

Exercice 1

E est un K $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E .
 On dit que cette famille est libre, si $\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in K^p$ tel que $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$.
 On dit que les vecteurs sont linéairement indépendants lorsque ce n'est pas vérifié on parle de famille liée ou de vecteurs linéairement dépendants.
 On dit que la famille est génératrice si $\forall v \in E, \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in K^p$ tel que $v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p$.
 Famille libre + génératrice = base de E .

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère : $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Lorsque on a une famille de 2 vecteurs dire que cette famille est libre équivaut à dire que les vecteurs ne sont pas colinéaires. u_1 et u_2 sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists \lambda \in K, u_1 = \lambda u_2$.

On sait que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Comme la famille $\mathcal{F}$ ne comporte que 2 vecteurs et que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice.

Autre méthode pour trouver un vecteur v de $\mathbb{R}^3$ tel que $v \neq \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$. Soit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 = \alpha_1 \\ 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 = -\alpha_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Impossible}$$

Donc la famille n'est pas génératrice

$$\text{Dans } \mathbb{R}^3 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \mathcal{F}$$

Soient $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que
 $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

La famille est-elle génératrice ?

Soit $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, Existe-t-il $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

tel que $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = x_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = x_2 \\ -\alpha_2 - 2\alpha_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 5/4 \\ \alpha_2 = 1/2 \\ \alpha_3 = -1/4 \end{cases}$$

Si E est un ev de dimension p une famille
de p vecteurs p . Alors on a l'équivalence.
 $\mathcal{F}$ est une s. libre $\Rightarrow \mathcal{F}$ est une génératrice

Dans $\mathbb{R}^2 \left((1,1), (0,1), (1,0) \right)$, $\mathbb{R}^2$ est un ev de dim 2
et la famille contient 3 vecteurs donc elle est
liée. Cette famille contient les 2 vecteurs de
la base canonique de $\mathbb{R}^2$ $(1,0), (0,1)$ donc
cette famille est génératrice.

croissant stricte (con distinct) : On note i_0 l'indice du plus grand λ_i trouvé.

On a trouvé i_0 tel que $\alpha_{i_0} \neq 0$ et $\lambda_{i_0} > \lambda_{i_1}$ pour tous les i tel que $\alpha_i \neq 0$.

On déduit que $\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha_{i_0} f_{i_0}(x)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x)}{\alpha_{i_0} f_{i_0}(x)} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_{i_0} f_{i_0}(x) + \sum_{i \neq i_0}^m \alpha_i f_i(x)}{\alpha_{i_0} f_{i_0}(x)} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^m \frac{\alpha_i}{\alpha_{i_0}} e^{\frac{(\lambda_i - \lambda_{i_0})x}{<0}} = 1$$

On a $\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha_{i_0} f_{i_0}(x)$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha_{i_0} f_{i_0}(x) = 0$$

Comme $\alpha_{i_0} \neq 0$ on a $\lambda_{i_0} < 0$ d'où $\lambda_i < \lambda_{i_0} < 0$

2) On procède de même en $-\infty$

Montrons que $\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \alpha_{i_1} e^{\lambda_{i_1} x}$

avec i_1 tel que $\alpha_{i_1} \neq 0$ et $\lambda_{i_1} < \lambda_i$ pour tout i . On déduit $0 < \lambda_{i_1} < \lambda_i$

3) Après 2) on obtient : tous les λ_i tq $\alpha_i = 0$ sont < 0
sont > 0

Exercice 3

$$Q \in R[X], \quad Q \neq \text{cte}$$

$$n = \deg(Q) - 1$$

Remarque $Q \neq \text{cte}$, degré $Q \geq 1$ et donc $n \geq 0$
càd $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Montrons que } R[X] = R_n[X] \oplus QR[X]$$

Rappel: $R_n[X]$: polynôme en X de degré $\leq n$

$$QR[X] = \{P \in R[X] / P(X) = Q(X)P_1(X) \text{ avec } P_1(X) \in R[X]\}$$

$$\text{Montrons que } R[X] = R_n[X] \oplus QR[X]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R[X] = R_n[X] + QR[X] \\ \text{et } R_n[X] \cap QR[X] = \{0\} \end{cases}$$

Soit $P \in R_n[X] \cap QR[X]$ alors $P \in R_n[X]$ et donc degré $P \leq n$

De plus $P \in QR[X]$ càd $\exists P_1 \in R[X]$ tel que $P = QP_1$
càd degré $P = \text{degré } Q + \text{degré } P_1$
 $= n+1 + \text{degré } P_1$

Soit $P \in R[X]$, on effectue la division de P par Q .

$$P = P_1 Q + R \text{ avec degré } R < \text{degré } Q$$

$(a_0, \dots, a_m)$ $n+1$ racines distinctes

$$R[X] \rightarrow R^{n+1}$$

$$P \mapsto v(P) = (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_m))$$

Montrons que v est une application linéaire.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v(P_1 + P_2) = v(P_1) + v(P_2) \\ v(\lambda P) = \lambda v(P) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \{v(\lambda P_1 + P_2) = \lambda v(P_1) + v(P_2)\}$$

Soit $\lambda \in R$. Soient $P_1 \in R[X]$ et $P_2 \in R[X]$

$$\begin{aligned}
 u(\lambda P_1 + P_2) &= ((\lambda P_1 + P_2)(a_0), \dots, (\lambda P_1 + P_2)(a_m)) \\
 &= (\lambda P_1(a_0), \dots, \lambda P_1(a_m)) + (P_2(a_0), \dots, P_2(a_m)) \\
 &= \lambda (P_1(a_0), \dots, P_1(a_m)) + (P_2(a_0), \dots, P_2(a_m)) \\
 &= \lambda u(P_1) + u(P_2)
 \end{aligned}$$

P' où u est une application linéaire.

E et F 8 ev $f: E \rightarrow F$ un AL. Noyau de f noté $\text{Ker}(f)$. $\text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$

$$\begin{aligned}
 \text{Ker}(u) &= \{P \in \mathbb{R}[X], u(P) = 0\} \\
 &= \{P \in \mathbb{R}[X], (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_m)) = (0, 0, \dots, 0)\}
 \end{aligned}$$

$$P \in \text{Ker}(u) \Leftrightarrow (P(a_0), \dots, P(a_m)) = (0, \dots, 0)$$

$\Leftrightarrow a_0, \dots, a_m$ sont des racines de P .

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow P(X) &= (X - a_0)(X - a_1) \dots (X - a_m) P_1(X) \\
 &= \prod_{i=0}^m (X - a_i) \cdot P_1(X)
 \end{aligned}$$

Alors degré $G = m+1$ et $P \in \text{Ker}(u) \Leftrightarrow P \in \mathbb{Q}[\mathbb{R}[X]$

b) On restreint u à $\mathbb{R}_m[X]$, $u|_{\mathbb{R}_m[X]} : \begin{cases} \mathbb{R}_m[X] \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \\ P \mapsto u(P) = (P(a_0), \dots, P(a_m)) \end{cases}$

Une application linéaire est injective si $\text{Ker} = \{0\}$

$$u(P) = u(P') \Rightarrow P = P' \text{ si injectif.}$$

$$\Rightarrow u(P) - u(P') = 0$$

$$\Rightarrow u(P - P') \text{ ceci doit entraîner } P = P' \text{ d'où } \text{Ker}(u) = \{0\}$$

$$\text{Ker}(u) = \{P \in \mathbb{R}_m[X] \mid u(P) = 0\}$$

$$P \in \text{Ker}(u|_{\mathbb{R}_m[X]})$$

$$\Leftrightarrow (P(a_0), \dots, P(a_m)) = (0, \dots, 0)$$

$$\Leftrightarrow P(a_0) = \dots = 0 = P(a_m)$$

$\Leftrightarrow P$ a au moins $m+1$ racines distinctes $a_0, \dots, a_m$

Comme $P \in \mathbb{R}_m[X]$, degré $P \leq m$ d'où nécessairement $P = 0$ donc $\text{Ker } (v_{\mathbb{R}_m}) = \{0\}$

c) On déduit que pour tout $(b_0, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ il existe P de degré $\leq m$ tel que $P(a_i) = b_i$ pour $0 \leq i \leq m$ il existe $P : v_{\mathbb{R}_m}, \mathbb{R}_m[X] \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$

D'après le théorème du rang $\dim \text{Ker } (v_{\mathbb{R}_m}) + \dim \text{Im } (v_{\mathbb{R}_m}) = \dim \mathbb{R}_m[X] = m+1$

On $\dim \text{Ker } (v_{\mathbb{R}_m}) = \dim \{0\} = 0$
d'où $\dim \text{Im } (v_{\mathbb{R}_m}) = m+1 - 0 = m+1 = \dim \mathbb{R}^{m+1}$
 $\text{Im } v_{\mathbb{R}_m} = \mathbb{R}^{m+1}$

$v_{\mathbb{R}_m}$ est surjective, comme elle est injective c'est une bijection.

Autre méthode en dimension finie (identique)

v bijective $\Leftrightarrow$ injective
 $\Leftrightarrow$ surjective

$$3) L_0(X) = \frac{(X-a_1)(X-a_2)\dots(X-a_m)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\dots(a_0-a_m)}, \quad L_i(X) = \frac{(X-a_0)(X-a_2)\dots(X-a_m)}{(a_i-a_0)(a_i-a_2)\dots(a_i-a_m)}$$

$$L_i(X) = \frac{(X-a_0)(X-a_1)\dots(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})\dots(X-a_m)}{(a_i-a_0)(a_i-a_1)\dots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\dots(a_i-a_m)}$$

$$= \frac{\prod_{\substack{0 \leq j \leq m \\ j \neq i}} (X-a_j)}{\prod_{\substack{0 \leq j \leq m \\ j \neq i}} (a_i-a_j)}$$

Montrons que $(L_0, \dots, L_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$ dimension $(m+1)$. Il suffit de montrer que la famille est libre et génératrice.

Montrons qu'elle est libre:

Soient (β_0, β_n) n'importe quels $\beta_0 L_0 + \dots + \beta_n L_n = 0$ (*)

$$L_0(a_1) = 0 \quad L_0(a_2) = 0 \quad \dots \quad L_0(a_m) = 0$$

$$L_0(a_0) = 1$$

$$L_0(X) = \frac{(X-a_1)(X-a_2)\dots(X-a_m)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\dots(a_0-a_m)}$$

$$L_1(X) = \frac{(X-a_0)(X-a_2)\dots(X-a_m)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)\dots(a_1-a_m)}$$

Dans (*), si on remplace X par a_0 on a

$$\beta_0 + \beta_1 L_1(a_0) + \dots + \beta_m L_m(a_0) = 0 \Rightarrow \beta_0 = 0$$

Idem pour a_1 , $\beta_1 = 0$

La famille est libre
c'est donc une base

Idem pour a_m , $\beta_m = 0$

de $\mathbb{R}_m[X]$.

4) On a vu que $\forall (b_0, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$

$\exists P \in \mathbb{R}_m[X]$ / $v(P) = (b_0, \dots, b_m)$ c'ad tel que
 $P(a_0) = b_0$, $P(a_1) = b_1$, ..., $P(a_m) = b_m$

$\tilde{P}$ tq $\tilde{P}(a_0) = b_0$ encore avant $\tilde{P}(a_0) = 1$

On a vu que $L_0(a_0) = 1$ en multipliant par b_0

$$(b_0 \cdot L_0)(a_0) = b_0$$

$$(b_0 \cdot L_0)(a_i)_{i \neq 0} = 0 \dots$$

donc le polynôme recherché est $\sum_{i=0}^m b_i L_i(X)$

Exercice 4

5

A un hyperplan de E .

$\Rightarrow H$ est un sev de E de dimension $\dim E - 1$

$$1) E = \text{Vect}(x_0) \oplus H$$

Soit $x \in \text{Vect}(x_0) \cap H$, on a $x \in \text{Vect}(x_0)$ d'où

$$x = \lambda x_0 \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } x \in H$$

Comme $x_0 \notin H$ aucun multiple de x_0 différent de 0 ne peut appartenir à H d'où $x = 0$, $\text{Vect}\{x_0\} \cap H = \{0\}$

Reste à montrer que : $\forall x \in E, x = x_1 + x_2$ avec
 $\begin{cases} x_1 \in \text{Vect}(x_0) \\ x_2 \in H \end{cases}$

D'où $x \in \text{Vect}(x_0)$ c'est à dire $x = \lambda x_0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in H$

Si $\lambda \neq 0$ alors $\lambda x_0 \neq 0$ et $\lambda x_0 \in H$. Alors comme H un sev de E

$$\frac{1}{\lambda} (\lambda x_0) = x_0 \in H \text{ impossible}$$

D'où $\lambda = 0$ et $x = 0$

De plus $\dim \text{Vect}(x_0) = 1$

$$\dim H = m - 1$$

$$\text{d'où } \dim(\text{Vect}(x_0) + \dim H) = \dim(\text{Vect}(x_0)) + \dim H = m = \dim E$$

$$\text{donc } E = \text{Vect}(x_0) \oplus H$$

2) Comme $E = \text{Vect}(x_0) \oplus H$ par définition pour tout $x \in E$, il existe une unique $x_1 \in \text{Vect}(x_0)$ et une unique $x_2 \in H$ tel que $x = x_1 + x_2$

• $x_1 \in \text{Vect}(x_0)$ signifie $x_1 = \lambda x_0, \lambda \in K$

• On note $h = x_1$

D'où

$\forall x \in E, \exists! \lambda \in K, \exists! h \in H$

tel que $x = \lambda x_0 + h$.

3) E un K -ev. On dit que g est une forme
linéaire sur E si g va de $g: E \rightarrow K$

Exemple: $E = \mathbb{R}^2: g: E \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto x + y$$

Comme $\text{Ker } g = H \neq \{0\}$ g ne sera pas
injective, bijective.

Comme on travaille en finie & on a

$$\dim E = \dim \text{Ker } g + \dim \text{Im } g$$

$$\dim \text{Ker } g = m - 1 + \dim \text{Im } g$$

$$\text{d'où } \dim \text{Im } g = 1 = \dim K$$

on $\text{Im } g \subset K$, donc $\text{Im } g = K$

Il suffit de connaître l'image d'une base

ici $E = \text{Vect}(x_0) \oplus H$ donc il existe une base
de la forme:

$$B = (x_0, e_1, \dots, e_{m-1})$$

Soit $\lambda_1 \in K, \lambda_1 \neq 0$

on pose $\phi(x_0) = \lambda_1$

$$\phi(x_0) \neq 0 \quad \text{car } H = \text{Ker } \phi \neq E$$

$$\phi(e_1) = 0 \quad \text{car } e_1 \text{ dans}$$

$$\phi(e_2) = 0 \quad \text{le noyau}$$

$\vdots$

$$\phi(e_{m-1}) = 0$$

Exercice 4

5

A un hyperplan de E .

$\Rightarrow H$ est un sev de E de dimension $\dim E - 1$

$$1) E = \text{Vect}(x_0) \oplus H$$

Soit $x \in \text{Vect}(x_0) \cap H$, on a $x \in \text{Vect}(x_0)$ d'où

$$x = \lambda x_0 \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } x \in H$$

Comme $x_0 \notin H$ aucun multiple de x_0 différent de 0 ne peut appartenir à H d'où $x = 0$, $\text{Vect}\{x_0\} \cap H = \{0\}$

Reste à montrer que : $\forall x \in E, x = x_1 + x_2$ avec
$$\begin{cases} x_1 \in \text{Vect}(x_0) \\ x_2 \in H \end{cases}$$

D'où $x \in \text{Vect}(x_0)$ c'est à dire $x = \lambda x_0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in H$

Si $\lambda \neq 0$ alors $\lambda x_0 \neq 0$ et $\lambda x_0 \in H$. Alors comme H un sev de E

$$\frac{1}{\lambda} (\lambda x_0) = x_0 \in H \text{ impossible}$$

D'où $\lambda = 0$ et $x = 0$

De plus $\dim \text{Vect}(x_0) = 1$

$$\dim H = n - 1$$

$$\text{d'où } \dim(\text{Vect}(x_0) + \dim H) = \dim(\text{Vect}(x_0)) + \dim H = n = \dim E$$

$$\text{donc } E = \text{Vect}(x_0) \oplus H$$

2) Comme $E = \text{Vect}(x_0) \oplus H$ par définition pour tout $x \in E$, il existe une unique $x_1 \in \text{Vect}(x_0)$ et une unique $x_2 \in H$ tel que $x = x_1 + x_2$

• $x_1 \in \text{Vect}(x_0)$ signifie $x_1 = \lambda x_0, \lambda \in K$

• on note $h = x_1$

D'où

$\forall x \in E, \exists! \lambda \in K, \exists! h \in H$

tél que $x = \lambda x_0 + h$.

3) E un K -ev. On dit que g est une forme
linéaire sur E si g va de $g: E \rightarrow K$

Exemple: $E = \mathbb{R}^2$ $g: E \rightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \mapsto x + y$

Comme $\text{Ker } g = H \neq \{0\}$ g ne sera pas
injective, bijective.

