a,b], f \text{ dérivable en } t\} < \infty$$

La fonction f satisfait les hypothèses du Théorème 4.7 avec ce choix de C alors

$$\|f(b)-f(a)\| \leq C_f(b-a)$$

Remarque 4.11. L'inégalite de la remarque peut être stricte. Par exemple $f : \begin{cases} [0,2\pi] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) \end{cases}$. On a que

$$C_f = \sup_{[0,2\pi]} \{\|\cos(t)\|\} = 1$$

Donc la remarque dit que

$$0 = \|f(2\pi)-f(0)\| \leq 2\pi$$

Théorème 4.8 (prolongement des fonctions de classe C^k)**.** *Soit I un intervalle réel, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}^n$ satisfaisant*

1. *f continue sur I*
2. *f est de classe C^k sur $I \setminus \{x_0\}$*
3. *$\forall r \in \{1, \cdots, k\}$ la limite de $f^{(r)}$ pour $x \to x_0$ existe finie*

$$l_r = \lim_{x\to x_0} f^{(k)}(x)$$

alors f est de classe C^k sur I et $f^{(r)}(x_0) = l_r \forall r \in \{1, \cdots, k\}$

Démonstration. On prouve le théorème par récurrence sur k. Pour $k = 0$ il n'y a rien à prouver. Supposons alors que le théorème est vrai pour tout naturel jusqu'à k et on va le prouver pour $k+1$.
Soit alors f une fonction continue sur I, de classe $\mathbb{C}^{k+1}$ sur $I \setminus \{0\}$ et avec $l_r = \lim_{x\to x_0} f^{(r)}(x) \in \mathbb{R} \forall r \in \{1, \cdots, k+1\}$. Donc par hypothèse de récurrence, on sait que f est de classe C^k sur I, donc soit $f^{(k)} : I \to \mathbb{R}^n$ continue. On veut prouver que $f^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I (cela implique que f est dérivable $k+1$ fois sur I avec $f^{(k+1)}$ continue).
Soit maintenant $g : I \to \mathbb{R}^n$

$$g(x) = \begin{cases} f^{(k+1)}(x) \text{ si } x \neq x_0 \\ l_{k+1} \text{ si } x = x_0 \end{cases}$$

alors g est une fonction continue sur I depuis l'hypothèse 3), donc continue sur un petit intervalle $[a,b]$ contenant x_0, considérons

$$G : \begin{cases} [a,b] \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto \int\limits_a^x g(t)dt \end{cases}$$

Comme $f^{(k)}$ est continue sur I, donc

$$f^{(a)}(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} f^{(a)}(x_0) = \lim_{x\to x_0} (\int_a^x f^{(k+1)}(t)dt - f^{(k)}(a))$$
$$= \lim_{x\to x_0^-} (\int_a^x g(t)dt - f^{(k)}(a))$$
$$= \lim_{x\to x_0^-} G(x) - f^{(k)}(a) = G(x_0) - f^{(k)}(a)$$

alors pour tout $x \in [a,b], x \leq x_0, G(x) = f^{(k)}(x) + f^{(k)}(a)$ et de manière similaire pour tout $x \in [a,b], x \geq x_0$, $G(x) = f^{(k)}(x) - f^{(k)}(b)$ alors $\forall x \in [a,b], G(x) = f^{(k)}(x) + cte$.
Mais G est de classe $\mathcal{C}^1$ (depuis premier théorème fondamental) car G est dérivable sur $[a,b]$ et $G' = g$ continue.
Alors $f^{(k)}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ donc sur I et donc f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.
Alors $f^{(k+1)}(x_0) = \lim_{x\to x_0} f^{(k+1)}(x) = l_{k+1}$ □

5 Formules de Taylor

Etudier une fonction f peut être "difficile". L'idée des formules de Taylor est d'approximer une fonction f avec des fonctions polynomiales. Si f est assez régulière en un point on pourra le faire localement. Pour formaliser l'idée on peut définir la notion suivante.

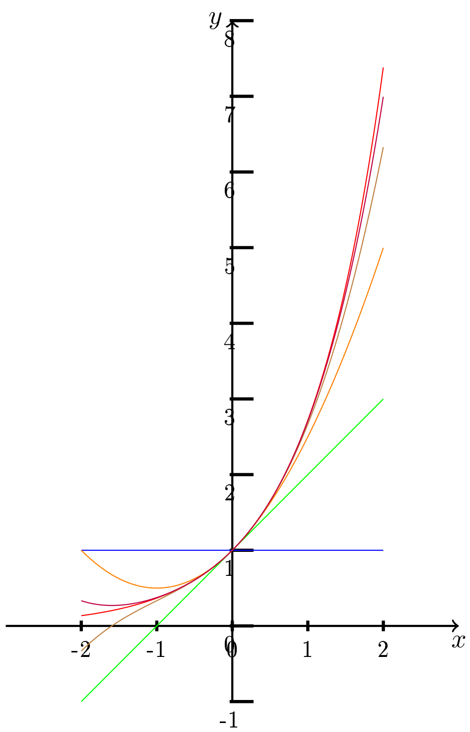
Définition 5.1. Soit I un intervalle (ouvert) de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}^N$ qui est dérivable n fois en x_0. Alors le polynôme de f de degré n autour de x_0 est

$$P_{f,n,x_0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Par exemple $P_{f,0,x_0} = f(x_0)$ si f est dérivable une fois

$$P_{f,1,x_0} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Exemple 5.1 (Graphique)**.** Soit $f(x) = e^x$. Représenter le graphe de f de $P_{f,0,0}, Pf, 1, 0, P_{f,2,0}$ (ils existent parce que f est dérivable un nombre infini de fois en x_0). $P_0 = 1, P_1 = 1 + x, P_2 = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$



Théorème 5.1 (Polynôme de Taylor avec reste intégral). *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et de classe C^{n+1} par morceaux sur I, pour $n \in \mathbb{N}$. Alors*

$$f(x) - P_{f,n,x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} \tilde{f}^{(n+1)}(t)dt \ \ \forall x \in I$$

Démonstration. Par récurrence sur n

— Pour $n = 0$. La fonction f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I

$$f(x) - P_{f,0,x_0}(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} \tilde{f}'(t)dt$$

— Supposons la propriété vraie pour tout $k \leq n$ et prouvons la pour $n+1$. Soit alors f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ par morceaux sur I. Alors

$$\begin{aligned} f(x) - P_{f,n+1,x_0}(x) &= f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\ &= f(x) - (\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}) \\ &= f(x) - P_{f,n,x_0}(x) - \frac{f^{(n+1)(x_0)}}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \\ &= \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} \tilde{f}^{(n+1)}(t)dt - \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

