Correction TD

Algèbre

1

Polynômes : division euclidienne, algorithme d'Euclide

Exercice 1

1) $A(X) = X^5 - 7X^4 - X^3 - 9X + 9$

$B(X) = X^2 - 5X + 4$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
X^5 & -7X^4 & -X^3 & & -9X & +9 & X^2 - 5X + 4 \\
\hline
-(X^5 & -5X^4 & +4X^3) & & & & X^3 - 2X^2 - 15X - 67 \\
\hline
 & -2X^4 & -5X^3 & & -9X & +9 & \\
 & +2X^4 & -10X^3 & +8X^2 & & & \\
\hline
 & & -15X^3 & +8X^2 & -9X & +9 & \\
 & & +15X^3 & -75X^2 & +60X & & \\
\hline
 & & & -67X^2 & +51X & +9 & \\
 & & & +67X^2 & -335X & +268 & \\
\hline
 & & & & -284X & +277 & \\
\end{array}
$$

Donc $Q = X^3 - 2X^2 - 15X - 67$

$R = -284X + 277$

2) $A(X) = X^3 - X^2 + 1$

$B(X) = X - 1 + 2i$

$$
\begin{array}{l|l}
X^3 - X^2 + 1 & X - 1 + 2i \\
\hline
-X^3 + X^2 - 2iX^2 & X^2 - 2iX - 4 - 2i \\
\hline
-2iX^2 + 1 & \\
+2iX^2 - 2iX + 4i^2X & \\
\hline
-2iX - 4X + 1 & \\
-(4+2i)X + 1 & \\
+(4+2i)X + (4+2i)(-1+2i) & \\
\hline
-8+6i+1 & \\
\hline
-7+6i & \\
\end{array}
$$

$q = X^2 - 2iX - 4 - 2i$

$R = -7+6i$

Exercice 2

$X^{79} - 3X^2 + 1 = q\,(X^2-1) + R$ où $R = aX+b$

$\deg R < \deg (X^2-1)$

$X^{79} - 3X^2 + 1 = q(X)\,(X^2+1) + aX + b$

On cherche a et b :

$X = 1 \Rightarrow 1 - 3 + 1 = a + b$ donc $R = X - 2$

$X = -1 \Rightarrow -1 - 3 + 1 = b - a$

$$\begin{cases} -1 = a + b \\ -3 = b - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

Exercice 3

$X^2 + X + 1 \mid (X+1)^{2m+1} + X^{2m+2}$

$(X+1)^{2m+1} + X^{m+2} = q(X)\,(X^2+X+1) + aX + b$

Il s'agit de prouver que $a = b = 0$

Si $X = j \Rightarrow (j+1)^{2m+1} + j^{m+2} = aj+b$

$\Rightarrow (-j^2)^{2m+1} + j^{m+2} = aj+b$

$\Rightarrow -j^{4m+2} + j^{m+2} = aj+b$

$\Rightarrow -j^{m+2} + j^{m+2} = aj+b$

$\Rightarrow aj + b = 0$

donc $a = 0$ et $b = 0$

Maths

Algèbre

Exercice 4

$A(X) = Q_1(X)\cdot(X-1) + 3$

$A(X) = Q_2(X)(X-2) + 7$

$A(X) = Q_3(X)(X-3) + 13$

On cherche le reste dans :

$A(X) = q(X)(X-1)(X-2)(X-3) + aX^2 + bX + c$

on cherche a, b, c.

$X = 1 \Rightarrow A(1) = a+b+c$

$3 = a+b+c$

$X = 2 \Rightarrow A(2) = 4a + 2b + c$

$7 = 4a + 2b + c$

$X = 3 \Rightarrow A(3) = 9a + 3b + c$

$13 = 9a + 3b + c$

$$\begin{cases} 3 = a+b+c \\ 7 = 4a+2b+c \\ 13 = 9a+3b+c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Exercice 5

1) $A(X) = Q(X)(X-a) + R$ où le reste $R \in K$

$A(a) = R$

2) $A(X)\ (X-a)(X-b) + \lambda X + \mu$

$$\begin{cases} A(a) = \lambda a + \mu \\ A(b) = \lambda b + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = (A(a) - A(b))/(a-b) \\ \mu = (a\,A(b) - b\,A(a))/(a-b) \end{cases}$$

3) $A(X) = q(X)(X-a)^2 + \alpha X + \beta$ $(*)$

dérivons $(*)$ (formellement) $(X^k)' \underset{\text{def}}{=} kX^{k-1}$

$A'(X) = q'(X)(X-a)^2 + 2q(X)(X-a) + \alpha$

d'où si $X = a$

$A'(a) = \alpha$

$\beta = A(a) - a\,A'(a)$

~~3) On fait $b \to a$ dans $\begin{cases} \lambda = (A(b)-A(a))/(b-a) = \lambda(a,b) \\ \mu = (aA(b) - bA(a))/(a-b) = \mu(a,b) \end{cases}$~~

4) $A(X) = X^n$ $\qquad X^2 - 2X - 3 = (X-3)(X+1)$

D'après questions d'avant, le reste recherché est $\lambda X + \mu$ d'où : $\lambda = \dfrac{3^n - (-1)^n}{4}$

$$\mu = \frac{3^n + 3(-1)^n}{4}$$

Exercice 6

$$\begin{array}{r|l}
X^5 + aX^2 + b & X^3 + X^2 + cX + 1 \\
\hline
-X^5 - X^4 - cX^3 - X^2 & X^2 - X + 1 - c \\
\hline
-X^4 - cX^3 + (a-1)X^2 + b & \\
X^4 + X^3 + cX^2 + X & \\
\hline
(1-c)X^3 + (a+c-1)X^2 + X + b & \\
+(c-1)X^3 + (c-1)X^2 + c(c-1)X + c - 1 & \\
(a+2c-2)X^2 + (c^2-c+1)X + b + c - 1 &
\end{array}$$

Le reste est nul si et seulement si $\begin{cases} a + 2c - 2 = 0 \\ c^2 - c + 1 = 0 \\ b + c - 1 = 0 \end{cases}$

$c^2 + c + 1 = 0 \Leftrightarrow c = -j$ ou $-\bar{j}$

et donc il y a deux solution $\begin{cases} a = 2(j+1) \\ b = j+1 \\ c = -j \end{cases}$ et $\begin{cases} a = 2(\bar{j}+1) \\ b = \bar{j}+1 \\ c = -\bar{j} \end{cases}$

Rappel :

$j = e^{2\pi i/3}$

$j^3 = 1$

$1 + j + j^2 = 0$

Exercice 6

$$
\begin{array}{l|l}
X^3 + aX + b & X^2 + cX - 1 \\
\cline{2-2}
-X^3 - cX^2 + X & X - c \\
\cline{1-1}
-cX^2 + (a+1)X + b & \\
+cX^2 + c^2X - c & \\
\cline{1-1}
(c^2 + a + 1)X + b - c &
\end{array}
$$

$B(X)$ divise $A(X)$ ssi le reste $(c^2+a+1)X + b - c$ est le polynôme nul, i.e si et seulement si

$$\begin{cases} c^2 + a + 1 = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \quad \text{ie ssi} \quad \begin{cases} a = -1 - c^2 \\ b = c \end{cases}$$

avec c arbitraire

Exercice 7

1) $X^{343} - 2X^{15} + 5X + 1 = q(X).(X^2+1) + aX + b$

Pour $X = i$

$ai + b = -i + 2 + 5i + 1$

$\begin{cases} ai = 4i \\ b = 3 \end{cases}$

2) $X^{2m} + X^m - 2 = q_2(X)(X^2+1) + aX + b.$

$i^{2m} + i^m - 2 = ai + b$

$(-1)^m - 2 + i^m = ai + b$

quatre cas :

- $m = 4k$

alors $ai+b = 1 - 2 + 1 = 0$ donc $a = b = 0$

- $n = 4k+1$ alors $a = 1$ et $b = -3$: $R = X - 3$
- $n = 4k+2$, $a = 0$, $b = -2$
- $n = 4k+3$ i.e $a = -1$, $b = -3$

3) $(\cos\theta + X\sin\theta)^n = q_3(X)(X^2+1) + aX + b$

$X = i \Rightarrow ai + b = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$

$= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

$a = \sin(n\theta)$

$b = \cos(n\theta)$

Exercice 8

1)
$$
\begin{array}{r|l}
X^6 - 7X^5 + X^4 + X^3 - 10X^2 + 22X - 3 & X^4 - 8X^3 + 9X^2 - 8X + 1 \\
-X^6 + 8X^5 - 9X^4 + 8X^3 - X^2 & X^2 + X \\
\hline
X^5 - 8X^4 + 9X^3 - 11X^2 + 22X - 3 & \\
-X^5 + 8X^4 - 9X^3 + 8X^2 - X & \\
\hline
-3X^2 + 21X - 3 &
\end{array}
$$

Donc $A(X) = (X^2 + X)B(X) - 3(X^2 - 7X + 1)$

$$
\begin{array}{r|l}
X^4 - 8X^3 + 9X^2 - 8X + 1 & X^2 - 7X + 1 \\
\cline{2-2}
-X^4 + 7X^3 - X^2 & X^2 - X + 1 \\
\hline
-X^3 + 8X^2 - 8X + 1 & \\
+X^3 - 7X^2 + X & \\
\hline
X^2 - 7X + 1 & \\
-X^2 + 7X - 1 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Donc $B(X) = (X^2 - 7X + 1)(X^2 - X + 1)$

$D(X) = X^2 - 7X + 1$

$$M = \frac{AB}{D} = A \cdot \frac{B}{D} = A(X) \cdot (X^2 - X + 1)$$

$$= (X^6 - 7X^5 + X^4 + X^3 - 10X^2 + 22X - 3)(X^2 - X + 1)$$

$$= X^8 \underset{(-1-7)}{-8X^7} \underset{(1+7+1)}{+9X^6} \underset{(-1+1-7)}{-7X^5} \underset{(1-1-10)}{-10X^4} \underset{(1+10+22)}{+33X^3} \underset{(-10-22-3)}{-35X^2}$$

$$\underset{(22+3)}{+25X} - 3$$

Cherchons U_0, V_0

$$A(X) = (X^2 + X)\,B(X) - 3D(X)$$

$$\Rightarrow D(X) = -\frac{1}{3} A(X) + \frac{1}{3}(X^2 + X)\,B(X)$$

d'où $U_0(X) = -\frac{1}{3}$, $V_0(X) = \frac{1}{3}(X^2 + X)$

$$\begin{cases} U(X) = U_0(X) + S(X)\dfrac{B(X)}{D(X)} \\ V(X) = V_0(X) - S(X)\dfrac{A(X)}{D(X)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} U(X) = \cancel{U_0(X)} - \dfrac{1}{3} + S(X)(X^2 - X + 1) \\ V(X) = \dfrac{1}{3}(X^2 + X) - S(X)(X^4 + X - 3) \end{cases}$$

$S(X) \in \mathbb{R}[X]$ arbitraire, car :

$A(X) / D(X) = X^4 + X - 3$

2)

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & -7x^3 & -10x^2 & -15x & -21 & 3x^2 + x + 4 \\
\hline
-6x^4 & -2x^3 & -8x^2 & & & 2x^2 - 3x \\
\hline
 & -9x^3 & -18x^2 & -15x & -21 & \\
 & +9x^3 & +3x^2 & +12x & & \\
\hline
 & & -15x^2 & -3x & -21 & \\
 & & +15x^2 & +5x & +20 & \\
\hline
 & & & 2x & -1 &
\end{array}
$$

Donc $A(x) = (2x^2 - 3x + 5)\, B(x) + 2x - 1$

$$
\begin{array}{rrr|l}
3x^2 & + x & + 4 & 2x - 1 \\
\hline
-3x^2 & + \frac{3}{2} x & & \frac{3}{2} x + \frac{5}{4} \\
\hline
 & & 21/4 &
\end{array}
$$

Donc $B(x) = \left(\frac{3}{2} x + \frac{5}{4}\right)(2x - 1) + \frac{21}{4}$

$\deg(21/4) = 0$ Donc prochain reste nul.

C-f donc $D = 1$

donc $M(x) = \dfrac{A(x)}{cd(A)} \cdot \dfrac{B(x)}{cd(B)}$

$= \dfrac{1}{18} A(x) \cdot B(x)$

$1 = \dfrac{4}{21} B(x) - \dfrac{4}{21}\left(\dfrac{3}{2} x + \dfrac{5}{4}\right)(2x - 1)$

$= \dfrac{4}{21} B(x) - \dfrac{4}{21}\left(\dfrac{3}{2} x + \dfrac{5}{4}\right)\left(A(x) - (2x^2 - 3x - 5) B(x)\right)$

$= -\dfrac{4}{21}\left(\dfrac{3}{2} x + \dfrac{5}{4}\right) A(x) + \dfrac{4}{21}\left[\left(\dfrac{3}{2} x + \dfrac{5}{4}\right)(2x^2 - 3x - 5) + 1\right] B(x))$

d'où

$$U_0(X) = -\frac{4}{21}\left(\frac{3}{2}X + \frac{5}{4}\right)$$

$$V_0(X) = \frac{4}{21}\left(3X^3 - 2X^2 - \frac{45}{4}X - \frac{21}{4}\right)$$

Solution générale :

$U(X) = U_0(X) + S(X)\,B(X)$ avec $S(X) \in \mathbb{R}[X]$

$V(X) = V_0(X) + S(X)\,A(X)$

3) $X^6 - 64$ | $X^2 - 4$

Raisonnement

$$\boxed{Y^3 - Z^3 = (Y - Z)(Y^2 + YZ + Z^2)}$$

$$X^6 - 64 = (X^2)^3 - 4^3 = (X^2 - 4)(X^4 + 4X^2 + 16)$$

Et donc $D(X) = X^2 - 4$

$M(X) = X^6 - 64$

$U_0(X)\,A(X) + V_0(X)\,B(X) = D(X)$

avec $U_0 = 0$, $V_0 = 1$

$U(X) = S(X)$

$$V(X) = 1 - S(X)\frac{A(X)}{D(X)}$$

4)

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1 & x^3 + x^2 - x - 1 \\ \cline{2-2}
-x^4 - x^3 + x^2 + x & x \\ \cline{1-1}
\qquad -2x^2 - 3x - 1 &
\end{array}
$$

Donc : $A(x) = \cancel{(x^4 + x^3 -)}\ x B(x) - (2x^2 + 3x + 1)$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + x^2 - x - 1 & 2x^2 + 3x + 1 \\
-x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x & \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \\ \cline{1-1}
-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1 & \\
\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} & \\ \cline{1-1}
-\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} &
\end{array}
$$

Donc $B(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)(2x^2 + 3x + 1) - \frac{3}{4}(x + 1)$

$$
\begin{array}{l|l}
2x^2 + 3x + 1 & x + 1 \\ \cline{2-2}
-2x^2 - 2x & 2x + 1 \\ \cline{1-1}
\qquad x + 1 & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Donc $D(x) = x + 1$

$$M(x) = \frac{A(x)}{cd(A)} \quad \frac{B(x)/D(x)}{cd(B)} = A(x)\left[\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{2x^2 + 3x + 1}{x + 1}\right) - \frac{3}{4}\right]$$

$$= A(x)\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x + 1) - \frac{3}{4}\right]$$

$$= x^6 + x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 4x + 1.$$

$$D(x) = -\frac{4}{3}B(x) + \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 3x + 1)$$

$$= -4/3\, B(x) + \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

d'où $\quad U_0(x) = -\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$$V_0(x) = \frac{2}{3}\left(x^2 - \frac{1}{2}x - 2\right)$$