Comme on travaille en finie & on a

$\dim E = \dim \text{Ker } g + \dim \text{Im } g$

$\dim \text{Ker } g = n - 1 + \dim \text{Im } g$

d'où $\dim \text{Im } g = 1 = \dim K$

on $\text{Im } g \subset K$, donc $\text{Im } g = K$

Il suffit de connaître l'image d'une base

ici $E = \text{Vect}(x_0) \oplus H$ donc il existe une base
de la forme:

$B = (x_0, e_1, \dots, e_{n-1})$

Soit $\lambda_1 \in K, \lambda_1 \neq 0$

on pose $\varphi(x_0) = \lambda_1$

$\varphi(x_0) \neq 0$ car $H = \text{Ker } g \neq E$

$\varphi(e_1) = 0$ car e_1 dans

$\varphi(e_2) = 0$ le noyau

$\vdots$

$\varphi(e_{n-1}) = 0$

Exercice 5

6

1) $M_n(\mathbb{R})$ = matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels

$$(e_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{avec} \quad e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad i, j$$

B contient n^2 matrices d'où dimension $M_n(\mathbb{R}) = n^2$

2) On cherche les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ tq $\text{Tr}(A) = 0$
 Cette condition n'agit pas sur les coeff en dedans de la diagonale. Il y en a $n^2 - n$
 d'où $\dim H \geq n^2 - n$

En particulier toutes les matrices e_{ij} avec $i \neq j$
 Ici on a une condition avec 1 sur l'équation
 il y a donc un seul coeff qui sera déterminé à partir des $n-1$ autres.

$$a_{nn} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{n-1, n-1}$$

$$= \sum_{i \neq j} a_{ij} e_{ij} + a_{11} e_{11} + a_{22} e_{22} + \dots + a_{n-1, n-1} e_{n-1, n-1}$$

$$= \sum_{i \neq j} a_{ij} e_{ij} + a_{11} (e_{11} - e_{nn}) + \dots + a_{n-1, n-1} (e_{n-1, n-1} - e_{nn})$$

H est engendré par $(e_{ij})_{i \neq j}, e_{11} - e_{nn}, \dots, e_{n-1, n-1} - e_{nn}$

Soit les coefficients tq: $\alpha_{ij} e_{ij} + \alpha_1 (e_{11} - e_{nn}) + \dots + \alpha_{n-1} (e_{n-1, n-1} - e_{nn}) = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0$ c'est donc une base de dimension $n^2 - 1$

Montrons que $M_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(I_n) \oplus H$

Soit $M \in \text{Vect}(I_n) \cap H$. Alors $M \in \text{Vect}(I_n)$ càd

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } M = \lambda I_n$$

$$\Rightarrow T_n(M) = \lambda n \text{ or } M \in H, \text{ càd } T_n(M) = 0$$

$$\text{d'où } \lambda n = 0 \text{ càd } \lambda = 0$$

$$\text{Vect}(I_n) \cap H = \{0\}, \quad \dim H = n^2 - 1, \quad \dim \text{Vect}(I_n) = 1$$

$$\text{d'où } \dim(H + \text{Vect}(I_n)) = \dim H + \dim \text{Vect}(I_n) = n^2$$

$$\text{On en déduit } M_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(I_n) \oplus H$$

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Trouver $M_1 \in \text{Vect}(I_n)$ et

$$M_2 \in H \text{ tq } M = M_1 + M_2$$

$$\text{On a } T_n(M) = T_n(M_1 + M_2) = T_n(M_1) + T_n(M_2) = \lambda n$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{T_n(M)}{n} \text{ et donc } M_1 = \frac{T_n(M)}{n} I_n \text{ et aussi}$$

$$M_2 = M - M_1 = M - \frac{T_n(M)}{n} I_n.$$

Exercice 6

1) p est une AL de $E \rightarrow E$

$\text{Ker}(p)$ un sev de E

$\text{Im}(p)$ un sev de E

$$\forall x \in E : x = p(x) + (x - p(x)) \text{ où } p(x) \in \text{Im}(p)$$

$$\text{et } x - p(x) \in \text{Ker } p \text{ car } p(x - p(x)) = p(x) - pp(x) = 0$$

$$\text{On a donc } E = \text{Im}(p) + \text{Ker}(p). \text{ Montrons que}$$

$$\text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p) = \{0\}. \text{ Soit } x \in \text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p)$$

$$x \in \text{Im}(p) \Rightarrow \exists y \in E \text{ tq } x = p(y) \Rightarrow p(x) = pp(y) = p(y) = x. \text{ Donc } x = 0$$

$$\text{On a donc } E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$$

2) Matrice de p dans β_1 et β_2 , $\phi(e_1) \dots \phi(e_n)$
dans $(\beta_1, \dots, \beta_p)$ on obtient:

On choisit comme base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$

La matrice de p dans $\mathcal{B}$

$$p(\mathcal{B}_1), p(\mathcal{B}_2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$y \in \text{Im}(p)$$

$$\Rightarrow \exists x \in E \text{ tq } p(x) = y$$

$$\text{d'où } p^2(x) = p(y)$$

$$p(x) = y$$

$\text{Tr}(M) = \text{mbn de } 1 \text{ sur la diagonale}$

c'est à dire le nombre de vecteurs dans $\mathcal{B}_2$

ou encore $\dim(\mathcal{B}_2)$ d'où $\text{tr}(M) = \text{rg}(p)$

En

$$1) \det(M) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Ici on obtient 0 sauf si $\text{Ker } p = \{0\}$

Exercice 7

Noyau de $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$, $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et sont les matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AX + AY = 0 \\ AX + AY = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A(X+Y) = 0$$

$$\Leftrightarrow A^{-1}A(X+Y) = 0$$

$$\Leftrightarrow I_n(X+Y) = 0$$

$$\Leftrightarrow Y = -X$$

$$\text{Ker } B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Exercice 8

- 1) $A \in M_n(\mathbb{R})$ déterminer $\text{rg}(A, A)$ en fonction de $\text{rg}(A)$

$$\text{rg}(A \ A) = \text{rg}(A \ A - A) = \text{rg}(A)$$

2) $M = \begin{pmatrix} I_m & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$

$$\text{rg}(I_m) = m$$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & c_1 \dots c_p \end{pmatrix} = m + \text{rg}(C)$$

comme C a une matrice diagonale par bloc

$$\text{rg}(M) = \text{rg} \text{ des blocs}$$

Exercice 9

- 1) G_m est dans $\mathbb{R}^4$. G_m a une famille de 4 vecteurs on montre que la famille est libre ou génératrice

Famille libre : Soient $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 4 réels

tel que $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 + \alpha_4 g_4 = 0$

G_m obtient :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 0$$

$$\alpha_3 + \alpha_4 = 0$$

$$\alpha_4 - \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

La famille est libre, c'est une base de $\mathbb{R}^4$

Avec la déterminants :

Ici : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

déterminant d'une
matrice diagonale par
blocs = produit des ~~termes~~
déterminants des blocs
diagonaux

La famille de vecteurs colonnes de M forme une base de $\mathbb{R}^4$

$u: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par $u(g_i) = e_i$ pour $i=1,2,3,4$
 $x \mapsto u(x)$

(g_1, g_2, g_3, g_4) est une base de $\mathbb{R}^4$, donc il existe
 (x_1', x_2', x_3', x_4') tels que
 $x = x_1' g_1 + x_2' g_2 + x_3' g_3 + x_4' g_4$

$$\begin{aligned} u(x) &= x_1' u(g_1) + x_2' u(g_2) + x_3' u(g_3) + x_4' u(g_4) \\ &= x_1' e_1 + x_2' e_2 + x_3' e_3 + x_4' e_4 \end{aligned}$$

u est donc
défini $\forall x \in \mathbb{R}^4$

Ma u est un isomorphisme

Par définition $u: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ est linéaire donc c'est
un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

Il faut montrer que u est bijectif.

On commence par chercher si u est injective

On cherche $\text{Ker}(u)$

$$x \in \text{Ker}(u) \Leftrightarrow u(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 0$$

u est injective sur un
espace de dimension finie
donc u est bijective

$$2) F = \text{Vect}(g_1, g_2) = \{ v \in \mathbb{R}^4, v = \lambda g_1 + \mu g_2, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \}$$

$$G = \text{Vect}(g_3, g_4) = \{ v \in \mathbb{R}^4, v = \lambda g_3 + \mu g_4, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

F est stable par u càd $u(F) \subset F \Leftrightarrow \forall x \in F, u(x) \in F$

Soit $x \in F, \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists \mu \in \mathbb{R}$ tq $x = \lambda g_1 + \mu g_2$

$$\begin{aligned} \text{Alors } u(x) &= u(\lambda g_1 + \mu g_2) \\ &= \lambda u(g_1) + \mu u(g_2) \\ &= \lambda e_1 + \mu e_2 \\ &= \dots g_1 + \dots g_2 \end{aligned}$$

$$u(g_1) = e_1 - e_2$$

$$g_2 = e_1 + e_2$$

$$e_1 = \frac{1}{2}(g_1 + g_2)$$

$$e_2 = \frac{1}{2}(g_2 - g_1)$$

On obtient

$$u(x) = \lambda \left(\frac{g_1 + g_2}{2} \right) + \mu \left(\frac{g_2 - g_1}{2} \right)$$

$$= (\lambda - \mu) \frac{1}{2} g_1 + \frac{\lambda + \mu}{2} g_2 \in F$$

Montrons que G est stable par u

$$G = \text{Vect}(g_3, g_4) = \text{Vect}(e_3 - e_1, e_3 + e_1) = \text{Vect}(e_3, e_1) = \text{Vect}(u(g_3), u(g_4))$$

3) Matrice de u dans (g_1, g_2, g_3, g_4) puis dans (e_1, e_2, e_3, e_4)

$$\text{donc } M_{(g_1, g_2, g_3, g_4)} = \begin{matrix} & u(g_1) & u(g_2) & u(g_3) & u(g_4) \\ \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{matrix} \end{matrix}$$

Matrice de passage d'une base B_1 à une base B_2 :

$$P = \begin{pmatrix} & \\ & \\ & \\ & \end{pmatrix}_{B_2} B_1$$

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

déterminant d'une
matrice diagonale par
blocs = produit des ~~termes~~
déterminants des blocs
diagonaux

La famille de vecteurs colonnes de M forme
une base de $\mathbb{R}^4$

$u: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par $u(g_i) = e_i$ pour $1 \leq i \leq 4$
 $x \mapsto u(x)$

(g_1, g_2, g_3, g_4) est une base de $\mathbb{R}^4$, donc il existe
 (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) 4 réels tels que
 $x = x'_1 g_1 + x'_2 g_2 + x'_3 g_3 + x'_4 g_4$

$$\begin{aligned} u(x) &= x'_1 u(g_1) + x'_2 u(g_2) + x'_3 u(g_3) + x'_4 u(g_4) \\ &= x'_1 e_1 + x'_2 e_2 + x'_3 e_3 + x'_4 e_4 \end{aligned}$$

u est donc
défini $\forall x \in \mathbb{R}^4$

Ma u est un isomorphisme

Par définition $u: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ est linéaire donc c'est
un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

Il faut montrer que u est bijectif.

On commence par chercher si u est injective

On cherche $\text{Ker}(u)$

$$x \in \text{Ker}(u) \Leftrightarrow u(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 0$$

u est injective sur un
espace de dimension finie
donc u est bijective

$$2) F = \text{Vect}(g_1, g_2) = \{ v \in \mathbb{R}^4, v = \lambda g_1 + \mu g_2, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \}$$

$$G = \text{Vect}(g_3, g_4) = \{ v \in \mathbb{R}^4, v = \lambda g_3 + \mu g_4, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

F est stable par u càd $u(F) \subset F \Leftrightarrow \forall x \in F, u(x) \in F$

Soit $x \in F, \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists \mu \in \mathbb{R}$ tq $x = \lambda g_1 + \mu g_2$

$$\begin{aligned} \text{Alors } u(x) &= u(\lambda g_1 + \mu g_2) \\ &= \lambda u(g_1) + \mu u(g_2) \\ &= \lambda e_1 + \mu e_2 \\ &= \dots g_1 + \dots g_2 \end{aligned}$$

$$u(g_1) = e_1 - e_2$$

$$g_2 = e_1 + e_2$$

$$e_1 = \frac{1}{2}(g_1 + g_2)$$

$$e_2 = \frac{1}{2}(g_2 - g_1)$$

On obtient

$$u(x) = \lambda \left(\frac{g_1 + g_2}{2} \right) + \mu \left(\frac{g_2 - g_1}{2} \right)$$

$$= (\lambda - \mu) \frac{1}{2} g_1 + \frac{\lambda + \mu}{2} g_2 \in F$$

Montrons que G est stable par u

$$\begin{aligned} G = \text{Vect}(g_3, g_4) &= \text{Vect}(e_3 - e_1, e_3 + e_1) = \text{Vect}(e_3, e_1) = \\ &= \text{Vect}(u(g_3), u(g_4)) \end{aligned}$$

3) Matrice de u dans (g_1, g_2, g_3, g_4) puis dans (e_1, e_2, e_3, e_4)

$$\text{donc } M_{(g_1, g_2, g_3, g_4)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} u(g_1) & u(g_2) & u(g_3) & u(g_4) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{matrix} \end{matrix}$$

Matrice de passage d'une base B_1 à une base B_2 :

$$P = \begin{pmatrix} & B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

On a la (g_i) en fonction des (e_i) on a donc
 des (e_i) on a donc la matrice de passage de
 (e_1, e_2, e_3, e_4) à (g_1, g_2, g_3, g_4)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi la matrice de passage
 de (g_1, g_2, g_3, g_4) à (e_1, e_2, e_3, e_4)

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} u(e_1) \dots u(e_4) & g_1 \dots g_4 & u(g_1) \dots u(g_4) & e_1 \dots e_4 \\ \begin{pmatrix} \vdots \\ e_1 \\ \vdots \\ e_4 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} P \\ \vdots \\ e_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vdots \\ g_1 \\ \vdots \\ g_4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} P^{-1} \\ \vdots \\ g_1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

TD2 - Rappel d'algèbre linéaire bis, déterminant en dimension 2 et 3

Exercice 1

1) Soient P_1 et P_2 dans $R_m[X]$ et $\lambda \in R$

$$\begin{aligned}\varphi(P_1 + \lambda P_2) &= \int_0^1 (P_1(x) + \lambda P_2(x)) dx = \int_0^1 P_1(x) dx + \lambda \int_0^1 P_2(x) dx \\ &= \varphi(P_1) + \lambda \varphi(P_2)\end{aligned}$$

d'où φ est linéaire. On peut directement dire que φ est une A.L d'après la linéarité de l'intégrale

$$2) M_1 = \begin{pmatrix} \varphi(1) & \varphi(x) & \dots & \varphi(x^m) \\ 1 & 1/2 & \dots & 1/(m+1) \end{pmatrix} (1)$$

$$3) M_2 = \begin{pmatrix} \varphi(1) & \varphi(x) & \dots & \varphi(x^m) \\ 1/3 & 1/6 & \dots & 1/(3(m+1)) \end{pmatrix} (3)$$

$$4) \dim R_m[X] = \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi$$

donc $\dim \text{Ker } \varphi = m$

Exercice 2

φ somme m -linéaire

$$\varphi: \begin{cases} L \rightarrow K \end{cases}$$

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_m)$$

Pour tout $1 \leq j \leq m$

$$\varphi[(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_m) + \lambda(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_m)]$$

$$= \varphi((x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_m)) + \lambda \varphi((x_1, \dots, x_m))$$

Dans l'exercice

$$\pi(\lambda(x_1, \dots, x_m)) = \pi(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_m x_m)$$

$$= \pi(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_m x_m) = \lambda^m \pi(x_1, \dots, x_m) \text{ donc pas linéaire}$$

Soient $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_m)$ et

$(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_m)$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\pi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_m)$$

$$= \pi(x_j = x_1 x_2 \dots x_{j-1} (x_j + \lambda x'_j) x_{j+1} \dots x_m)$$

$$= x_1 x_2 \dots x_{j-1} x_j x_{j+1} \dots x_m + \lambda x_1 x_2 \dots x_{j-1} x'_j x_{j+1} \dots x_m$$

$$= \pi(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_m) + \lambda \pi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_m)$$

π est une forme linéaire.

Lorsque qu'on échange 2 variable le résultat change de signe.

Ainsi π n'est pas alternée

Exercice 3

$$1) \det \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \text{ donc base de } \mathbb{R}^2$$

2) Déterminant de (e_1, e_2) dans (v_1, v_2)
C'est le déterminant de la matrice
inverse de la précédente

$$\det(e_1, e_2)_{(v_1, v_2)} = \frac{1}{7}$$

3) Matrice de changement de base depuis (e_1, e_2)
dans (v_1, v_2)

$$P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix}$$

$$1) \quad u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 3x-y \end{pmatrix}$$

Matrice de u dans
 (e_1, e_2)

$$u(e_1) = (1 \ 3) = 1e_1 + 3e_2$$

$$u(e_2) = (1 \ -1) = e_1 - e_2$$

Matrice dans (e_1, e_2)

$$M_{(e_1, e_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrice de u dans (v_1, v_2)

$$u(v_1) = u(1 \ 2) = (3 \ 1)$$

$$= 3v_1 + 1v_2 = \frac{6}{3}v_1 + \frac{1}{1}v_2$$

$$u(v_2) = u(-3 \ 1) = (-2 \ -10)$$

$$= -\frac{32}{8}v_1 + \frac{18}{21}v_2$$

$$M_{(v_1, v_2)} = \begin{pmatrix} \frac{6}{3} & -\frac{32}{8} \\ \frac{1}{1} & -\frac{10}{21} \end{pmatrix}$$

déterminant de A c'est le
déterminant de la matrice

Exercice 4

E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.

ψ et φ 2 formes linéaires.

Si $\text{Ker } \psi = \text{Ker } \varphi$ alors $\psi = \lambda \varphi$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$

1^{er} cas

$\text{Ker } \psi = \text{Ker } \varphi = E$ alors ψ et φ sont
également à la somme linéaire nulle.
d'où $\psi = \varphi$

2^eème cas :

14

• $\text{Ken } \psi = \text{Ken } \varphi$ est un hyperplan de E . c'est un de E de dim $n-1$.

