TD - Algèbre

Exercice 1

E ev sur $\mathbb{K}$ $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E
On dit que cette famille est libre ssi $\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p = 0 \Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_p = 0$
On dit que les vecteurs sont linéairement indépendants
Lorsque ce n'est pas vérifié on parle de famille liée ou de vecteurs linéairement indépendants.
On dit que la famille est génératrice ssi
$\forall v \in E, \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p$
famille libre + génératrice = base de E.

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère : $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$
Lorsqu'on a une famille de 2 vecteurs dire que cette famille est libre équivaut à dire que les vecteurs ne sont pas colinéaires. u_1 et u_2 sont colinéaires. $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, u_1 = \lambda u_2$

On sait que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Comme la famille $\mathcal{F}$ ne comporte que 2 vecteurs et que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice.

Autre méthode pour trouver un vecteur v de $\mathbb{R}^3$ tel que $v \neq \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$. Soit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 = \alpha_1 \\ 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 = -\alpha_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Impossible}$$

Donc la famille n'est pas génératrice

Dans $\mathbb{R}^3$ $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right) = \mathcal{F}$

Soient $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

La famille est-elle génératrice ?

Soit $v = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, Existe-t-il $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

tel que $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = x_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = x_2 \\ -\alpha_2 - 2\alpha_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 5/4 \\ x_2 = -1/2 \\ \alpha_3 = -1/4 \end{cases}$$

Si E est un ev de dimension $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs p. Alors on a la équivalence.
$\mathcal{F}$ est une f libre $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ est une génératrice

Dans $\mathbb{R}^2$ $((1,1), (0,1), (1,0))$, $\mathbb{R}^2$ est un ev de dim 2 et la famille contient 3 vecteurs donc elle est liée. Cette famille contient les 2 vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ $((1,0), (0,1))$ donc cette famille est génératrice.

$\mathbb{R}_n[X] = \{$ les polynomes en X de degrés $\leq n\}$

On considère $\mathcal{F} = (1, X, X^2, \ldots, X^{n-1}, X^n)$

Soient $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $n+1$ réels tel que :

$\alpha_0 . 1 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \ldots + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \alpha_n X^n = 0$

Pour tout réel x on a $P(x) = 0$, càd que P a une infinité de racines. Donc p est le polynome qui vérifie $\alpha_0 = \ldots = \alpha_n = 0$

$P(X) = \Sigma$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $P(X) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$ c'est à dire ~~ce qui précède $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ est une~~ qu'il est bien cl de $(1, \ldots, X^n)$ la famille est donc génératrice.

D'après ce qui précède $\mathcal{B}(1, X, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ d'où $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$

$P(X) = \sqrt{2} + 6X^3 - \pi X^{n-1}$

Dans la base $\mathcal{B}$, P s'écrit $(\sqrt{2}, 0, 0, \ldots, 6, \ldots, -\pi, 0)$

$\begin{array}{cccccc} 1 & X & X^2 & X^3 & X^{n-1} & X^n \end{array}$

<u>Exercice 2</u>

F est un ev de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ n réels distincts

On pose $f_i(x) = \exp(\lambda_i x)$ ou encore

$f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto e^{\lambda_i x}$

$f_i \in F$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Montrons que $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est une famille libre de F.

Par l'absurde supposons qu'elle est liée.

Soient $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ des réels non tous nuls tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0$

<u>1)</u> On considère les α_1 dans $\{\alpha_1, \ldots, n\}$ tel que $\alpha_1 \neq 0$. On regarde les λ_i associé que l'on classe

croissant strict (car distinct). On note i_0 l'indice du plus grand λ_i trouvé.