$U(x) = U_0 + S(x)\, {}^{B(x)}/_{D(x)}$

$V(x) = V_0 - S(x)\, {}^{A(x)}/_{D(x)}$

Exercice 9

(1) $n = qk + r$

$A(X) = X^n - 1$

$B(X) = X^k - 1$

$$
\begin{array}{r|l}
X^n - 1 = X^{qk+r} - 1 & X^k - 1 \\
\cline{2-2}
-X^{qk+r} + X^{(q-1)k+r} & X^{(q-1)k+r} + \dots + X^r \\
\hline
X^{(q-1)k+r} - 1 & \\
\vdots & \text{(Récurrence évi-} \\
X^r - 1 & \text{dente)}
\end{array}
$$

$\deg(X^r - 1) = r < k$ donc $X^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de A par B

(2) $X^n - 1 = Q_1(X)(X^m - 1) + R_1(X)$ Dans $\mathbb{R}[X]$

$\qquad + X^{r_1} - 1$ d'après (1)

$X^m - 1 = Q_2(X)(X^{r_1} - 1) + X^{r_2} - 1$

$\vdots$

$\cancel{X^{r_{2}-q}}$ $X^{r_{q-2}} - 1 = Q_q(X)(X^{r_{q-1}} - 1) + X^{r_q} - 1$

$X^{r_q} - 1$ = dernier reste $\neq 0$

$= \text{pgcd}(X^n - 1, X^m - 1)$

$n = k_1 m + r_1$

$m = k_2 r_1 + r_2$

$\vdots$

$r_{q-2} = k_q r_{q-1} + r_q$

$r_{q-1} = k_{q+1} r_q + 0$

c-t donc

$\text{pgcd}(X^n - 1, X^m - 1)$

$= X^{\text{pgcd}(n,m)} - 1 = X^d - 1.$

$X^p - 1 \mid X^m - 1$

$\Leftrightarrow \text{pgcd}(X^p - 1, X^m - 1)$

$= X^p - 1 \Leftrightarrow X^{\text{pgcd}(p,m)} - 1 = X^p - 1$

$\Leftrightarrow$ $\text{pgcd}(P, n) = P$

$\Leftrightarrow$ $P \mid n$

(3) $\text{PGCD}(X^n - a^n, X^m - a^m)$

Si $a = 0$:

$\text{PGCD}(X^n - a^n, X^m - a^m) = \text{PGCD}(X^n, X^m) = X^{\min(n,m)}$

Si $a \neq 0$:

$\text{PGCD}(X^n - a^n, X^m - a^m) = \text{PGCD}(a^n[(X/a)^n - 1], a^m[(X/a)^m - 1])$

$= \text{PGCD}((X/a)^n - 1, (X/a)^m - 1) = [(X/a)^{\text{pgcd}(n,m)} - 1]/cd$

où $cd = 1/a^{\text{pgcd}(n,m)}$ $\qquad = X^{\text{pgcd}(n,m)} - a^{\text{pgcd}(n,m)}$

$$\frac{(X/a)^{\text{pgcd}(n,m)} - 1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\text{pgcd}(n,m)}} = X^{\text{pgcd}(n,m)} - a^{\text{pgcd}}$$

Exercice 10

(1) $X = (X-1) + 1$

$X^2 = [(X-1)+1]^2$

$= (X-1)^2 + 2(X-1) + 1$

$X^3 = [(X-1)+1]^3 = (X-1)^3 + 3(X-1)^2 + 3(X-1) + 1$

$X^4 = [(X-1)+1]^4 = (X-1)^4 + 4(X-1)^3 + 6(X-1)^2 + 4(X-1) + 1$

(2) $P(X) = X^4 + 5X^3 - 2X^2 - X + 3$

$= (X-1)^4 + 4(X-1)^3 + 6(X-1)^2 + 4(X-1) + 1 + 5(X-1)^3$

$+ 15(X-1)^2 + 15(X-1) + 5 - 2(X-1)^2 - 4(X-1) - 2$

$- (X-1) - 1 + 3$

$= (X-1)^4 + 9(X-1)^3 + 19(X-1)^2 + 14(X-1) + 6$

(3) $P(X) = P(1 + (X-1)) = P(1) + P'(1)(X-1) + P''(1)/2\,(X-1)^2$

$+ \dfrac{P^{(3)}(1)}{6}(X-1)^3 + \dfrac{P^{(4)}(1)}{24}(X-1)^4$

$P(1) = 6$

$P'(X) = 4X^3 + 15X^2 - 4X - 1 = 14$

$P''(X) = 12X^2 + 30X - 4 = \cancel{19}\ 38$

$P^{(3)}(X) = 24X + 30 = 54$

$P^{(4)}(X) = 24$

On retrouve bien $P(X)$ comme polynôme en $X-1$.

Exercice 11

Soit $P(X) = (X-1)^5 (X+1)^3 (X-8)$

1 racine d'ordre 5 de $P \Rightarrow$ 1 racine d'ordre 4 de P'

1 racine d'ordre 3 de $P \Rightarrow$ " " " 2 de P'

Donc $P'(X) = c.(X-1)^4 (X+1)^2 Q$

avec $\deg Q = 2$

(car $\deg P' = \deg P - 1 = 8$) et $Q \neq P$

Donc $PGCD(P, P') = (X-1)^4 (X+1)^2$

(n,m)

Exercice 12

$P(X) = n X^{n+1} - (n+1) X^n + 1$

$P(1) = 0$: 1 est racine de multiplicité ≥ 1

$P'(X) = n(n+1) X^n - (n+1) n X^{n-1}$

$P'(1) = 0$

$P''(X) = n^2 (n+1) X^{n-1} - n(n+1) X^{n-2} (n-1)$

$P''(1) \neq 0$

Donc la multiplicité de la racine est double

Exercice 13

(1) $a_1, \ldots, a_k$ distincts

$A(a_i) - B(a_i) = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq k$

Il s'agit de vérifier que si $k > n$ alors

$A - B = 0$

A, B de degrés $\leq n \Rightarrow \deg(A-B) \leq n$

$((A-B)(a_i) = 0, \; 1 \leq i \leq k) \Rightarrow A - B$ possède au moins k racines

$\Rightarrow A - B = 0$ (seul polynôme de degré $\leq n$ qui ait plus que n racines)

Rappel : tout polynôme non nul de degré d a au plus d racines (comptées avec multiplicité)

(2) $\deg A \leqslant 2n$, $\deg B \leqslant 2n$

$(A-B)(a_i) = 0$

$(A-B)'(a_i) = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant k)$

$k > n$ Justifier que $A - B = 0$

On a : $\deg(A-B) \leqslant 2n$

$\begin{cases} (A-B)(a_i) = 0 \\ (A-B)'(a_i) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ les a_i sont racines de $A-B$ de multiplicité $\geqslant 2$

donc Σ (multiplicités des racines de $(A-B)$) $\geqslant 2k > 2n$

et donc $A - B = 0$

(3) $\deg A \leqslant mn$

$\deg B \leqslant mn$

$A^{(j)}(a_i) = B^{(j)}(a_i) \qquad 1 \leqslant i \leqslant k$

$k > n \qquad 0 \leqslant j \leqslant m-1$

$\Rightarrow A - B = 0$

En effet
- $\deg(A-B) \leqslant mn$
- les a sont racines de $A-B$ de multiplicité $\geqslant m$
- donc Σ multiplicités $\geqslant km \geqslant mn \geqslant \deg(AB)$
- et donc $A - B = 0$

Exercice 14

$A(1) = 0$ donc 1 racine d'ordre 3 de A

$A'(1) = 0$ donc $A(X) = \mathrm{cd}\, A\, (X-1)^3 Q(X)$

$A''(1) = 0$ donc $A(X) = (X-1)^3 (X-a)$

$A'''(1) \neq 0 \qquad A(0) = -2 = +a$

$\Rightarrow a = -2$

d'où $A(X) = (X-1)^3 (X+2)$

Exercice 15

(1) $X^4 - X^2 - 6$

D'après d'Alembert, trouver les facteurs irréductibles d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ équivaut à trouver ses racines :

car $X - a \mid P \iff a$ est racine de P

$X^4 - X^2 - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (X^2)^2 - X^2 - 6 = 0$

$\Delta = 25$

$X^2 = 3$ ou -2

donc $X^4 - X^2 - 6 = (X^2 - 3)(X^2 + 2)$

$= (X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})(X + \sqrt{2}i)(X - \sqrt{2}i)$ dans $\mathbb{C}[X]$

$= (X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})(X^2 + 2)$

(2) $X^4 + 5X^2 + 9 = 0$

$\Delta = -11$

Donc $X^2 = \dfrac{-5 \pm i\sqrt{11}}{2}$

$(a + ib)^2 = \dfrac{-5 + i\sqrt{11}}{2}$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -5/2 \\ 2ab = \sqrt{11}/2 \\ a^2 + b^2 = \left| \dfrac{-5 + i\sqrt{11}}{2} \right| = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab > 0 \\ a^2 = 1/4 \\ b^2 = 11/4 \end{cases}$$

$a + ib = \pm \left(\dfrac{1}{2} \pm i \dfrac{\sqrt{11}}{2} \right)$

Donc $X^4 + 5X^2 + 9 = \left(X - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)\left(X + \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)$

$\left(X - \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)\left(X + \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)$ $\mathbb{C}[X]$

$= \left[(X - 1/2)^2 - (i\sqrt{11}/2)^2 \right]\left[(X + 1/2)^2 - (i\sqrt{11}/2)^2 \right]$

$= \left[(X - 1/2)^2 + 11/4 \right]\left[(X + 1/2)^2 + 11/4 \right]$

$= (X^2 - X + 3)(X^2 + X + 3)$ $\mathbb{R}[X]$

(3) $X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$

$= \dfrac{X^8 - 1}{X - 1}$

$= \dfrac{1}{(X-1)} (X-1)(X+1)(X - e^{i\frac{\pi}{4}})(X - e^{-i\frac{\pi}{4}})(X - e^{\frac{3}{4}i\pi})(X - e^{-\frac{3}{4}i\pi})$

$(X - e^{i\frac{\pi}{2}})(X - e^{-i\frac{\pi}{2}})$

$= (X + 1)\left(X - \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(X - \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(X + \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(X + \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)(X - i)(X + i)$ dans $\mathbb{C}[X]$

$= (X + 1)(X^2 - \sqrt{2} + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 + 1)$

(4) $(X^2 - X - 2)^2 + (X + 1)^2$

$= [(X^2 - X - 2) - i(X + 1)][(X^2 - X - 2) + i(X + 1)]$

$= (X^2 - (1 + i)X - (2 + i))(X^2 - (1 - i)X - (2 - i))$ ...

$$(X^2-X-2)^2+(X+1)^2 = [(X+1)(X-2)]^2+(X+1)^2$$
$$= (X+1)^2[(X-2)^2+1]$$
$$= (X+1)^2(X^2-4X+5) \quad \mathbb{R}[X]$$
$$= (X+1)^2(X-2-i)(X-2+i) \quad \mathbb{C}[X]$$

Exercice 16

Si $A, B \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux, alors ils n'ont pas de facteur $X-a$ en commun et donc pas de racine commune.

D'après d'Alembert, la est vrai si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, car si A, B n'ont pas de facteur $X-a$ (forme générale des polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$) en commun, alors ils n'ont pas de facteur irréductible commun et donc ils sont premiers entre eux.

Cette réciproque n'est pas vraie dans $\mathbb{R}[X]$. Contre-exemple :
$$(X^2+1)(X-1) \wedge (X^2+1)(X+1)$$
ne sont pas premiers entre eux PGCD $= X^2+1$ et pourtant ils n'ont pas de racines commune dans $\mathbb{R}$.

Exercice 17

(1) $A(1)=0 \Leftrightarrow X-1 \mid A$

$A(0)=0 \Leftrightarrow X \mid A$

$A(i)=0 \Leftrightarrow X-i \mid A$

$A(-i)=0$ car A réel $\Leftrightarrow X+i \mid A$

$A(1+i)=0 \Leftrightarrow X-1-i \mid A$

$A(1-i)=0 \Leftrightarrow X-1+i \mid A$

$$A(X) = cd(A)\, X(X-1)(X-i)(X+i)(X-1-i)(X-1+i) \quad \mathbb{C}$$
$$= cd(A)\, X(X-1)(X^2+1)(X^2-2X+2) \quad \mathbb{R}$$

(2) $\left.\begin{array}{l} B(1)=0 \\ B'(1)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (X-1)^2 \mid A$

$\left.\begin{array}{l} B(1-i)=0 \\ B'(1-i)=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (X-1+i)^2 \mid A \\ (X-1-i)^2 \mid A \end{array}$ car B réel

donc $B(X) = cd(B)(X-1)^2(X-1+i)^2(X-1+i)^2 \quad \mathbb{C}$
$$= cd(B)(X-1)^2(X^2-2X+2)^2 \quad \mathbb{R}$$

(3) $\mathrm{PGCD}(A,B) = (X-1)(X^2-2X+2)$

$\mathrm{PPCM}(A,B) = (X-1)^2(X^2-2X+2)^2$

(4) $P(X) = (X-1)^a X^b (X-i)^c (X+i)^d$ avec $\begin{cases} a,b,c,d \geq 1 \\ a+b+c+d=5 \\ c=d \quad (P \in \mathbb{R}[X]) \end{cases}$

$\Leftrightarrow P(X) = (X-1)X(X^2+1)^c$

où $\begin{cases} a,b,c \geq 1 \\ a+b+2c=5 \end{cases}$

$\deg (X-1)^a X^b \geq 2$

$\deg (X^2+1)^c \leq 3$

$\Rightarrow c=1$

et donc $\{a,b\} = \{1,2\}$

Donc : $P(X) = (X-1)^2 X (X^2+1)$

ou $= (X-1)X^2(X^2+1)$

5) On a plus $c = d$ donc $\{a,b,c,d\} = $ $\{1,1,1,2\}$ $\mathbb{C}$
$\{1,1,2,1\}$ $\mathbb{C}$
$\{1,2,1,1\}$ $\mathbb{R}$
$\{2,1,1,1\}$ $\mathbb{R}$

Exercice 18

$$A(x) = \frac{x^m}{m!} + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \dots + \frac{x^2}{2!} + x + 1$$

Si A a une racine multiple $A(x) = 0$
$A'(x) = 0$

$$A'(x) = \frac{mx^{m-1}}{m!} + \frac{(m-1)x^{m-2}}{(m-1)!} + \dots + \frac{2x}{2!} + 1$$

$$= A(x) - \frac{x^m}{m!}$$

Donc $A(x) = 0$
$A(x) - \frac{x^m}{m!} = 0$

$x^m = 0$ d'où $x = 0$ or $A(0) = 1 \neq 0$ Donc pas de racine multiple.

Exercice 19

(1) $A(x) = x(x^2+4)$ $\mathbb{R}$
~~$B(x)$~~ $= x(x-2i)(x+2i)$ $\mathbb{C}$

$B(x) = (x^2)^2 - 5x^2 - 36$ $= (x-3)(x+3)(x+2i)(x-2i)$ $\mathbb{C}$
$\Delta = 169 = 13^2$ $= (x-3)(x+3)(x^2+4)$ $\mathbb{R}$

(2) $PGCD(A,B) = x^2+4$

Exercice 20

$A(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$

(1) $A(p/q) = 0 \iff a_n \dfrac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \dfrac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \dfrac{p}{q}$

$+ a_0 = 0$

$\iff a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \quad (*)$

$\iff a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} = -a_0 q^n$

$\Rightarrow p \mid a_0 q^n \Rightarrow p \mid a_0$ car p et q premiers entre eux.