Sur $\text{Ken } \psi = \text{Ken } \varphi$ on a $\psi(x) = 0 = \varphi(x)$ d'où $\psi(x) = \lambda \varphi(x)$ pour tout $\lambda \in K$.

Comme $\text{Ken } \psi = \text{Ken } \varphi = N$ est de dimension $n-1$

D'après le th de la base incomplète, il existe $v \in E$
 $v \notin \text{Ken } \psi = \text{Ken } \varphi$ tel que

$$= N$$

$$E = \langle v \rangle \oplus N$$

Sur $\langle v \rangle$:

On cherche l'image de v

$$\psi(v) = \alpha_1 \in K^*$$

$$\varphi(v) = \alpha_2 \in K^*$$

$$\psi(v) = \alpha_1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \in K \text{ on } \alpha_1 \neq 0$$

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x = y + z \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ donc } H \text{ est un hyperplan de } E.$$

Trouver 2 somme linéaires sur $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est H

$$\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto x - y - z$$

Exercice 5

$$g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto az$$

Au lieu de considérer $z \in \mathbb{C}$
on considère $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} g(z) &= a \cdot z = (a_1 + ia_2)(z_1 + iz_2) \\ &= a_1 z_1 - a_2 z_2 + (a_1 z_2 + a_2 z_1)i \end{aligned}$$

Pour $g \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ donne $\begin{pmatrix} a_1 z_1 - a_2 z_2 \\ a_1 z_2 + a_2 z_1 \end{pmatrix}$ g revient à l'application

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 z_1 - a_2 z_2 \\ a_1 z_2 + a_2 z_1 \end{pmatrix}$$

On cherche une expression matricielle de φ .

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = M \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 z_1 - a_2 z_2 \\ a_1 z_2 + a_2 z_1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } M \in M_2(\mathbb{K}) \text{ alors}$$

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

φ est définie par une matrice
 $\det(\varphi) = |a|^2$
 $\text{tr}(\varphi) = 2\text{Re}(a)$

Exercice 6

$\det A = b$ puisque triangulaire par bloc.

A est inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0$

Exercice 7

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & a^2 \end{vmatrix} = a - a^2 \quad \neq 0 \quad \text{or}$$

On cherche $a(a-1) = 0$
 donc $a^{\neq} = \{0, 1\}$

donc bae si $a \neq 0 \neq 1$

La famille est liée si $\det(A) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Exercice 1

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b^2+a^2) & (c-a)(c^2+a^2) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (b+a)(b^2+a^2) & (c+a)(c^2+a^2) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) [(c+a)(c^2+a^2) - (b+a)(b^2+a^2)]$$

$$B = \begin{vmatrix} a+b+c+d & a+b+c+d & a+b+c+d & a+b+c+d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & a-b & d-b & c-b \\ c & d-c & a-c & b-c \\ d & c-d & b-d & a-d \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} a-b & d-b & c-b \\ d-c & a-c & b-c \\ c-d & b-d & a-d \end{vmatrix} \quad \text{transvection}$$

$$= (a+b+c+d) (-1) (a+d-b-c) \begin{vmatrix} d-a & b-c \\ c-b & a-d \end{vmatrix}$$

Exercice 2

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_1^2$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 \\ a_1 & a_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 - a_1 & a_2 - a_1 \\ a_1 & a_3 - a_1 & a_3 - a_1 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2 - a_1 \\ a_3 - a_1 & a_3 - a_1 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (a_2 - a_1)(a_3 - a_2)$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 - a_1 & a_2 - a_1 & a_2 - a_1 \\ a_1 & a_3 - a_1 & a_3 - a_1 & a_3 - a_1 \\ a_1 & a_4 - a_1 & a_4 - a_1 & a_4 - a_1 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \prod_{i=2}^n (a_i - a_{i-1})$$

Exercice 3

Comtraposition $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, si $\det = 0$

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g = \lambda g$

$$\Rightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \begin{vmatrix} g(x) & g(y) \\ g(x) & g(y) \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} g(x) & g(y) \\ g(x) & g(y) \end{vmatrix}$$

Exercice 4

1) Si $m=2$:
$$V(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$$

on retrouve bien l'égalité.

Si $m=3$:
$$V(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 \\ 0 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix}$$
 On a une matrice triangulaire par bloc

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 \\ a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_1 \\ 1 & a_3 + a_1 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_1 + a_3 - (a_1 + a_2))$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$$

on retrouve la formule.

2) On va montrer que :

$$F(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_m t^m$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$

$$F(t) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{m-1} & a_1^m \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{m-1} & a_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_m & a_m^2 & \dots & a_m^{m-1} & a_m^m \\ 1 & t & t^2 & \dots & t^{m-1} & t^m \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière ligne

$$= 1(-1)^{m+2} \begin{vmatrix} a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m & a_m^2 & \dots & a_m^m \end{vmatrix} + \dots + (-1)^m (-1)^{m+m+1}$$

Comme les coefficients que l'on obtient devant les t^i ne dépendent pas de t on a
 $F(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_m t^m$ avec les $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et indépendants de t . F est une fonction polynomiale.
 en t donc $d^0 \leq m$.

De plus les coeff de t^m est $V(a_1, \dots, a_m)$
 On a $F(a_1) = 0$ car la 1^{ère} et la dernière ligne sont égales.

De même on a $F(a_2) = \dots = F(a_m) = 0$ car il y a chaque fois 2 lignes égales.

3) On suppose que les a_i sont tous distincts

Rappel: D'après la question 2. F est un polynôme de $d^0 \leq m$ tq: $F(a_1) = \dots = F(a_m)$

D'où comme les a_i sont distincts ce sont les m racines de F . On a donc

$$F(t) = \gamma (t - a_1)(t - a_2) \dots (t - a_m) \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

$$= \gamma t^m + \dots$$

D'après la question 2. $\gamma = V(a_1, \dots, a_m)$

4) Les a_i ne sont plus 2 à 2 distincts

Alors $V(a_1, \dots, a_m) = 0$ car on a toujours 2 lignes égales

5) Montrons par récurrence $V(a_1, \dots, a_m) = \prod (a_j - a_i)$

- on a montré que $(P_2 \text{ est vraie } P_m)$
- on suppose (P_m) vraie pour un certain $m \geq 1$.
 $Mq (P_{m+1})$ est encore vraie.

$$V(a_1, \dots, a_m, a_{m+1}) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{m-1} & a_1^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{m+1} & \dots & a_{m+1}^{m-1} & a_{m+1}^m \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= V(a_1, \dots, a_m) [(a_{m+1} - a_1)(a_{m+1} - a_2) \dots (a_{m+1} - a_m)] \\ &= \left(\prod_{1 \leq i < j \leq m} (a_j - a_i) \right) (a_{m+1} - a_1) \dots (a_{m+1} - a_m) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq m+1} (a_j - a_i) \end{aligned}$$

ben 1981

P_{m+1} est vraie

6) Nombre de terme $(a_j - a_i)$ dans

$$\prod_{1 \leq i < j \leq m} (a_j - a_i)$$

$$\text{donc } \frac{m(m-1)}{2} \text{ termes}$$

Exercice 6

$$1) A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$2) A_{m+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

on dupl selon la dernière colonne

$$A_{m+1} = (-1)^{m+2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{2m+2} A_m$$

On duplt selon la dernière ligne.

$$= A_m + (-1)^{m+2} \cdot (-1)^{m+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= A_m - 1$$

$$3) A_m = A_{m-1} - 1$$

$$A_{m-1} = A_{m-2} - 1$$

⋮

$$A_5 = A_4 - 1$$

$$A_4 = A_3 - 1$$

$$\text{donc } A_{m+1} = A_3 + (m-2)(-1)$$

$$= -1 + (m-2)(-1)$$

$$= (m-1) = 1-m$$

d'où pour $m \geq 3$

$$A_m = 2-m$$

Exercice 8

$$1) m=2$$

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b \\ c & a_2 \end{pmatrix}, \quad \det(M) = a_1 a_2 - bc$$

$$2) \det(M(t)) = \begin{vmatrix} a_1+t & b+t & \dots & b_{m+t} \\ c+t & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b_{m+t} \\ c+t & \dots & c+t & a_{m+t} \end{vmatrix}$$

On soustrait à toute les colonnes la première on obtient :

$$\begin{vmatrix} a_1+t & b-a_1 & \dots & b-a_1 \\ c+t & a_2-c & b-c & \dots & b-c \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ c+t & 0 & \dots & 0 & a_m-c \end{vmatrix}$$

A part la première colonne que des scalaires

c_m du pt selon la $i^{\text{ème}}$ colonne on a
 $= (a_1+t) (-1)^{m+1} * 1 + (c+t) (-1) * 2 + \dots + (c+t) (-1)^{m+1} * m$
 Donc polynôme de degré 1: $\alpha t + \beta t$

$$3) \det(M(-b)) = \begin{vmatrix} a_1-b & 0 \\ & \ddots \\ c-b & a_m-b \end{vmatrix} = \prod (a_i-b) = \Delta_1$$

$$\text{Idem } \det(M(-c)) = \prod (a_i-c) = \Delta_2$$

$$4) \det(M(0)) = \det(M)$$

$$\det(Mt) = \alpha + \beta t$$

$$\det(M(-b)) = \alpha + \beta(-b) = \Delta_1$$

$$\det(M(-c)) = \alpha + \beta(-c) = \Delta_2$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right.$$

M1CP3021 Maths algèbre II 2018-2019

TD3 : Déterminants - Corrigé exo 9 et 10

Exo 9

1. La fonction Θ_u est linéaire puisque, pour f et g dans $A_n(E)$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned}\Theta_u(f + \lambda g)(x_1, \dots, x_n) &= (f + \lambda g)(u(x_1), \dots, u(x_n)) = f(u(x_1), \dots, u(x_n)) + \lambda g(u(x_1), \dots, u(x_n)) \\ &= \Theta_u(f)(x_1, \dots, x_n) + \lambda \Theta_u(g)(x_1, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Ainsi Θ_u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 1. Sa matrice dans n'importe quelle base est donc un scalaire, et Θ_u est une homothétie :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall f \in A_n(E), \quad \Theta_u(f) = \lambda f. \quad (1)$$

2. Par construction, $\det_B$ est un élément de $A_n(E)$. Ainsi, en appliquant la formule (1) avec $f = \det_B$, on obtient

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \quad \det_B(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \lambda \det_B(x_1, \dots, x_n). \quad (2)$$

On applique la formule précédente avec $x_i = e_i$, et en utilisant que $\det_B(e_1, \dots, e_n) = 1$, on trouve $\det(u) = \det_B(u(e_1), \dots, u(e_n))$. Par construction, le scalaire λ est le rapport de l'homothétie Θ_u , il ne dépend pas de la base B .

3. En appliquant la formule précédente, on a

$$\det(u \circ v) = \det_B(u(v(e_1)), \dots, u(v(e_n))),$$

puis en utilisant (2) avec $x_i = v(e_i)$:

$$\det_B(u(v(e_1)), \dots, u(v(e_n))) = \det u \times \det_B(v(e_1), \dots, v(e_n)) = \det u \times \det v.$$

Notons que $\Theta_u \circ \Theta_v$ est la composée de deux homothéties de rapports respectifs $\det u$ et $\det v$, c'est donc une homothétie de rapport $\det u \times \det v$. De plus on a, par définition de $\Theta_{u \circ v}$, que $\Theta_u \circ \Theta_v = \Theta_{u \circ v}$. Cela conduit également à $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$.

Exo 10

1. Voir cours.
2. Cette écriture n'est qu'une reformulation du produit matriciel AX . On le vérifie en explicitant les coefficients : si on note $C_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$, alors $\sum_{k=1}^n x_k C_k$ est une colonne dont la i -ième composante est $\sum_{k=1}^n x_k a_{ik}$. Cette somme est bien la i -ième ligne du vecteur AX , par définition du produit matriciel. Puisque $AX = B$, on déduit l'identité demandée.
3. Fixons i et plaçons le vecteur B à la i -ième position :

$$\det_B(C_1, \dots, B, \dots, C_n) = \det_B(C_1, \dots, \sum_{k=1}^n x_k C_k, \dots, C_n) = \sum x_k \det_B(C_1, \dots, C_k, \dots, C_n)$$

par multilinéarité du déterminant. De plus, $\det_B(C_1, \dots, C_k, \dots, C_n) = 0$ si $k \neq i$, car la colonne C_k apparaît alors deux fois dans le calcul du déterminant. Ainsi,

$$\det_B(C_1, \dots, B, \dots, C_n) = x_i \det_B(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) = x_i \det A,$$

ce qui prouve les formules de Cramer.

4. Pour une matrice M quelconque, Me_j est la j -ième colonne de M . Ainsi, si X vérifie $AX = e_j$, on a aussi $X = A^{-1}e_j$, et X est la j -ième colonne de A^{-1} . Ainsi, en notant m_{ij} le coefficient (i, j) de A^{-1} , on a par la question précédente

$$m_{ij} = \frac{\det_B(C_1, \dots, e_j, \dots, C_n)}{\det A},$$

où le vecteur e_j a été placé en i -ième position. En développant par rapport à cette colonne, on obtient que $\det_B(C_1, \dots, e_j, \dots, C_n)$ est le cofacteur de la matrice (a_{ji}) . Cela prouve que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t \text{com}(A).$$

TD4 - réduction des endomorphismes

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Pour trouver les vp on cherche les racines du polynôme caractéristique.

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_3)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 \\ 2 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = (3-x) \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (3-x)(1+x) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= -(3-x)^2(1+x) \end{aligned}$$

On a donc -1 et 3 les valeurs propres.

* λ est une vp d'une matrice A s'il existe $x \neq \vec{0}$ tel que $Ax = \lambda x$. On dit que x est $\vec{v}_\lambda$ associé à la vp λ .

On note E_λ le sous-espace propre associé à la vp λ .

$$E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I_3) = \text{Ker}(A - \lambda I_m).$$

$$v \in E_\lambda \Leftrightarrow (A - \lambda I_3)v = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow Av = \lambda v.$$

$\lambda = -1$ est une vp simple donc $\dim E_{-1} = 1$

$\lambda = 3$ est une vp double donc $1 \leq \dim E_3 \leq 2$

si $\dim E_3 = 2$ A sera diagonalisable.
 si $\dim E_3 = 1$ A ne sera pas diagonalisable.

$$\dim E_3 = 2 \Rightarrow B = (u_1, u_2)$$

$$\dim E_{-1} = 1 \Rightarrow B = (u_3)$$

$$\begin{aligned} E_3 \cap E_{-1} &= \{0\} \quad \text{si } x \in E_3 \cap E_{-1} \\ x \in E_3 &\Rightarrow Ax = 3x \\ x \in E_{-1} &\Rightarrow Ax = -x \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} 3x = -x \Rightarrow x = \vec{0} \end{array} \right.$$

$$E_3 \oplus E_{-1} = \mathbb{R}^3 \quad \text{dans } (u_1, u_2, u_3)$$

$$Av = -v \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -x \\ 2x + y = -y \\ 3z = -z \end{cases} \quad v = (-1 \ -1 \ 0)$$

$$\text{donc } E_{-1} = \text{Vect} \{ \underset{u_1}{(-1 \ -1 \ 0)} \}$$

$$Av = 3v \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3x \\ 2x + y = 3y \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{donc } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = \text{Vect} \{ \underset{u_2}{(1 \ 1 \ 0)}, \underset{u_3}{(0 \ 0 \ 1)} \}$$

Dans la base (u_1, u_2, u_3) . la matrice A s'écrit

$$\tilde{A} = \begin{array}{ccc|c} & Au_1 & Au_2 & Au_3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 3 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 3 & u_3 \end{array}$$

$\tilde{A}$ est une matrice diagonale.

Ici, P est la matrice de passage de la base de départ à la base où l'on obtient une matrice diagonale.

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

2) $\det(B - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 5 \\ 2 & 1-\lambda & 10 \\ -1 & -2 & -5-\lambda \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\lambda \\ \lambda & -\lambda & -\lambda \\ -1 & -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 + L_3 \\ L_2 + L_3 - L_1 \\ \end{matrix}$$

$$= (-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 [-1 - \lambda + 1] = -\lambda^3$$

$\lambda = 0$ est une vp triple de B .

$$= (-\lambda)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$B\vec{v} = 0\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 5z = 0 \\ 2x + 1y + 10z = 0 \\ -x - 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$= (-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} x + 2y + 5z = 0 \\ x = -2y - 5z \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2y - 5z \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 3

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & 36 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Polynôme caractéristique

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 10-\lambda & 36 \\ 0 & 1 & 10-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 10-\lambda & 36 \\ 1 & 10-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)((10-\lambda)^2 - 36)$$

$$= (1-\lambda)(4-\lambda)(16-\lambda)$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2(16+4+1)$$

A a 3 vp distinctes $\lambda_1=1$, $\lambda_2=4$ et $\lambda_3=16$

Com a 3 valeurs propres distinctes en dimension 3
donc A est diagonalisable.

$$\dim E_{\lambda_1} = 1, \dim E_{\lambda_2} = 1, \dim E_{\lambda_3} = 1$$

$$\text{d'où } E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus E_{\lambda_3} = \mathbb{R}^3$$

Il existe une base de $\vec{v}_p$

$$A\vec{v} = \lambda_1 \vec{v} \Leftrightarrow A\vec{v} = \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = x \\ 10y + 36z = y \\ y + 10z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y + 3z = 0 \\ 9y + 36z = 0 \\ y + 9z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+3z=0 \\ z=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$(x, y, z) = (x, 0, 0) = x(1, 0, 0)$$

$$E_1 = \text{Vect}\{(1, 0, 0)\}$$

$$Av = 4v \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=4x \\ 10y+36z=4y \\ y+10z=4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+2y+3z=0 \\ 6y+36z=0 \\ y+6z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3z \\ y=-6z \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -z \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \text{Vect}\{(3, 6, -1)\}$$

$$Av = 16v \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=16x \\ 10y+36z=16y \\ y+10z=16z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=6z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\text{domc } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{16} = \text{Vect}\{(1, 6, 1)\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 6z \\ z \end{pmatrix} = z(1, 6, 1)$$

Domc	$\lambda_1 = 1$	$x_1 = (1, 0, 0)$
	$\lambda_2 = 4$	$x_2 = (3, 6, -1)$
	$\lambda_3 = 16$	$x_3 = (1, 6, 1)$

3) B est une matrice tel que:

$$AB = BA$$

On veut

$$BX_R = \lambda X_R$$

On sait que $AX_R = \lambda_R X_R$

En multipliant par B

$$BAX = B(\lambda_R X_R)$$

$$= \lambda_R BX_R$$

$$\Rightarrow ABX_R = \lambda_R BX_R$$

$$Av = \lambda_R v$$

$$v = BX_R \in E_{\lambda_R} = \text{Ker}(A - \lambda_R I)$$

$$\text{donc } BX_R = \lambda_R X_R$$

$$1) B^2 = A$$

Est ce que A et B commutent

$$AB = B^2 B = B \cdot B^2 = BA$$

(x_1, x_2, x_3) est une base de $\vec{V}$ pour A et pour B.