On a trouvé i_0 tel que $\alpha_{i_0} \neq 0$ et $\lambda_{i_0} > \lambda_{i_m}$ pour tous les i tel que $\alpha_i \neq 0$

On déduit que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) \underset{+\infty}{\overset{x}{\sim}} \alpha_{i_0} f_{i_0}(x)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)}{\alpha_{i_0} f_{i_0}(x)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha_{i_0} f_{i_0}(x) + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_0}}^{n} \alpha_i f(x)}{\alpha_{i_0} f_{i_0}(x)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} 1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_{i_0}} e^{\underbrace{(\lambda_i - \lambda_{i_0})}_{<0} x} = 1$$

On a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) \underset{+\infty}{\sim} \alpha_{i_0} f_{i_0}(x)$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0 \ , \quad \lim_{x \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0$$

d'où $\lim_{x \to +\infty} \alpha_{i_0} f_{i_0}(x) = 0$

Comme $\alpha_{i_0} \neq 0$ on a $\lambda_{i_0} < 0$ d'où $\lambda_i < \lambda_{i_0} < 0$

2) On procède de même en $-\infty$

Montrons que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) \underset{-\infty}{\sim} \alpha_{i_1} e^{\lambda_{i_1} x}$

avec i_1 tel que $\alpha_{i_1} \neq 0$ et $\lambda_{i_1} < \lambda_i$ pour tout i. On déduit $0 < \lambda_{i_1} < \lambda_i$

3) Après 2) on obtient : tous les λ_i tq $\alpha_1 = 0$ sont < 0

sont > 0

Exercice 3

$Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q \neq$ cte

$n = \deg(Q) - 1$

Remarque $Q \neq$ cte , degrés $Q \geq 1$ et donc $n \geq 0$

càd $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que $\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_n[X] \oplus Q\mathbb{R}[X]$

Rappel : $\mathbb{R}_n[X]$: polynôme en X de degrés $\leq n$

$Q\mathbb{R}[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(X) = Q(X)P_1(X)$ avec $P_1(X) \in \mathbb{R}[X]\}$

Montrons que $\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_n[X] \oplus Q\mathbb{R}[X]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_n[X] + Q\mathbb{R}[X] \\ \text{~~et } \mathbb{R}_n[X]\text{~~ } \mathbb{R}_n[X] \cap Q\mathbb{R}[X] = 0 \end{cases}$$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X] \cap Q\mathbb{R}[X]$ alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et donc degrés $P \leq n$

De plus $P \in Q\mathbb{R}[X]$ càd $\exists P_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = QP_1$

càd degrés $P =$ degrés Q + degrés P_1

$= n + 1 +$ degrés P_1

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on effectue la division de P par Q.

$P = P_1 Q + R$ avec degrés $R <$ degrés Q

$(a_0, \ldots, a_n)$ $n+1$ réels distincts

$\mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

$P \mapsto u(P) = (P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n))$

Montrons que u est une application linéaire.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(P_1 + P_2) = u(P_1) + u(P_2) \\ u(\lambda P) = \lambda u(P) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \{u(\lambda P_1 + P_2) = \lambda u(P_1) + u(P_2)\}$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient $P_1 \in \mathbb{R}[X]$ et $P_2 \in \mathbb{R}[X]$

$u(\lambda P_1+P_2) = ((\lambda P_1+P_2)(a_0), \dots, (\lambda P_1+P_2)(a_m))$

$= (\lambda P_1(a_0), \dots, \lambda P_1(a_m)) + (P_2(a_0), \dots P_m(a_m))$

$= \cancel{\lambda(P_1(a_0)} \lambda u(P_1) + u P_2$

D'où u est une application linéaire.

E et F 2 ev $f : E \to F$ un AL. Noyau de f noté $\mathrm{Ker}(f)$. $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$

$\mathrm{Ker}(u) = \{P \in \mathbb{R}[X],\ u(P) = 0\}$

$= \{P \in \mathbb{R}[X],\ (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_m)) = (0, 0, \dots, 0)\}$

$P \in \mathrm{Ker}(u) \Leftrightarrow (P(a_0), \dots, P(a_m)) = (0, \dots, 0)$

$\Leftrightarrow a_0, \dots, a_m$ sont des racines de P.