De même : $(*) \iff a_n p^n = - a_{n-1} p^{n-1} q - \dots - a_1 p q^{n-1} - a_0 q^n$

$\Rightarrow q \mid a_n p^n$

$\Rightarrow q \mid a_n$

(2) $2X^3 - X^2 + X - 3 = A(X)$

Soit p/q une éventuelle racine rationnelle, avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{pgcd}(p,q) = 1$

D'après (1) $p \mid 3$ et $q \mid 2$

ie $p \in \{-3, -1, 1, 3\}$ et $q \in \{1, 2\}$

$A(-3) \neq 0$ $\quad A(-\frac{3}{2}) \neq 0$

$A(-1) \neq 0$ $\quad A(-\frac{1}{2}) \neq 0$ $\quad$ Il n'y a pas de racine

$A(1) \neq 0$ $\quad A(\frac{1}{2}) \neq 0$

$A(3) \neq 0$ $\quad A(\frac{3}{2}) \neq 0$

(3) $A(X) = X^3 + X^2 - X + 2$

Éventuelles racines rationnelles

p/q, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\text{pgcd}(p,q) = 1$

$p | 2$ et $q | 1$ $\Rightarrow$ $q = 1$

Donc $p/q = p \in \mathbb{Z}$ et $p/2$ donc $p/q = p \in \{-2, -1, 1, 2\}$

$p \neq -2)$

$A(-2) = 0$ L'unique racine de A est -2

$A(-1) \neq 0$

$A(1) \neq 0$

$A(2) \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} A(X) &= (X+2)(X^2 + bX + c) \\ &= X^3 + X^2 - X + 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Donc $A(X) = (X+2)(X^2 - X + 1)$ $\mathbb{R}[X]$

$= (X+2)(X+j)(X+\bar{j})$ $\mathbb{C}[X]$

Soit $B(X) = 3X^3 + 4X^2 + 10X + 3$

p/q où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\text{pgcd}(p,q) = 1$

et $p | 3$ et $q | 3$ Donc :

$p \in \{-3, -1, 1, 3\}$, $q \in \{1, 3\}$

$\text{pgcd}(p, q) = 1$

Notons que $X > 0 \Rightarrow B(X) > 0$ donc $p < 0$

Les seuls cas à envisager sont donc :

$(-1, 1)$, $p/q = -1$ $\Rightarrow B(-1) = -6 \neq 0$

$B(-3) \neq 0$

$B(-1/3) = 0$ L'unique racine rationnelle de B est $-1/3$

On a donc $B(X) = 3(X + 1/3)(X^2 + bX + c)$ $\Big\} \Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b + 3c = 10 \end{cases}$ 12 ~~13~~

$= 3X^3 + 4X^2 + 10X + 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$= 3(X + 1/3)\left(X + \frac{1 + i\sqrt{11}}{2}\right)\left(X + \frac{1 - i\sqrt{11}}{2}\right)$$

$\Delta = -11$

$X_1 = -1 + i\sqrt{11}/2$

$X_2 = -1 - i\sqrt{11}/2$

Posons enfin : $C(X) = 3X^3 + 5X^2 + 4X - 2$

Les éventuelles racines rationnelles sont p/q, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{pgcd}(p, q) = 1$ et $p \mid 2$ et $q \mid 3$

d'où $p \in \{-2, -1, 1, 2\}$ et $q \in \{1, 3\}$

$A(-2) \neq 0$	$A(-1) \neq 0$
$A(-1) \neq 0$	$A(-1/2) \neq 0$
$A(1) \neq 0$	$A(1/2) \neq 0$
$A(2) \neq 0$	$A(1) \neq 0$
$A(2/3) \neq 0$	$A(-1/3) \neq 0$
$A(1/3) = 0$	$A(2/3) \neq 0$

donc $1/3$ racine

$$3X^3 + 5X^2 + 4X - 2 = (X - 1/3)(aX^2 + bX + c)$$

$$= (3X - 1)(aX^2 + bX + c) = (3X+1)(X^2 + 2X + 2)$$

$3aX^3 + (3b - a)X^2 + (3c - b)X - c$ $\in \mathbb{R}[X]$

$3X^3 + (6 - 1)X^2 + (6 - 2)X$

$\Delta = -4$

$X_1 = \dfrac{-2 \pm i2}{2}$

$-1 \pm i$

$$\begin{cases} 3a = 3 \\ 3b - a = 5 \\ 3c - b = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

$c = 2$

$= (3X - 1)(X + 1 + i)(X + 1 - i)$

$\in \mathbb{C}[X]$

II- Fractions rationnelles, décomposition en éléments simples 13

1

Exercice 21

(1)

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & +3X & +X^2 & & 1+X \\
\cline{5-5}
-1 & -X & & & 1+2X-X^2+X^3-X^4 \\
\cline{1-4}
 & 2X & +X^2 & & \\
 & -2X & -2X^2 & & \\
\cline{2-4}
 & & -X^2 & & \\
 & & +X^2 & -X^3 & \\
\cline{2-4}
 & & & X^3 & \\
 & & -X^3 & -X^4 & \\
\cline{2-4}
 & & & -X^4 & \\
 & & +X^4 & +X^5 & \\
\cline{3-4}
 & & & X^5 &
\end{array}
$$

Donc la division suivant les puissances croissantes de $1+3X+X^2$ par $1+X$ est :

$$(1+3X+X^2) = (1+X)(1+2X-X^2+X^3-X^4) + X^5$$

(2)

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 1 & 1-X^2 \\
\cline{3-3}
-1 & +X^2 & 1+X^2+X^4+X^6+X^8+X^{10} \\
\cline{1-2}
 & X^2 & \\
-X^2 & +X^4 & \\
\cline{1-2}
 & X^4 & \\
 & \vdots & \\
 & X^{12} &
\end{array}
$$

Donc la division suivant les puissances croissantes de 1 par $1-X^2$ à l'ordre 10 est

$$1 = (1-X^2)(1+X^2+X^4+X^6+X^8+X^{10}) + X^{12}$$

On pouvait écrire directement

$$\frac{1-X^{12}}{1-X^2} = 1+X^2+X^4+X^6+X^8+X^{10}$$ (Σ termes suite géo raison X^2, premier terme 1)

d'où $1 = (1-x^2)(1+x^2+\dots+x^{10}) + x^{12}$

On peut généraliser à l'ordre $n = 2k$ ou $2k+1$

$$\frac{1-x^{2k+2}}{1-x^2} = 1+x^2+\dots+x^{2k}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = (1-x^2)\sum_{k=0}^{m} x^{2k} + x^{2k+2}$$

C'est la division de 1 par $1-x^2$ suiv les puissances croissantes à l'ordre $n = 2k$ ou $2k+1$

NB : On en déduit en faisant $x \to 0$ les DL_n en 0 de $1/1-x^2$

$$\frac{1}{1-x^2} = Q_n(x) + \frac{R_n(x)}{1-x^2} = 1+x^2+x^4+\dots+x^{2k} + \frac{x^{2k+2}}{1-x^2}$$

où $\dfrac{x^{2k+2}}{1-x^2} = o(x^n)$

(3)

$$\begin{array}{r|l} 1 - x^2 & 1-2x\cos\theta + x^2 \\ \hline -1+2x\cos\theta - x^2 & 1+2x\cos\theta + 2x^2\cos(2\theta) \\ \cline{1-1} 2x\cos\theta - 2x^2 & \\ \cline{1-1} 2x^2(2\cos^2\theta-1) - & 2x^3\cos\theta \\ 2x^2\cos(2\theta) - 2x^3\cos\theta & \\ -2x^2\cos(2\theta) + 4x^3\cos\theta\cos(2\theta) - 2x^4\cos(2\theta) & \\ \hline 2x^3\cos\theta\,(2\cos(2\theta)-1) - 2x^4\cos(2\theta) & \end{array}$$

On attend $2x^3\cos(3\theta)$ à la place de $2x^3\cos\theta(2\cos(2\theta-1)$

Autrement dit, a-t'on : $\cos(3\theta) = \cos\theta(2\cos(2\theta)-1)$

ie a-t'on :

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \cos(\theta)\,(2(2\cos^2\theta-1)-1) \\ &= \cos(\theta)\,(4\cos^2\theta-3) \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \,? \end{aligned}$$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$

$$\Rightarrow \cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta)$$ 14
$$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

Cette méthode permet d'exprimer $\cos(n\theta)$ comme un polynôme en $\cos\theta$, $\forall n$

Bref on a bien $R_2(x) = 2X^3\cos(3\theta) - 2X^4\cos(2\theta)$

Récap

$Q_0 = 1$, $R_0 = 2X\cos\theta - 2X^2$

$Q_1 = 1 + 2X\cos\theta$, $R_1 = 2X^2\cos(2\theta) - 2X^3\cos\theta$

$Q_2 = 1 + 2X\cos\theta + 2X^2\cos 2\theta)$, $R_2 = 2X^3\cos(3\theta) - 2X^4\cos(2\theta)$

$$\begin{array}{l|l} 1 - X^2 & 1 - 2X\cos\theta + X^2 \\ \vdots & \hline & 1 + 2X\cos\theta + \dots + 2X^n\cos(n\theta) + 2X^{n-1}\cos((n-1)\theta) \\ 2X^{n+1}\cos((n+1)\theta) - 2X^{n+2}\cos(n\theta) & \\ -2X^{n+1}\cos((n+1)\theta) + 4X^{n+2} & \\ \cos\theta\cos((n+1)\theta) - & \\ 2X^{n+3}\cos((n+1)\theta) & \\ \hline 2 & \end{array}$$

R_{n+1} sera bien le reste attendu si

$2\cos\theta\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta)$

est-ce le cas ? Autrement dit a-t-on :

$\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2\cos\theta\cos((n+1)\theta)$

Exercice 22

(1) D'après le th de décomposition en élément simple on a :

$$F(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+2)} = E + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

La méthode générale pour calculer E (lemme 1) consiste à faire la division euclidienne du numérateur de F par son dénominateur (si $\deg F \geq 0$ sinon pas de partie entière) et E est le quotient

→ si $\deg E = 0$ ($E = cte$) il est plus rapide de faire $x \to +\infty$:

Ici : $\lim \frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+2)} = E$

Z ne marche que si $\deg E = 0$ donc $E = 1$

Pour calculer a on peut écrire :

$$F(x)(x-1) = \frac{(x+1)^2}{x+2} = x-1+a+(x-1)\frac{b}{x+2}$$

$$\Rightarrow \lim [F(x)(x-1)] = \left.\frac{(x+1)^2}{x+2}\right|_{x=1} = a$$

d'où $a = 4/3$

De même :

$$b = \lim [F(x)(x+2)] = \left.\frac{(x+1)^2}{x-1}\right|_{x=2} = -1/3$$

Cette méthode fonctionne quand on a un elt simple $\frac{\lambda}{x-\alpha}$

Conclusion : $F(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+2)} = 1 + \frac{4/3}{x-1} - \frac{1/3}{x+2}$

Exercice 22 - suite

$$F(x) = \frac{1}{x(x^2+x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

où $a = \lim\limits_{x \to 0} [x F(x)] = 1$

et $bj + c = \lim\limits_{x \to j} [(x^2+x+1) F(x)] = \lim\limits_{x \to j} \frac{1}{x} = \frac{1}{j} = -j-1$

$\Rightarrow b = c = -1$

et donc $F(x) = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+x+1}$

Si $x = 1$: $\frac{1}{3} = 1 + \frac{b+c}{3}$

$b + c = -2$

Si $x = 2$: $\frac{1}{14} = \frac{1}{2} + \frac{2b+c}{7}$

$2b + c = -3$

donc $\begin{cases} b + c = -2 \\ 2b + c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$

et donc $F(x) = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+x+1}$

Donc dans $\mathbb{C}(X) = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x-j} + \frac{\bar{\alpha}}{x-\bar{j}}$

$\alpha = \lim\limits_{x \to j} \frac{1}{x(x-\bar{j})} = \frac{1}{j(j-\bar{j})} = \frac{\bar{j}}{i\sqrt{3}} = -\frac{i}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}$

(9) $F(x) = \dfrac{2x-1}{x(x+1)(x^4+x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$

car $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + \lambda x + \mu)(x^2 - \lambda x + \mu)$

avec $\mu^2 = 1$ et $2\mu - \lambda^2 = 1$

$\mu = \pm 1 \Rightarrow \mu = 1 \, , \, \lambda = \pm 1$

donc $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

$a = \lim\limits_{x \to 0} (x F(x)) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x-1}{(x+1)(x^4+x^2+1)}$

$= -1$

$b = \lim\limits_{x \to -1} [(x+1)F(x)] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x-1}{x(x^4+x^2+1)} = \dfrac{-3}{-3} = 1$

et $cj + d = \lim\limits_{x \to j} \dfrac{2x-1}{x(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{2j-1}{j(j+1)(j^2-j+1)} = \dfrac{2j-1}{2j}$

$= 1 - \dfrac{1}{2}\bar{j}$

et $-ej + f = \lim\limits_{x \to -j} (x^2 - x + 1)F(x) = \lim\limits_{x \to -j} \dfrac{2x-1}{x(x+1)(x^2+x+1)}$

$= \dfrac{-2j-1}{-j(-j+1)(j^2-j+1)} = -\dfrac{1}{2}\bar{j} = -1 - 2j$

<u>Finalement</u>: $a = -1$

$b = 1$

$cj + d = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} i\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} c\, i\, \sqrt{3}/4 = 1/4 \, i\sqrt{3} \\ -1/2\, c + d = 5/4 \end{cases}$

$-ej + f = -\dfrac{1}{2}\bar{j} = \dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow \begin{cases} e = -1/2 \\ f = 1/2 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} c = 1/2 \\ d = 3/2 \end{cases}$

4
16

Conclusion : $F(X) = -\frac{1}{X} + \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2}\frac{X+3}{X^2+X+1} - \frac{1}{2}\frac{X-1}{X^2-X+1}$ dans $\mathbb{R}(X)$

Dans $\mathbb{C}(X)$:

$$F(X) = \frac{-1}{X} + \frac{1}{X+1} + \frac{\alpha}{X-j} + \frac{\bar\alpha}{X-\bar j} + \frac{\beta}{X+j} + \frac{\bar\beta}{X+\bar j}$$

on a $\alpha = \lim_{X\to j} (X-j)F(X)$ . . .