(car d'après 3 les $\vec{v}_p$ de B sont les mêmes que ceux de A si $AB = BA$)

Dans cette base on a

$$\tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}$$

on cherche B / $B^2 = A$

$$\tilde{A} = P^{-1}AP = P^{-1}B^2P$$

$$= P^{-1}BP \cdot P^{-1}BP$$

$$= \tilde{B}^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$ y a donc 2³ possibilités.

Exercice 1

$$\det(A - \lambda I_3)$$

$$= \begin{vmatrix} m-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Si $m \neq 1$ at vp simple

et 1 vp double

Si $m = 1$ 1 vp triple

$$= (m-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Si $m = 1$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

qui est diagonale car
dépend si $m \neq 1$ on
cherche E_1

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow \begin{cases} mx = x \\ y + (m^2 - 1)z = y \\ z = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)x = 0 \\ (m^2-1)z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (m+1)z = 0 \end{cases}$$

1^{ère} cas car $m = -1$:

$$x = 0, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Comme la dimension de tout le sous-espace propre est égale à la multiplicité de vp associée
A est diag.

2^{ème} cas car $m \neq -1$

$$\begin{cases} x = 0 \\ (m+1)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad E_1 = \text{Vect}((0, 1, 1))$$

Comme $\dim E_1 = 1 < 2$

A n'est pas diag

Donc A diag $\Leftrightarrow m \in \{1, -1\}$

$$B = \begin{pmatrix} m & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(B - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} m-\lambda & 0 & m-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ m & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} m-\lambda & m \\ m & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) [(m-\lambda)(1-\lambda) - m^2]$$

$$= (1-\lambda) [\lambda^2 - (1+m)\lambda - m^2 + m]$$

$$\lambda^2 - (1+m)\lambda - m^2 + m = 0$$

$$\Delta = (1+m)^2 - 4(-m^2 + m)$$

$$= (m-1)^2 + 4m^2$$

$$> 0$$

donc 2 racines distinctes:

$$\lambda_1 = \frac{(1+m) + \sqrt{(m-1)^2 + 4m^2}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{(1+m) - \sqrt{(m-1)^2 + 4m^2}}{2}$$

On sait que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ on compare λ_1, λ_2 et 1

Si $\lambda_1 = 1$

$$\Leftrightarrow 1 + m + \sqrt{(m-1)^2 + 4m^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(m-1)^2 + 4m^2} = 1 - m$$

En prenant le carré :

$$(m-1)^2 + 4m^2 = (1-m)^2 \quad \text{on trouve } m=0$$

pour $m=0$, $\lambda_1 = 1$

Si $\lambda_2 = 1$

$$\Leftrightarrow 1 + m - \sqrt{(m-1)^2 + 4m^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{(m-1)^2 + 4m^2} = 1 - m \quad \text{possible si } 1 - m \leq 0 \quad \text{donc } m \geq 1$$

En prenant au carré :

$$(m-1)^2 + 4m^2 = (1-m)^2$$

$$\Leftrightarrow m = 0$$

$\lambda_2 \neq 1$ toujours, puisque

Dans le cas $m \neq 0$ on a 3 vp distinctes donc la matrice est diagonalisable.

$$\text{Si } m=0, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

$$\begin{aligned} 1) \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) \\ &= (5-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= (5-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$$

A a 3 vp distinctes 5, 2 et -1 donc A est diagonalisable.

IP existe donc une base dans laquelle la matrice $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

2) On cherche maintenant une base de vecteurs propres (v_1, v_2, v_3) associée au vp.

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_3 = 5$$

Pour $\lambda_3 = 5$ on peut prendre $v_3 = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit v_1 tel que:

$$Av_1 = -v_1$$

$$\begin{cases} -4x - 6y = -x \\ 3x + 5y = -y \\ 5x + 6y + 5z = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 6y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \\ 5x + 6y + 6z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ -10y + 6y + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ 6z = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = \frac{2}{3}y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ \frac{2}{3}y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{donc } v_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Soit v_2 tel que:

$$Av_2 = 2v_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 6y = 2x \\ 3x + 5y = 2y \\ 5x + 6y + 5z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 6y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \\ 5x + 6y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ -5y + 6y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = -3z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z \\ -3z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On note P la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (u_1, u_2, u_3)

$$P = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On détermine $P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t \text{co}(P)$ la matrice de passage de (u_1, u_2, u_3) à (e_1, e_2, e_3)

$$= \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & -2/3 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = P \tilde{A} P^{-1}$$

$$\text{Donc } A^m = (P \tilde{A} P^{-1})^m = P \tilde{A}^m P^{-1}$$

o

$$\begin{aligned} (3) \quad u_{m+1} &= -6u_m - 6v_m \\ v_{m+1} &= 3u_m + 5v_m \\ w_{m+1} &= 5u_m + 6v_m + 5w_m \end{aligned}$$

On pose $X_m = \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \\ w_m \end{pmatrix}$ exprimons X_{m+1} en fonction de X_m

$$X_{m+1} = \begin{pmatrix} u_{m+1} \\ v_{m+1} \\ w_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \\ w_m \end{pmatrix} = AX_m$$

4) En déduisant on a $X_m = AX_{m-1} = A^2 X_{m-2} = \dots = A^m X_0$
 $X_m = A^m X_0$

Exercice 6

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1^{ère} méthode:

$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On détermine le polynôme caractéristique:

$$\det(U - XI_5) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-X & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-X & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} S-X & S-X & S-X & S-X & S-X \\ 1 & 1-X & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-X & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$L_1 = L_2 + L_3 + L_4 + L_5$$

$$\Rightarrow (S-X) \begin{vmatrix} \overset{C_2-C_1}{1} & \overset{C_3-C_1}{0} & \overset{C_4-C_1}{0} & \overset{C_5-C_1}{0} & 0 \\ 1 & -X & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -X & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -X & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -X \end{vmatrix} = -X^4(S-X)$$

Les vp sont 5 et 0.

On note E_S l'espace propre associé à la vp

$\lambda_1 = 5$ alors $\dim E_S = 1$

On note E_0 l'espace propre associé à la vp

$\lambda_2 = 0$

On sait que $1 \leq \dim E_0 \leq 4$

On détermine E_0 .

$$v \in E_0 \Leftrightarrow Uv = 0$$

$$\begin{cases} x+y+z+s+t=0 \\ \vdots \\ x+y+z+s+t=0 \end{cases}$$

$$(x, y, z, s, t) = (x, y, z, s, -x-y-z-s)$$

$$= x(1 \ 0 \ 0 \ -1) + y(1 \ 0 \ 0 \ -1) + z(0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1) + s(0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1)$$

$$E_0 = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$$

$$\dim E_0 = 4$$

Comme $\dim E_0 + \dim E_5 = \dim \mathbb{R}^5$ alors la matrice est diagonalisable.

2) Fait.

$$\begin{aligned} \text{Ken } f &= \{v \in \mathbb{R}^5 / f(v) = 0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^5 / f(v) = 0 \cdot v\} \\ &= E_0 \text{ espace associé à } \lambda = 0 \end{aligned}$$

d'où on a : $\dim E_0 = \dim \text{Ken } f = 4$
et donc $\dim E_0 + \dim E_5 = 5 = \dim \mathbb{R}^5$
 $\rightarrow v$ est diagonalisable

On sait que $\lambda_5 = 5$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$$

On sait que $X - 5 \mid \chi(X)$

$$X^5 - 5X^4 + \dots = (\lambda - 5)X^4$$

$$3) M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & \cdots \\ b & \cdots & b \\ \vdots & b & a \end{pmatrix} = bU + (a-b)I_5$$

$$s: b=0, \quad \det(M(a,b)) = \det(aI_s) = a^s$$

$$\det(N(a,b)) = \det\left(b\left(u - \frac{b-a}{b}I_s\right)\right)$$

$$= b^s \det\left(u - \frac{b-a}{b}I_s\right)$$

$$= b^s \left(-\left(\frac{b-a}{b}\right)^s\right) \left(\frac{b-a}{b} - s\right)$$

$$= (b-a)^s (a+sb)$$

Exercice 7

$$A \text{ tq } \operatorname{rg}(A) = 1$$

L'espace image de l'endomorphisme associé à g .

$$\dim \operatorname{Im} g = 1$$

$$\operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}(X)$$

$$g(e_i) \in \operatorname{Im} g \text{ d'où } \exists a_i \in \mathbb{R} \text{ tq } g(e_i) = a_i X_i$$

$$A = [a_1 X_1, a_2 X_2, \dots, a_m X_m]$$

$$A^2 = A \cdot A$$

$$= \left(\left(A(a_1 X_1) \right) \left(A(a_2 X_2) \right) \left(A(a_m X_m) \right) \right) \stackrel{?}{=} T_n(A) A$$

Pour $1 \leq i \leq m$

$$A(a_i X_i) \stackrel{?}{=} T_n(A) a_i X_i$$

$$A(a_i X_i) = a_i A X_i$$

$$\operatorname{rg}(A) = 1 \quad \dim \operatorname{Ker} g = m-1$$

par th du rg

$$\operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} g = \mathbb{C}^m$$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{C}_0$$

$$\operatorname{Vect}(X)$$

$$g(X) = \lambda X$$

$$\mathbb{C}_0 \oplus \mathbb{C}_\lambda = \mathbb{R}^m$$

Trace invariante donc :

$$0 + \lambda = \text{Tr}(A)$$

$$\text{D'où } g(x) = \text{Tr}(A)x$$

$$\text{Conclusion } A^2 = \text{Tr}(A)A$$

Si $\text{Tr}(A) \neq 0$ est diagonalisable

$$\text{On a } \dim \mathbb{R}^n = \dim \text{Ker } g + \dim \text{Im } g$$

$\text{Ker } g = \mathbb{C}_0 = \text{espace propre associée à la vp } \lambda = 0$

$$\text{Im } g = \text{Vect}(x) \text{ avec } x \text{ tq } g(x) = \text{Tr}(A)x$$

$$\begin{aligned} g(\alpha x) &= \alpha g(x) = \alpha \text{Tr}(A)x \\ &= \text{Tr}(A)(\alpha x) \end{aligned}$$

Donc $\text{Vect}(x)$ l'espace associé à la vp $\lambda := \text{Tr}(A) \neq 0$
Le polynôme caract $(-1)^n x^{n-1} (x - \text{Tr}(A))$

$$\text{Si } \text{Tr}(A) = 0$$

$$\text{On a toujours } \text{Im } g = \text{Vect}(x) \text{ avec } g(x) = 0x$$

c'est à dire $\text{Im } g \subset \text{Ker } g$

$\text{Im } g$ n'est pas un ssp de g .

Il y a une seule vp 0.

Donc le polynôme caract est $(-1)^n x^n$

Cela signifie que A a une seule vp qui est 0.

Donc son polynôme caract est $(-1)^n x^n$

Si A est diagonalisable alors A doit être diagonale au départ (1 seule vp 0)

et donc A doit être égale à la matrice nulle 0.

La seule matrice nilpotente diagonalisable est la

matrice nulle $(-1)^n (x-0) \dots (x-0) (x - \text{Tr}(A))$

$$\text{ng}(0) = 0$$

A est une matrice nilpotente tq
par hypothèse $\text{ng}(A) = 1$

$A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc A n'est pas diagonalisable

TDS - Réduction des endomorphismes

Exercice 1

$$\text{Ker}(g) = \{v \in E / g(v) = 0\}$$

$$\text{Ker}(g^2) = \{v \in E / g^2(v) = 0\}$$

$$g^2 = g \circ g.$$

Soit $v \in \text{Ker } g$ on a $g(v) = 0$

$$g^2(v) = g \circ g(v) = g(g(v))$$

$$= g(0) = 0 \text{ car } g \text{ est une A.L.}$$

d'où $v \in \text{Ker } g^2$ et donc $\text{Ker } g \subset \text{Ker } g^2$

Soit $v \in \text{Ker } g^2$ on a $g^2(v) = 0$

$$g^2(v) = g(g(v)) = 0$$

cela entraîne que $g(v) \in \text{Ker}(g)$ on ne peut rien conclure sur v .

Remarque: Si $\text{Im } g \neq \{0\}$ alors $\text{Ker } g^2 \subset \text{Ker } g$
donc $\text{Ker } g^2 = \text{Ker } g$.

$$\text{Im } g = \{w \in E, \exists v \in E, w = g(v)\}$$

$$\text{Im } g^2 = \{w \in E, \exists v \in E, w = g^2(v)\}$$

$$w \in \text{Im } g^2, \exists v \in E / g^2(v) = w$$

Est ce on peut trouver $\tilde{v} \in E$ tq $g(\tilde{v}) = w$?

$$w \in \text{Im } g^2, \exists v \in E / g^2(v) = w$$

$$\text{Existe t'il } \tilde{v} \in E / g(\tilde{v}) = w$$

$$\text{On a } g(g(v)) = w \text{ d'où } g(\tilde{v}) = w \Rightarrow w \in \text{Im } g$$

$$\text{Donc } \text{Im } g^2 \subset \text{Im } g.$$

M1CP3021 Maths algèbre II 2018-2019

TD5 - réduction des endomorphismes bis - Corrigé exo 1

Exercice 1

On suppose que P s'écrit

$$P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k.$$

1. Fait en TD.
2. Soit $x \in \ker(P(f))$, c'est-à-dire que x vérifie $P(f)(x) = 0$. On écrit $P(X) = a_0 + XQ(X)$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$, et par hypothèse sur P , on a $a_0 \neq 0$. Ainsi $P(f)(x) = 0$ devient

$$a_0 x + (f \circ Q(f))(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{a_0} (f \circ Q(f))(x) = f(t),$$

où on a utilisé la linéarité de f et on a posé $t = -\frac{Q(f)(x)}{a_0}$. Ceci prouve que $x \in \operatorname{Im} f$.

3. Soit $x \in \ker f$ vérifiant de plus $x \neq 0$. Alors $P(f)(x) = 0$. Écrivons $P(X) = a_0 + XQ(X)$, en notant que $a_0 = P(0)$. Ceci conduit à

$$-a_0 x = (Q(f) \circ f)(x) = Q(f)(f(x)) = Q(f)(0) = 0.$$

Puisque $x \neq 0$, on a donc $a_0 = 0$.

4. On écrit encore une fois $P(X) = a_0 + XQ(X)$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$. Soit $x \in E$ quelconque et $y = P(f)(x) = a_0 x + f(Q(f)(x))$. Alors par hypothèse, $y \in \operatorname{Im} f$, or $f(Q(f)(x)) \in \operatorname{Im} f$, donc, puisque $\operatorname{Im} f$ est un espace vectoriel, on a $a_0 x \in \operatorname{Im} f$. Ainsi, si $a_0 \neq 0$, on a montré

$$\forall x \in E, x \in \operatorname{Im} f.$$

ceci contredit $\operatorname{Im} f \neq E$. Donc $a_0 = 0$.

$$\Rightarrow v + \left(\frac{a_1}{a_0} f + \dots + \frac{a_m}{a_0} f^m \right)(v) = 0 \quad \text{car } a_0 \neq 0 \quad \text{car } p(0) \neq 0.$$

Exercice 2

$f: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ tel que si $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ est la base canonique :

$$f(e_1) = e_m, \quad f(e_2) = e_1, \dots, f(e_m) = e_{m-1}$$

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_m e_m = (x_1, \dots, x_m)$$

$$\begin{aligned} f(v) &= x_1 f(e_1) + \dots + x_m f(e_m) \\ &= (x_2, x_3, \dots, x_m, x_1) \end{aligned}$$

1) Matrice de f dans $(e_1, \dots, e_m)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2) Calculer f^m on a :

$$e_1 \xrightarrow{f} e_m \xrightarrow{f} e_{m-1} \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} e_1$$

idem pour toutes les coordonnées

$$\text{On trouve que } \begin{cases} f^m = \text{Id} \\ A^m = \text{Id} \end{cases} \Leftrightarrow A^m - \text{Id} = 0$$

Donc c'est un polynôme annulateur de A .