$\Leftrightarrow P(X) = (X-a_0)(X-a_1) \dots (X-a_m) P_1(X)$

$= \prod_{i=0}^{m} (X-a_i) \cdot P_1(X)$

Alors degrés $Q = m+1$ et $P \in \mathrm{Ker}(u) \Leftrightarrow P \in Q\mathbb{R}[X]$

b) On restreint u à $\mathbb{R}_m[X]$, $u_{|\mathbb{R}_m} : \begin{cases} \mathbb{R}_m[X] \to \mathbb{R}^{m+1} \\ P \mapsto u(P) = (P(a_0), \dots, P(a_m)) \end{cases}$

Une application linéaire est injective ssi $\mathrm{Ker} = \{0\}$

$u(p) = u(p') \Rightarrow p = p'$ si injectif.

$\Rightarrow u(p) - u(p') = 0$

$\Rightarrow u(p-p')$ ceci doit entrainer $P = P'$ d'où $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$

$\mathrm{Ker}(u) = \{P \in \mathbb{R}_m[X] / u(p) = 0\}$

$P \in \mathrm{Ker}(u_{|\mathbb{R}_m})$

$\Leftrightarrow (P(a_0), \dots, P(a_m)) = (0, \dots, 0)$

$\Leftrightarrow P(a_0) = \dots = 0 = P(a_m)$

$\Leftrightarrow P$ a au moins $m+1$ racines distinctes

$a_0, \dots, a_m$

Comme $P \in \mathbb{R}_m[X]$, degrés $P \leq m$ d'où nécessairement $P = 0$ donc $\mathrm{Ker}(u_{\mathbb{R}_m}) = \{0\}$

c) En déduire que pour tout $(b_0, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ il existe P de degrés $\leq m$ tel que $P(a_i) = b_i$ pour $0 \leq i \leq m$ il existe P. $u_{|\mathbb{R}_m}$, $\mathbb{R}_m[X] \to \mathbb{R}^{m+1}$

D'après le théorème du rang $\dim \mathrm{Ker}(u_{\mathbb{R}_m}) + \dim \mathrm{Im}(u_{\mathbb{R}_m}) = \dim \mathbb{R}_m[X] = m+1$

Or $\dim \mathrm{Ker}(u_{\mathbb{R}_m}) = \dim \{0\} = 0$
d'où $\dim \mathrm{Im}(u_{\mathbb{R}_m}) = m+1-0 = m+1 = \dim \mathbb{R}^{m+1}$
$\mathrm{Im}\, u_{\mathbb{R}_m} = \mathbb{R}^{m+1}$

$u_{\mathbb{R}_m}$ est surjective, comme elle est injective c'est une bijective.
Autre méthode en dimension finie (identique)
u bijective $\Leftrightarrow$ injective
$\Leftrightarrow$ surjective

3) $L_0(X) = \dfrac{(X-a_1)(X-a_2)\ldots(X-a_m)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\ldots(a_0-a_m)}$, $L_1(X) = \dfrac{(X-a_0)(X-a_2)\ldots(X-a_m)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_m)}$

$$L_i(X) = \frac{(X-a_0)(X-a_1)\ldots(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})\ldots(X-a_m)}{(a_i-a_0)(a_i-a_1)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_m)}$$

$$= \frac{\prod_{\substack{0\leq j\leq m \\ j\neq i}} (X-a_j)}{\prod_{\substack{0\leq j\leq m \\ j\neq i}} (a_i-a_j)}$$

Montrons que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dimension $(n+1)$. Il suffit de montrer que la famille est libre ou génératrice.