Sinon $\frac{X+3}{X^2+X+1} = \frac{\lambda}{X-j} + \frac{\bar\lambda}{X-\bar j} \Rightarrow \lambda = \lim_{X\to j} (X-j)\frac{X+3}{X^2+X+1}$

$$= \lim_{X\to j} \frac{X+3}{X-\bar j} = \frac{j+3}{j-\bar j} = \frac{j+3}{i\sqrt3}$$

$\frac{X-1}{X^2-X+1} = \frac{\mu}{X+j} + \frac{\bar\mu}{X+\bar j} \Rightarrow \mu = \lim_{X\to -j}(X+j)\frac{X-1}{X^2-X+1} = \lim_{X\to j}\frac{X-1}{X+\bar j}$

$$= \frac{-j-1}{-j+\bar j} = \frac{\bar j}{-i\sqrt3}$$

Conclusion $F(X) = -\frac{1}{X} + \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{j+3}{i\sqrt3}\frac{1}{X-j} + cc\right)$

$+\frac{1}{2}\left(\frac{\bar j}{i\sqrt3}\frac{1}{X+j} + cc\right)$ dans $\mathbb{C}(X)$

(4) $F(X) = \frac{1}{X^2(X^2+a^2)}$

Si $a=0$: $F(X) = \frac{1}{X^4}$

Si $a \neq 0$ $F(X) = \frac{\alpha}{X^2} + \frac{\beta}{X} + \frac{\gamma X+\delta}{X^2+a^2}$

On remarque que $F(-X) = F(X) = \frac{1}{X^2(X^2+a^2)}$

donc $\frac{\alpha}{X^2} - \frac{\beta}{X} + \frac{-\gamma X+\delta}{X^2+a^2} = \frac{\alpha}{X^2} + \frac{\beta}{X} + \frac{\gamma X+\delta}{X^2+a^2}$

d'où (par unicité de la décomposition en éléments simples) :

$-\beta = \beta$ donc $\beta = 0$

$-\gamma = \gamma$ donc $\gamma = 0$

Donc $F(x) = \dfrac{\alpha}{x^2} + \dfrac{\delta}{x^2+a^2}$

$$\alpha = \lim_{x\to 0} (x^2 F(x)) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}$$

et $\delta = \lim\limits_{x\to ia} [(x^2+a^2)F(x)] = \lim\limits_{x\to ia} \left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{a^2}$

<u>Conclusion</u> : $F(x) = \dfrac{1}{x^2(x^2+a^2)} = \dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2+a^2}\right)$

(5) $F(x) = \dfrac{x+2}{(x+1)^2(x-2)^2} = \dfrac{a}{(x+1)^2} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x-2)^2} + \dfrac{d}{x-2}$

où : $a = (x+1)^2 F(x)\Big|_{x=-1} = \dfrac{1}{9}$

$$b = \left(\frac{x+2}{(x-2)^2}\right)'\Bigg|_{x=-1} = \frac{5}{27}$$

$$c = (x-2)^2 F(x)\Big|_{x=2} = \frac{4}{9}$$

$d = \left(\dfrac{x+2}{(x+1)^2}\right)'\Bigg|_{x=2} = -\dfrac{5}{27}$ dans $\mathbb{R}(x)$ et $\mathbb{C}(x)$

(6) $F(X) = \dfrac{X^2}{(X^4+X^2+1)^2} = \dfrac{X^2}{(X^2+X+1)^2(X^2-X+1)^2}$

$= \dfrac{aX+b}{(X^2+X+1)^2} + \dfrac{cX+d}{(X^2+X+1)} + \dfrac{eX+f}{(X^2-X+1)^2} + \dfrac{gX+h}{X^2-X+1}$

Mais $F(X) = F(-X)$ ie :

$= \dfrac{-aX+b}{(X^2-X+1)^2} + \dfrac{-cX+d}{(X^2-X+1)} + \dfrac{-eX+f}{(X^2+X+1)^2} + \dfrac{-gX+h}{(X^2+X+1)}$

donc $a = -e$

$f = b$

$g = -c$

$h = d$

Conclusion : $\dfrac{aX+b}{(X^2+X+1)^2} + \dfrac{cX+d}{(X^2+X+1)} + \dfrac{-aX+b}{(X^2-X+1)^2} + \dfrac{-cX+d}{(X^2-X+1)}$

$aj+b = \lim_{X\to j} \left[(X^2+X+1)^2 F(X) \right] = \left.\dfrac{X^2}{(X^2-X+1)^2}\right|_{X=j} = \dfrac{j^2}{(-2j)^2} = \dfrac{1}{4}$

$a = 0 \quad , \quad b = 1/4$

$F(X) = \dfrac{X^2}{(X^4+X^2+1)^2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(X^2+X+1)^2} + \dfrac{cX+d}{X^2+X+1} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(X^2-X+1)^2} + \dfrac{-c+d}{X^2-X+1}$

$X = 0 \Rightarrow d = -1/4$

$X = 1 \Rightarrow c = -1/4$

$F(X) = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(X^2+X+1)^2} - \dfrac{1}{4}\dfrac{(X+1)}{X^2+X+1} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(X^2-X+1)^2} + \dfrac{1}{4}\dfrac{X-1}{X^2-X+1}$ dans $\mathbb{R}(X)$.

Dans $\mathbb{C}(X)$: $F(X) = \dfrac{X^2}{(X^4+X^2+1)^2} = \dfrac{\alpha}{(X-j)^2} + \dfrac{\beta}{X-j} + \dfrac{\gamma}{(X+j)^2} + \dfrac{\delta}{X+j} + cc$

où $\alpha = (X-j)^2 F(X) \Big|_{X=j} = \left.\dfrac{X^2}{(X-\bar{j})^2(X^2-X+1)^2}\right|_{X=j}$

$$= \frac{j^2}{(j-\bar{j})^2(j^2+j+1)^2} = \frac{j^2}{(i\sqrt{3})^2(-2j)^2} = -\frac{1}{12}$$

$$\beta = \left(\frac{X^2}{(X-\bar{j})^2(X^2-X+1)^2}\right)'\Bigg|_{X=j} = -\frac{1}{8} - \frac{i\sqrt{3}}{72}$$

$$\gamma = \left.\frac{X^2}{(X+\bar{j})^2(X^2+X+1)^2}\right|_{X=-j} = -\frac{1}{12} = \alpha$$

$$\delta = \left(\frac{X^2}{(X+\bar{j})^2(X^2+X+1)^2}\right)'\Bigg|_{X=-j} = \frac{7}{24} + \frac{13\sqrt{3}\,i}{72}$$

(7) $F(X) = \dfrac{X^7+2}{(X^2+X+1)^3}$ Le dénominateur est une puissance d'un irréductible de $\mathbb{R}[X]$, la méthode que nous allons utiliser s'applique à toute fonction de la forme $\dfrac{A(X)}{P(X)^n}$

$$X^7+2 = (X^2+X+1)(X^5-X^4+X^2-X) + X+2$$

d'où $\dfrac{X^7+2}{(X^2+X+1)^3} = \dfrac{X^5-X^4+X^2-X}{(X^2+X+1)^2} + \dfrac{X+2}{(X^2+X+1)^3}$

$$X^5-X^4+X^2-X = (X^2+X+1)(X^3-2X^2+X+2) - 4X-2$$

d'où $\dfrac{X^7+2}{(X^2+X+1)^3} = \dfrac{X^3-2X^2+X+2}{X^2+X+1} + \dfrac{X+2}{(X^2+X+1)^3} + \dfrac{-4X-2}{(X^2+X+1)^2}$

$$X^3-2X^2+X+2 = (X^2+X+1)(X-3) + 3X+5$$

$$= X-3 + \frac{3X+5}{X^2+X+1} - \frac{4X+2}{(X^2+X+1)^2} + \frac{X+2}{(X^2+X+1)^3}$$

Dans $\mathbb{C}(X)$:

$$F(X) = \frac{X^7+2}{(X^2+X+1)^3} = X-3 + \frac{\alpha}{(X-j)^3} + \frac{\beta}{(X-j)^2} + \frac{\gamma}{(X-j)} + \infty$$

où $\alpha = [(X-j)^3 F(X)]_{X\to j} = \left.\frac{X^7+2}{(X-\bar{j})^3}\right|_{X=j} = \frac{j+2}{(i\sqrt{3})^3}$

$$\beta = \frac{4j-7\bar{j}-6}{9}$$

$$\gamma = \frac{(14-21j)\,i\sqrt{3} - 2(4j-7\bar{j}-6)}{i\,9\sqrt{3}}$$

(8) $1^{\text{ère}}$ meth

$$F(X) = \frac{2X^4+1}{(X-1)^3(X^2+1)} = \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{dX+e}{X^2+1}$$

où $a = (X-1)^3 F(X)\big|_{X\to 1}$
$= 3/2$

$$b = \left.\left(\frac{2X^4+1}{X^2+1}\right)'\right|_{X=1} = \left.\frac{8X^3(X^2+1)-(2X^4+1)2X}{(X^2+1)^2}\right|_{X=1}$$

$= 5/2$

$$c = \frac{1}{2}\left.\left(\frac{2X^4+1}{X^2+1}\right)''\right|_{X=1} = 11/4$$

$d = -3/4 \qquad e = 3/4 \qquad \mathbb{R}[X]$

$2^{\text{ème}}$ meth Pour $Y = X-1 \Leftrightarrow X = 1+Y$

alors $F(X) = \frac{2(1+Y)^4+1}{Y^3(Y^2+2Y+2)} = \frac{2Y^4+8Y^3+12Y^2+8Y+3}{Y^3(2+2Y+Y^2)}$

$$3 + 8Y + 12Y^2 + 8Y^3 + 2Y^4 \quad \Big| \quad 2 + 2Y + Y^2$$

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{2}Y + \frac{11}{4}Y^2$$

$$-\frac{3}{4}Y^4$$

$$F(x) = \frac{3}{2}\frac{1}{Y^3} + \frac{5}{2}\frac{1}{Y^2} + \frac{11}{4}\frac{1}{x+1} - \frac{3}{4}\frac{x-1}{x^2+1}$$

(2) $$F(x) = \frac{x+3}{(x-1)^4(x+1)}$$

$$= \frac{a}{(x-1)^4} + \frac{b}{(x-1)^3} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{x-1} + \frac{e}{x+1}$$

où $a = (x+1)^4 F(x)\Big|_{x=1} = \frac{x+3}{x+1}\Big|_{x=1} = \left(1 + \frac{2}{x+1}\right)\Big|_{x=1} = 2$

$b = -1/2$

$c = 1/4$

$d = -1/8$

$e = 1/8$

$$F(x) = \frac{4+Y}{Y^4(2+Y)}$$

$$4 + Y \quad \Big| \quad 2 + Y$$

$$-4 - 2Y \quad \Big| \quad 2 - \frac{1}{2}Y + \frac{1}{4}Y^2 - \frac{1}{8}Y^3$$

$$-\frac{1}{4}Y^2$$

$$\frac{1}{8}Y^4$$

=

Exercice 23

(1) $$F(x) = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)(x-j)(x-\bar{j})}$$

$$= \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x-j} + \frac{\bar{d}}{x-\bar{j}}$$

où $$a = (x-1)^2 F(x)\Big|_{x\to 1} = \left.\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)}\right|_{x=1} = \frac{1}{6}$$

$$b = \left.\left(\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)}\right)'\right|_{x=1} = -\left.\frac{x^2+x+1+(x+1)(2x+1)}{[(x+1)(x^2+x+1)]^2}\right|_{x=1}$$

$$= -\frac{1}{4}$$

$$c = (x+1)F(x)\Big|_{x\to -1} = \left.\frac{1}{(x-1)(x^3-1)}\right|_{x=-1} = \frac{1}{4}$$

$$d = (x-j)F(x)\Big|_{x\to j} = \left.\frac{1}{(x^2-1)(x-1)(x-\bar{j})}\right|_{x=j} = \frac{1}{(j^2-1)(j-1)(j-\bar{j})}$$

Mais $(j^2-1)(j-1) = j^3+1-j-j^2 = 3$

et $j-\bar{j} = i\sqrt{3}$ donc $d = \dfrac{-i}{3\sqrt{3}}$

donc $$F(x) = \frac{1}{6}\,\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{x+1} - \frac{i}{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x-j} - \frac{1}{x-\bar{j}}\right)$$

(2) $$1 = (1-x^2)(1+x^2+x^4+\dots+x^{2m}) + x^{2m+2}$$

$$= (1-x^2)\sum_{2j\le N} x^{2j} + x^{N+1} R_N(x) \qquad \begin{cases} R_{2m}(x) = x \\ R_{2m+1}(x) = 1 \end{cases}$$

et $$1 = (1-x^3)\Big(\sum_{3k\le N} x^{3k}\Big) + x^{N+1} S_N(x)$$

(3) $$F(x) = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)} = \Big(\sum_{2j\le N} x^{2j} + x^{N+1}\frac{R_N(x)}{1-x^2}\Big)\Big(\sum_{3k\le N} x^{3k} + x^{N+1}\frac{S_N(x)}{1-x^3}\Big)$$

$$= \sum_{\substack{2j\leq N\\3k\leq N}} x^{2j+3k} + x^{N+1}\frac{(\sum_{2j\leq N} x^{2j})\, S_N(x)(1-x^2)}{(1-x^3)(1-x^2)}$$

$$+ x^{N+1}\frac{(\sum_{3k\leq N} x^{3k})\, R_N(x)(1-x^3)}{(1-x^3)(1-x^2)} + x^{N+1}\frac{x^{N+1} S_N(x) R_N(x)}{(1-x^3)(1-x^2)}$$

$$= \sum_{\substack{2j\leq N\\3k\leq N}} x^{2j+3} + x^{N+1}\frac{T_N(x)}{(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$= \sum_{2j+3k\leq N} x^{2j+3k} + x^{N+1}\frac{U_N(x)}{(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$= \sum_{m\leq N}\Big(\sum_{2j+3k=m} 1\Big) x^m + x^{N+1}\frac{U_N(x)}{(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$= \sum_{m\leq N} g(m)\, x^m + x^{N+1}\frac{U_N(x)}{(1-x^2)(1-x^3)}$$ où $g(m) = \sum_{2j+3k=m} 1 =$ le

nombre de façon d'écrire $m = 2j+3k$ avec $j, k \in \mathbb{N}$

La question est : calculer $g(m)$.

Taylor : $\dfrac{F^{(m)}(0)}{m!} = g(m)$ car $\left(x^{N+1}\dfrac{U_N(x)}{(1-x^2)(1-x^3)}\right)^{(m)}\Big|_{x=0} = 0$

puisque $N+1 > m$

Pour expliciter $F^{(m)}(0)$ on utilise la décomposition en éléments simples de la question (1), qui donne :

$$F^{(m)}(x) = \frac{1}{6}\frac{d^m}{dx^m}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{d^m}{dx^m}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\frac{d^m}{dx^m}\frac{1}{x+1}$$

$$- \frac{i}{3\sqrt{3}}\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{1}{x-j} - \frac{1}{x-\bar{j}}\right)$$

Mais $\dfrac{d^m}{dx^m}\dfrac{1}{x-a} = \dfrac{(-1)^m m!}{(x-a)^{m+1}}$ et $\dfrac{d^m}{dx^m}\dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{d^m}{dx^m}\left(-\dfrac{1}{x-1}\right)'$

$$= -\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}$$

Ainsi : $\dfrac{F^{(n)}(x)}{n!} = \dfrac{1}{6}\dfrac{(-1)^{n+2}(n+1)}{(x-1)^{n+2}} - \dfrac{1}{4}\dfrac{(-1)^n}{(x-1)^{n+1}} + \dfrac{1}{4}\dfrac{(-1)^n}{(x+1)^{n+1}}$

$$-\frac{i}{3\sqrt{3}}\left(\frac{(-1)^n}{(x-j)^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{(x-\bar{j})^{n+1}}\right)$$

et donc $\delta(n) = \dfrac{F^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{1}{6}(n+1) + \dfrac{1}{4}(1+(-1)^n) + \dfrac{i}{3\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{j^{n+1}} - \dfrac{1}{\bar{j}^{n+1}}\right)$

or $\dfrac{1}{j^{n+1}} - \dfrac{1}{\bar{j}^{n+1}} = 2i \; I_m \dfrac{1}{j^{n+1}} = 2i \; I_m \left(e^{-\frac{2\pi i}{3}(n+1)}\right) = -2i \sin\left(\frac{2\pi}{3}(n+1)\right)$

d'où $\dfrac{i}{3\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{j^{n+1}} - \dfrac{1}{\bar{j}^{n+1}}\right) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}(n+1)\right)$

c'est donc :

$$\delta(n) = \frac{1}{6}(n+1) + \underbrace{\frac{1}{4}(1+(-1)^n)}_{\text{mod } 2} + \underbrace{\frac{2}{3\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2\pi}{3}(n+1)\right)}_{\text{mod } 3}$$

On va regarder mod 6, $n = 6m + r$, $0 \leq r \leq 5$:

- $\delta(6m) = \dfrac{1}{6}(6m+1) + \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}(6m+1)\right)$

$$= m + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = m+1$$

- $\delta(6m+1) = \dfrac{1}{6}(6m+2) + 0 + 2/3\sqrt{3} \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}(6m+2)\right) = m$

- $\delta(6m+2) = m+1$ • $\delta(6m+4) = m+1$

- $\delta(6m+3) = m+1$ • $\delta(6m+5) = m+1$

Exercice 24

$$F(X) = \frac{1}{(X-a)^m (X-b)^m} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j(a,b)}{(X-a)^j} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j(b,a)}{(X-b)^j}$$

où $\lambda_j(a,b) = \frac{1}{(m-j)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-j} \left((X-a)^m F(X)\right)\Big|_{x \to a}$

$$= \frac{1}{(m-j)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-j}\left(\frac{1}{(x-b)^m}\right)\Big|_{x=a}$$

Rappel: $\boxed{\left(\frac{d}{dx}\right)^k \frac{1}{x-b} = \frac{(-1)^k k!}{(x-b)^{k+1}}}$

donc $\frac{1}{(x-b)^m} = \frac{1}{(-1)^{m-1}(m-1)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1} \frac{1}{x-b}$

et donc $\lambda_j(a,b) = \frac{1}{(-1)^{m-1}(m-1)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{2m-j-1} \frac{1}{x-b}\Big|_{x=a}$

$$= \frac{(-1)^{2m-j-1}(2m-j-1)!}{(-1)^{m-1}(m-1)!(m-j)!} \frac{1}{(a-b)^{2m-j}}$$

$$= (-1)^{m-j}\binom{2m-j-1}{m-1}\frac{1}{(a-b)^{2m-j}}$$

IV - Espaces vectoriels, dépendance linéaire

Exercice 25

$E = \mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}\{1, X, X^2\} \Rightarrow \dim E = 3$

Remarque Plus généralement : $\mathbb{R}[X]$

Donc pour montrer que $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de E, il suffit de vérifier qu'elle est libre ou de vérifier qu'elle est génératrice. (on n'a pas besoin de faire les deux puisque $\text{card}\{P_1, P_2, P_3\} = 3$)

1ère méthode

Vérifions que $\{P_1, P_2, P_3\}$ est libre :

$$aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow a(X+1) + b(X-1) + c(X^2-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow cX^2 + (a+b)X + (a-b-c) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a+b = 0 \\ a-b-c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc (P_1, P_2, P_3) est libre et donc c'est une base de E.