La dernière équalité est obtenue par hypothèse de récurrence (f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, donc de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ par morceaux sur I).
On remarque que $\tilde{f}^{(n+1)} = f^{(n+1)}$ car $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R}^n)$ et f est $\mathcal{C}^{n+2}$ par morceaux, donc $f^{(n+1)}$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I. La formule d'intégration par parties nous donne alors

$$\begin{aligned} f(x) - P_{f,n+1,x_0}(x) &= \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt - \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \\ &= [-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \tilde{f}^{(n+2)}(t)dt - \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \\ &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \tilde{f}^{(n+2)}(t)dt - \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)(x_0)} \\ &= \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \tilde{f}^{(n+2)}(t)dt \end{aligned}$$

□

Théorème 5.2 (Inégalité de Taylor Lagrange). *Soit I un intervalle ouvert $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et de classe C^{n+1} par morceaux sur I. Alors il existe $c > 0$ tel que $\|\tilde{f}^{(n+1)}(x)\| < c \ \forall x \in [a,b]$ avec $x_0 \in [a,b]$ et*

$$\|f(x) - P_{(f,n,x_0)}(x)\| \leq \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} c \ \ x \in [a,b]$$

(pour n'importe quel choix de norme $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^n$)

Démonstration. Comme $f \in \mathcal{MC}^{n+1}(I, \mathbb{R}^n)$ alors $f^{(n+1)}$ est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ donc $\tilde{f}^{(n+1)}$ est bornée sur $[a,b]$, alors $\exists c > 0$ telle que $\|\tilde{f}^{(n+1)}(x)\| \leq c \ \ \forall x \in [a,b]$.

Supposons d'abord que $x \in [a,b]$ est $x_0 \geq x$ grâce au Théroème 5.1 :

$$\begin{aligned}
\|f(x) - P_{f,n,x_0}(x)\| &= \|-\int_x^{x_0} \frac{(x-t)^n}{n!}\tilde{f}^{n+1}(t)dt\| \\
&\leq \int_x^{x_0} \|\frac{(x-t)^n}{n!}\tilde{f}^{(n+1)}(t)\|dt \\
&= \int_x^{x_0} \frac{|x-t|^n}{n!}\|\tilde{f}^{(n+1)}(t)\|dt \\
&\leq \int_x^{x_0} \frac{(t-x)^n}{n!}cdt \\
&= c\int_x^{x_0} \frac{(t-x)^n}{n!}dt \\
&= c[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}]_x^{x_0} \\
&= -\frac{(x_0-x)n+1}{(n+1)!c} \\
&= c\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

□

Corollaire 5.1 (cas particulier du théorème Taylor Young)**.** *Soit I un intervalle (ouvert) réel, $f : I\mathbb{R}^N$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ par récurrence sur I alors $f(x) = P_{f,n,x_0}(x) + (x-x_0)^n.\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$ (c'est à dire $\lim_{x \to x_0} \|\epsilon(x)\| = 0$)*

Démonstration. Il suffit d'écrire $\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - P_{f,n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 \end{cases}$. On a que

$$\lim_{x \to x_0} \|\epsilon(x)\| = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{|x-x_0|^n}\|f(x) - P_{f,n,x_0}(x)\| \leq \lim_{x \to x_0} \frac{c}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\frac{1}{|x-x_0|}^n$$

□

Remarque 5.1. Ce corollaire justifie formellement l'intuition que P_{f,n,x_0} est une bonne approximation de f autour de x_0. On écrit aussi que $f(x) - P_{f,n,x_0}(x)$ est $o(|x-x_0|^n)$ ou $O(|x-x_0|^{n+1})$.

Remarque 5.2. Les hypothèses du corollaire ne sont pas les moins fortes possibles (théorème de Taylor Young)

Deuxième partie

Intégrale impropres de fonctions numériques

6 Définition et exemples

Rappel. Dans le chapitre 1, on a défini l'intégrale de Riemann pour des fonctions à valeurs vectorielles bornées et sur un intervalle compact I.

Le but de ce chapitre est d'étendre la définition du chapitre 1 à de nouveaux cas, ie :
— au cas de fonctions qui ne sont pas bornées sur un intervalle compact ($\frac{1}{x}$ sur $[0,1]$)
— au cas d'un intervalle non compact ($[1,+\infty[$)

Notation. Soit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\bigcup\{-\infty,+\infty\}$. Il est muni d'une relation d'ordre totale "$\leq$" obtenue en étendant la relation "$\leq$" sur $\mathbb{R}$ par

$$x \leq +\infty \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \text{et} \qquad -\infty \leq x \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}$$

Définition 6.1. Soient $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ bornée et Riemann-intégrable sur chaque sous-intervalle compact de I.
L'intégrale de f sur I converge si pour un (et donc tout) choix de $x_0 \in I$, on a que

$$\lim_{x\to\inf(I)} \int_x^{x_0} f(t)dt \in \mathbb{R}^n \text{ et } \lim_{x\to\sup(I)} \int_{x_0}^{x} f(t)dt \ \in \mathbb{R}^n$$

Dans ce cas, on appelle *intégrale (impropre) de f sur* $]a,b[$ la quantité

$$\int_I f(t)dt = \lim_{x\to\inf(I)} \int_x^{x_0} f(t)dt + \lim_{x\to\sup(I)} \int_{x_0}^{x} f(t)dt \ \in \mathbb{R}l^n$$

et on dit que f est *intégrable sur I* (ou qu'elle admet une intégrale impropre sur I).

Exemple 6.1.

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx$$

(c'est l'"aire" sous le graphe de $\frac{1}{x}$ entre 0 et 1)
Calculons l'intégrale (si elle existe).
La fonction $\frac{1}{x}$ est bornée et Riemann-intégrable (car continue) sur chaque intervalle fermé $[c,d]$ $\quad (c > 0, d \leq 1)$.
Soit $x_0 \in]0,1]$, par exemple $x_0 = 1$. On a que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t}dt &= \lim_{x\to 0^+} [\ln t]_x^1 \\ &= \lim_{x\to 0^+} -\ln x = +\infty\end{aligned}$$

donc la fonction $\frac{1}{x}$ n'admet pas d'intégrale impropre sur $]0,1]$ (l'aire sous la courbe est infinie).

Remarque 6.1. Dans la définition il y a un "*pour un (et donc tout) choix de* $x_0 \in I$".
Supposons que

$$\lim_{x\to\inf(I)} \int_x^{x_0} f(t)dt \quad \in \mathbb{R}^n \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\sup(I)} \int_{x_0}^{x} f(t)dt \quad \in \mathbb{R}^n$$

Alors pour un autre $\tilde{x_0} \in]a,b[$ arbitraire,

$$\lim_{x\to\inf(I)} \int_x^{\tilde{x_0}} f(t)dt \underset{\substack{[x,\tilde{x_0}\subseteq I \\ \text{est } f \text{ est } \mathcal{R}\text{-intégrable}}}{=} = \lim_{x\to\sup(I)} \left(\int_x^{x_0} f(t)dt + \underbrace{\int_{x_0}^{\tilde{x_0}} f(t)dt}_{\substack{\in\mathbb{R}^n \\ \text{car} f\ \mathcal{R}\text{-intégrable} \\ \text{sur}[x_0,\tilde{x_0}]}} \right) = \int_{x_0}^{\tilde{x_0}} f(t)dt + \lim_{x\to a^+} \left(\int_x^{x_0} f(t)dt \right)$$

donc

$$\lim_{x\to\inf(I)}\int_x^{\tilde{x_0}} f(t)dt \quad \in\mathbb{R}^n \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\sup(I)}\int_{\tilde{x_0}}^{x} f(t)dt \quad \in\mathbb{R}^n$$

Donc on conclut par arbitrarité.
D'autre part, si $\lim\limits_{x\to\inf I}\int_x^{x_0} f(t)dt \quad \notin\mathbb{R}^n$ pour un certain $x_0\in I$, on a le même pour tout autre choix de $\tilde{x_0}\in I$.