Montrons qu'elle est libre :

Soient (β_0, β_n) $n+1$ réels tq que $\beta_0 L_0 + \dots + \beta_n L_n = 0$ $(*)$

$L_0(a_1) = 0$ $\quad L_0(a_2) = 0$ $\dots$ $L_0(a_n) = 0$

$L_0(a_0) = 1$

$$L_0(X) = \frac{(X-a_1)(X-a_2)\dots(X-a_n)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\dots(a_0-a_n)}$$

$$L_1(X) = \frac{(X-a_0)(X-a_2)\dots(X-a_n)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)\dots(a_1-a_n)}$$

Dans $(*)$ si on remplace X par a_0 on a

$\beta_0 + \beta_1 L_1(a_0) + \dots + \beta_n L_n(a_0) = 0 \Leftrightarrow \beta_0 = 0$

Idem par a_1, $\beta_1 = 0$

$\vdots$

Idem par a_n, $\beta_n = 0$

La famille est libre c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4) On a vu que $\forall (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$\exists P \in \mathbb{R}_n[X]$ / $u(P) = (b_0, \dots, b_n)$ càd tel que

$P(a_0) = b_0$, $P(a_1) = b_1$, $\dots$, $P(a_n) = b_n$

$\tilde{P}$ tq $\tilde{P}(a_0) = b_0$ encore avant $\tilde{P}(a_0) = 1$

On a vu que $L_0(a_0) = 1$ en multipliant par b_0

$(b_0 . L_0)(a_0) = b_0$

$(b_0 L_0)(a_i)_{i \neq 0} = 0 \dots$

donc le polynome recherché est $\sum_{i=0}^{n} b_i L_i(X)$

...

Exercice 4

A un hyperplan de E.
$\Leftrightarrow$ H est un sev de E de dimension $\dim E - 1$

1) $E = \mathrm{Vect}(x_0) \oplus H$
Soit $x \in \mathrm{Vect}(x_0) \cap H$, on a $x \in \mathrm{Vect}(x_0)$ d'où
$x = \lambda x_0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in H$
Comme $x_0 \notin H$ aucun multiple de x_0 différent de
0 ne peut appartenir à H d'où $x = 0$, $\mathrm{vect}\{x_0\} \cap H$
$= \{0\}$

Reste à montrer que : $\forall x \in E$, $x = x_1 + x_2$ avec
$\begin{cases} x_1 \in \mathrm{Vect}(x_0). \\ x_2 \in H \end{cases}$
D'où $x \in \mathrm{Vect}(x_0)$ c'est à dire $x = \lambda x_0$ avant K
et $x \in H$
Si $\lambda \neq 0$ alors $\lambda x_0 \neq 0$ et $\lambda x_0 \in H$. Alors comme H
un sev de E
$\frac{1}{\lambda}(\lambda x_0) = x_0 \in H$ impossible

D'où $\lambda = 0$ et $x = 0$
De plus : $\dim \mathrm{Vect}(x_0) = 1$
$\dim H = n - 1$
d'où $\dim(\mathrm{Vect}(x_0) + \dim H) = \dim(\mathrm{Vect}(x_0)) + \dim H = n$
$= \dim E$
donc $E = \mathrm{Vect}(x_0) \oplus G$

2) Comme $E = \mathrm{vect}(x_0) \oplus H$ par définition pour tout
$x \in E$, il existe une unique $x_1 \in \mathrm{Vect}(x_0)$ et
un unique $x_2 \in H$ tel que $x = x_1 + x_2$

• $x_1 \in \text{Vect}(x_0)$ signifie $x_1 = \lambda x_0$, $\lambda \in K$

• l'on note $h = x_2$

D'où

$\forall x \in E$, $\exists!\ \lambda \in \mathbb{K}$, $\exists!\ h \in H$

tel que $x = \lambda x_0 + h$.

3) E un $\mathbb{K}$-ev. On dit que f est une forme linéaire sur E si φ va de $\varphi : E \to \mathbb{K}$

Exemple : $E = \mathbb{R}^2$: $f : E \to \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto x + y$

Comme $\text{Ker}\,\varphi = H \neq \{0\}$ φ ne sera pas injective, bijective.