Les racines de ce polynôme contiennent les vp de f .

Comme $d^0(P) = d^0(A)$ on cherche les racines

$$P(x) = 0$$

Les racines de ce polynôme

$$\Rightarrow x^m - 1 = 0$$

dans $\mathbb{C}$ sont les racines m ème

$$\Rightarrow x^m = 1$$

de 1.

$$1) \quad P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_m X^m \\ P(g) = a_0 + a_1 g + \dots + a_m g^m \in \mathcal{L}(E)$$

$(P(g))(\vec{v})$ Si $P(0) = 0$ alors $\text{Ken}(g) \subset \text{Ken}(P(g))$
 et $\text{Im } P(g) \subset \text{Im } g$
 C'est la généralisation devant

Plus généralement

Si $P(0) = 0$ alors $a_0 = 0$

$$\text{d'où } P(g) = a_1 g + a_2 g^2 + \dots + a_m g^m \\ = (a_1 \text{Id} + a_2 g + \dots + a_m g^{m-1}) \circ g$$

Soit $v \in \text{Ken } g$ alors $g(v) = 0$

$$\text{D'où } P(g)(v) = (a_1 \text{Id} + \dots + a_m g^{m-1})(g(v)) \\ \in \mathcal{L}(E) \quad 0$$

$$= 0 \quad \text{càd } v \in \text{Ken}(P(g)) \quad \text{d'où } \text{Ken } g \subset \text{Ken } P(g)$$

Soit $w \in \text{Im } P(g)$

$$\exists v \in E / w = P(g)(v)$$

$$= g \circ (a_1 \text{Id} + \dots + a_m g^{m-1})(v)$$

$$= g((a_1 \text{Id} + \dots + a_m g^{m-1})(v))$$

$$\text{d'où } w \in \text{Im } g \quad \text{càd } \text{Im } P(g) \subset \text{Im } g$$

2) Si $P(0) \neq 0$ alors $\text{Ken } P(g)$, alors $P(g)(v) = 0$

On veut mq $v \in \text{Im } g$

$$\exists v \in E / v = g(u)$$

$$a_0 + a_1 g + \dots + a_m g^m \quad \text{avec } a_0 \neq 0$$

$$P(g)(v) = 0$$

$$\Rightarrow (a_0 \text{Id} + a_1 g + \dots + a_m g^m)(v) = 0$$

$$\Rightarrow a_0 v + (a_1 g + \dots + a_m g^m)(v) = 0$$

$$|x|^m = 1 \Leftrightarrow |x| = 1^{1/m} = 1$$

$$x = |x| e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow x^m = |x|^m e^{im\theta} = 1 = e^{i0}$$

$$m\theta = 0 [2\pi]$$

$$\theta = \frac{0}{m} [\frac{2\pi}{m}]$$

On obtient m solutions

$$\{ e^{i0}, e^{i(0+\frac{2\pi}{m})}, \dots \}$$

On obtient m valeurs propres distinctes

On travaille sur $\mathbb{C}^m$ ($\mathbb{C}$ -ev) qui est de dimension m

D'où A est diagonalisable.

Si on pose $u_j \in \mathbb{C}^m$ tel que $f(u_j) = e^{i(0+j\frac{2\pi}{m})} u_j$

Alors $(u_0, u_1, \dots, u_{m-1})$ est une base de $\mathbb{C}^m$

On a donc la matrice de f :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi}{m}} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & e^{i(m-1)\frac{2\pi}{m}} \end{pmatrix}$$

Si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$ si:

$m=1 \rightarrow$ diagonalisable

$m=2 \rightarrow P(X) = X^2 - 1$ qui a 2 racines $\mathbb{R}$ distinctes

$m \geq 2 \rightarrow \bar{P}(X) = X^m - 1$ n'a pas de racines $\mathbb{R}$ donc

A ne sera pas diagonalisable dans $\mathbb{R}^m$

$$\dim_{\mathbb{R}}(V_A) = m$$

Exercice 3

$$A \text{ et } B \in M_n(\mathbb{R}), \quad \text{tr}(AB) \neq 0$$

$$g: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$$
$$M \mapsto \text{tr}(AM)B$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{tr}(AM) \in \mathbb{R} \\ B \in M_n(\mathbb{R}) \end{array} \right\} \text{tr}(AB)B \in M_n(\mathbb{R})$$

Soient M_1, M_2 2 matrices de $M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(M_1 + \lambda M_2) &= \text{tr}(A(M_1 + \lambda M_2))B \\ &= \text{tr}(AM_1 + \lambda AM_2)B \\ &= (\text{tr}(AM_1) + \text{tr}(\lambda AM_2))B \\ &= \text{tr}(AM_1)B + \lambda \text{tr}(AM_2)B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^2 &= \text{tr}(A \text{tr}(AM)B)B \\ &= \text{tr}(AM) \text{tr}(AB)B \\ &= g(M) \text{tr}(AB) \end{aligned}$$

$$g^n = \text{tr}^{n-1}(AB) g(M)$$

$P(X) = X^n - \text{tr}(AB)X$ est un polynôme annulateur de g .

Les vp de g sont incluses dans $\{0, \text{tr}(AB)\}$

Exercice 2

1 Matrice A de f dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1) & \dots & f(e_n) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}_{e_1 \dots e_n}$$

2 Calculer f^n

$$f^2(e_1) = f(f(e_1)) = f(e_2) = e_3$$

$$f^3(e_1) = f(f^2(e_1)) = f(e_3) = e_4$$

A chaque pas on décale d'un cran (on fait un shift)

On en déduit que $f^n(e_1) = e_1$

De même $\forall 1 \leq i \leq n \quad f^n(e_i) = e_i$

Conclusion $f^n = \text{Id}$

On en déduit que $x^n - 1$ est un polynôme annulateur de f .
Comme il n'a que des racines simples f est diagonalisable.
Les valeurs propres de f sont inclus dans les racines de $x^n - 1$.
C'est-à-dire $\{e^{i \frac{2\pi k}{n}} \mid 1 \leq k \leq n\}$

$$\begin{aligned} \text{On } \det(A - xI_n) &= \begin{vmatrix} x-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^{n-1} (x-1) + (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n-1} (x-1)^n + (-1)^{n-1} (x^n - 1) = (-1)^{n-1} (x^n - 1) \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont exactement les racines n -èmes de l'unité.

3 Dans $\mathbb{R}$ il n'y a qu'une seule vp. qui est 1 ou -1 dans l'anneau.
Mais le polynôme caractéristique a des racines complexes.
Donc f n'est pas diagonalisable.

Exercice 3

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $\text{tr}(AB) \neq 0$

On pose $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$M \mapsto \text{tr}(AM)B$$

1) On a $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc $\text{tr}(AM) \in \mathbb{R}$

D'où $\text{tr}(AM)B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

De plus pour $M_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{tr}(A(M_1 + \lambda M_2)) = \text{tr}(AM_1 + \lambda AM_2) = \text{tr}(AM_1) + \lambda \text{tr}(AM_2)$$

d'après la linéarité de la trace

$$\text{D'où } f(M_1 + \lambda M_2) = f(M_1) + \lambda f(M_2)$$

Donc f est une application linéaire

C'est-à-dire que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \simeq \text{endomorphismes de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} 2) f^2(M) &= f(f(M)) = f(\text{tr}(AM)B) = \text{tr}(A\text{tr}(AM)B) \\ &= \text{tr}(A\text{tr}(AM))B = \text{tr}(AB)\text{tr}(AM) \\ &= \text{tr}(AB)f(M) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } f(f(M)) = \text{tr}(AB)f(M)$$

Donc tout $f(M)$ tq $f(M) \neq 0$ est un vecteur propre de f associé à la v.p. $\text{tr}(AB) (\neq 0)$

De plus tout M tq $M \neq 0$ et $\text{tr}(AM) = 0$ est un v.p. de f associé à la v.p. 0

$$\text{car } f(M) = \text{tr}(AM)B = 0 \cdot B = 0 = 0 \cdot M$$

Or comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace de dimension n^2 (fini) par le th. du rang on a $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

de plus : soit $n \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$ on a :

$$f(n) = 0 \Leftrightarrow \text{tr}(An)B = 0 \Leftrightarrow \text{tr}(An) = 0 \text{ car } B \neq 0 \text{ sinon } \text{tr}(AB) = 0$$

$$n \in \text{Im } f \Leftrightarrow \exists M_1 \text{ tq } n = \text{tr}(AM_1)B$$

$$\text{d'où } 0 = \text{tr}(An) = \text{tr}(A \text{tr}(AM_1)B) = \text{tr}(AM_1) \text{tr}(AB) \Leftrightarrow 0 = \text{tr}(AM_1) \text{ car } \text{tr}(AB) \neq 0$$

$$\text{Or } n = \text{tr}(AM_1)B \text{ donc } n = 0 \text{ sin } \text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\}$$

On en déduit que $\text{Im } f \oplus \text{Ker } f = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ sont des espaces propres de f est diagonalisable

Remarque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \left\{ n = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$

$$n = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} + \dots + a_{nn} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} E_{11} + a_{12} E_{12} + \dots + a_{nn} E_{nn}$$

avec $E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ matrice dont les coeff sont tous nuls sauf celui sur la i-ème ligne et la j-ème colonne qui vaut 1

Donc la famille $(E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n)$ engendre l'espace

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

De plus si on prend les coefficients d_{ij} tq

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} d_{ij} E_{ij} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{n1} & \dots & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire que tous les d_{ij} sont nuls

$\{ E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n \}$ est donc une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$\rightarrow$ il y a n^2 matrices donc cette famille

$$\text{d'où } \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$$

Exercice 4

$$1) A = \begin{pmatrix} 1-X & 1 \\ 1 & 1-X \end{pmatrix} = X(X-2) \quad \text{donc } A \text{ est diagonalisable}$$

La matrice diagonale que l'on obtient dans (u_1, u_2) est $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On cherche les $\vec{v}$

$$\lambda = 2 : Av = 2v$$

$$x+y = 2x \Leftrightarrow x=y$$

$$x+y = 2y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathcal{L}_2 = \text{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0 : Av = 0$$

$$x+y = 0 \Leftrightarrow x = -y$$

$$x+y = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathcal{L}_0 = \text{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2) $A \in M_m(\mathbb{R})$ diagonalisable c'est à dire il existe $(u_1, \dots, u_m)$ une base de $\mathbb{R}^m$ tq la matrice dans cette base s'écrit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \in M_{2m}(\mathbb{R})$$

Trouver $2m$ vecteurs propres pour B .

$$\begin{aligned} Bv &= \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + Ay \\ Ax + Ay \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'après la question 1) on voit que $\vec{v}$ sont de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ x \end{pmatrix}$ on peut donc essayer de $\vec{u}$ de la forme $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$ avec x un vecteur propre de A .

$$\text{Si on prend } \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Au_1 + Au_1 \\ Au_1 + Au_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \end{pmatrix} \text{ est un } \vec{v} \text{ de } B = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 + \lambda_1 u_1 \\ \lambda_1 u_1 + \lambda_1 u_1 \end{pmatrix} = 2\lambda_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

associé à la vp $2\lambda_1$

De même si on prend $\begin{pmatrix} u_i \\ u_i \end{pmatrix}$ $B \begin{pmatrix} u_i \\ u_i \end{pmatrix} = 2\lambda_i \begin{pmatrix} u_i \\ u_i \end{pmatrix}$ d'où $\begin{pmatrix} u_i \\ u_i \end{pmatrix}$ est une $\vec{v}$ de B associée à la vp $2\lambda_i$.

De plus si on considère $\begin{pmatrix} u_i \\ -u_i \end{pmatrix}$ on a :

$$B \begin{pmatrix} u_i \\ -u_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ -u_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Au_i - Au_i \\ Au_i - Au_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} u_i \\ -u_i \end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix} u_i \\ -u_i \end{pmatrix}$ est un $\vec{v}$ de B associé à la vp 0

On obtient 2m $\vec{v}$:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u_m \\ u_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ -u_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u_m \\ -u_m \end{pmatrix}$$

Il reste à vérifier qu'ils forment une partie libre.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ et $\beta_1, \dots, \beta_m$ tel que

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m \\ \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 u_1 + \beta_m u_m = 0 \\ \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} p_1 + p_2 \\ \Leftrightarrow \\ p_1 - p_2 \end{matrix} \begin{cases} 2\alpha_1 u_1 + \dots + 2\alpha_m u_m = 0 \\ 2\beta_1 u_1 + \dots + 2\beta_m u_m = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0 \\ \beta_1 = \dots = \beta_m = 0 \end{cases}$$

Comme on a une base de $2m$ vecteurs propres de B
donc B diagonalisable.

Dans la base $(\begin{smallmatrix} u_1 \\ v_1 \end{smallmatrix}), \dots, (\begin{smallmatrix} u_m \\ v_m \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} u_1 \\ v_1 \end{smallmatrix}), \dots, (\begin{smallmatrix} u_m \\ v_m \end{smallmatrix})$ B s'écrit

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ & & 2\lambda_m & \\ & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

1) $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ est inversible

$$\Leftrightarrow \exists B \in M_m(\mathbb{R}) \quad AB = BA = I_m$$

$$A \text{ est tq } A^3 - A = I_m$$

$$\Leftrightarrow A(A^2 - I_m) = I_m$$

$$(A^2 - I_m)A$$

d'où A est inversible et $A^{-1} = A^2 - I_m$

c'est à dire $\det(A) \neq 0$

2) Mq si $\det(A) < 0$ alors $\det(A + I_m) < 0$
 $\det(A - I_m) > 0$

On sait que

$$\det(A^3 - A) = \det(I_m) = 1$$

$$\det(A(A^2 - I_m)) = \det(A(A + I_m)(A - I_m))$$

$$\text{d'où } \det(A) \det(A + I_m) \det(A - I_m) = 1$$

si $\det(A) < 0$ alors $\det(A + I_m) \det(A - I_m) < 0$

Polynôme caract $\chi_A(x) = \det(A - xI_m)$

$$\text{On a } \det(A + I_m) = \chi_A(-1) < 0$$

$$\det(A - I_m) = \chi_A(1) > 0$$

On sait que $\chi_A(0) = \det(A) < 0$

D'après la relation $A^3 - A = I_m$ on a
 $A + I_m = A^3$.

$$\begin{aligned} \text{d'où } \det(A + I_m) &= \det(A^3) \\ &= \det(A)^3 < 0 \\ &= \det(A)^3 > 0 \end{aligned}$$

3) Le polynôme caractéristique χ_A vérifie.

$$\chi_A \begin{array}{c} \text{sur }]-1, 0[\\ \text{?} \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} -1 & 0 & 1 & & \\ \times 0 & \times 0 & \neq & \neq & 0 \end{array}$$

χ_A étant continue, il prend toutes les valeurs entre $\chi_A(0) < 0$ et $\chi_A(1) > 0$

Par le TVI il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $\chi_A(\lambda) = 0$

Comme λ est une vp λ est une racine de tout polynôme annulateur de A .

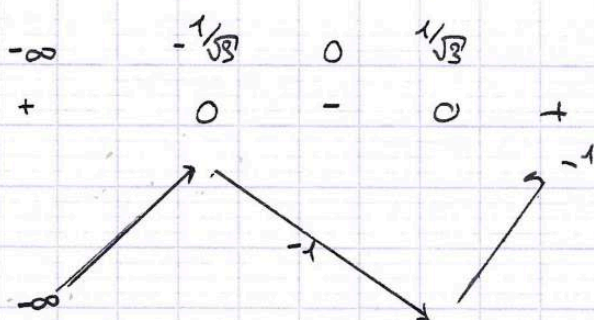
Ici, on a $A^3 - A - I_m = 0$ donc $x^3 - x - 1$ est un pol annulateur de A d'où λ est une racine de $x^3 - x - 1$.

Ex. 5) c'est un procédé par l'absurde puisque on veut conclure que $\det(A) > 0$ alors que l'on a supposé $\det A < 0$.

Montrons que $\lambda \in]0, 1[$ est racine de $x^3 - x - 1$ est absurde $P(x) = x^3 - x - 1$ est absurde.

$$P'(x) = 3x^2 - 1$$

=



Sur

Exercice 6

$A \in M_n(\mathbb{R})$ trigonalisable $\Leftrightarrow \mathbb{Q}_A$ est scindé
 c'est à dire il existe une base dans lequel la matrice
 s'écrit : $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \ddots \\ 0 & \lambda_m \end{pmatrix}$

$$\tilde{A}^2 = \tilde{A} \cdot \tilde{A}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_1^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_m^2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^2 + \tilde{A} + I_m = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + \lambda_1 + 1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_m^2 + \lambda_m + 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \text{tr}(\tilde{A}^2 + \tilde{A} + I_m) = \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 + \lambda_i + 1$$

La trace est invariante par changement de base.

$$\begin{aligned} \text{donc } \text{tr}(A^2 + A + I_m) &= \text{tr}(\tilde{A}^2 + \tilde{A} + I_m) \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 + \lambda_i + 1 \end{aligned}$$

Si on note P la matrice de passage de la base
 de départ à la base de départ à la base de
 diagonalisation.

$$A = P \tilde{A} P^{-1} \Rightarrow A^2 = P \tilde{A}^2 P^{-1} \text{ et } I_m = P I_m P^{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } A^2 + A + I &= P \tilde{A}^2 P^{-1} + P \tilde{A} P^{-1} + P I_m P^{-1} \\ &= P(\tilde{A}^2 + \tilde{A} + I_m) P^{-1} \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que $P(x) = x^2 + x + 1 \geq 3/4$
 $P'(x) = 2x + 1$ $P'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1/2$

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
P'	$-$	0	$+$
P	$+\infty$	$3/4$	$+\infty$

$$P(-1/2) = (-1/2)^2 + (-1/2) + 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Déterminer une matrice A :

$$\begin{aligned} \text{tr}(A^2 + A + I) &= \frac{3}{5} \\ \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 + \lambda_i + 1 &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Il suffit de trouver une matrice trigonalisable
dont toutes les vp égale à $-1/2$

Par exemple

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

ou encore $\begin{pmatrix} -1/2 & * \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

TD6 - Application de la réduction

Exercice 1

1) $u_5 = S$

2) $X_m = \begin{pmatrix} u_m \\ u_{m+1} \end{pmatrix}$

Trouver A tel que $X_{m+1} = AX_m$

$$X_{m+1} = \begin{pmatrix} u_{m+1} \\ u_{m+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{m+1} \\ u_{m+1} + u_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_m \\ u_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_m + bu_{m+1} \\ cu_m + du_{m+1} \end{pmatrix}$$

Par identification

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

3) $X_m = AX_{m-1}$
 $= A^2 X_{m-2}$
 $\vdots$
 $= A^m X_0$

4) Polynôme caractéristique de A .