Remarque 6.2. La définition est compatible avec celle de l'intégrale de Riemann du chapitre 1. En effet, $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ est Riemann-intégrable, alors

$$\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt=\int_a^b f(t)dt$$

car le Théorème 4.5 dit que la fonction $\int_a^x f(t)dt:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ est continue.

Exemple 6.2. Calculer

$$\int_{]0,1]} t\log(t)dt$$

(on ne peut pas utiliser la théorie du chapitre A parce que $t\log(t)$ n'est pas définie en 0). Par définition (comme $t\log(t)$ est continue, donc Riemann-intégrable sur tout sous-intervalle compact de $]0,1]$) on a

$$\begin{aligned}\int_{]0,1]} f(t)dt &= \lim_{x\to 0^+}\int_x^1 f(t)dt\\ &=\lim_{x\to 0^+}\Big(\int_{x^1} t\log(t)dt\Big)\\ &=\lim_{x\to 0^+}\Big(-\frac{x^2}{2}\log(x)-\frac{1}{4}(1-x^2)\Big)=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_x^1 t\log(t)dt &= \Big[\frac{t^2}{2}\log(t)\Big]_x^1-\int_x^1\frac{t^2}{2}\frac{1}{t}dt\\ &=-\frac{x^2}{2}\log(x)-\frac{1}{2}\Big[\frac{t^2}{2}\Big]_x^1\\ &=-\frac{x^2}{2}\log(x)-\frac{1}{4}(1-x^2)\\ &=-\frac{1}{4}+\frac{x^2}{4}(1-2\log(x))\end{aligned}$$

La fonction $f(t)=t\log(t)$ peut être prolongée par continuité à une fonction g continue sur $[0,1], g(t)=\begin{cases} f(t) & t\neq 0\\ 0 & =0\end{cases}$ et $\int_{]0,1]} f(t)dt=\int_{]0,1]} g(t)dt=\int_0^1 g(t)dt$

Exemple 6.3. Calculer l'aire sous le graphe de la fonction $f(t)=\log(t)$ entre 0 et 1. La fonction $f(t)=\log(t)$ est continue, donc Riemann-intégrable sur chaque sous-intervalle compact de $]0,1]$, alors $A=\int_{]0,1]}\log(t)dt=$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_x^1\log(t)dt=\lim\limits_{x\to 0^+}\int_x^1\log(t)dt=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1-x\log(x))=-1$

Proposition 6.1. *Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ alors*

1. *L'intégrale impropre $\int_{[1,+\infty[}\frac{1}{t^\alpha}dt$ converge si et seulement si $\alpha>1$ et dans ce cas $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}dt=\frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$*
2. *L'intégrale importe $\int_{]0,1]}\frac{1}{t^\beta}dt$ converge si et seulement si $\beta<1$ et dans ce cas $\int_0^1\frac{1}{t^\beta}dt=\frac{1}{1-\beta}$*

Démonstration. 1. La fonction $\frac{1}{t^\alpha}$ est continue donc bornée et Riemann-intégrable sur tout sous-intervalle compact de $[1, +\infty[$. Donc

$$\begin{aligned}\int\limits_{[1,+\infty[} \frac{1}{t^\alpha} dt &= \lim_{x\to+\infty} \int\limits_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt \\ &= \lim_{x^{1-\alpha}-1} (1-\alpha)\end{aligned}$$

mais si $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned}\int\limits_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt &= \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_1^x \\ &= \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}\end{aligned}$$

et $\frac{x^{1-x}-1}{1-\alpha}$ converge lorsque $x \to +\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

2. Si $\beta = 1$, $\int\limits_{]0,1]} \frac{1}{t} dt = \lim\limits_{x\to0^+} \int\limits_x^1 \frac{1}{t} dt = \lim\limits_{x\to0^+} (-\log(t))$

□

Remarque 6.3. 1. L'intégrale impropre de $\frac{1}{t}$ n'existe pas ni sur $]0, 1]$ ni sur $[1, +\infty[$.

2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ $\int\limits_{]0,+\infty[} \frac{1}{t^\alpha} dt$ n'existe pas finie.

Exemple 6.4. Calculer

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} dt$$

Il faut vérifier pour $x_0 = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_0^x f(t)dt \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \int\limits_x^0 f(t)dt \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Il suffit de vérifier la première car $\int\limits_0^x f(t)dt = -\int\limits_0^{-x} -f(u)du = -\int\limits_{-x}^0 f(u)du$.

7 Propriétés de l'intégrale impropre

Par "intégrale de $\mathbb{R}$" on voudra dire un ensemble $]a, b[$ ou $[a, b[$ ou $[a, b]$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a < b$

Proposition 7.1. *Soit $I \in \overline{\mathbb{R}}$ un intervalle et soient $f, g : I \to \mathbb{R}^\ltimes$ deux fonctions intégrables sur I, $\lambda \in \mathbb{R}$ alors*
— *(linéarité) $\lambda f + g$ est intégrable sur I et*

$$\int\limits_I (\lambda f + g)(t)dt = \lambda \int\limits_I f(t)dt + \int\limits_I g(t)dt$$

— *(additivité) Soit $I =]a, b[$, si $c \in I$, alors*

$$\int\limits_{]a,b[} f(t)dt = \int\limits_{]a,c]} f(t)dt + \int\limits_{[c,b[} f(t)dt$$

Démonstration. — f et g sont Riemann-intégrables sur chaque sous-intervalle $[x_1, x_2]$ compact de I, donc $\lambda f+g$ l'est aussi (depuis le chapitre A) et par additivité

$$\int\limits_{x_1}^{x^2} (\lambda f + g)(t)dt = \lambda \int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)dt + \int\limits_{x_1}^{x^2} g(t)dt$$

Soit $x_0 \in I$ alors pour tout $x \in I$ on a

$$\lim_{x \to \sup(I)} \int_{x_0}^{x} (\lambda f + g)(t)dt = \lim_{x \to \sup(I)} (\lambda \int_{x_0}^{x} f(t)dt + \int_{x_0}^{x} g(t)dt)$$

Les deux intégrales admettet une limite pour $x \to \sup(f)$ (car f est intégrable sur I). Donc

$$= \lambda \lim_{x \to \sup(I)} \int_{x_0}^{x} f(t)dt + \lim_{x \to sup(I)} \int_{x_0}^{x} g(t)dt \in \mathbb{R}^n$$