Comme on travaille en finie $\not{d}$ on a

$\dim E = \dim \text{Ker}\,\varphi + \dim \text{Im}\,\varphi$

$\dim \cancel{\text{Ker}\,\varphi}\ E = n - 1 + \dim \text{Im}\,\varphi$

d'où $\dim \text{Im}\,\varphi = 1 = \dim K$

or $\text{Im}\,\varphi \subset K$ donc $\text{Im}\,\varphi = K$

Il suffit de connaître l'image d'une base

Ici $E = \text{Vect}(x_0) \oplus H$ donc il existe une base de la forme :

$\mathcal{B} = (x_0, e_1, \dots, e_{n-1})$

$\varphi(x_0) \neq 0$ car $H = \text{Ker}\,\varphi \neq E$

$\varphi(e_1) = 0$ car e_i dans le noyau

$\varphi(e_2) = 0$

$\vdots$

$\varphi(e_{n-1}) = 0$

Soit $\lambda_1 \in K$ $\lambda_1 \neq 0$

on pose $\varphi(x_0) = \lambda_1$

Exercice 4

H un hyperplan de E.

$\Leftrightarrow$ H est un sev de E de dimension $\dim E - 1$

1) $E = \mathrm{Vect}(x_0) \oplus H$

Soit $x \in \mathrm{Vect}(x_0) \cap H$, on a $x \in \mathrm{Vect}(x_0)$ d'où $x = \lambda x_0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in H$

Comme $x_0 \notin H$ aucun multiple de x_0 différent de 0 ne peut appartenir à H d'où $x = 0$, $\mathrm{vect}\{x_0\} \cap H = \{0\}$

Reste à montrer que : $\forall x \in E$, $x = x_1 + x_2$ avec
$\begin{cases} x_1 \in \mathrm{Vect}(x_0). \\ x_2 \in H \end{cases}$

D'où $x \in \mathrm{Vect}(x_0)$ c'est à dire $x = \lambda x_0$ avec K et $x \in H$

Si $\lambda \neq 0$ alors $\lambda x_0 \neq 0$ et $\lambda x_0 \in H$. Alors comme H un sev de E

$\frac{1}{\lambda}(\lambda x_0) = x_0 \in H$ impossible

D'où $\lambda = 0$ et $x = 0$

De plus : $\dim \mathrm{Vect}(x_0) = 1$
$\dim H = n - 1$

d'où $\dim(\mathrm{Vect}(x_0) + \dim H) = \dim(\mathrm{Vect}(x_0)) + \dim H = n$
$= \dim E$

donc $E = \mathrm{Vect}(x_0) \oplus H$

2) Comme $E = \mathrm{vect}(x_0) \oplus H$ par définition pour tout $x \in E$, il existe une unique $x_1 \in \mathrm{Vect}(x_0)$ et un unique $x_2 \in H$ tel que $x = x_1 + x_2$

• $x_1 \in \mathrm{Vect}(x_0)$ signifie $x_1 = \lambda x_0$, $\lambda \in K$

• l'on note $h = x_2$

D'où

$\forall x \in E, \exists! \lambda \in \mathbb{K}, \exists! h \in H$

tel que $x = \lambda x_0 + h$.

3) E un $\mathbb{K}$-ev. On dit que f est une forme linéaire sur E si φ va de $\varphi : E \to \mathbb{K}$

Exemple : $E = \mathbb{R}^2$: $f : E \to \mathbb{R}$

$(x, y) \mapsto x + y$

Comme $\mathrm{Ker}\, \varphi = H \neq \{0\}$ φ ne sera pas injective, bijective.