2ème méthode

Vérifions que $\{P_1, P_2, P_3\}$ est génératrice. Il suffit de vérifier que les éléments de la base canonique $1, X, X^2$ sont engendrés par P_1, P_2, P_3.

$$\begin{cases} P_1 = X+1 \\ P_2 = X-1 \\ P_3 = X^2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{1}{2}(P_1 - P_2) \\ X = 1/2\,(P_1+P_2) \\ X^2 = 1+P_3 = \frac{1}{2}(P_1-P_2)+P_3. \end{cases}$$

Donc (P_1, P_2, P_3) est génératrice de $\mathcal{C}$ et donc c'est une base.

<u>$3^{ème}$ méthode</u>

Montrons autrement que $\{P_1, P_2, P_3\}$ est génératrice : en utilisant les Vect :

$$\begin{aligned}
\text{Vect}\{P_1, P_2, P_3\} &= \text{Vect}\{X+1, X-1, X^2-1\} \\
&= \text{Vect}\{X+1-(X-1), X-1, X^2-1\} \\
&= \text{Vect}\{\cancel{2}, X-1, X^2-1\} \\
&= \text{Vect}\{1, X\cancel{-1+1}, X^2-1\} \\
&= \text{Vect}\{1, X, X^2\cancel{-1+1}\} \\
&= \text{Vect}\{1, X, X^2\} \\
&= \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

<u>À retenir</u> Dans un Vect, on peut ajouter à l'un des vecteurs présent une combinaison linéaire des autres vecteurs (présent dans le Vect) : cela ne modifie pas l'espace défini par le Vect.

Écrivons $X^2 - 5X + 4$ dans la base (P_1, P_2, P_3).

<u>Si</u> on a utilisé la deuxième méthode, c'est immédiat : $X^2 - 5X + 4 = \frac{1}{2}(P_1 - P_2) + P_3 - \frac{5}{2}(P_1 + P_2)$
$+2(P_1 - P_2)$

$= -5P_2 + P_3$

Les coordonnées de X^2-5X+4 dans la base (P_1, P_2, P_3) sont $(0,-5,1)$ (ordre !)

Si on a utilisé une autre méthode que la 2ème, eh bien on cherche $a,b,c \in \mathbb{R}$ tq X^2-5X+4

$$= aP_1 + bP_2 + cP_3$$
$$= a(X+1) + b(X-1) + c(X^2-1)$$
$$= cX^2 + (a+b)X + (a-b-c)$$

on identifie $c=1$, $a+b=5$, $a-b-c=4$

donc : $c=1$, $a+b=5$, $a-b=5$

et donc : $c=1$, $a=0$, $b=-5$

et re donc : $X^2-5X+4 = -5P_2+P_3$

et on retrouve le résultat précédent.

Exercice 28

(1) • E contient $0=(0)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1}$$

si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}$

• E est stable par combinaison linéaire. En effet si $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ et $y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$

, alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1} & \times\lambda \\ y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1} & \times\mu \end{cases}$

et donc, $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$, en multipliant la relation pour (x_n) par λ et par (y_n) par μ, et en ajoutant, on obtient : $\lambda x_{n+1} + \mu y_{n+1} = 4(\lambda x_n + \mu y_n) - (\lambda x_{n-1} + \mu y_{n-1})$

et donc $\lambda x + \mu y = (\lambda x_n + \mu y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

(2) Si λ et μ existent alors en particulier on a :

$$\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{cases} \quad \text{et donc } \lambda = \frac{\begin{vmatrix} u_0 & y_0 \\ u_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}} = \frac{u_0 y_1 - u_1 y_0}{x_0 y_1 - x_1 y_0}$$

et $\mu = \dfrac{\begin{vmatrix} x_0 & u_0 \\ x_1 & u_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}} = \dfrac{x_0 u_1 - x_1 u_0}{x_0 y_1 - x_1 y_0}$ à condition bien sûr que $\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \neq 0$

Vérifions que $\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \neq 0$

Si $\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0$, alors $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

ou $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

En effet : $\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0 \iff x_0 y_1 = x_1 y_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{si } y_0 \neq 0, \ x_1 = \dfrac{y_1}{y_0} x_0 \text{ et donc } \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \dfrac{x_0}{y_0} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ \text{si } y_1 \neq 0, \ x_0 = \dfrac{y_0}{y_1} x_1 \text{ et donc } \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \dfrac{x_1}{y_1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ \text{si } y_0 = y_1 = 0 : \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

De même si $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$, ie si $\begin{cases} x_0 = \alpha y_0 \\ x_1 = \alpha y_1 \end{cases}$ alors

en vertu ...

* Cela prouve que si $\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0$, alors $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Mais si $y_0 = y_1 = 0$, alors en vertu de la relation de récurrence $y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) on aura $y_n = 0$, $\forall n$ et donc $y = 0$ et donc $\{x, y\}$ n'est pas possible : contraire aux hypothèses donc exclu

... de la relation de récurrence, on aura $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \alpha y_n$, ie $x = \alpha y$ et cela contredire l'hypothèse que $\{x, y\}$ est libre.
Donc $\{x, y\}$ libre $\Rightarrow \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \neq 0$

Conclusion

Si λ et μ existent, alors (sous les conditions de l'énoncé) $\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \neq 0$ et λ, μ sont données par les expressions données plus haut (Cramer)

(3) $(R^n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$, $R^{n+1} = 4R^n - R^{n-1}$

$$\begin{cases} R = 0 \\ R^2 = 4R - 1 \end{cases}$$

$R^2 - 4R + 1 = 0$

$\Leftrightarrow R_I = \dfrac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

Vu le (2), $((R_-^n), (R_+^n))$ sera une base de E si et seulement si elles sont lin. indép

ie ssi $\begin{vmatrix} R_-^0 & R_+^0 \\ R_-^1 & R_+^1 \end{vmatrix} \neq 0$

ie ssi $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ R_- & R_+ \end{vmatrix} \neq 0$

i.e ssi $R_+ - R_- \neq 0$. c'est le cas

Soit $(u_n) \in E$ / $u_0 = a$, $u_1 = b$. D'après le (2),
$u_n = \lambda R_-^n + \mu R_+^n$ où

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & R_+ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ R_- & R_+ \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ R_- & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ R_- & R_+ \end{vmatrix}}$$

ie $\lambda = \dfrac{(2+\sqrt{3})a - b}{2\sqrt{3}}$ et $\mu = \dfrac{-(2-\sqrt{3})a + b}{2\sqrt{3}}$

et donc $u_n = \dfrac{(2+\sqrt{3})a + b}{2\sqrt{3}} (2-\sqrt{3})^n + \dfrac{-(2-\sqrt{3})a + b}{2\sqrt{3}} (2+\sqrt{3})^n$

Exercice 27

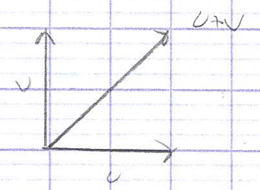
"On a l'âge de ses algèbres"

$F = \mathrm{Vect}\{(2,-3,1),(2,-2,1)\}$

$\dim F = \begin{cases} 2 & \text{si } \{(2,-3,1),(2,-2,1)\} \text{ est libre} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Il est clair que $(2,-3,1)$ et $(2,-2,1)$ ne sont pas colinéaires donc $\{(2,-3,1),(2,-2,1)\}$ est libre.
Et donc $\dim F = 2$.
Deux vecteurs sont linéairement indépendants car $\lambda u + \mu v = 0$ avec $\lambda \neq 0$ (par exemple) $\Rightarrow u = -\frac{\mu}{\lambda} v$ $\Rightarrow u, v$ colinéaire. Mais trois vecteurs (ou davantage) non colinéaires ne sont pas nécessairement lin. indep

<u>Exemple :</u>



ils ne sont pas colinéaires mais liés puisque $(u+v)-u-v = 0$ relation linéaire non triviale

Deux vecteurs <u>non colinéaires</u> $\Rightarrow$ indépendants
Trois vecteurs <u>non coplanaire</u> $\Rightarrow$ indépendants

$(2,-3,1)$, $(2,-2,1)$ ne sont pas colinéaires et donc F est libre et donc c'est une base de F et donc $\underline{\underline{\dim F = 2}}$

$(x,y,z) \in F = \mathrm{Vect}\{(2,-3,1),(2,-2,1)\}$

$\Leftrightarrow \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \,/\, (x,y,z) = \lambda(2,-3,1) + \mu(2,-2,+1)$

$\Leftrightarrow \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = 2\lambda + 2\mu \\ y = -3\lambda - 2\mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -\lambda - x \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ / \ \begin{cases} x = 2z \\ \lambda = -x-y \\ \mu = x+y+z \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 2z$

Donc $(x,y,z) \in F \Leftrightarrow x - 2z = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \dim F = 0 \\ F \text{ d'équation } x-2z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow F \text{ est le plan de } \mathbb{R}^3 \text{ d'équation } x-2y=0$$

Exercice 28

$a(1,1,0,0,0) + b(1,1,0,1,0) + c(1,1,2,1,1) = 0 \in \mathbb{R}^5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a+b+c=0 \\ 2c=0 \\ b+c=0 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

donc $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est libre.

D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ en une base de $\mathbb{R}^5$ en y adjoignant des vecteurs pris dans une partie génératrice donnée de $\mathbb{R}^5$, par exemple la base canonique. $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$

$\text{Vect}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} = \text{Vect}\{e_1+e_2, \cancel{e_1+e_2}+e_4, \cancel{e_1+e_2}+2e_3+e_4+e_5\}$

$= \text{Vect}\{e_1+e_2, e_4, 2e_3+\cancel{e_4}+e_5\}$

$= \text{Vect}\{e_1+e_2, e_4, 2e_3+e_5\}$ adjoignons e_1

$= \text{Vect}\{e_1+e_2, e_4, 2e_3+e_5, e_1\}$

$= \text{Vect}\{e_2, e_4, 2e_3+e_5, e_1\}$ e_3

$= \text{Vect}\{e_2, e_4, e_5, e_1, e_3\}$

$= \text{Vect}\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} = \mathbb{R}^5$ Et donc $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, e_1, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^5$.

Exercice 29

$1^{ère}$ méthode $0 = (0,0,0,0) \in F_1$: clair !
car $(0+0+0+0=0)$

Et F_1 est stable par combinaison linéaire car

si $\begin{cases} (x,y,z,t) \in F_1 \\ (x',y',z',t') \in F_1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x+y+z+t=0 & (\times\lambda) & (1) \\ x'+y'+z'+t'=0 & (\times\mu) & (2) \end{cases}$

et donc $\lambda(x+y+z+t) + \mu(x'+y'+z'+t') = 0$ (1)+(2)

ie $(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') + (\lambda t + \mu t') = 0$

ie $(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z', \lambda t + \mu t') \in F_1$

$2^{ème}$ méthode Il est claire que $F_1 = \mathrm{Ker}\,\varphi$ où $\varphi(x,y,z,t) = x+y+z+t$ (évident linéaire), donc F_1 est un sev de $\mathbb{R}^4$

De même pour F_2 (ssi est stable par comb linéaire, ou $F_2 = \mathrm{Ker}\,\psi$ avec $\psi(x,y,z,t) = x+y-z-t$ évidemment linéaire).

$(x,y,z,t) \in F_1 \Leftrightarrow x+y+z+t=0 \Leftrightarrow t=-x-y-z$

$\Leftrightarrow (x,y,z,t) = (x,y,z,-x-y-z)$

$\Rightarrow (x,y,z,t) \in \mathrm{Vect}\{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}$ $= x(1,0,0,-1)+y(0,1,0,-1)+z(0,0,1,-1)$

et réciproquement:

$(x,y,z,t) \in \mathrm{Vect}\{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}$

alors $\exists\, a,b,c \in \mathbb{R} / (x,y,z,t) = a(1,0,0,-1)+b(0,1,0,-1)+c(0,0,1,-1))$

$= (a,b,c,-a-b-c)$ ie / $\begin{cases} a = x \\ b = y \\ c = z \\ t = -x-y-z \end{cases}$

ie $t=-x-y-z$ ie $(x,y,z,t) \in F_1$

Donc $F_1 = \mathrm{Vect}\{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}$

Vérifions que F_1 est libre

Clair $\Rightarrow a=b=c=0$

Exercice 29 (suite et fin)

$(x, y, z, t) \in F_2 \Leftrightarrow x + y = z + t \Leftrightarrow t = x + y - z$

$\Leftrightarrow (x, y, z, t) = (x, y, z, x+y-z)$

$= x(1,0,0,1) + y(0,1,0,1) + z(0,0,1,-1)$

$\Leftrightarrow (x, y, z, t) \in \text{Vect}\{(1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,-1)\}$

libre car : $x(1,0,0,1) + y(0,1,0,1) + z(0,0,\cancel{1},\cancel{-1}) = (0,0,0,0)$

$\Leftrightarrow (x, y, z, x+y-z) = (0,0,0,0)$

$\Leftrightarrow x = y = z = 0$

Donc $((1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,-1))$ est une base de F_2
et donc $\dim F_2 = 3$

(2) $F_1 + F_2 = \text{Vect}\{(1,0,0,-1), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1), (1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,-1)\}$

$= \text{Vect}\{e_1 - e_4, e_2 - e_4, e_3 - e_4, e_1 + e_4, e_2 + e_4\}$

$= \text{Vect}\{e_1 - e_4, e_1 + e_4, e_2 - e_4, e_2 + e_4, e_3 - e_4\}$

$= \text{Vect}\{e_1 - e_4, e_1 + e_4 + e_1 - e_4, e_2 - e_4, e_2 + e_4, e_2 - e_4, e_3 - e_4\}$

$= \text{Vect}\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \Rightarrow$ libre (extrait base can)

et donc $\dim(F_1 + F_2) = 4$

Remarque : On en déduit que $\dim(F_1 \cap F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cup F_2) = 2.$

Exercice 30

(1) • $0 \in C$: la suite nulle converge $\to 0$

• C est stable par comb. lin.

car $\begin{cases} x_n \to l \\ x'_n \to l' \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\Rightarrow \lambda x_n + \mu x'_n \to \lambda l + \mu l'$
$\Rightarrow \lambda (x_n)_{n \in \mathbb{N}} + \mu (x'_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C$

Donc E est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

(2) $C = \{$ suites cte $\}$ est un sev de E ($=$ $\{$ suites convergentes $\}$)

- $C \subset E$
- $C \ni 0$
- $\begin{cases} (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C : x_n = a \ \forall n \\ (x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C : x'_n = b \ \forall n \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda x_n + \mu x'_n = \lambda a + \mu b = \text{cte}$

$\Rightarrow \lambda (x_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu (x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C \ \forall n$

Et N est un sev de E car :

- $N \subset E$ ($x_N \to 0 \Rightarrow (x_n)$ converge !)
- $N \ni 0$ (la suite nulle converge vers 0)
- $\begin{cases} x_N \to 0 \\ x'_N \to 0 \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \lambda x_n + \mu x'_n \to 0 \quad \lambda (x_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu (x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in N$

Dans C et N sont des sev de E. Sont-ils supplémentaires (dans E) ?