Par la même façon pour la limite lorsque $x \to \inf(I)$ alors par définition, $\lambda f + g$ est inégrable sur I et

$$\begin{aligned} \int_I (\lambda f + g)(t)dt &= \lim_{x \to \sup(I)} \int_{x_0}^{x} (\lambda f + g)(t)dt + \lim_{x \to \inf(I)} \int_{x \to \inf(I)} \int_{x}^{x_0} (\lambda f + g)(t)dt \\ &= \lambda \lim_{x \to \sup(I)} \int_{x_0}^{x} f(t)dt + \lim_{x \to \sup(I)} \int_{x_0}^{x} g(t)dt + \lambda \lim_{x \to \inf(I)} \int_{x}^{x_0} f(t)dt + \lim_{x \to \inf(I)} \int_{x}^{x_0} g(t)dt \\ &= \lambda \int_I f(t)dt + \int_I g(t)dt \end{aligned}$$

— On peut choisir c dans la définition d'intégrale impropre pour obtenir

$$\int_I f(t)dt = \lim_{x \to \inf(f)} \int_{x}^{c} f(t)dt + \lim_{x \to \sup(f)} \int_{x}^{c} f(t)dt$$

□

Remarque 7.1. La linéarité prouver que l'ensemble $\mathcal{J}(I, \mathbb{R}^n) = \{f : I \to \mathbb{R}^n : \text{intégrables sur } I\}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel (de dimension infinie).

Proposition 7.2 (Théorème fondamental pour les intégrales impropres)**.** *Soit $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ un intervalle, soit f une fonction continue par morceaux sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, intégrable sur I. Si F est une antidérivée de f sur I, alors*

$$\int_I f(t)dt = \lim_{x \to \sup(I)} F(x) - \lim_{x \to \inf(I)} F(x)$$

Démonstration. Soit $x_0 \in I$

$$\int_I f(t)dt = \lim_{x \to \sup(I)} \int_{x_0}^{x} f(t)dt + \lim_{x \to \inf(I)} \int_{x}^{x_0} f(t)dt = \cdots$$

en application le deuxième théorème fondamental du calcul intégral sur les intervalles compacts $[x_0, x]$ et $[x, x_0]$ (F est une antidérivée de f sur I, donc même sur ces intervalles).

$$\begin{aligned} \cdots &= \lim_{x \to \sup(I)} (F(x) - F(x_0)) + \lim_{x \to \inf(I)} (F(x_0) - F(x)) \\ &= \lim_{x \to \sup(I)} F(x) - \lim_{x \to \inf(I)} F(x) \end{aligned}$$

□

Proposition 7.3. *Soit $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive, intégrable sur I alors*

$$\int_I f(t)dt = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

Démonstration. D'une part $\Leftarrow$ Soit $x_0 \in I$, $\int\limits_I f(t)dt = \lim\limits_{x\to\inf(I)} \int\limits_x^{x_0} f(t)dt + \lim\limits_{x\to\sup(I)} \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = 0$ D'autre part $\Rightarrow$ On sait que

$$0 = \lim_{x\to\inf(I)} \int_x^{x_0} f(t)dt + \lim_{x\to\sup(I)} \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

Mais f est positive, donc si $\inf(I) \leq x \leq x_0$ alors $\int\limits_x^{x_0} f(t)dt \geq 0$.

Et aussi $\lim\limits_{x\to\inf(I)} \int\limits_x^{x_0} \lim f(t)dt \geq 0$ de même $\lim\limits_{x\to\sup(I)} \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt \geq 0$.

Alors on a $\lim\limits_{x\to\sup(I)} \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = 0$ et $\lim\limits_{x\to\inf(I)} \int\limits_x^{x_0} f(t)dt = 0$.

De plus, la fonction $F_{x_0} : \begin{cases} [x_0, \sup I[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt \end{cases}$ a comme dérivée (par Théorème 4.5) f qui est positive, donc F_{x_0} est croissante sur $[x_0, \sup(I)[$ et $F_{x_0}(x) \geq 0 \forall x \in [x_0, \sup(I)[$ et $\lim\limits_{x\to\sup(I)} F_{x_0}(x) = 0$ alors forcément $F_{x_0}(x) = 0$. $\forall x \in [x_0, \sup(I)[$ donc $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = 0 \forall x \in [x_0, \sup(I)[$.

Ainsi, un résultat sur les intégrales des fonctions continues sur un compact donc f est équivalent sur $[x_0, x]$. Donc f est équivalent à 0 sur $[x_0, \sup(I)]$. De la même manière on prouve que $f \equiv 0$ sur $]\inf(f), x_0]$ donc $f \equiv 0$ sur I. $\square$

Proposition 7.4 (Intégration par parties)**.** *Soient $I \subseteq\in \overline{\mathbb{R}}$ un intervalle, $\phi : I \to \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions continues de classe C^1 par morceau sur I et intégrable sur I. Soient $\tilde{\phi}'$ et $\tilde{f}'$ des extensions arbitraires de la dérivée de ϕ et f sur I. Supposons aussi que*

— $\lim\limits_{x\to\sup(I)} \phi(x)f(x)$ *existe dans* $\mathbb{R}^n$ *et* $\lim\limits_{x\to\inf(I)} \phi(x)f(x)$ *existe dans* $\mathbb{R}^n$.

— $\phi(t).\tilde{f}'(t)$ *est intégrable sur I alors $\tilde{\phi}'(t)f(t)$ est intégrable sur I*

$$\int_I \tilde{\phi}' f(t)dt = \lim_{x\to\sup(I)} \phi(x)f(x) - \lim_{x\to\inf(I)} \phi(x)f(x) - \int_I \phi(t)\tilde{f}'(t)dt$$

Démonstration. Soit $x_0 \in I$. On considère pour tout $x \in [x_0, \sup(I)[$,

$$\int_{x_0}^{x} \tilde{\phi}'(t)f(t)dt = [\phi f]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \phi(t)\tilde{f}'(t)dt = \phi(x)f(x) - \phi(x_0)f(x_0) - \int_{x_0}^{x} \phi(t)\tilde{f}'(t)dt$$

Les hypothèses 1 et 2 assurent que la limite de pour $x \to \sup(I)$ existe dans $\mathbb{R}^n$. De même pour $\lim\limits_{x\to\inf(I)} \int\limits_x^{x_0} \tilde{\phi}'(t)f(t)dt$.
L'énoncé alors MANQUE $\square$

7.1 Intégrale impropres de fonctions numériques positives

7.1.1 Critère d'intégrabilité

Théorème 7.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction positive, Riemann intégrable sur tout sous intervalle compact de I. Alors f est intégrable sur I si et seulement si $\exists M > 0$ tel que $\int\limits_a^b f(t)dt \leq M$ pour tout $[a, b] \subseteq I$.*

Corollaire 7.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction positive, Riemann-intégrable sur tout sous intervalle compact de I, et supposons que I est un intervalle borné. Si f est bornée, alors f est intégrable.*