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_2)$$

$$= \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} = -X(1-X) - 1 = X^2 - X - 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)$$

$$= 5$$

Il y a 2 racines distinctes distinctes

Comme χ_A est un pol. à racines simples, A est diag

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\bullet \lambda_1: A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} x \\ x+y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x + \frac{1-\sqrt{5}}{2} x &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 x \\ &= \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} x \\ &= \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} x \\ &= x + \frac{2-2\sqrt{5}}{4} x \\ &= x + \frac{1-\sqrt{5}}{2} x \end{aligned}$$

Le système est équivalent à

$$y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} x$$

$$E_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Pour } \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} x & (1) \\ x+y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} y & (2) \end{cases}$$

En remplaçant (1) dans (2) on trouve que l'égalité est vraie

d'où on obtient le système $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} x$
et donc $E_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \right)$

Soit P la matrice de passage de la base de départ à la base (u_1, u_2)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$s) P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & -1 \\ -\frac{1+\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

déduire l'expression de u_m
en fonction de $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^m$

$$G_m \text{ a } A = P \tilde{A} P^{-1} \text{ d'où } A^m = P \tilde{A}^m P^{-1}$$

$$\tilde{A}^m = \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^m & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mu^m & 0 \\ 0 & \lambda^m \end{pmatrix}$$

$$A^m = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^m & 0 \\ 0 & \lambda^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \mu+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -\mu & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^m & \lambda^m \\ \mu^{m+1} & \lambda^{m+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -\mu & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^m & \lambda^m \\ \mu^{m+1} & \lambda^{m+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -\mu & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^m \lambda - \lambda^m \mu - \mu^{m+1} + \lambda^{m+1} \\ \mu^{m+1} \lambda - \lambda^{m+1} \mu - \mu^{m+1} + \lambda^{m+1} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\mu^{m+1} + \lambda^{m+1} & -\mu^m + \lambda^m \\ -\mu^m + \lambda^m & -\mu^{m+1} + \lambda^{m+1} \end{pmatrix}$$

$$X_m = A^m X_0 = A^m \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = A^m \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\mu^m + \lambda^m \\ -\mu^{m+1} + \lambda^{m+1} \end{pmatrix}$$

b) Équivalent de la suite
 $u_m + \infty$

$$u_m \sim v_m$$

$$\Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{u_m}{v_m} = 1$$

$$u_m = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^m \right)$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^m \left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^m \right) \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^m \left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^m \right)$$

$$-1 < \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} < 1$$

$$\Leftrightarrow -1-\sqrt{3} < 1-\sqrt{3} < 1+\sqrt{3}$$

$$\text{donc } \left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

$$1 - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^m \sim 1$$

$$\text{donc } u_m \sim \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^m$$

$$u_{m+1} \sim \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{m+1}$$

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} \sim \frac{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{m+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^m} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 3

$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ diagonalisable on pose $u_m = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix}$

Exprimer u_{m+1} en fonction de u_m et de A .

On a $u_{m+1} = Au_m$ c'est le système s'écrit sous forme matricielle.

Exprimer u_m en fonction de u_0 et de A

$$u_m = A^m u_0$$

Il faut donc déterminer A^m ou au moins pouvoir dire quelque chose sur $\lim_{m \rightarrow +\infty} A^m$

Comme A est diagonalisable il existe une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice A s'écrit:

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}$ Si on note P la matrice de passage de la 1^{ère} base à la base de diagonalisation

$$A = P\tilde{A}P^{-1} \text{ et donc } A^m = P\tilde{A}^mP^{-1}$$

$$\text{D'où } \lim_{m \rightarrow +\infty} A^m = P \lim_{m \rightarrow +\infty} \tilde{A}^m P^{-1} \quad \text{or } \tilde{A}^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m^m \end{pmatrix}$$

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ tq $|\lambda| < 1$

$$\lambda^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

Comme $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1, \dots$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \tilde{A}^m = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

B

$$\text{d'où } \lim_{m \rightarrow +\infty} A^m = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \\ t_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_{m+1} = a u_m \\ u_m = a^m u_0$$

$$\text{Si } |a| < 1 \quad u_m \rightarrow 0$$

2) a) On suppose maintenant que λ_1 est une vp de A
tq $|\lambda_1| > 1$

$$\text{Soit } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad u_m \rightarrow u_p \text{ associée à } \lambda_1$$

$$A u = \lambda_1 u \quad \text{et } u \neq 0 \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si on pose } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix} \quad \text{alors l'une des suites } (|x_m|)$$

$(|y_m|)$ $(|z_m|)$ et $(|t_m|)$ tend vers $+\infty$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \lambda_1^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \quad \text{donc } \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \\ t_m \end{pmatrix} = \lambda_1^m \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$$

On effectue tout $m=0$

On montre que c'est encore
vrai au rang $m+1$:

$$\lambda_1^m \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = \lambda_1^m \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \quad \text{pple vraie}$$

$$\begin{pmatrix} x_{m+1} \\ y_{m+1} \\ z_{m+1} \\ t_{m+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \\ t_m \end{pmatrix} = A \lambda_1^m \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$$

On suppose que l'on a

$$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \\ t_m \end{pmatrix} = \lambda_1^m \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1^m A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = \lambda_1^m \lambda_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = \lambda_1^{m+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$$

La ppte est vraie au rang m

On a

$$\begin{cases} x_m = \lambda_1^m x_0 \\ y_m = \lambda_1^m y_0 \\ z_m = \lambda_1^m z_0 \\ t_m = \lambda_1^m t_0 \end{cases}$$

Comme $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A est une matrice triangulaire
On cherche donc A^m

On va montrer que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par récurrence :

Si $m=1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

P_1 est vraie

On suppose la ppte vraie
au rang m on P.u
montré au rang $m+1$:

$$A^{m+1} = A^m \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & m+1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'ici la propriété est encore vraie au rang $m+1$
 et donc $\forall m \geq 1$ on a :
$$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \\ t_m \end{pmatrix} = A^m \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \quad \text{D'ici} \quad \begin{cases} x_m = x_0 + m t_0 \\ y_m = y_0 \\ z_m = z_0 \\ t_m = t_0 \end{cases}$$

(y_m) , (z_m) et (t_m) sont des suites cte
 La seule suite qui peut vérifier $|u_m| \rightarrow +\infty$ est donc
 (x_m) .

On $|x_m| = |x_0 + m t_0|$ donc il faut $t_0 \neq 0$

Exercice 6

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases}$$

$$y'/y = 1 \Leftrightarrow \int y'/y = \int 1 \Leftrightarrow y = K_1 e^t, \quad K_1 \in \mathbb{R}$$

$$x' = x + K_1 e^t$$

On cherche une solution de l'équation homogène

$$x' = x$$

$$\Leftrightarrow x = K_2 e^t, \quad K_2 \in \mathbb{R}$$

Solution particulière de (1) par variation de la cte.

$$x(t) = K_2(t) e^t$$

$$x'(t) = K_2'(t) e^t + K_2(t) e^t$$

On remplace dans (1)

$$K_2'(t) e^t + K_2(t) e^t = K_2(t) e^t + K_1 e^t$$

D'où $K_2'(t) = K_1$ et donc $K_2(t) = K_1 t + K_3, \quad K_3 \in \mathbb{R}$

$$x(t) = (K_1 t + K_2) e^t$$

Méthode utilisée en algèbre :

On écrit le système sous forme d'égalité matricielle

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X' = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

Le système devient $X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X(t) = AX(t)$

On va chercher une solution de la forme

$$x(t) = \dots \exp(tA)$$

exp Ici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $A^m = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{donc } t^m A^m = \begin{pmatrix} t^m & m t^m \\ 0 & t^m \end{pmatrix}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(tA)^m}{m!} = \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m t^m}{m!} \\ 0 & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{m t^m}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{(m-1)!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{(m-1)!} = t \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} = t e^t$$

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^t & t e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \exp(tA) X_0 = \begin{pmatrix} e^t & t e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

$$\begin{cases} x'(t) = i\alpha y(t) \\ y'(t) = i\alpha x(t) \end{cases}$$

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i\alpha \\ i\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = AX(t)$$

$$\chi_A = \begin{vmatrix} -X & i\alpha \\ i\alpha & -X \end{vmatrix} = (X - i\alpha)(X + i\alpha)$$

Le polynôme caractéristique est scindé à racine simple d'où A est diagonalisable.

$$\text{Donc } \tilde{A} = \begin{pmatrix} i\alpha & 0 \\ 0 & -i\alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{On obtient } t\tilde{A} = \begin{pmatrix} i\alpha t & 0 \\ 0 & -i\alpha t \end{pmatrix} \text{ et } \exp(tA) = \begin{pmatrix} \exp(i\alpha t) & 0 \\ 0 & \exp(-i\alpha t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } \exp(tA) &= P \exp(t\tilde{A}) P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} e^{i\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha t} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \end{aligned}$$

On cherche les $\vec{v}_p$:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = i\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} i\alpha x_2 = i\alpha x_1 \\ i\alpha x_1 = i\alpha x_2 \end{cases}$$

$$E_{i\alpha} = \text{Vect}\{(1, 1)\}$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -i\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} i\alpha x_2 = -i\alpha x_1 \\ i\alpha x_1 = -i\alpha x_2 \end{cases} \quad E_{-i\alpha} = \text{Vect}\{(1, -1)\}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= P \exp(t\tilde{A}) P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= (1/2) \begin{pmatrix} e^{i\alpha t} & e^{-i\alpha t} \\ e^{i\alpha t} & -e^{-i\alpha t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t} & e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t} \\ e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t} & -e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$x(t) = \exp(tA) x_0$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \left((e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t}) x_0 + (e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}) y_0 \right)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \left((e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}) x_0 + (e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t}) y_0 \right)$$

Exercice 4

Comme A est diagonalisable $A = P\tilde{A}P^{-1}$

On a alors $\exp(A) = P \exp(\tilde{A}) P^{-1}$

$$\det(\exp(A)) = \det(P \exp(\tilde{A}) P^{-1})$$

$$= \det(\exp(\tilde{A}))$$

$$= \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) = \exp(\text{tr}(A))$$

Exercice 7

$$\text{Soit } X' = \begin{pmatrix} 2a & a & 0 \\ a & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix} X_0$$

$$\begin{aligned} \psi_A &= \begin{vmatrix} 2a-X & a & 0 \\ a & 2a-X & 0 \\ 0 & 0 & 2a-X \end{vmatrix} = (2a-X) \begin{vmatrix} 2a-X & a \\ a & 2a-X \end{vmatrix} \\ &= -(X-2a)(X-3a)(X-a) \end{aligned}$$

3 vp donc diag.

$$\begin{aligned} E_a: \quad Au = au &\Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + ay = ax \\ ax + 2ay = ay \\ 2az = az \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} u_1 \\ E_a = \text{Vect}((1, 1, 0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{2a}: \quad Au = 2au &\Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + ay = 2ax \\ ax + 2ay = 2ay \\ 2az = 2az \end{cases} \quad E_{2a} = \text{Vect}((0, 0, 1))^{u_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{3a}: \quad Au = 3au &\Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + ay = 3ax \\ ax + 2ay = 3ay \\ 2az = 3az \end{cases} \quad E_{3a} = \text{Vect}((1, 1, 0))^{u_3} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } \tilde{A} = a$$

$$\begin{matrix} 2a \\ 3a \end{matrix}$$

$$\exp(tA) = P^{-1} \exp(t\tilde{A}) P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{at} & & \\ & e^{2at} & \\ & & e^{3at} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} e^{at} + \frac{1}{2} e^{3at} & -\frac{1}{2} e^{at} + \frac{1}{2} e^{3at} & 0 \\ -\frac{1}{2} e^{at} + \frac{1}{2} e^{3at} & \frac{1}{2} e^{at} + \frac{1}{2} e^{3at} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2at} \end{array}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(\frac{1}{2} e^{at} + \frac{1}{2} e^{3at} \right) x_0 + \left(-\frac{1}{2} e^{at} + \frac{1}{2} e^{3at} \right) y_0 \\ y(t) &= \left(-\frac{1}{2} e^{at} + \frac{1}{2} e^{3at} \right) x_0 + \left(\frac{1}{2} e^{at} + \frac{1}{2} e^{3at} \right) y_0 \\ z(t) &= e^{2at} z_0 \end{aligned}$$

$$|x(t)| + |y(t)| + |z(t)| \leq e^{3at} x_0 + (e^{at} + e^{3at}) y_0 + e^{2at} y_0$$

RappelT07 - Produit scalaire

E un ev

$$\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$$

φ est un produit scalaire si φ est une forme bilinéaire symétrique (gbs) définie positive.

φ bilinéaire: φ est linéaire par rapport à chaque variable.

$$x_1, x_2 \in E, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\varphi(x_1 + \lambda x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \lambda \varphi(x_2, y)$$

$$y_1, y_2 \in E, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\varphi(x, y_1 + \lambda y_2) = \varphi(x, y_1) + \lambda \varphi(x, y_2)$$

$$\varphi \text{ symétrique: } \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$$

Pour montrer que φ est gbs on montre φ positive et bilinéaire ou bilinéaire et symétrique

Exercice 1

$$\text{On veut montrer que } \sum_{k=1}^m k\sqrt{k} \leq \frac{m(m+1)}{2\sqrt{3}} \sqrt{2m+1}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m k\sqrt{k} &= 1\sqrt{1} + \dots + m\sqrt{m} \\ &= \langle X, Y \rangle \end{aligned}$$

$$X = (1, 2, \dots, m)$$

$$Y = (\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{m})$$

Appliquons Cauchy-Schwarz à X et Y

norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$N(X) = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2}$$

$$|\langle X, Y \rangle| \leq N(X)N(Y) \quad \text{ici} \quad |\langle X, Y \rangle| = \left| \sum_{k=1}^m k\sqrt{k} \right| = \sum_{k=1}^m k\sqrt{k}$$

$$N(X) = \sqrt{\sum_{k=1}^m R^2} = \left(\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \right)^{1/2}$$

$$N(Y) = \sqrt{\sum_{k=1}^m (\sqrt{k})^2} = \left(\frac{m(m+1)}{2} \right)^{1/2}$$

$$N(X)N(Y) = \frac{m(m+1)}{2} \sqrt{\frac{2m+1}{3}}$$

$$\sum_{k=1}^m k \sqrt{k} \leq \frac{m(m+1)}{2 \sqrt{3}} \sqrt{2m+1}$$

Exercice 2

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^0([a, b])$$

$$= \{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continue} \}$$

$\mathcal{C}$ est un $\mathbb{R}$ -ev.