<u>Rappel</u> C, N supplémentaires dans E $\Leftrightarrow \begin{cases} C \cap N = \{0\} \\ C + N = E \end{cases}$

- A t on $C \cap N = \{0\}$, oui car :

soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C \cap N$:

$\begin{cases} (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow x_n = a \ \forall n \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in N \Rightarrow x_n \to 0 \end{cases}$

$\Rightarrow a = 0$ et donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$

- A t on $E = C + N$

Autrement dit, est ce que toute suite convergente est la somme d'une suite cte et d'une suite qui CV vers 0 ?

· Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E : x_n \to \ell$

$\forall n, \ x_n = \ell + (x_n - \ell) \in C+N$

Donc $\begin{cases} C \cap N = \{0\} \\ C+N = E \end{cases}$ ce que l'on peut résumer par : $E = C \oplus N$

Exercice 31

(1) $E_1 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : u_{10} = 0\}$

$= \operatorname{Ker} \varphi$ où $\varphi(u_0, u_1, u_2, \dots) = u_{10}$

(clairement linéaire car $\varphi(\lambda(u_n) + \mu(v_n)) =$

$\varphi(\lambda u_0 + \mu v_0, \dots, \lambda u_{10} + \mu v_{10}) = \lambda u_{10} + \mu v_{10}$

$= \lambda\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) + \mu\varphi((v_n)_{n\in\mathbb{N}})$)

$E_2 = \{(2^n u_0)_{n\in\mathbb{N}} : u_0 \in \mathbb{R}\}$

$= \mathbb{R}(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$

$=$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dirigée par le vecteur $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$

$=$ le sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ engendré par le vecteur $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$

$= \operatorname{Vect}\{(2^n)_{n\in\mathbb{N}}\}$

et donc $\dim E_2 = 1$ (E_2 est engendrée par le vecteur $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ c'est une droite dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

· $E_3 \ni 0$ ($(0)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné !)

· $\left.\begin{array}{l} (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_3 : |x_n| \leqslant A \ \forall n \\ (x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_3 : |x'_n| \leqslant B \ \forall n \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda x_n + \mu x'_n \Rightarrow \lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \leqslant |\lambda| A + |\mu| B$

Donc E_3 est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

(2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

A t on $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ = une suite de E_1 + une suite de E_2 ?

L'énoncé dit de considérer $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déf par $v_n = 2^{n-10} u_{10}$ $= 2^n(2^{-10}u_{10})$.

On voit que $(v_n) \in E_2$

On peut écrire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $w_n = u_n - v_n \ \forall n$

donc $w_{10} = u_{10} - 2^{10-10} u_{10} = 0$ donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_1$

Et donc oui : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = E_1 + E_2$

E_1 et E_2 sont supplémentaires si, de plus, $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_1 \cap E_2$:

$(u_n) \in E_2 \Rightarrow u_n = 2^n u_0 \quad \forall n$

$(u_n) \in E_1 \Rightarrow u_{10} = 0 \Rightarrow 2^{10} u_{10} = 0$

$\Rightarrow u_0 = 0 \Rightarrow (2^n u_0 = 0 \ \forall n)$

$\Rightarrow (u_n = 0 \ \forall n) \Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$

Donc ok! $E_1 \cap E_2$

Ccl : E_1 et E_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = E_1 \oplus E_2$$

(3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_0, u_1, \ldots, u_9, u_{10}, u_{11}, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_0, u_1, \ldots, u_9, 0_{10}, u_{11}, \ldots) \in E_1$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 0, 0, \ldots, 0, u_{10}, 0, \ldots) \in E_3$

Donc $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = E_1 + E_3$

E_1 et E_3 sont-ils supplémentaires ? I.e a-t-on $E_1 \cap E_3 = \{0\}$? Non car par exemple $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 0, \ldots) \in E_1 \cap E_3$ et est $\neq 0$ Donc E_1 et E_3 ne sont pas supplémentaires.

(4) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = E_2 + E_3$ Ie est ce que toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de la forme

Application linéaires

Exercice 1

(1) Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille liée de vecteurs de E : $\sum_i \lambda_i x_i = 0$ avec λ_i non tous nuls.

Application de f (linéaire) :
$\sum_i \lambda_i f(x_i) = f(0) = 0$ toujours vrai pour f linéaire et donc $(f(x_i))_{i\in I}$ est liée. Car les λ_i ne sont pas tous nuls, par tous nuls, par hyp)

(2) • Supposons que l'image par f de toute famille libre est libre.
Or tout x non nul est une famille libre (à un élément) car $\left.\begin{array}{l}\lambda x = 0 \\ x \neq 0\end{array}\right| \Rightarrow \lambda = 0$

Donc (par hyp) $f(x)$ est libre, i.e non nul (le vecteur 0 est lié : $1.0 = 0$)
Donc $x \neq 0 \Rightarrow x \notin \operatorname{Ker} f$. Cela signifie que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ et donc f est injective

• Réciproquement : supposons f injective. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille libre de vecteurs de E. On veut montrer que $(f(x_i))$ est libre.
Soit une relation linéaire :
$\sum_i \lambda_i f(x_i) = 0$ ie $f(\sum_i \lambda_i x_i) = 0$ ie puisque f est injective.
$\sum_i \lambda_i x_i = 0$ donc $\lambda_i = 0$ $\forall i$
(car $(x_i)_{i\in I}$ est libre)

(3) $(x_i)_{i\in I}$ génératrice de $E \Rightarrow (f(x_i))_{i\in I}$ génératrice de $\operatorname{Im} f$

La conjonction de (2) et (3) redonne ce résultat du cours : f transforme toute base en une base ssi f est bijective (i.e est un isomorphisme)

$\Rightarrow (f(x_i))_{i\in I}$ génératrice de F ssi $F = \operatorname{Im} f$ i.e ssi f est surjective

Exercice 33

$(x, y) \in \operatorname{Ker} g_1 \Leftrightarrow (x+y, x-y) = (0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (x,y)=(0,0)$

donc $\operatorname{Ker} g_1 = \{(0,0)\}$

$g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

est injective, donc bijective, donc $\operatorname{Im} g_1 = \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2 = \operatorname{Vect}\{(1,0),(0,1)\} \Rightarrow \operatorname{Im} g_1 = \operatorname{Vect}\{g_1(1,0), g_1(0,1)\}$

$= \operatorname{Vect}\{(1,1),(1,-1)\}$

$= \operatorname{Vect}\{e_1+e_2, e_1-e_2\}$

$= \operatorname{Vect}\{e_1+e_2+e_1-e_2, e_1-e_2\}$

$= \operatorname{Vect}\{e_1, e_1-e_2\}$

$= \operatorname{Vect}\{e_1, e_2\} = \mathbb{R}^2$

où $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$)

$(x,y) \in \operatorname{Ker} g_2 \Leftrightarrow x-y=0$

$\Leftrightarrow x=y$

$\Leftrightarrow (x,y)=(x,x)=x(1,1)$

Donc $\operatorname{Ker} g_2 = \operatorname{Vect}\{(1,1)\} = \mathbb{R}(1,1)$

$\operatorname{Im} g_2 = \operatorname{Vect}\{g_2(1,0), g_2(0,1)\} = \operatorname{Vect}\{1,-1\} = \operatorname{Vect}\{1\} = \mathbb{R}$

g_2 est surjective (mais pas injective)

<u>Rem</u>: $\dim \operatorname{Im} g_2 = 2 - \dim \operatorname{Ker} g_2$ (th du Rang)

$= 2-1 = 1 = \dim \mathbb{R}$ espace d'arrivée de g_2

(on retourne ainsi que $\operatorname{Im} g_2 = \mathbb{R}$) et que g_2 est surjective.

$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} g_3 \Leftrightarrow (x-y, y-z) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x,y,z) = (x,x,x) = x(1,1,1)$

Donc $\operatorname{Ker} g_3 = \mathbb{R}(1,1,1) = \operatorname{Vect}\{(1,1,1)\}$ la droite vectorielle (i.e passant par $(0,0,0)$) de $\mathbb{R}^3$ dirigée par le vecteur $(1,1,1)$.

$\operatorname{Im} g_3 = \operatorname{Vect}\{g_3(1,0,0), g_3(0,1,0), g_3(0,0,1)\} = \operatorname{Vect}$
$\{(1,0),(-1,1),(0,-1)\} = \operatorname{Vect}\{(1,0),(0,1)\} = \mathbb{R}^2$
donc g_3 est surjective.

<u>Rem</u> $\dim \operatorname{Im} g_3 = 3 - \dim \operatorname{Ker} g_3$
$= 2 = \dim \mathbb{R}^2$ et on retrouve que g_3 est surjective.

$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} g_4 \Leftrightarrow (x, y-z, 2x-y+z) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x,y,z) = (0,y,y) = y(0,1,1)$

Donc $\operatorname{Ker} g_4 = \mathbb{R}(0,1,1)$

$\operatorname{Im} g_4 = \operatorname{Vect}\{g_4(1,0,0), g_4(0,1,0), g_4(0,0,1)\}$
$= \operatorname{Vect}\{(1,0,2), (0,1,-1), (0,-1,1)\}$

<u>Rem</u>

$\dim \operatorname{Im} g_4 = 3 - \dim \operatorname{Ker} g_1 = 2$

$(x,y) \in \operatorname{Ker} g_5 \Leftrightarrow (x,x,-x) = (0,0,0) \Leftrightarrow x = 0$
$\Leftrightarrow (x,y) = (0,y) = y(0,1)$

Donc $\operatorname{Ker} g_5 = \mathbb{R}(0,1)$

$\operatorname{Im} g_5 = \{(x,x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$
$= \{x(1,1,-1) : x \in \mathbb{R}\}$
$= \mathbb{R}(1,1,1)$

<u>Rem</u> $\dim \operatorname{Ker} g_5 + \dim \operatorname{Im} g_5 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$

$(z_1, z_2) \in \operatorname{Ker} g_6 \Leftrightarrow (iz_2, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_2 = 0 \Leftrightarrow (z_1,z_2) = (z_1, 0) = z_1(1,0)$

Donc $\operatorname{Ker} g_6 = \mathbb{C}(1,0)$ (donc $\operatorname{Ker} g_6 = 1$)

$\operatorname{Im} g_6 = \operatorname{Vect}\{g_6(1,0), g_6(0,1)\} = \operatorname{Vect}\{(0,0), (i,1)\}$
$= \mathbb{C}(i,1)$.

<u>Rem</u> $\dim \operatorname{Ker} g_6 + \dim \operatorname{Im} g_6 = 2 = \dim \mathbb{C}^2$

$P \in \operatorname{Ker} g_7 \Leftrightarrow P' - P = 0 \Rightarrow P = 0$
car si $P \neq 0$ $\deg P' < \deg P$
et donc $P' \neq P$

Donc $\operatorname{Ker} g_2 = \{0\}$ ie g_7 est injective.

Comme $g_7 : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$ est de dim finie on en deduit que g_7 est surjective ie $\operatorname{Im} g_7 = \mathbb{R}_2[X]$

$P \in \mathrm{Ker}\, g_8 \Leftrightarrow P'' = 0$

$\Leftrightarrow P \in \mathrm{Vect}\{1, x\}$

$\Leftrightarrow P \in \mathbb{R}_1[X]$

$\mathrm{Im}\, g_8 = \mathrm{Vect}\{g_8(1), g_8(X), g_8(X^2), g_8(X^3)\}$

$= \mathrm{Vect}\{2, 6X\}$

$= \mathrm{Vect}\{1, X\} = \mathbb{R}_1[X]$

On a $\dim \mathrm{Ker}\, g_8 + \dim \mathrm{Im}\, g_8 = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$

$P \in \mathrm{Ker}\, g_9 \Leftrightarrow (P(1), P'(1)) = (0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} P(1) = 0 \\ P'(1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ 1 est racine au moins double de P

$\Leftrightarrow (X-1)^2 \mid P(X)$

Mais $\begin{cases} P \in \mathbb{R}_2[X] \\ (X-1)^2 \mid P(X) \end{cases} \Leftrightarrow P(X) = c(X-1)^2$ où $c \in \mathbb{R}$

et donc $\mathrm{Ker}\, g_9 = \mathbb{R}(X-1)^2$ c'est la droite de $\mathbb{R}_2[X]$ engendrée par le vecteur $(X-1)^2$

$\mathrm{Im}\, g_9 = \mathrm{Vect}\{g_9(1), g_9(X), g_9(X^2)\}$

$= \mathrm{Vect}\{(1,0), (1,1), (1,2)\}$

$= \mathrm{Vect}\{(1,0), (1,0)+(0,1), (1,0)+2(0,1)\}$

$= \mathrm{Vect}\{(1,0), (0,1)\} = \mathbb{R}^2$

On pouvait aussi dire directement : $\dim \mathrm{Im}\, g_9 = \dim \mathbb{R}_2[X] - \dim \mathrm{Ker}\, g_9 = 2$

et $\mathrm{Im}\, g_9$ est un sev de $\mathbb{R}^2$ donc c'est $\mathbb{R}^2$

Exercice 34

(1)
$$\begin{array}{ccccccc} e_1 & \xrightarrow{f} & e_2 & \xrightarrow{f} & e_3 & \xrightarrow{f} & e_1 \\ e_2 & \to & e_3 & \to & e_1 & \to & e_2 \\ e_3 & \to & e_1 & \to & e_2 & \to & e_3 \end{array}$$
donc $f^3 = id_{\mathbb{R}^3} = id_E$

(2) $F = \{u \in E : f(u) - \underset{}{\overset{id_E(u)}{\overset{\shortparallel}{u}}} = 0\} = \mathrm{Ker}(f - id_E)$
donc F est un sev de E.