Démonstration. Comme f est bornée, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$0 \leq f(x) \leq C \; \forall x \in I$$

Pour tout sous intervalle compact $[a, b]$ de I on a alors que

$$\int_a^b f(t)dt \underbrace{\leq}_{\text{monotonie}} \int_a^b Cdt = C(b-a)$$

Mais $[a,b] \subseteq I$, donc $b-a = \text{vol}([a,b]) \leq \text{vol}(I) \in \mathbb{R}$ car I est borné. Donc $\forall [a,b]$ compact dans I

$$\int_a^b f(t)dt \leq C\,\text{vol}(I) = M$$

Donc, depuis le Théorème 7.1 f est intégrable sur I. □

Exemple 7.1. La fonction $f(x) = |sin(log(x))|$ sur $]0,1]$ est intégrable grâce au corollaire en effet f est positive, Riemann-intégrable sur tgout sous intervalle comapct de $]0,1]$ (parce qu'elle est continue), $]0,1]$ est borné et f est bornée sur $]0,1]$ car $\forall x \in]0,1], f(x) \leq 1$

Remarque 7.2. L'énoncé n'est pas vrai si I n'est pas borné. Par exemple, la fonction constamment égale à 1 n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$ même si elle est bornée.

Remarque 7.3. Dans le corollaire la réciproque est fausse. Par exemple la fonction $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrale sur l'intervalle borné $]0,1]$ mais elle n'est pas bornée.

Corollaire 7.2. *Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction positive et continue par morceaux sur I. Soit $F : I \to \mathbb{R}$ une antidérivée de f sur I alors on a que f est intégrable sur I si et seulement si F est bornée sur I.*

Démonstration. On a que f est continue par morceaux sur I, donc elle est continue par morceaux sur tout sous-intervalle compact de I, donc f est Riemann-intégrable sur tout sous-intervalle compact de I. On peut utilise le théorème.

D'une part ($\Rightarrow$) supposons que f est intégrable sur I alors le théorème dit que $\exists M > 0$ tel que $\int_a^b f(t)dt < M$ $\forall [a,b] \subseteq I$ compact. Choisissons $x_0 \in I$, le deuxième théorème fondamental du calcul intégral affirme que $\forall x \in I$, $\int_{x_0}^x f(t)dt = F(x) - F(x_0)$.

Et donc si $x > x_0$ on a

$$F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)dt < F(x_0) + M$$

et $F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)dt \geq F_{x_0}$ car f est positive et $x_0 < x$. De même $F(x_0) - M < F(x) \leq F(x_0) \forall x \in I, x < x_0$ alors $\forall x \in I$ on a

$$F(x_0) - M < F(x) < F(x_0) + M$$

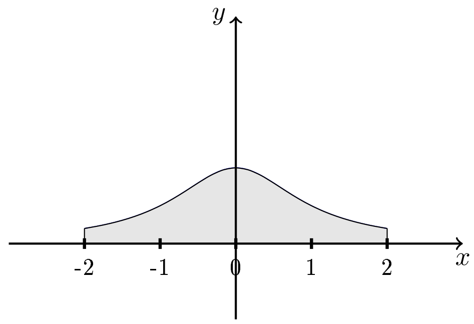
donc F est bornée sur I.

D'autre part ($\Leftarrow$) F est bornée par M sur I pour tout sous intervale compact $[a,b]$ de I le deuxième théorème du calcul intégral donne

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \leq M + M = 2M$$

alors le théorme implique que f est intégrable sur I. □

Exemple 7.2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.



La fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$ depuis le corollaire, car une antidérivée de f est $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \arctan(x)$, qui est borné sur $\mathbb{R}$. Par le premier théorème fondamental du calcul intégral généralisé, on a que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(t)dt &= \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to+\infty} F(x)\\ &= \pi/2 - (-\pi/2)\\ &= \pi\end{aligned}$$

Cela peut nous servir à calculer la valeur de π.

7.1.2 Comparaisons de fonctions positives

Pour des fonctions générales, on ne connait pas une primitive, il peut donc être plus difficile de déterminer si elles sont intégrables ou pas sur un intervalle I quelconque. On peut par contre déduire l'intégrabilité d'une fonction positive en la comparant avec des centres fonctions.

Proposition 7.5. *Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions positives sur I et f, g*

Démonstration. Comme g est intégrable sur I, le théorème du cours affirme que $\exists M > 0$ tel que $\int_{a^b} g(t)dt < M$ pour tout sous-intervalle compact $[a, b]$ de I La monotonie de l'intégrale de Riemann sur des intervalles compacts donne $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt < M$ alors le Théorème implique que f est intégrable sur I.
Soit $x_0 \in I$ on a

$$\int_I f(t)dt = \lim_{x\to\inf(I)} \int_x^{x_0} f(t)dt + \lim_{x\to\sup(I)} \int_{x_0}^{x} f(t)dt \tag{5}$$

Pour tout $x \in I, x \in x_0$ on a

$$\int_x^{x_0} f(t)dt \leq \int_x^{x_0} g(t)dt$$

et les limites pour $x \to \inf(I)$ existent des deux côtés et la limite preservant les inégalités

$$\lim_{x\to\inf(I)} \int_x^{x_0} f(t)dt \leq \lim_{x\to\inf(I)} \int_x^{x_0} g(t)dt$$

De même

$$\lim_{x\to\sup(I)} \int_{x_0}^{x} f(t)dt \leq \lim_{x\to\sup(I)} \int_{x_0}^{x} g(t)dt$$

Donc dans l'équation 5 on obtient $\int_I f(t)dt \leq \int_I g(t)dt$. Pour le deuxième point, on remarque qu'il est l'affirmation contraposée de la première. □

Corollaire 7.3. *Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $f : I\mathbb{R}$ positive et Riemann-intégrable sur tout sous -intervalle compact de I. Supposons que $\exists a, b \in I, a < b$ avec*
— *$\forall x \in I, x \leq a$ $f(x) \leq c_1 g_1(x)$ avec $c_1 \in \mathbb{R}$ et $g_1 : \{x \in I, x \leq a\} \to \mathbb{R}$ intégrable sur $\{x \in I : x \geq a\} = I_1$*
— *$\forall x \in I, x \geq bf(x)leqc_2g_2(x)$ avec $c_2 \in \mathbb{R}$ et $g_2 = \{x \in I, x \geq b\} = I_2 \to \mathbb{R}$ intégrable sur I_2 alors f est intégrable sur I et*

$$\int_I f(t)dt \leq \int_a^b f(t)dt + c_1 \int_{]\inf(I),a]} g_1(t)dt + c_2 \int_{[b,\sup(I)[} g_2(t)dt$$