Montrons que $\varphi: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(f, g) \mapsto \varphi(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

$$\text{Donc } \varphi(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx \in \mathbb{R}$$

$$\varphi \text{ est symétrique: } \varphi(g, f) = \int_a^b g(x)f(x) dx = \int_a^b f(x)g(x) dx = \varphi(f, g).$$

φ est bilinéaire: Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi(f_1 + \lambda f_2, g) &= \int_a^b (f_1(x) + \lambda f_2(x))g(x) dx \\ &= \int_a^b f_1(x)g(x) dx + \lambda \int_a^b f_2(x)g(x) dx \\ &= \varphi(f_1, g) + \lambda \varphi(f_2, g) \end{aligned}$$

Donc φ est une f.b.s.

$$\varphi \text{ est positive: } \varphi(f, f) = \int_a^b f^2(t) dt$$

f^2 est une fonction positive donc son intégrale sur $[a, b]$ est positive.

q est défini sur E

$$q(f, f) = 0 \Rightarrow \int_a^b f^2(t) dt = 0$$

Comme f^2 est positive son intégrale est nulle si

$$f^2(t) = 0 \text{ sur } [a, b] \text{ c'est à dire } f(t) = 0 \text{ sur } [a, b]$$

$$\Rightarrow f = 0.$$

$$2) \text{ Norme associée à } q : N(f) = \sqrt{q(f, f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}$$

D'après Cauchy - Schwarz. si $f, g \in E$ alors

$$|q(f, g)| \leq N(f)N(g)$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}$$

En rapport à l'inégalité on garde f et on pose $g=1$. On obtient

$$0 \leq \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b 1^2 dt}$$

Il y a égalité dans Cauchy - Schwarz si f et g sont colinéaires c'est à dire $f = \lambda g$

On a pris $g=1$ donc $f = \lambda$

C'est à dire que f doit être une fonction cte

3) f est de classe C^1 sur $[a, b]$ et $f(a) = a$.

$$\int_a^b f'(u) du = [f(u)]_a^b = f(b) - f(a)$$

$$f(t) = \int_a^t f'(u) du = f(t) - f(a) = f(t)$$

$$\Rightarrow f^2(t) = \left(\int_a^t f'(u) du \right)^2 \leq (t-a) \int_a^t f'^2(u) du$$

$$g^2(t) \leq (t-a) \int_a^b (g'(u))^2 du$$

On a $0 \leq g^2(t) \leq (t-a) \int_a^b (g'(u))^2 du$

D'après les propriétés de l'intégrale :

$$\int_a^b g^2(t) dt \leq \int_a^b (g'(u))^2 du \int_a^b (t-a) dt$$

$$\text{d'où } \int_a^b g^2(t) dt \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b (g'(t))^2 dt$$

Exercice 3

$$\begin{aligned} 1) \text{ Symétrie : } \quad \ln({}^tBA) &= \ln({}^t(BA)) \\ &= \ln({}^tA {}^t(B)) \\ &= \ln({}^tAB) = \langle A, B \rangle \end{aligned}$$

linéarité par rapport à la 2^{ème} variable

Soient $A, B_1, B_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\langle A, B_1 + \lambda B_2 \rangle \\ &= \ln({}^tA(B_1 + \lambda B_2)) \\ &= \ln({}^tAB_1) + \lambda \ln({}^tAB_2) \quad \text{car } \ln(\cdot) \text{ est linéaire} \\ &= \langle A, B_1 \rangle + \lambda \langle A, B_2 \rangle \end{aligned}$$

Donc $\langle, \rangle$ est une g.b.

$$\langle A, A \rangle = \ln({}^tAA)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

donc $\langle A, A \rangle = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m a_{ij}^2 \geq 0$

$\langle, \rangle$ est défini $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m a_{ij}^2 = 0$

$\Rightarrow a_{ij}^2 = 0 \Rightarrow a_{ij} = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

2) Si E est un ev muni d'un produit scalaire $\langle, \rangle$.

- $F \subset E$ orthogonal de F : $F^\perp = \{g \in E, \forall f \in F, \langle f, g \rangle = 0\}$
- Si F est un sev de E , alors $F^\perp$ est un sev de E , on a $F \oplus F^\perp = E$.

$\mathcal{D} = \{M \in M_m(\mathbb{R}), M \text{ est diagonale}\}$

Déterminer $\mathcal{D}^\perp$

$M \in \mathcal{D}^\perp \Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{D}, \langle D, M \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{D}, \langle {}^t D M \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{D}, \langle M \rangle = 0$

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}$

et $M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1} & \dots & m_{mm} \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \forall \lambda_1, \dots, \lambda_m \text{ réels}$

$\lambda_1 m_{11} + \dots + \lambda_m m_{mm} = 0$

Ceci est vraie si $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$

$\Rightarrow m_{11} = 0$

En répétant on obtient $m_{11} = m_{22} = \dots = 0$

Donc $\mathcal{D}^\perp = \{M \in M_m(\mathbb{R}) \text{ à diagonale nulle}\}$

$$3) \mathcal{N} = \{M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), f_n(M) = 0\} \\ = \text{Ker}(f_n) \Rightarrow \text{c'est un sev.}$$

C'est un hyperplan de E donc sa dimension est $\dim(E) - 1 = m^2 - 1$.

Comme $\mathcal{N}$ est un sev de E

$$\mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^\perp = E$$

$$\text{d'où } \dim \mathcal{N}^\perp = 1$$

d'où $\mathcal{N}^\perp$ est engendré par 1 élément

$$N \in \mathcal{N}^\perp \Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{N}, \langle M, N \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{N}, f_n({}^tNM) = 0$$

$$\text{Si } N = I_m \text{ alors } {}^tN = {}^tI_m = I_m \text{ et } {}^tNM = M$$

$$E = \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{N} = \{M \in E, f_n(M) = 0 = \text{Ker}(f_n)\}$$

$$\mathcal{N} \text{ est sev de } E \text{ tq } \dim \mathcal{N} = m^2 - 1$$

1) F le sev des matrices symétriques

$$- F \neq \emptyset \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & 0 \end{pmatrix} \in F$$

$$- \text{Si } M \in F \text{ alors } {}^tM = M$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$${}^t(\lambda M) = \lambda {}^tM = \lambda M \in F$$

$$- \text{Si } M_1, M_2 \in F \text{ alors}$$

$${}^t(M_1 + M_2) = {}^tM_1 + {}^tM_2 = M_1 + M_2 \in F$$

$$\dim F = \frac{n(n+1)}{2}$$

en fait sans les révisions

$M =$

$M \in M_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si ${}^t M = -M$

$$G = \{ M \in M_n(\mathbb{R}) , {}^t M = -M \}$$

$$\text{Si } {}^t M = -M$$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

$${}^t M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{1n} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

$${}^t M = -M \Rightarrow \forall 1 \leq i \leq n, \quad m_{ii} = -m_{ii} \\ m_{ii} = 0$$

$$\dim G = \frac{(n-1)n}{2}$$

$$F \cap G = \{0\}$$

$$F \oplus G = \mathcal{L}$$

$$\dim F + \dim G = \dim \mathcal{L} = n^2$$

Soit $M_1 \in F, M_2 \in G$ montrons que $\varphi(M_1, M_2) = 0$

$$\varphi(M_1, M_2) = 0$$

$$= \text{tr}({}^t M_1 M_2) = \text{tr}(M_1 M_2)$$

$$= \text{tr}({}^t M_2 M_1) = -\text{tr}(M_1 M_2)$$

$$\text{donc } \text{tr}(M_2 M_1) = 0 \quad \text{donc } \varphi(M_1, M_2) = 0 \\ F^\perp = G$$

$$\mathcal{L} = F \oplus F^\perp$$

$$M \in \mathcal{L}, \exists! M_1 \in F, M_2 \in G, M = M_1 + M_2$$

$$P: \mathcal{L} \rightarrow F$$

$$P(M) = P(M_1) + P(M_2)$$

$${}^t M = -{}^t({}^t M)$$

$$= M_1 + 0$$

$$= -M$$

x

$$M = M + {}^t M - {}^t M$$

$$= {}^t(M + {}^t M) - {}^t M = {}^t M + M - {}^t M$$

$$M = \frac{M + {}^t M}{2} + \frac{M - {}^t M}{2}$$

$${}^t \left(\frac{M + {}^t M}{2} \right) = \frac{{}^t M + M}{2} = \frac{M + {}^t M}{2} \in F$$

$${}^t \left(\frac{M - {}^t M}{2} \right) = \frac{{}^t M - M}{2} = - \frac{M - {}^t M}{2} \in G$$

$$P(M) = \frac{M + {}^t M}{2}$$

Procédé de Gram - Schmidt

E est euclidien $(u_1, \dots, u_m)$ une base de E .

→ transformation en une base orthonormale

$(e_1, \dots, e_m)$ c'est à dire $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

1.1 est la norme associée à $\langle, \rangle$.

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

$$e_2 = u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1$$

e_2 est une combinaison linéaire de u_2 et

e_1 c'est à dire de u_2, u_1 et donc $e_2 \neq 0$

$$\text{de plus } \langle e_2, e_1 \rangle = \langle u_2, e_1 \rangle - \langle u_2, e_1 \rangle \langle e_1, e_1 \rangle = 0$$

$$\text{On pose alors } e_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|}$$

(e_1, e_2) vérifiant $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$

$$\|e_1\| = \|e_2\| = 1$$

$$e_3 = u_3 - \langle u_3, e_1 \rangle e_1 - \langle u_3, e_2 \rangle e_2$$

Comme avant $e_3 \neq 0$ est combinaison

linéaire de u_1, u_2 et u_3 avec des coefficients non tous nuls.

$$\begin{aligned} \langle e_3, e_1 \rangle &= \langle u_3, e_1 \rangle - \langle u_3, e_1 \rangle \langle e_1, e_1 \rangle - \langle u_3, e_2 \rangle \langle e_1, e_2 \rangle \\ &= \langle u_3, e_1 \rangle - \langle u_3, e_1 \rangle \cdot 1 - \langle u_3, e_2 \rangle \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$$= \langle u_3, e_1 \rangle - \langle u_3, e_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow e_3 \perp e_1$$

$$\begin{aligned} \langle e_3, e_2 \rangle &= \langle u_3, e_2 \rangle - \langle u_3, e_1 \rangle \langle e_1, e_2 \rangle - \langle u_3, e_2 \rangle \langle e_2, e_2 \rangle \\ &= \langle u_3, e_2 \rangle - \langle u_3, e_2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e_3 \perp e_2$$

On pose alors $e_3 = \frac{e_3}{\|e_3\|}$

On a (e_1, e_2, e_3) vérifiant $e_1 \perp e_2, e_1 \perp e_3$ et $e_2 \perp e_3$
 $\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1$

Plus généralement si on a construit $(e_1, \dots, e_p)$
 tel que tout ces $\vec{v}_i$ sont 2 à 2 $\perp$ et tel
 que $\|e_1\| = \dots = \|e_p\| = 1$

On construit e_{p+1} et e_{p+1} de manière suivante :

$$e_{p+1} = u_{p+1} - \sum_{i=1}^p \langle u_{p+1}, e_i \rangle e_i$$

Application

$$u_1 = (1, 2, 2)$$

$$u_2 = (1, 3, 1)$$

$$u_3 = (0, 1, 2)$$

1) $\det(u_1, u_2, u_3) = 18 \neq 0$ donc (u_1, u_2, u_3) est une
 base de $\mathbb{R}^3$

2) Par Gram Schmidt:

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{3} (1, 2, 2)$$

$$e_2 = (0, 1, -1)$$

$$\|e_2\| = \sqrt{2}$$

$$e_2 = u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1$$

$$\text{d'où } e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, -1)$$

$$\begin{aligned} \langle u_2, e_1 \rangle &= \frac{1}{3} (1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$e_3 = u_3 - \langle u_3, e_1 \rangle e_1 - \langle u_3, e_2 \rangle e_2$$

$$\langle u_3, e_1 \rangle = 12$$

$$\langle u_3, e_2 \rangle = 3\sqrt{2}$$

$$e_3 = (0, 12, 6) - \frac{12}{3} (1, 2, 2) - 3\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, -1) = (-1, 1, 1)$$

$$\|e_3\| = 3\sqrt{2}$$

3) p projection + sur $F = \mathbb{R}u_1 = \text{vect}(u_1) = \text{vect}(e_1)$

Matrice de p dans (e_1, e_2, e_3)

$p(e_1) \ p(e_2) \ p(e_3)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

$$p(e_1) = e_1$$

$$p(e_2) = 0$$

$$p(e_3) = 0$$

La matrice de p dans (u_1, u_2, u_3)

$$M = \tilde{P} M P^{-1}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -1/3\sqrt{2} \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \\ 2/3 & -1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -1 \\ 2\sqrt{2} & 3 & 1 \\ 2\sqrt{2} & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} =$$

La matrice p dans (u_1, u_2, u_3)

$p(u_1) = \text{projection de } u_1 \text{ sur } \mathbb{R}u_1$

$$\text{rang}(P) = \text{rang}(\tilde{M}) = 1$$

$$\text{rang}(p) = \dim \text{Im}(p) = 1$$

$$\begin{matrix} p(u_1) & p(u_2) & p(u_3) \\ \frac{\langle u_1, e_1 \rangle}{\|u_1\|} & \frac{\langle u_2, e_1 \rangle}{\|u_2\|} & \frac{\langle u_3, e_1 \rangle}{\|u_3\|} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix}$$

Exercice 2 (suite)

1) $F = \mathbb{R}_2[x]$

$\langle, \rangle : F \times F \rightarrow \mathbb{R}$

$(g, g) \mapsto \langle g, g \rangle$

$= \int_{-1}^1 g(x)g(x)dx$

Base orthonormale : on part de la base canonique $(1, x, x^2)$.

$\|1\| = \sqrt{\int_{-1}^1 dx} = \sqrt{2}$

$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$e_2 = u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1$

$= u_2$

$e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \sqrt{2/3}$

$e_3 = u_3 - \langle u_3, e_1 \rangle e_1 - \langle u_3, e_2 \rangle e_2$
 $= x^3 - 1/3$

$e_3 = \frac{e_3}{\|e_3\|} = \sqrt{8/5}$

Exercice 4

1) $(F^\perp)^\perp = F$

$F^\perp = \{y \in E, \forall x \in F, \langle x, y \rangle = 0\}$

$(F^\perp)^\perp = \{y \in E, \forall x \in F^\perp, \langle x, y \rangle = 0\}$

Soit $y_0 \in F$, soit $x \in F^\perp$, $\langle x, y_0 \rangle = 0$ donc $F \subset (F^\perp)^\perp$

De plus comme F est un sev de E .

On a aussi $F \oplus F^\perp = E$

On a aussi $F^\perp \oplus (F^\perp)^\perp = E$

$\dim F + \dim F^\perp = \dim E$

$\dim F^\perp + \dim (F^\perp)^\perp = \dim E$

$\Rightarrow \dim F = \dim (F^\perp)^\perp$

D'où $F = (F^\perp)^\perp$

F et G 2 sev de E

$F+G = \{u_1+u_2, u_1 \in F, u_2 \in G\}$ est un sev de E . C'est le + petit sev de E qui contient F et G .

On veut montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

On a $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$

$$\Rightarrow (F+G)^\perp \subset F^\perp \text{ et } (F+G)^\perp \subset G^\perp$$

$$\Rightarrow (F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$$

$$F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp ?$$

Soit $y \in F^\perp$

On a $y \in F^\perp$ cad $\forall u \in F, \langle u, y \rangle = 0$

$y \in G^\perp$ $\forall v \in G, \langle v, y \rangle = 0$

Soit $x \in F+G$, alors $\exists u \in F, \exists v \in G$ tq
 $x = u+v$

$$\langle x, y \rangle = \langle u, y \rangle + \langle v, y \rangle = 0$$

D'où $y \in (F+G)^\perp$ cad $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$

On obtient $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

On veut montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

On écrit la relation que l'on vient de démontrer avec $F^\perp$ et $G^\perp$

$$\begin{aligned} (F^\perp + G^\perp)^\perp &= (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp \\ &= F \cap G \end{aligned}$$

On passe à l'orthogonal $((F^\perp + G^\perp)^\perp)^\perp = (F \cap G)^\perp$

$$F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$$

Exercice 5

$$1) (x_1, \dots, x_m) = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_1, x_m \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \dots & \langle x_2, x_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_m, x_1 \rangle & \dots & \langle x_m, x_m \rangle \end{pmatrix}$$

$A = \text{Mat}_B(x_1, \dots, x_m)$ Les lignes de ${}^t A$ sont les colonnes de A c-à-d $({}^t x_1, \dots, {}^t x_m)$

Le coefficient de i -ème ligne et de j -ème colonne de ${}^t A A$ s'obtient en multipliant la i -ème ligne de ${}^t A$ et la j -ème colonne de A
 ${}^t x_i \cdot x_j = \langle x_i, x_j \rangle$ qui est le coeff à la i -ème ligne et j -ème colonne. D'où ${}^t A A = G$

$$\begin{aligned} 2) \det(G) &= \det({}^t A A) \\ &= \det({}^t A) \det(A) \\ &= \det(A) \det(A) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\det(G) = 0 \Leftrightarrow \det(A^2) = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0$$

$\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_m)$ est une famille liée

$$3) M = \begin{pmatrix} 1 & \omega & \dots & \omega \\ \omega & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \omega \\ \omega & \dots & \omega & 1 \end{pmatrix}$$

M non inversible $\Leftrightarrow \omega = 1$ ou $\omega = \frac{1}{\text{mod}}$
 M non inversible $\Leftrightarrow \det(M) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1+(m-1)\omega & \omega & \dots & \omega \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \omega & \dots & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \omega & \dots & \omega \\ \omega & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \omega \\ \omega & \dots & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1+(m-1)\omega & 1 & \omega & \dots & \dots & \omega \\ 0 & 1-\omega & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1-\omega & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-\omega \end{bmatrix}$$

1) $(u_1, \dots, u_m)$ famille orthonormée

$(u_1, \dots, u_m)$ famille de E tel que $\exists a \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
 $\{0\}$ vérifiant $\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \|u_i\| = 1 \\ \forall (i, j) \in \{1, \dots, m\} \quad i \neq j, \|u_i - u_j\| = 0 \end{cases}$

Montrons que la famille est libre.

On a vu $G(x_1, \dots, x_m) = 0$
 $\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_m)$ est liée

$$G(x_1, \dots, x_m) = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$$

On va considérer

$$G(u_1, \dots, u_m) = (\langle u_i, u_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq m}$$

Si $i = j$

$$\langle u_i, u_j \rangle = \langle u_i, u_i \rangle = \|u_i\|^2 = 1$$

Si $i \neq j$

$$\begin{aligned} \|u_i - u_j\|^2 &= \langle u_i - u_j, u_i - u_j \rangle \\ &= \langle u_i, u_i \rangle - 2\langle u_i, u_j \rangle + \langle u_j, u_j \rangle \\ &= \|u_i\|^2 - 2\langle u_i, u_j \rangle + \|u_j\|^2 \end{aligned}$$

$$\text{on a } \|u_i - u_j\|^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow \langle u_i, u_j \rangle = 1 - \frac{a^2}{2}$$

$$G(u_1, \dots, u_m) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{a^2}{2} & \dots & 1 - \frac{a^2}{2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 - \frac{a^2}{2} & \dots & 1 - \frac{a^2}{2} \end{bmatrix}$$

D'après la question 2 si on a une matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \omega & \dots & \omega \\ \omega & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \omega \\ \omega & \dots & \omega & 1 \end{pmatrix} \text{ alors } M \text{ inversible} \Leftrightarrow \omega \neq 1$$

$$\omega \neq \frac{1}{1-m}$$

Ici $\omega = 1 - \frac{a^2}{2}$. Comme $a \neq 0$ alors $\omega \neq 1$.