$u = xe_1 + ye_2 + ze_3 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$f(u) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3)$

$= xe_2 + ye_3 + ze_1$

$= (z, x, y)$

$(x, y, z) \in F \Leftrightarrow (x, y, z) = (z, x, y)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = x \\ z = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (x, x, x) = x(1,1,1)$

Donc $F = \mathbb{R}(1,1,1)$ et $\dim F = 1$

Exercice 35

Trouvons d'abord une CN

Si $V = \mathrm{Ker}\, f$ et $W = \mathrm{Im}\, f$
alors $\dim V + \dim W = \dim E$

Cette condition est aussi suffisante. On suppose donc que V est un sev de E, W est un sev de F et que $\dim V + \dim W = \dim E$. Peut on construire une appli $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $\mathrm{Ker}\, f$ V et $\mathrm{Im}\, f = W$? Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base de V. On la complète en une base de E. $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ ($n = \dim E$). Définissons $f \in \mathcal{L}(E, F)$

par : $f(e_1)=0, \dots, f(e_k)=0, \quad f(e_{k+1})=w_1, \dots,$ 29
$f(e_n)=w_{n-k}$ où $(w_1, \dots, w_{n-k})$ est une base
de W (N.B $\dim W = n-k$ par hyp)

Alors : $V \subset \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{f(e_{k+1}), \dots, f(e_n)\}$

Le théorème du rang donne : $= W$

$\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \dim \operatorname{Im} f$
$= n - \dim W = n-(n-k)$
$= k = \dim V$

or $V \subset \operatorname{Ker} f$ donc $V = \operatorname{Ker} f$

Exercice 36

$e_1 \to 0$
$e_2 \to e_1 \to 0 \to 0$
$e_3 \to e_1+e_2 \to e_1 \to 0$
$e_4 \to 2e_1-e_2 \to -e_1 \to 0$
$e_5 \to e_1-e_2+e_3+e_4 \to 2e_1 \to 0$

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{0, e_1, e_1+e_2, 2e_1-e_2\}$$
$$= \operatorname{Vect}\{e_1, e_2, e_3+e_4\}$$
$$\operatorname{Rg} f = \dim \operatorname{Im} f = 3$$

$$\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Vect}\{e_1\} \Rightarrow \operatorname{Rg} f^2 = 1$$

On en déduit (par le théorème du rang)
$\dim \operatorname{Ker} f = 2$
$\dim \operatorname{Ker} f^2 = 4$

(3) $f^2(e_3) = e_1 \neq 0 \Rightarrow e_3 \notin \operatorname{Ker}(f^2)$ car $\lambda e_3 \in \operatorname{Ker} f^2$
$\Rightarrow \lambda^{-1}(\lambda e_3) \in \operatorname{Ker}(f^2))$

Donc $\mathbb{R}e_3 \cap \operatorname{Ker}(f^2) = \{0\}$

Et donc $\dim(\mathbb{R}e_3 + \mathrm{Ker}(f^2)) = \mathbb{R}^5$ (seul sev de $\mathbb{R}^5$ de dim 5) et (puisque $\mathbb{R}e_3 \cap \mathrm{Ker}(f^2) = \{0\}$) on a donc : $\mathbb{R}^5 = \mathbb{R}e_3 \oplus \mathrm{Ker}(f^2)$ ie $\mathbb{R}e_3$ et $\mathrm{Ker}(f^2)$ sont supplémentaires.

Exercice 37

(1) $(x,y,z) = x e_1 + y e_2 + z e_3$

$f(x,y,z) = x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_2)$

$= x e_1 - y e_1 + z e_3$

$= (x-y, 0, z)$

$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases}$

$(x,y,z) \Leftrightarrow (x,x,0)$

$= x(1\,1\,0)$

Donc $\mathrm{Ker}\, f = \mathbb{R}(1\,1\,0)$ (droite !) base $\{1\,1\,0\}$

$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$

$= \mathrm{Vect}\{e_1, e_3\}$

(2)

$e_1 \xrightarrow{f} e_1 \xrightarrow{f} e_1$

$e_2 \longrightarrow -e_1 \longrightarrow -e_1$

$e_3 \longrightarrow e_3 \longrightarrow e_3$

donc $f \circ f(e_i) = f(e_i)$ $(1 \leq i \leq 3)$

et donc $f \circ f = f$

Donc f est le projecteur sur $\mathrm{Im}\, f$ para

Exercice 38

$u \in F_1 \Leftrightarrow f(u) = u$

$\shortparallel$

(x,y,z)

$= xe_1 + ye_2 + ze_3$

$f(u) = x\, f(e_1) + y\, f(e_2) + z\, f(e_3)$

$\Leftrightarrow x(13e_1 + 12e_2 + 6e_3) + y(-8e_1 - 7e_2 - 4e_3) + z(-12e_1 - 12e_2 - 5e_3)$

$-xe_1 - \cancel{y}e_2 - ze_3 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 8y - 12z = 0 \\ 12x - 8y - 12z = 0 \\ 6x - 4y - 6z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 3x = 2y + 3z$

C'est l'équa du plan : $\dim F_1 = 2$

De même $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x,y,z) = z(221)$ donc $F_2 = \mathbb{R}(221)$ et $\dim F_2 = 1$

On a donc obtenu que F_1 est un plan (donc un hyperplan de $\mathbb{R}^3$), F_2 est la droite dirigée par (221)

Or $(221) \notin F_1$ car $3\times 2 - 2\times 2 - 3\times 1 = -1 \neq 0$

$((2,2,1)$ ne satisfait pas l'équation de $F_2)$ donc $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$

Si H est un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-eV E (de dim finie si on veut) et u un vecteur de E tel que $u \notin H$, alors $E = H \oplus \mathbb{K}u$

C'est vrai si $\dim E = \infty$

On a obtenu que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$ donc tout $u \in \mathbb{R}^3$ se décompose de façon unique en $u = u_1 + u_2$ où $\begin{cases} u_1 \in F_1 \\ u_2 \in F_2 \end{cases}$ et alors : $f(u) = f(u_1) + f(u_2)$
$= u_1 - u_2$

Exercice 39

(1) $E = F_1 \oplus F_2$

$u = u_1 + u_2$ décompo unique

$pr_1(u) = u_1 = u_1 + 0 \Rightarrow pr_1 \circ pr_1(u) = pr_1(u_1 + 0)$
$= u_1 = pr_1(u)$. Donc $pr_1 \circ pr_1 = pr_1$
comme il se doit (pr_1 est proj)

De même $pr_2 \circ pr_2 = pr_2$

$pr_2 \circ pr_1(u) = pr_2(u_1 + 0) = 0$ donc $pr_2 \circ pr_1 = 0$

De même $pr_1 \circ pr_2 = 0$

Enfin :

$(pr_1 + pr_2)(u) = pr_1(u) + pr_2(u)$
$= u_1 + u_2 = u = id_E(u)$

donc $pr_1 + pr_2 = id_E$

(2) $E = \mathbb{R}^2$, $F_1 = \mathbb{R}(1\,1)$, $F_2 = \mathbb{R}(1\,-1)$

$\begin{cases} \dim F_1 + \dim F_2 = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \\ F_1 \cap F_2 = 0 \text{ car } (x,y) \in F_1 \cap F_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases} \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x,y) = (0\,0)$

Donc $\mathbb{R}^2 = F_1 \oplus F_2$

$(x, y) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$

où $(x_1, y_1) \in F_1$ donc $y_1 = x_1$

$(x_2, y_2) \in F_2$ donc $y_2 = -x_2$

ie $(x, y) = (x_1, y_1)$

$= (x_1 + x_2 , x_1 - x_2)$

ie $\begin{cases} x = x_1 + x_2 \\ y = \cancel{y}\, x_1 - x_2 \end{cases}$

Conclusion : La décomp de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ selon $F_1 \oplus F_2$ est : $(x, y) = \frac{x+y}{2}(1\,1) + \frac{x-y}{2}(1\,-1)$

et donc $pr_1(x, y) = \frac{x+y}{2}(1\,1)$

$pr_2(x, y) = \frac{x-y}{2}(1\,-1)$

Exercice 40

$(id_E - f) \circ (id_E - f) = id_E \circ (id_E - f) - f \circ (id_E - f)$

$= id_E \circ id_E - id_E \circ f - f \circ id_E + f \circ f$

$= id_E - f - f - f + f$

$= id_E - f$

Donc $id_E - f$ est un proj

f est le proj sur $F = \mathrm{Im}\, f$ parallèlement à $N = \mathrm{Ker}\, f$

et $E = F \oplus N$

Tout $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = u + v$ où

$u \in F$, $v \in N$ et par définition $f(x) = u$

Alors $(id_E - f)(x) = x - f(x)$

$= x - u = v$

donc $id_E - f$ est le projection sur N parallèlement à F

Exercice 41

(1) $S(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i) = (X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n)$

$$\Rightarrow S'(x_i) = (x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(X - x_i)'(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n) = \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)$$

$$= \prod_{j \neq i} (x_i - x_n)$$

tous les termes où on a dérivé $(X - x_j)$ ~~avec~~ $j \neq i$ s'annulent qd $X = x_i$ car ils contiennent le facteur $e_i - x_i = 0$; seul subsiste le terme où on a dérivé $X - x_i$ car alors il n'y a plus de facteur.

Donc $S'(x_i) = \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)$

$$T_i(x_j) = \frac{1}{S'(x_i)} \left. \frac{S(X)}{X - x_i} \right|_{X = x_j}$$

Si $i \neq j$ dans $\left. \frac{S(X)}{X - 1} \right|_{X = x_j}$ il y a le facteur $x_j - x_j = 0$

donc $T_i(x_j) = 0$

Si $i = j$ il y a dans $\left. \frac{S(X)}{X - x_i} \right|_{X = x_i}$ tous les facteurs $x_i - x_k$ où $k \neq i$, donc $\left. \frac{S(X)}{X - x_i} \right|_{X = x_i}$ tous les facteurs $x_i - x_k$ où $k \neq i$, donc $\left. \frac{S(X)}{X - x_i} \right|_{X = x_i}$

Matrices

Exercice 42

(1) $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y\\x-y\end{pmatrix}$ donc $f(x,y)=(x+3y,\ x-y)$

(2) $(3,1)$, $(1,-1)$ deux vecteurs non colinéaires, donc linéairement indépendants donc (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$

(3) Vu le (1)

$f(u)=f(3,1)=(6,2)=2u$

$f(v)=f(1,-1)=(-2,2)=-2v$

Donc $\mathrm{Mat}_{(u,v)}f=\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix}=A'$

(4) P matrice de passage de (e_1,e_2) à (u,v) :

$$P=\begin{pmatrix}3&1\\1&-1\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\frac{1}{\det P}\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&3\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1\\1&-3\end{pmatrix}$$

On a $A'=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix}$

Exercice 43

(1) $\begin{pmatrix}-1&2\\-5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+2y\\-5x+6y\end{pmatrix}$

$\Rightarrow f(x,y)=(-x+2y,\ -5x+6y)$

(2) $(1,1)$, $(2,5)$ non colinéaires $\Rightarrow (u,v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$

(3) $f(u)=(1,1)=u$

$f(v)=(8,20)=4v$

Donc $A'=\mathrm{Mat}_{(u,v)}f=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$

(4) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A' = P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 44

(1) $\begin{cases} u_1 = 2e_1 - e_2 \\ u_2 = e_1 - e_2 \end{cases}$ pas colinéaire donc (u_1, u_2) est une base de E

(2) $f(u_1) = 2u_1$
$f(u_2) = -3u_2$

$\mathrm{Mat}_{(u,v)} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

Soit P la matrice de passage de (e_1, e_2) à (u_1, u_2)

$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Notons $A = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)} f$, $A' = \mathrm{Mat}_{(u_1,u_2)} f$

alors : $A' = P^{-1}AP$ donc $A = PA'P^{-1}$

$= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$

Et donc $f(e_1) = 7e_1 - 5e_2$
$f(e_2) = 10e_1 - 8e_2$

$A' = P^{-1}AP$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

la dernière question

Exercice 46

(1) $\begin{cases} u_1 = e_1 - e_2 \\ u_2 = e_2 - e_3 \\ u_3 = e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = u_1 + u_2 + u_3 \\ e_2 = u_2 + u_3 \\ e_3 = u_3 \end{cases}$ donc (u_1, u_2, u_3) est génératrice et donc c'est une base de E

(2) $A = \mathrm{Mat}_{(e_1, e_2, e_3)} f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ Soit P la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (u_1, u_2, u_3)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

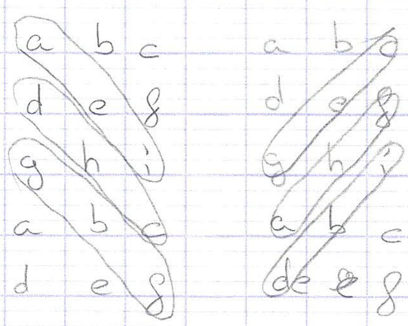
donc $A = \begin{matrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{matrix}$

Soit P la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (u_1, u_2, u_3)

$u_1 = e_1 - e_2$
$u_2 = e_2 - e_3$
$u_3 = e_3$

donc $P = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix}$

$P^{-1} =$



Par le pivot de Gauss :

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 = L_2' \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ & & \end{matrix} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2' \\ \end{matrix}$$

$\det P = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0$
$= 1$

$|P_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$|P_{12}| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$|P_{13}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$

$|P_{21}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$|P_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$|P_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$

$|P_{31}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$

$|P_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$

$|P_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \overset{1}{\cancel{0}} & \cancel{0}1 \\ +1 & \overset{1}{\cancel{0}} & +1 \end{pmatrix}$$

Exercice 47

(2) B_1 : $u_1 = e_2 + e_3$

$u_2 = e_1 + e_3$

$u_3 = e_1 + e_2$

$$P = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & \cancel{0}1 & 0 \end{matrix}$$

$A' = Q^{-1} A P$ où P est la matrice de passage de la base canonique à B_1 et Q la matrice de passage de la bcan à B_2

B_2 : $u_1 = \frac{e_1}{2} + \frac{e_2}{2}$

$u_2 = \frac{e_1}{2} - \frac{e_2}{2}$

$$Q = \begin{matrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{matrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Exercice 47

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+1+1-0-0-0 = 2 \neq 0$

donc B_1 est une base de $\mathbb{R}^3$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ non colinéaires $\Rightarrow$ ils forment une base de $\mathbb{R}^2$

(2) $A' = Q^{-1}AP$

où P est la matrice de passage de la base can de $\mathbb{R}^3$ à B_1 et Q la matrice de passage de la base can de $\mathbb{R}^2$ à B_2

Donc $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (on met en colones les coordonnées des vecteurs de B_1 dans l'ancienne base)

et $Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ et donc

$$Q^{-1} = -2 \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc $A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 48

(1) $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x-6y \\ x \end{pmatrix}$ donc $f(x,y) = (5x-6y, x)$

(2) $(3,1), (2,1)$ non colinéaires donc ils forment une base de $\mathbb{R}^2$.