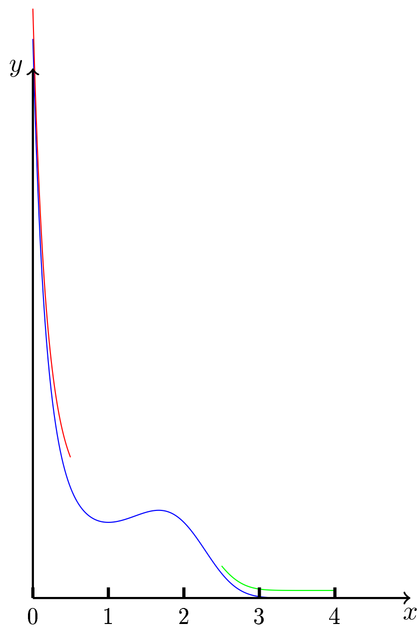
Démonstration. D'après la linéarité, c_1g_1 est intégrable sur I_1 donc la proposition implique que f est intégrable sur I_1 et $\int_{I_1} f(t)dt \leq \int_{I_1} c_2g_2(t)dt = \int_{I_1} g_1(t)dt$ de même f est intégrable sur I_2

$$\int_{I_1} f(t)dt \leq c \int_{I_2} g(t)dt$$

.
Donc

$$\lim_{x\to\inf(I)}\int_x^{x_0} f(t)dt = \lim_{x\to\inf(I)}\int_x^{x_0} f(t)dt + \int_a^b f(t)dt$$

alors f est intégrable sur I.



$$\begin{aligned}
\int_I f(t)dt &= \lim_{x\to\inf(I)}\int_x^b f(t)dt + \lim_{x\to\sup(I)}\int_b^x f(t)dt\\
&= \int_a^b f(t)dt + \lim_{x\to\inf(I)}\int_x^a f(t)dt + \lim_{x\to\sup(I)}\int_b^x f(t)dt\\
&= \int_a^b f(t)dt + \int_{I_1} f(t)dt + \int_{I_2} f(t)dt\\
&\le \int_a^b f(t)dt + c_1\int_{I_1} g_1(t)dt + c_2\int_{I_2} g_2(t)dt
\end{aligned}$$

□

Exemple 7.3 (Exemple 1)**.** $f : [0,+\infty[\to\mathbb{R}, f(t) = \dfrac{e^{-t}}{1+t^2}$.

Sur $[0,+\infty[$, on a $e^{-t}\le 1$ donc $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{1+t^2} \le \dfrac{1}{1+t^2}$. Mais f et $\dfrac{1}{1+t^2}$ sont deux fonctions positives qui satisfont les hypothèses de la proposition donc f est intégrable et

$$\int_{[0,+\infty[} f(t)dt \le \int_{[0,+\infty[} \frac{1}{1+t^2}dt \lim_{x\to+\infty}\arctan(x) - \lim_{x\to 0}\arctan(x)$$

Méthode alternative sur $[0,+\infty[, 1+t^2\ge 1$ donc $\dfrac{1}{1+t^2}\le 1$. Donc $f(t)\le e^{-t}$ $\forall t\in[0,+\infty[$ comme avant, comme e^{-t} est intégrable sur $[0,+\infty[$ alors f l'est aussi. D'après la proposition on a

$$\lim_{[} 0,+\infty[f(t)dt \le \int_{[0,+\infty[} e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty}(-e^{-t}) - \lim_{x\to 0}(-e^{-t}) = 1$$

Exemple 7.4 (Exemple 2). $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ où $f(t) = \dfrac{arctan(t)}{t^{3/2}}$ on utilisera le corollaire en prenant $a = b = 1$. La fonction est positive sur $]0, +\infty[$ car $t \geq 0 \Rightarrow \arctan(t) \geq 0$ parce que arctan est monotone croissante (sa dérivée est positive) et $t^{3/2}$ est positive à $t > 0$. Si $t \in]0, 1]$

$$f(t) = \frac{\arctan(t)}{t^{3/2}} = \frac{t + O_{t\to 0}(t^2)}{t^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{t}} + O_{t\to 0}(\sqrt{t})$$

$f(t) \leq \dfrac{1}{\sqrt{t}} + c\sqrt{t}$ sur $]0, 1]$.

Mais $\dfrac{1}{\sqrt{t}} + c\sqrt{t}$ est intégrable sur $]0, 1]$ par linéarité et $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ intégrable donc $c\sqrt{t}$ est intégrable.

7.1.3 Comparaison à une série

On utilise la théorème que l'on a développé pour montrer un critère de convergence des séries.

Théorème 7.2. *Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive* DÉCROISSANTE *et tele que f est riemann-intégrable sur tout sous intervalle compact de $[0, +\infty[$ alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.*

POUR DST. On remarque d'abord que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f(n + 1) \leq f(x) \leq f(n)$$

$x \in [n, n + 1]$ car f est décroissante. D'après la monotonie de l'intégrale de Riemann on a lors que

$$\int_n^{n+1} f(n + 1)dt \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq \int_n^{n+1} f(n)dt$$

$$f(n + 1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \tag{6}$$

D'une part ($\Rightarrow$) supposons que la série converge $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n) = M \in \mathbb{R}$. Pour tout sous-intervalle compact $[a, b]$ de $[0, +\infty[$, on a que $\exists m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tels que $[a, b] \subseteq [m_1, m_2]$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt &= \int_{m_1}^{m_2} f(t)dt - \int_{m_1} f(t)dt - \int_b^{m_2} f(t)dt \leq \int_{m_1}^{m_2} f(t)dt \\ &= \sum_{n=m}^{m_2-1} \int_n^{n+1} \leq \sum_{n=m_1}^{m_2-1} f(n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} f(n) = M\end{aligned}$$

D'après le théorème de caractérisation de l'intégrabilité des fonctions positives f est intégrable sur $[0, +\infty[$. D'autre part ($\Leftarrow$) supposons maintenant que f est intégrable alors $\exists M0$ tel que $\forall [a, b]$ sous intervalle compact de $[0, +\infty[$

$$\int_a^b f(t)dt \leq M$$

La suite $(\sum\limits_{n=0}^{N} f(n))_{N\in\mathbb{N}}$ est

— Croissante : En effet $\sum\limits_{n=0}^{N+1} f(n) - \sum\limits_{n=0}^{N} f(n) = f(N + 1) > 0$ car f est positive.

— Majorée : $\sum\limits_{n=0}^{N} f(n) = f(0) + \sum\limits_{n=1}^{N} f(n) \leq f(0) + \sum\limits_{n=1}^{N} \int\limits_{n-1}^{n} f(t)dt = f(0) + \int\limits_0^N f(t)dt \leq f(0) + M$

$$f(n+1) \leq \int_{n}^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \tag{7}$$

Le théorème de convergence monotone affirme alors que la suite $(\sum_{n=0}^{N} f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc la série converge.

□

Théorème 7.3. *Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ positive, décroissante et Riemann-intégrable sur tout sous-intervalle compact de $[0,+\infty[$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ converge si et seulement si f est intégtrable sur $[0,+\infty[$*

Exemple 7.5. $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ?