Comme on travaille en finie $\not{d}$ on a

$\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, \varphi + \dim \mathrm{Im}\, \varphi$

$\dim \underset{E}{\cancel{\mathrm{Ker}\, \varphi}} = n - 1 + \dim \mathrm{Im}\, \varphi$

d'où $\dim \mathrm{Im}\, \varphi = 1 = \dim K$

or $\mathrm{Im}\, \varphi \subset K$ donc $\mathrm{Im}\, \varphi = K$

Il suffit de connaître l'image d'une base

Ici $E = \mathrm{Vect}(x_0) \oplus H$ donc il existe une base de la forme :

$\mathcal{B} = (x_0, e_1, \ldots, e_{n-1})$

$\varphi(x_0) \neq 0$ car $H = \mathrm{Ker}\, \varphi \neq E$

$\varphi(e_1) = 0$ car e_i dans le noyau

$\varphi(e_2) = 0$

$\vdots$

$\varphi(e_{n-1}) = 0$

Soit $\lambda_1 \in K$ $\lambda_1 \neq 0$

on pose $\varphi(x_0) = \lambda_1$

Exercice 5

1) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ = matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels

$(e_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ avec $e_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & i \\ \quad\quad\quad\ \ j & \end{array}$

$\mathcal{B}$ contient n^2 matrice d'où dimension $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$

2) On cherche les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $Tr(A) = 0$
Cette condition n'agit pas sur les coeff en dehors de la diagonale il y en a $n^2 - n$
d'où $\dim H \geq n^2 - n$
En particulier toutes les matrices e_{ij} avec $i \neq j$
Ici on a une condition avec 1 sur l'équation il y a donc un seul coeff qui sera déterminé à partir des $n-1$ autres.

$a_{nn} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{n-1\,n-1}$

$= \sum_{i\neq j} a_{ij} e_{ij} + a_{11} e_{11} + a_{22} e_{22} + \dots + a_{n-1\,n-1} e_{n-1\,n-1} - (e_{11} + \dots + a_{n-1\,n-1}) e_{nn}$

$= \sum_{i \neq j} a_{ij} e_{ij} + a_{11}(e_{11} - e_{nn}) + \dots + a_{n-1\,n-1}(e_{n-1\,n-1} + e_{nn})$

H est engendré par $(e_{ij})_{i\neq j}, e_{11} - e_{nn}, \dots, e_{n-1\,n-1} - e_{nn}$

Soit des coefficients tq : $\alpha_{ij} e_{ij} + \alpha_1 (e_{11} - e_{nn}) + \dots + \alpha_{n-1}(e_{n-1\,n-1} - e_{nn}) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\alpha = 0$ c'est donc une base de dimension $n^2 - 1$

Montrons que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(I_n) \oplus H$

Soit $M \in \text{Vect}(I_n) \cap H$. Alors $M \in \text{Vect}(I_n)$ càd

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $M = \lambda I_n$

$\Rightarrow \text{Tr}(M) = \lambda n$ or $M \in H$, càd $\text{Tr}(M) = 0$

d'où $\lambda n = 0$ càd $\lambda = 0$

$\text{Vect}(I_n) \cap H = \{0\}$, $\dim H = n^2 - 1$, $\dim \text{Vect}(I_n) = 1$

d'où $\dim(H + \text{Vect}(I_n)) = \dim H + \dim \text{Vect}(I_n) = n^2$

On en déduit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(I_n) \oplus H$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver $M_1 \in \text{Vect}(I_n)$ et

$M_2 \in H$ tq $M = M_1 + M_2$

On a $\text{tr}(M) = \text{tr}(M_1 + M_2) = \text{Tr}(M_1) + \text{Tr}(M_2) = \lambda n$

$\Rightarrow \lambda = \frac{\text{Tr}(M)}{n}$ et donc $M_1 = \frac{\text{Tr}(M)}{n} I_n$ et aussi

$$M_2 = M - M_1 = M - \frac{\text{Tr}(M)}{n} I_n .$$

<u>Exercice 6</u>

1) p est une AL de $E \to E$

$\text{Ker}(p)$ un sev de E

$\text{Im}(p)$ un sev de E

$\forall x \in E$: $x = p(x) + (x - p(x))$ où $p(x) \in \text{Im}(p)$

et $x - p(x) \in \text{Ker}\, p$ car $p(x - p(x)) = p(x) - p\circ p(x) = 0$

On a donc $E = \text{Im}(p) + \text{Ker}(p)$. Montrons que

$\text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p) = \{0\}$. Soit $x \in \text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p)$