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(3) $A' = P^{-1}AP$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(4) $U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow U_{n+1} = AU_n$

$V_n = P^{-1}U_n \Leftrightarrow U_n = PV_n$

$V_{n+1} = P^{-1}U_{n+1} = P^{-1}AU_n = P^{-1}APV_n = A'V_n$

On a $U_{n+1} = AU_n$

donc $U_n = A^n U_0$

$V_{n+1} = A'V_n \Rightarrow V_n = A'^n V_0$

Mais A^n ne se laisse pas toujours calculer immédiatement

Tandis que A'^n se calcule facilement que parce que A' est diagonal

$$A'^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A'^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

On a donc $V_n = A'^n V_0 = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} V_0$

$\Rightarrow U_n = PV_n = P \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} U_0$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} U_0 \quad = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & -2.3^n \\ -2^n & 3.2^n \end{pmatrix} U_0$$

$$= \begin{pmatrix} 3^{n+1} - 2^{n+1} & -2.3^{n+1} + 3.2^{n+1} \\ 3^n - 2^n & -2.3^n + 3.2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (3^{n+1} - 2^{n+1}) u_1 + (-2.3^{n+1} + 3.2^{n+1}) u_0 \\ (3^n - 2^n) u_1 + (-2.3^n + 3.2^n) u_0 \end{pmatrix}$$

c'est $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et donc $u_n = (3^n - 2^n) u_1 + (-2.3^n + 3.2^n) u_0$

Résout $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$

(5) $y'' - 5y' + 6y = 0$

$Y = \begin{pmatrix} y' \\ y \end{pmatrix}$

$$Y' = \begin{pmatrix} y'' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y' - 6y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ y \end{pmatrix} = AY$$

$$Z = P^{-1} Y = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \Rightarrow Z' = P^{-1} Y' = \begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix} = P^{-1} A P \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v \\ 2w \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v' = 3v \\ w' = 2w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = v_0 e^{3x} \\ w = w_0 e^{2x} \end{cases}$$

et donc $\begin{pmatrix} y' \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 e^{3x} \\ w_0 e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_0 e^{3x} + 2w_0 e^{2x} \\ v_0 e^{3x} + w_0 e^{2x} \end{pmatrix}$

donc $y = v_0 e^{3x} + w_0 e^{2x}$

Conditions initiales $\quad y(0) = y_0, \; y'(0) = y'_0$

Exercice 49

$A = Mat_B f$ où P matrice de passage de B à B'

$A' = Mat_{B'} f$

$A' = P^{-1}AP$

$tr\, A' = tr(P^{-1}(AP)) = tr((AP)P^{-1}) = tr(A(PP^{-1}))$

Exercice 52

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

$$A^2 - 5A + 4I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $A^2 - 5A + 4I = 0$ et donc A est inversible

ie $(A - 5I)A = -4I$ et $A^{-1} = -\frac{1}{4}(A - 5I)$

ie $-\frac{1}{4}(A - 5I)A = I$

Vérifions $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 10 = 4$

donc $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ et $-\frac{1}{4}(A - 5I) = -\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right]$

$$= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 50

$tr(AB) = tr\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 5$

$tr(BA) = tr\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 4$

donc A, B $\nexists$

Exercice 51

U, V semblables $\Leftrightarrow \exists\, P$ tq $V = P^{-1}UP$

$AB = P^{-1}BAP$

il suffit de prendre $P = A^{-1}$ ou $P = B$

Exercice 53

$A = (a_{ij})$ $\quad B = (b_{ij})$, $\quad AB = C = (c_{ij})$

où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$

${}^tB = (b_{ji})$ $\qquad {}^tA = (a_{ji})$

${}^tB\,{}^tA = (\sum_{k=1}^{m} b_{ki}\, a_{jk}) = (\sum_{k=1}^{m} a_{jk}\, b_{ki}) = (c_{ji}) = {}^tC = {}^t(AB)$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} a+2b & a+4b \\ c+2d & c+4d \end{matrix}$

Feuille d'exo 7

Exercice 54

(1) $\det(u,v,w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

donc B' est une base de E

ou bien : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Ou bien : $\begin{cases} u = e_1 + e_2 + e_3 \\ v = e_2 + e_3 \\ w = e_1 + e_3 \end{cases}$

donc (u,v,w) est génératrice de E et donc c'en est une base

et on obtient en prime les expressions de e_i en fonction de u, v, w

(2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $E = \mathrm{Vect}\{u, v, w\} = \mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w$
$= F \oplus G$

(5) $\mathrm{Mat}_{B'} p_F = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ et $\mathrm{Mat}_{B'} p_G = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

(6) $\mathrm{Mat}_{B'} g^n = (\mathrm{Mat}_{B'} g)^n = A'^n = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{matrix} = \mathrm{Mat}_{B'} p_F + (-1)^n \mathrm{Mat}_{B'} p_G$

$= \mathrm{Mat}_{B'} (p_F + (-1)^n p_G)$

(7) $p_F(e_1) = p_F(u - v) = u$
$p_F(e_2) = p_F(u - w) = u$
$p_F(e_3) = p_F(-u + v + w) = -u$

$p_G(e_1) = p_G(u - v) = -v$
$p_G(e_2) = p_G(u - w) = -w$
$p_G(e_3) = p(-u + v + w) = v + w$

donc $g^n(e_1) = p_F(e_1) + (-1)^n p_G(e_1)$
$= u + (-1)^{n+1} v$
$g^n(e_2) = u + (-1)^{n+1} w$
$g^n(e_3) = -u + (-1)^n v + (-1)^n w$

Si je les mets en colonnes j'ai $\mathrm{Mat}_{BB'} g^n$. Mais je veut $\mathrm{Mat}_B g^n$!

Donc il faut exprimer les $g^n(e_i)$ dans la base B :

$g^n(e_1) = u + (-1)^{n+1} v = e_1 + e_2 + e_3 + (-1)^{n+1}(e_2 + e_3)$
$= e_1 + [1 + (-1)^{n+1}] e_2 + [1 + (-1)^{n+1}] e_3$

$g^n(e_2) = u + (-1)^{n+1} w = e_1 + e_2 + e_3 + (-1)^{n+1}(e_1 + e_3)$
$= [1 + (-1)^{n+1}] e_1 + e_2 + [1 + (-1)^{n+1}] e_3$

$g^n(e_3) = -u + (-1)^n v + (-1)^n w$
$= -e_1 - e_2 - e_3 + (-1)^n e_2 + (-1)^n e_3 + (-1)^n e_1 + (-1)^n w$
$= -e_1 - e_2 - e_3 + (-1)^n e_2 + (-1)^n e_3 + (-1)^n e_1 + (-1)^n e_3$
$= [-1 + (-1)^n] e_1 + [-1 + (-1)^n] e_2 + [-1 + 2(-1)^n] e_3$

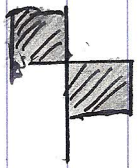
$$\mathrm{Mat}_B f^n = \begin{matrix} 1 & 1+(-1)^{n+1} & -1+(-1)^n \\ 1+(-1)^{n+1} & 1 & -1+(-1)^n \\ 1+(-1)^{n+1} & 1+(-1)^{n+1} & -1+2(-1)^n \end{matrix}$$

(8) Calcul plus direct de A^n

$$A^n = PA'^nP^{-1} \quad (\Leftrightarrow A'^n = P^{-1}A^nP)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+(-1)^{n+1} & -1+(-1)^n \\ 1+(-1)^{n+1} & 1 & -1+(-1)^n \\ 1+(-1)^{n+1} & 1+(-1)^{n+1} & -1+2(-1)^n \end{pmatrix}$$

Exercice 55



Exercice 55 - suite

(2) $f(u_1) = 5u_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y - z = 5x \\ -4x + y + 3z = 5y \\ x + y - 2z = 5z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y - z = 0 \\ -4x - 4y + 3z = 0 \\ x + y - 7z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = x(1, -1, 0)$, on peut prendre $u_1 = (1, -1, 0)$

(3) $u_2 = (x, y, z)$: $f(u_2) = -3u_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y - z = -3x \\ -4x + y + 3z = -3y \\ x + y - 2z = -3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6(x) - 2y - z = 0 \\ -4x + 4y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$(2) + 4(3) \Leftrightarrow 8y + 7z = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{7}{8} z$

et alors (3) $\Rightarrow x = -y - z = -\frac{1}{8} z$

et alors (1) $\Rightarrow -\frac{6}{8} z + \frac{14}{8} z - z = 0$

Donc la solution générale du système est

$$\begin{cases} x = -z/8 \\ y = -7z/8 \end{cases}$$

ie $(x, y, z) = z(-1/8, -7/8, 1)$

On peut prendre $u_2 = (-1, -7, 8)$

Récapitulons $u_1 = (1, -1, 0)$, $u_2 = (1, 7, -8)$

(4) $u_3 = (1,1,1)$ montrons que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$$

Donc (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. On note $B' = (u_1, u_2, u_3)$

(5) $$P = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \end{matrix}$$

(6) On peut inverser la matrice par la methode du pivot.

$$\left.\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & -8 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 = L_2' \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2' \\ \ \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 15/24 & -9/24 & -6/24 \\ 1/24 & 1/24 & -1/12 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} L_1' - L_2'' \\ L_2'' \\ L_3 \end{matrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 15 & -9 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A' est diagonale donc $A'^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^n = P A'^n P^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 & -9 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{24} \begin{matrix} 3.5^{n+1} + (-3)^n & -9.5^n + (-3)^n & -6.5^n - 2(-3)^n \\ -3.5^{n+1} + 7(-3)^n & 9.5^n + 7(-3)^n & 6.5^n - 14(-3)^n \\ -8.(-3)^n & -8(-3)^n & 16.(-3)^n \end{matrix}$$

Exercice 56

(1) $$(A - 2I_2)^2 = \begin{pmatrix} -13-2 & 9 \\ -25 & 17-2 \end{pmatrix}^2$$

$$= \begin{pmatrix} -15 & 9 \\ -25 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -15 & 9 \\ -25 & 15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $e_2' = (f - 2\,id)(e_1)$

$$(A-2I_2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15 & 9\\-25 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\-25\end{pmatrix}$$

donc $e_2' = (-15, -25)$; non colinéaire à e_1 donc (e_2', e_1) est une base de $\mathbb{R}^2$

(3) $\mathrm{Mat}_{(e_2', e_1)}(f-2id) = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A' = \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}$

(4) $P = \begin{pmatrix}-15 & 1\\-25 & 0\end{pmatrix}$

$P^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}0 & -1\\25 & -15\end{pmatrix}$

$A' = P^{-1}AP$

Vérifions : $P^{-1}AP$

$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix}0 & -1\\25 & -15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-13 & 9\\-25 & 17\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-15 & 1\\-25 & 0\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix}25 & -17\\50 & -30\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-15 & 1\\-25 & 0\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix}50 & 25\\0 & 50\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}$

(5) I_2 commute avec toute matrice de $M_2(\mathbb{R})$ (élément neutre de $M_2(\mathbb{R})$!) donc $2I_2$

$A' = 2I_2 + (A' - 2I_2)$

$\Rightarrow A'^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I_2)^{n-k} (A'-2I_2)^k$

$$\Rightarrow A'^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I_2)^{n-k} (A' - 2I_2)^k$$

car $2I_2$ et $A' - 2I$ commutent

$$\Rightarrow A'^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (A' - 2I_2)^k$$

Mais $(A' - 2I_2)^0 = I_2$

$(A' - 2I_2) = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(A' - 2I_2)^2 = 0$

et a fortiori $(A' - 2I_2)^k = 0$ pour $k \geqslant 2$

Par conséquent

$$A'^n = 2^n I_2 + n \cdot 2^{n-1} (A' - 2I_2)$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} + n\, 2^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Enfin :

$$A^n = PA'^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -15 & 1 \\ -25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 25 & -15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -15n2^{n-1} + 2^n & 9n \cdot 2^{n-1} \\ -25n2^{n-1} & 2^n + 15 \cdot 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Exercice 57

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & a & \cdots & a \\ b & c_2 & \cdots & a \\ b & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & c_n \; a \end{pmatrix}$$

(1) $D = \begin{vmatrix} c_1+X & a+X & \cdots & a+X \\ b+X & c_2+X & \cdots & a+X \\ b+X & b+X & \cdots & a+X \\ \vdots & \vdots & & \\ b+X & b+X & \cdots & c_n+X \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} c_1+X & a+X & a+X & a+X & \cdots & a+X \\ b-c_1 & c_2-a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b-c_1 & b-a & c_3-a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b-c_1 & b-a & b-a & b-a & \cdots & c_n-a \end{vmatrix}$$

On dvpt par rapport à la 1ère ligne :
$D(X) = (c_1+X)d_1 - (a+X)d_2 + \ldots + (-1)^{n-1}(a+X)d_n$
où les d_n sont indé de X. Et donc $D(X)$ est un polynôme du 1er degré en X : $D(X) = \lambda X + \mu$

(2) On suppose d'abord $b \neq a$

Exercice 58

$V(a_1, \dots, a_n)$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_j - a_1 C_{j-1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1 a_2 & & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1 a_3 & & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n^2 - a_1 a_n & & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & (a_2 - a_1) a_2 & \cdots & (a_2 - a_1) a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 - a_1 & (a_3 - a_1) a_3 & \cdots & (a_3 - a_1) a_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & (a_n - a_1) a_n & & (a_n - a_1) a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & (a_2 - a_1) a_2 & \cdots & (a_2 - a_1) a_2^{n-2} \\ a_3 - a_1 & (a_3 - a_1) a_3 & \cdots & (a_3 - a_1) a_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - a_1 & (a_n - a_1) a_n & & (a_n - a_1) a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \times \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & \cdots & a_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \times V(a_2, a_3, \dots, a_n)$

De même :

$V(a_2, \dots, a_n) = (a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \dots (a_n - a_2) \times V(a_3, \dots, a_n)$

Donc $V(a_1, \dots, a_n)$

$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_2)$
$V(a_3, \dots, a_n)$

On réitère $V(a_1, \dots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1)$
$(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_2)(a_n - a_{n-1}) V(a_n)$

Mais $V(a_n)$ est le déterminant à 1 ligne, 1 col dont l'unique élément est 1, donc $V(a_n) = 1$

Conclusion : $V(a_1, \dots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1)$
$(a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \dots (a_n - a_2)$
$\dots (a_n - a_{n-1})$
$= \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (a_j - a_i)$

On cherche un polynôme P de degré $\leq n$ dont la graphe passe par tous les points ie $P(a_i) = b_i$ $(1 \leq i \leq n)$. On note $P(X) = p_0 + p_1 X + p_2 X^2 + \dots + p_{n-1} X^{n-1}$

Les conditions sont :

$P(a_i) = b_i$, $1 \leq i \leq n$

$\Leftrightarrow p_0 + p_1 a_i + p_2 a_i^2 + \dots + p_{n-1} a_i^{n-1} = b_i$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Exercice 59

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & a \\ -1 & 2 & -3 & b \\ 4 & -3 & 8 & c \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & a \\ 0 & 7 & -1 & a+2b \\ 0 & -9 & -2 & -2a+c \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2' = 2L_2 + L_1 \\ L_3' = L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & a \\ 0 & 7 & -1 & a+2b \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{5a-18b-7c}{23} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2' \\ L_3'' = -(9L_2' + 7L_3')/23 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{-7a+39b+19c}{23} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{4a+4b-c}{23} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{5a-18b-7c}{23} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1' = L_1 - 3L_2'' - 5L_3'')/2 \\ L_2'' = (L_2' + L_3'')/7 \\ L_3'' \end{array}$$

Donc le système est de Cramer, l'unique sol est :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} -7a + 39b + 19c \\ 4a + 4b - c \\ 5a - 18b - 7c \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{23} \begin{pmatrix} -7 & 39 & 19 \\ 4 & 4 & -1 \\ 5 & -18 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Par Cramer

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 8 \end{vmatrix} = 32 + 15 + (-36) - 40 - 18 + 24 = -23$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 3 & 5 \\ b & 2 & -3 \\ c & -3 & 8 \end{vmatrix}}{-23} = \frac{a\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{-23}$$

$$= \frac{-7a + 39b + 19c}{23}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ -1 & b & -3 \\ 4 & c & 8 \end{vmatrix}}{-23} = \frac{-a\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}}{-23}$$

$$= \frac{4a + 4b - c}{23}$$

et $z = \dfrac{5a - 18b - 7c}{23}$

Exercice 60

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 7 & 0 & 19 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & 3 \\ 0 & 14 & -2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2' = 2L_2 + L_1 \\ L_3' = L_3 + 7L_2 \end{array}$$

deux lignes lin indep $\Rightarrow rg = 2$

Le système devient :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 1 \\ 7y - z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1 - 5z - 3y) \\ y = \frac{3+z}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = \left(-\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, 0\right) + z\left(-\frac{19}{7}, \frac{1}{7}, 1\right)$$

La sol est : $\left(-\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, 0\right) + \mathbb{R}(19, -1, -7)$