On peut remarquer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ et appelons $f_\alpha : \begin{cases} [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ f_\alpha(x) = \dfrac{1}{(x+1)^\alpha} \end{cases}$

— sur $[0,+\infty[, f_\alpha(x) > 0$

— si $x_1, x_2 \in [0,+\infty[, x_1 \leq x_2 \Rightarrow x_1+1 \leq x_2+1 \Rightarrow (x_1+1)^\alpha \leq (x_2+1)^\alpha \Rightarrow \frac{1}{(x_2+1)^\alpha} \leq \frac{1}{(x_1+1)^\alpha} \Rightarrow$ $f_\alpha(x_2) \leq f_\alpha(x_1)$ Donc f_α décroissante.

f_α est continue, donc intégrable sur tout sous intervalle compact. On peut alors appliquer le théorème la série converge si et seulement si f_α est intégrable sur $[0,+\infty[$. On remarque que $f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x^\alpha}$ donc f_α est intégrable si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque 7.4. On a donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge vers un nombre réel. Lequel ?

Remarque 7.5. On peut aussi définir la série $\tilde{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ avec $s \in \mathbb{C}$ et $Re(s) > 1$ (la série converge). Il existe une fonction méromorphe ζ défini sur $\mathbb{C}$ telle que elle coïncide avec $\tilde{\zeta}$ sur $\{Re(s) > 1\}$

7.2 Normes et intégrales impropres

Proposition 7.6. $\lim_{x\to a} f(x) = \underline{l} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f_i(x) = l_i \in \mathbb{R}$

Démonstration. $\lim_{x\to\infty} f(x) = (l_1,\cdots,l_n)$ si et seulement si $\lim_{x\to a} \|f(x) - (l_1,\cdots,l_n)\|_\infty = 0$

$$\lim_{x\to a} \max |f_i(x) - l_i| = 0 \tag{8}$$

pour tout $i = 1,\cdots,n$ on a

$$0 \leq |f_i(x) - l_i| \leq \max |f_i(x) - l_i|$$

donc si l'équation 8 est vraie, $\lim_{x\to a} \|f_i(x) - l_i\| = 0$ donc $\lim_{x\to a} f(x) = l_i$ inversement, si $\lim_{x\to a} f_i(x) = l_i$ pour tout i alors $\lim_{x\to a} |f_i(x) - l_i| = 0$ □

Lemme 7.1. *Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction Riemann intégrable sur tout intervalle compact de I alors f est intégrable sur I si et seulement si toutes les composantes de f sot intégrables sur I*

Démonstration. Soit f intégrable sur I si et seulement si $\lim_{x\to\sup(I)} \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ et $\lim_{x_0}^{x} f(t)dt$ existent dans $\mathbb{R}^n$.

Mais $\lim_{x\to a} f(x) = \underline{l} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f_i(x) = l_i \in \mathbb{R}$

Depuis une proposition du cours $\int_{x_0}^{x} f(t)dt = (\int_{x_0}^{x} f_1(t)dt, \cdots, \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt)$.

Donc si f est intégrable sur $I \Leftrightarrow \lim_{x\to\sup(I)} \int_{x_0}^{x} f_i(t)dt$ et $\lim_{x\to\inf(I)} \int_{x}^{x_0} f_i(t)dt$ existent, dans $\mathbb{R}$ pour tout $i = 1,\cdots,n$ si et seulement si f_i est intégrable sur I pour tout $i = 1,\cdots,n$.

Inversement si $\lim_{x\to a} f_i(x) = l_i, \forall i$ alors $\lim_{x\to a} |f_i(x) - l_i| = 0 \Leftrightarrow 0 \leq \max |f_i(x) - l_i| \leq \sum_i |f_i(x) - l_i| \Leftrightarrow 0 \leq \lim_{x\to a} \max |f_i(x) - l_i| \leq \sum_i \lim_{x\to a} |f_i(x) - l_i| = 0$ □

Proposition 7.7. *Soit I un intervalle réel, $f : I \to \mathbb{R}^n$ est Riemann-intégrable et soit $\|\cdot\|$ une norme de $\mathbb{R}^n$. Alors, si $\|f\|$ est intégrable sur I alors f est intégrable sur I*

$$\|\int_I f(t)dt\| \leq \int_I \|f(t)\|dt$$

Démonstration. Par équivalence des normes $\exists A \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $\|x\|_\infty \leq A\|$ MANQUE $Z|f_i|$ qui est intégrable sur I, $f_i+|f_i|$ est intégrable sur I mais $f_i = (f_i+|f_i|)-|f_i|$ et donc f_i est intégrable par linéarité de l'intégrabilité. Le lemme implique alors que f est intégrable sur I, toutes ses coordonnées le sont.
Fixons $x_0 \in I$. Soit $\varepsilon > 0$ alors $\exists x_1, x_2 \in I$ tels que

$$\|\int_x^{x_0} f(t)dt - \lim_{x\to\inf(I)} \int_{x_1}^{x_0} f(t)dt\| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\|\int_{x_0}^{x_2} - \lim_{x\to\sup(I)} \int_{x_0}^{x} f(t)dt\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc $\forall y_1, y_2 \in I, \inf(I) \leq y_1 \leq x_1$ et $x_2 \leq y_2 \leq \sup(I)$.

$$\begin{aligned}
\|\int_I f(t)dt\| &= \|\lim_{x\to\inf(I)} \int_x^{x_0} f(t)dt + \lim_{x\to\sup(I)} \int_{x_0}^{x} f(t)dt\| \\
&= \|\lim_{x\to\inf(I)} \int_x^{x_0} f(t)dt - \int_{y_1}^{x_0} f(t)dt + \int_{y_1}^{x_0} f(t)dt + \lim_{x\to\sup(I)} \int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{y_2} f(t)dt + \int_{x_0}^{y_2} \| \\
&\leq \epsilon + \|\int_{y_1}^{x_0} f(t)dt\| + \|\int_{x_0}^{y_2} f(t)dt\| \\
&\leq \epsilon + \int_{y_1}^{x_0} \|f(t)\|dt + \int_{x_0}^{y_2} \|f(t)\|dt \\
&\leq \epsilon + \lim_{x\to\inf(I)} \int_x^{x_0} \|f(t)\|dt + \lim_{y\to\sup(I)} \int_{x_0}^{y} \|f(t)\|dt \\
&= \epsilon + \int_I \|f(t)\|dt
\end{aligned}$$

□

Exemple 7.6. $f(x) = \sin(\log(x))$ est intégrable sur $]0,1]$ car on a voit bien que $|\sin(\log(x))|$ est intégrable car $]0,1]$. Le théorème qu'on vient de prouver dit que si MANQUE

Remarque 7.6. La réciproque dans le théorème précédent est fausse voit par exemple

$$\begin{cases} f : [\pi, +\infty[\to \mathbb{R} \\ f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t} \end{cases}$$

La fonction f est intégrable sur $[\pi, +\infty[$, mais $|f|$ ne l'est pas.
Si f est intégrable sur $[\pi, +\infty[$

$$\int_\pi^x f(t)dt = \int_\pi^x \frac{\sin(t)}{t}dt = [-\cos(1/t)]_\pi^x - \int_\pi^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt = \frac{-\cos(x)}{x} - \frac{1}{\pi} - \int_\pi^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt$$

Mais $\left|\dfrac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$ qui est intégrable sur $[\pi, +\infty[$, donc intégrable sur $[\pi, +\infty[$, donc par comparaison et par le théorème, $\dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[\pi, +\infty[$ donc $\lim\limits_{x\to\infty} \int_\pi^x \dfrac{\cos(t)}{t^2}dt$ existe finie.