On sait de plus que $a \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \setminus \{0\}$

$$a \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \leq a \leq 0 \end{cases}$$

$$a \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \setminus \{0\} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \leq \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \leq a < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 < |a| \leq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 < a^2 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{a^2}{2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - \frac{a^2}{2} = \omega < 1$$

Comme $\omega \geq 0$, $\omega \neq -\frac{1}{m-1}$

D'après la question 2

$G(u_1, \dots, u_m)$ est inversible

Donc la famille $(u_1, \dots, u_m)$ est libre.

Exercice 6

$$A \in GL_m(\mathbb{R})$$

Si X est un vecteur colonne

- $\langle X, SX \rangle \geq 0$ (positive)

- $\nexists X, SX = 0 \Leftrightarrow X = 0$ (définie)

$${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$$

$${}^tS = {}^t({}^tAA) = {}^tA {}^t({}^tA) = {}^tAA = S$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

donc ${}^tXSX = {}^tX {}^tAAX$

$$= {}^t(AX)AX$$

$$= \langle AX, AX \rangle \geq 0.$$

Si ${}^tXSX = 0$

$$\Leftrightarrow \langle AX, AX \rangle = 0$$

$$\Rightarrow AX = 0$$

, A inversible

$$A^{-1}AX = 0$$

$$X = 0$$

2) Ici $\varphi(X, Y) = \langle SX, Y \rangle \in \mathbb{R}$

• (symétrie) $\varphi(X, Y) = \langle SX, Y \rangle$
 $\varphi(Y, X) = \langle SY, X \rangle$

$$\begin{aligned}\varphi(X, Y) &= {}^t(SX) \cdot Y \\ &= {}^tX {}^tS \cdot Y \\ &= {}^tX ({}^tSY) \in \mathbb{R} \\ &= {}^t({}^tX ({}^tSY)) \\ &= {}^t({}^tSY) {}^t({}^tX) \\ &= {}^t(SY) X \\ &= \langle SY, X \rangle = \varphi(Y, X)\end{aligned}$$

• (linéarité par la 2^{ème} variable)

$$\begin{aligned}\varphi(X, Y_1 + \lambda Y_2) &= \langle SX, Y_1 + \lambda Y_2 \rangle \\ &= SX Y_1 + \lambda SX Y_2 \quad (\text{linéarité du produit scalaire}) \\ &= \varphi(X, Y_1) + \lambda \varphi(X, Y_2) \quad (\text{car } \varphi \text{ est linéaire}).\end{aligned}$$

donc bilinéaire.

• (positivité) $\varphi(X, X) = \langle SX, X \rangle$
 $= {}^t(SX) X$
 $= \langle AX, AX \rangle = \|AX\|_2^2 \geq 0$

De plus $\varphi(X, X) = 0$
 $\Leftrightarrow \|AX\|_2^2 = 0 \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow X = 0$ car A inversible

φ est une f.b.

norme associée:

$$N(X) = \sqrt{\varphi(X, X)} = \|AX\|_2 \geq 0$$

$$3) \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m \\ &= X^T Y \end{aligned}$$

Montrons que $\lambda_1 > 0$

S est symétrique donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$

$\exists X \neq 0$ tel que $SX = \lambda_1 X$

$$\varphi(X, X) > 0$$

$$\varphi(X, X) = \langle SX, X \rangle$$

$$= \langle \lambda_1 X, X \rangle$$

$$= \lambda_1 \langle X, X \rangle$$

$$= \lambda_1 \|X\|_2^2$$

$$\lambda_1 \|X\|_2^2 > 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0$$

Exercice 6

$$s) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

$$\sqrt{\lambda_1} \|x\|_2 \leq N_A(x) \leq \sqrt{\lambda_m} \|x\|_2$$

$$\varphi(x, y) = \langle Sx, y \rangle$$

$$N_A(x) = \|Ax\|_2 = \sqrt{\langle Ax, Ax \rangle}$$

On a aussi:

$$N_A(x) = \sqrt{\varphi(x, x)} \\ = \sqrt{\langle Sx, x \rangle}$$

S est une matrice symétrique réelle tel que sa plus petite vp λ_1 vérifie $\lambda_1 > 0$. Comme S est symétrique réelle elle est diagonalisable. Il existe donc une base de $\mathbb{R}^m$ $(u_1, \dots, u_m)$ formée de $\vec{v}_p$ de S .

$$\text{On a } x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_m u_m$$

Pour chaque $u_i, \exists \lambda_j$ vp de S tel que $S(u_i) = \lambda_{j(i)} u_i$

On suppose donc que $(u_1, \dots, u_m)$ est orthonormée

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$\text{D'où on a } Sx = \sum_{i=1}^m \alpha_i S u_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_{j(i)} u_i$$

$$\langle Sx, x \rangle = \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \lambda_{j(i_1)} \langle u_{i_1}, u_{i_2} \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^m \alpha_{i_1}^2 \lambda_{j(i_1)}$$

$$\inf \lambda_{j(i_1)} \sum_{i_1=1}^m \alpha_{i_1}^2 \leq \sum_{i_1=1}^m \alpha_{i_1}^2 \lambda_{j(i_1)} \leq \sup \lambda_{j(i_1)} \sum_{i_1=1}^m \alpha_{i_1}^2$$

$$\lambda_1 \sum_{i_1=1}^m \alpha_{i_1}^2 \leq \langle Sx, x \rangle \leq \lambda_m \sum_{i_1=1}^m \alpha_{i_1}^2$$

$$\sqrt{\lambda_1} \|x\|_2 \leq N_A(x) \leq \sqrt{\lambda_m} \|x\|_2$$

1) Montre que $\sup_{x \neq 0} \frac{N_A(x)}{\|x\|_2} = \sqrt{\lambda_m}$

$$\frac{N_A(x)}{\|x\|_2} \leq \sqrt{\lambda_m} \quad \text{Donc} \quad \left\{ \frac{N_A(x)}{\|x\|_2}, x \neq 0 \right\} \quad \text{est un}$$

ensemble majoré

Par définition de la borne sup

$$\sup_{x \neq 0} \frac{N_A(x)}{\|x\|_2} \leq \sqrt{\lambda_m}$$

Par définition λ_m est la + grande vp de S . Donc

$\exists x_1 \in \mathbb{R}^m, x_1 \neq 0$ tel que $Sx_1 = \lambda_m x_1$

$$\begin{aligned} N_A(x_1) &= \sqrt{\langle Sx_1, x_1 \rangle} = \sqrt{\langle \lambda_m x_1, x_1 \rangle} \\ &= \sqrt{\lambda_m} \sqrt{\langle x_1, x_1 \rangle} = \sqrt{\lambda_m} \|x_1\|_2 \end{aligned}$$

$$\text{On obtient} \quad \frac{N_A(x_1)}{\|x_1\|_2} = \sqrt{\lambda_m} \quad \text{d'où} \quad \sup_{x \neq 0} \frac{N_A(x)}{\|x\|_2} = \sqrt{\lambda_m}$$

Remarque Ici la sup est atteint en $x = x_1$
donc un max

Exercice 7

1) $\langle, \rangle$ produit scalaire sur E

u tel que $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$

$B = (e_1, \dots, e_m)$ base orthonormée de E

A la matrice de u dans B .

Par définition de A , ses colonnes sont les $u(e_i)$
écrit $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_m)$ dans la base B .

$$\begin{aligned} \text{On } u(e_i) &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_m e_m \\ &= \sum_{j=1}^m \langle u(e_i), e_j \rangle e_j \end{aligned}$$

Rappel $(e_1, \dots, e_m)$ base orthonormée $v \in E$

$$v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m$$

$$\begin{aligned} \langle v, e_i \rangle &= \alpha_1 \langle e_1, e_i \rangle + \alpha_2 \langle e_2, e_i \rangle + \dots + \alpha_m \langle e_m, e_i \rangle \\ &= \alpha_i \langle e_i, e_i \rangle = \alpha_i \end{aligned}$$

D'où
$$A = \begin{pmatrix} \langle u(e_1), e_1 \rangle & \dots & \langle u(e_m), e_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u(e_m), e_m \rangle & \dots & \langle u(e_m), e_m \rangle \end{pmatrix}$$

2) Soit E_{λ_1} et E_{λ_2} 2 sous espaces de V associés à 2 vp λ_1, λ_2 de $\mathcal{P}$ tel que $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Montrons que $E_{\lambda_1} \perp E_{\lambda_2}$

$$E_{\lambda_1} = \text{Ker}(u - \lambda_1 \text{Id}) = \{v \in E_{\lambda_1}, u(v) = \lambda_1 v\}$$

$$E_{\lambda_2} = \text{Ker}(u - \lambda_2 \text{Id}) = \{v \in E_{\lambda_2}, u(v) = \lambda_2 v\}$$

Soit $v_1 \in E_{\lambda_1}$ et $v_2 \in E_{\lambda_2}$ montrons que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

On sait que $u(v_1) = \lambda_1 v_1$

$$u(v_2) = \lambda_2 v_2$$

$$\langle u(v_1), v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle$$

$$= \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$\langle v_1, u(v_2) \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$$

Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

D'où $E_{\lambda_1} \perp E_{\lambda_2}$

3) $\det(A - X I_3) = [(1-X)^2 - 2^2]^2 = (-1-X)^2 (3-X)^2$

$$E_{-1} = \text{Ker}(A + I_3)$$

$$= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

on a $v_3 \perp v_1$

$$E_3 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

D'où (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base orthogonale dans laquelle la matrice du u .

$$\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \quad \text{on obtient} \quad P = \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

(u_1, u_2, u_3, u_4) est une base orthogonale
D'où $\left(\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \frac{u_3}{\|u_3\|}, \frac{u_4}{\|u_4\|}\right)$ est une base orthonormée

On obtient la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3, e_4)
à $\left(\frac{u_1}{\sqrt{2}}, \frac{u_2}{\sqrt{2}}, \frac{u_3}{\sqrt{3}}, \frac{u_4}{\sqrt{3}}\right)$

$$P = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = {}^t P$$

TD8 - Projection orthogonale et distance

$$x - y + z = 0$$

$$y = x + z$$

42

Exercice 1

$$1) u_1 \rightarrow e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1$$

$$\langle u_2, e_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|v_2\| = \sqrt{3}/2$$

$$e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \sqrt{2/3} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(e_1, e_2) est une base orthonormée de F .

Ici F est un hyperplan $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $x - y + z = 0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle$

D'où $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est $\perp$ à F $F^\perp = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Remarque: Pour trouver $F^\perp$, on commence par chercher une base $(v_1, \dots, v_p)$ de F . Ensuite on cherche les vecteurs

$$v \text{ tel que } \begin{cases} \langle v, v_1 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle v, v_p \rangle = 0 \end{cases} \quad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

On obtient un système à n variables $x_1, \dots, x_n$ qui détermine $F^\perp$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Matrice } p_1 \text{ de la projection orthogonale sur } F$$

Pour e_1 : $e_1 = \langle e_1, e_1 \rangle e_1 + \langle e_2, e_1 \rangle e_2 + \langle e_3, e_1 \rangle e_3$ $p_1(e_1) = \langle e_1, e_1 \rangle e_1 + \langle e_2, e_1 \rangle e_2$ $p_1(e_2)$ $p_1(e_3)$ $p_1(e_1)$ est la projection orthogonale de e_1 sur F .

Pour e_2 : $e_2 = \langle e_1, e_2 \rangle e_1 + \langle e_2, e_2 \rangle e_2 + \langle e_3, e_2 \rangle e_3$ $p_2(e_2) = \langle e_1, e_2 \rangle e_1 + \langle e_2, e_2 \rangle e_2$

Pour e_3 : $e_3 = \langle e_1, e_3 \rangle e_1 + \langle e_2, e_3 \rangle e_2 + \langle e_3, e_3 \rangle e_3$ $p_3(e_3) = \langle e_1, e_3 \rangle e_1 + \langle e_2, e_3 \rangle e_2$

$$p(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} e_2$$

$$p(e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} e_2$$

$$p(e_3) = \sqrt{\frac{2}{3}} e_2$$

On a la matrice $\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

Remarque dans (e_1, e_2, e_3)

Matrice p_2 dans (e_1, e_2, e_3) $p_1(v) + p_2(v) = v \Leftrightarrow p_2 = \text{Id} - p_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice de p_2 , c'est la matrice I_n moins la matrice p_1

$$\text{Mat}(P_2) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d(u, F) = \|u - p_F(u)\|$$

Remarque 3.1 on a $\forall v \in F$

par pythagore $\|u - v\|^2 = \|u - p_F(u)\|^2 + \|v - p_F(u)\|^2$

d'où $\forall v \in F$

$$\|u - v\|^2 \geq \|u - p_F(u)\|^2$$

Ici : p faut projeter u sur $p_1(u) = p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$d(u, F) = \|u - p_1(u)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$d(u, F^\perp) = \|u - p_2(u)\|_2$$

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$d_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$d_1^2 + d_2^2 = \|u\|^2$$

48

Exercise 3

$$1) \phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(x) Q(x) dx$$

$$\|u_1\| = \left(\int_{-1}^1 1 \times 1 dx \right)^{1/2} = \sqrt{2}$$

$$P_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Par P_2 :

$$Q_2 = u_2 - \langle u_2, P_1 \rangle P_1$$

$$\langle u_2, P_1 \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dx = 0$$

donc $Q_2 = u_2$

$$P_2 = \frac{Q_2}{\|Q_2\|}$$

$$\|Q_2\| = \left(\int_{-1}^1 x^2 dx \right)^{1/2} = \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2}$$

$$P_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \times$$

Par P_3

$$Q_3 = u_3 - \langle u_3, P_1 \rangle P_1 - \langle u_3, P_2 \rangle P_2$$

$$\langle u_3, P_1 \rangle = \int_{-1}^1 x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dx = 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle u_3, P_2 \rangle = \int_{-1}^1 x^3 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} x dx = 0$$

$$= 0$$

$$Q_3 = u_3 - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = x^3 - \frac{1}{3}$$

$$P_3 = \frac{Q_3}{\|Q_3\|}$$

$$\begin{aligned} \|Q_3\| &= \left(\int_{-1}^1 (x^3 - 1/3)^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{-1}^1 (x^6 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{9}) dx \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{x^7}{7} - \frac{2}{3} \frac{x^4}{4} + \frac{x}{9} \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{8}{5} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$P_3(x) = \frac{\sqrt{15}}{8} (x^2 - 1/3)$$

2) Orthogonal de $F = \text{Vect}(1, x)$

$$F^\perp = \{ P \in \mathbb{R}_2[X], \forall Q \in F, \langle P, Q \rangle = 0 \}$$

Comme P_1 et P_2 ont été construites comme combinaisons linéaires de 1 et x

$$\text{Vect}(1, x) = \text{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x\right)$$

D'où $F = \text{Vect}(P_1, P_2)$, comme F est un de $\mathbb{R}_2[X]$

$$\text{donc } \dim(F^\perp) = \dim \mathbb{R}_2[X] - \dim(F) = 1.$$

Par construction $P_3 \perp P_1$ et $P_3 \perp P_2$

d'où $P_3 \perp F$ et donc $F^\perp = \text{Vect}(P_3)$

Projection orthogonale de $1+x$ sur F est $1+x$

car $1+x \in F$. Il suffit donc de projeter x^2 sur F

comme (P_1, P_2) est une base orthonormée de F la

projection orthogonale de x^2 sur F est $P(x) = \langle x^2, P_1 \rangle P_1 + \langle x^2, P_2 \rangle P_2$

$$x^2 = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{15}} (P_3(x)) + 1/3$$

Projeter x^2 revient à projeter $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{15}} P_3(x)$ puis $1/3$

Le premier donne 0 car $P_3 \perp F$ et le deuxième

donne $1/3$ car $1/3 \in F$

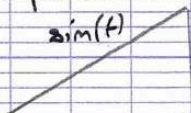
Donc projection orthogonale de $1+x+x^2$ est

$$1+x+1/3 = \frac{4}{3} + x.$$

$$3) \min_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (\sin(t) - a - bt - ct^2)^2 dt$$

c'est la distance au carré entre $\sin(t)$ et

P espace engendré par $(1, t, t^2)$



distance entre $\sin t$ et $\text{vect}(1, t, t^2)$

Il faut projeter orthogonalement z sur $R_2[x]$
On obtient

$$\underbrace{\langle \sin x, P_1 \rangle}_{1} P_1 + \underbrace{\langle \sin x, P_2 \rangle}_{2} P_2 + \underbrace{\langle \sin x, P_3 \rangle}_{3} P_3$$

$$d: \int_{-1}^1 \sin(x) \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 0$$

$$2: \int_{-1}^1 x \sin x \sqrt{\frac{3}{2}} dx = \sqrt{\frac{3}{2}} (-2 \cos(1) + 2 \sin(1))$$

$$3: \int_{-1}^1 \sin x \sqrt{\frac{45}{8}} (x^2 - 1/3) dx = 0$$

$$\int_1^4 \left(\sin(x) - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \right)^2 dx$$

$$= \int_{-1}^1 \left(\sin^2(x) - 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x) x + \frac{3}{2} x^2 \right) dx$$

$$= \int_{-1}^1 (1 - \cos(2x)) dx = x - \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_{-1}^1 = 2$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta - c^2$$