Alors $\int\limits_{\pi}^{x} f(t)dt$ admet une limite finie quand $x \to \infty$ donc elle est intégrable sur $[0, +\infty[$ En effet, pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\pi}^{n\pi} |f(t)dt &= \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)dt \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{(-1)^k \sin(t)}{t} dt \\
&\geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(k+1)\pi} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin(t)dt \\
&\geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(k+1)\pi} (\cos(k\pi) - cos((k+1)\pi)) \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1+k} \to \infty
\end{aligned}$$

Donc $\forall M > 0$ il existe un intervalle compact $[\pi, n\pi]$ tel que $\int\limits_{\pi}^{n\pi} |f(t)|dt > M$. Donc par caractérisation de l'intégrabilité d'une fonction positive, $|f|$ n'est pas intégrable sur $[\pi, +\infty[$.

8 Limites et intégrales

Le but de cette section est de savoir si, donnée un suite de fonctions on a

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_I f_n(t)dt = \int\limits_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt$$

Exemple 8.1. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) = \begin{cases} 1 \text{ sur } [n, n+1] \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$ Pour tout $t \in [0, +\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \equiv 0$. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,+\infty[} f_n(t)dt = \lim_{\to\infty} 1 = 1 \neq 0 = \int\limits_{[0,+\infty[} \lim_{N\to\infty} f_n(t)dt$$

L'égalité n'est pas toujours vraie. Par contre on a un théorème nous donnant des conditions pour pouvoir finir.

Théorème 8.1 (convrgence dominée de Lebesgue)**.** *Soient I un intervale réel $f, f_l : I \to \mathbb{R}^n$ des fonctions Riemann-intégrables sur chaque sous intervalle compact de $I \forall l \in \mathbb{N}$.*
On suppose qu'il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que $\|f_\alpha(t)\| \leq g(t))$ $\forall t \in I$ (avec $\|\cdot\|$ une norme arbitraire de $\mathbb{R}^n$). Supposons que $\forall t \in I$, $\lim\limits_{t\to\infty} f_l(t) = f(t)$. Alors la fonction f_l et f sont intégrable sur I et on a

$$\lim_{l\to\infty} \int\limits_I f_l(t)dt = \int\limits_I f(t)dt$$

Troisième partie

Fonction définies par une intégrale

Remarque 8.1 (But)**.** Soit $f : \begin{cases} I \times J \to \mathbb{K} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{cases}$. On souhaite étudier $F : \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \int_J f(x,t)dt \end{cases}$

9 Intégrale généralisée dépendant d'un paramètre

Soit I, J deux intervalles réels dans $\mathbb{K}$

Théorème 9.1. *Soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$ continue par rapport à chacune de ses variables (ie $\forall x \in I, t \mapsto f(x,t)$ continue (Riemann intégrable suffit) sur J et $\forall t \in J, x \mapsto f(x,t)$ continue). On suppose qu'il existe $g : J \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $x \in I, \forall t \in J$*

$$|f(x,t)| \leq g(t) \tag{9}$$

Alors pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J et $F : \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ x \int_J f(x,t)dt \end{cases}$ est continue

Démonstration. La domination implique l'intégrabilité de

$$t \mapsto f(x,t)$$

Pour montrer que F est continue en tout $a \in I$, il suffit de montrer. Pour toute suite $(x_1)_n$ d'éléments de I qui converge vers a, $F(x_1)$ converge vers $F(a)$.
Ceci est ue conséquence directe du théorème de convergence dominé pour

$$I_n = \int_J f_n(t)dt$$

avec $f_n(t) = f(x_n,t)$.
— $\lim\limits_{n\to+\infty} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n,t) = f(a,t)$ car $x \mapsto f(x,t)$ continue.
— $|f_n(t)| = |f(x_n,t)| \leq g(t)$
D'où le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \lim_{n\to+\infty} I_n = \int\limits_I f(a,t)dt = F(a)$$

□

0,+∞[. Pour cela il suffit de montrer que Γ est continue sur tout intervalle $[a,b]$, $0 < a < b$

Théorème 9.2. *Soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$ On suppose*
— *$\forall x \in I, t \to f(x,t)$ est continue (Riemann intégrable suffit)*
— *f admet une dérivée partielle par rapport à x, $\forall t \in J$*
— *$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ continue par rapport à x et à t.*
— *Il existe $g : J \to \mathbb{R}$ intégrable tel que $\forall (x,t) \in I \times J, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g(t)$*
Alors

$$F : \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \int_J f(x,t)dt \end{cases}$$

est de classe C^1 sur I et pour tout $x \in I$,

$$F'(x) = \int\limits_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

Démonstration. Il s'agit à nouveau de justififer un passage à la limite à l'aide du théorème de convergence dominée

$$\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\int_J \frac{f(x,t)-f(a,t)}{x-a}dt$$

□

Exemple 9.2. On montre ainsi que la fonction Γ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ de dérivée

$$\Gamma'(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t)(\log(t))t^{x-1}dt}$$

10 Transformée de Fourier et de Laplace

Définition 10.1. Soit f une fonction telle que $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On appelle transformée de Fourier de f l'application linéaire.

$$\mathcal{F}: f\mapsto \hat{f}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x)dx$$

Remarque 10.1. Si $|f|$ est intégrable, comme $\left|e^{-ix\xi}f(x)\right| = |f(x)|$ alors $\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x)dx$ converge.

Définition 10.2. Soit f une fonction bornée sur $\mathbb{R}$. On appelle transformation de Laplace de f l'application

$$L: f\mapsto L(f)(s)=F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$$

Remarque 10.2. Pour f bornée, $|e^{-st}f(t)|\leq Me^{-st}$. Donc $L(f)$ est bien définie.

[Propriétés de la transformée de Fourier] Soit f tel que $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ alors :
— $\hat{f}$ est bien définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$
— Si $xf : x\mapsto xf(x)$ est absolument intégrable alors $\hat{f}$ est dérivable et $(\hat{f})'(\xi)=(\widehat{-ixf})(\xi)$
— Si f est dérivable de dérivée f' absolument intégrable, alors $(\widehat{f'})(\xi)=i\xi\hat{f}(\xi)$

Démonstration. En exercice □

[Propriétés de la transformée de Laplace] Soit f bornée sur $[0,+\infty[$ alors,
— $L(f)$ est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$
— Si f est dérivable de dérivée bornée, alors $L(f')(s)=sL(f)(s)-f(0)$

Références

[Niven] iven, X, preuve, journal (1947), p.140 − 142

FIN.