$x \in \text{Im}(p) \Rightarrow \exists\, y$, tq que $x = p(y) \Rightarrow p(x) = p\circ p(y)$

$= p(y) = x$. Donc $x = 0$

On a donc $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$

2) Matrice de φ dans $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, $\varphi(e_1) \dots \varphi(e_n)$

dans $(B_1, \dots, B_p)$ on obtient.

On choisit comme base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$

La matrice de p dans $\mathcal{B}$

$$\begin{array}{cc} p(\mathcal{B}_1) & p(\mathcal{B}_2) \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$y \in Im(p)$
$\Rightarrow \exists x \in E$ tq $p(x) = y$
d'où $p^2(x) = p(y)$
$p(x) = y$

$Tr(M) =$ nbr de 1 sur la diagonale
c'est à dire le nombre de vecteurs dans $\mathcal{B}_2$
ou encore $\dim(\mathcal{B}_2)$ d'où $tr(M) = rg(p)$

~~On~~

4) $\det(M) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$
Ici on obtient 0 sauf si $\ker p = \{0\}$

Exercice 7

Noyau de $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$, $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et sont les matrices inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$B\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} AX + AY = 0 \\ AX + AY = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{ A(X+Y) = 0$

$\Leftrightarrow A^{-1}A(X+Y) = 0$

$\Leftrightarrow I_n(X+Y) = 0$

$\Leftrightarrow Y = -X$

$\ker B = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix}, X \in \mathbb{R}^n \right\}$

Exercice 8

1) $A \in M_n(\mathbb{R})$ déterminer $rg(A, A)$ en fonction de $rg(A)$

$rg(A \ A) = rg(A \ A-A) = rg(A)$

2) $M = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$

$rg(I_n) = 0$

$rg\begin{pmatrix} I_n & & 0 \\ & c_1 & \\ 0 & & c_p \end{pmatrix} = n + rg(c)$

comme on a une matrice diagonale par bloc

$rg(M) = rg$ des blocs

Exercice 9

1) On est dans $\mathbb{R}^4$. On a une famille de 4 vecteurs on montre que la famille est libre ou génératrice

Famille libre : Soient $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 4 réels tel que $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \alpha_4 f_4 = 0$

On obtient :

$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$

$\alpha_2 - \alpha_1 = 0$ $\Leftrightarrow$ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ La famille est libre, c'est une base de $\mathbb{R}^4$

$\alpha_3 + \alpha_4 = 0$

$\alpha_4 - \alpha_3 = 0$

Avec les déterminants :

Ici $M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

8

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

déterminant d'une matrice diagonale par bloc = produit des ~~termes~~ déterminants des blocs diagonaux

La famille de vecteurs colonnes de M forment une base de $\mathbb{R}^4$

$u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par $u(f_i) = e_i$ pour $1 \leq i \leq 4$

$x \mapsto u(x)$

(f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de $\mathbb{R}^4$, donc il existe (x_1', x_2', x_3', x_4') 4 réels tels que

$x = x_1' f_1 + x_2' f_2 + x_3' f_3 + x_4' f_4$

$$u(x) = x_1' u(f_1) + x_2' u(f_2) + x_3' u(f_3) + x_4' u(f_4)$$
$$= x_1' e_1 + x_2' e_2 + x_3' e_3 + x_4' e_4$$

u est donc défini $\forall x \in \mathbb{R}^4$

Mq u est un isomorphisme

Par définition $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ est linéaire donc c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

Il faut montrer que u est bijectif.

On commence par chercher si u est injective

On cherche $\mathrm{Ker}(u)$

$x \in \mathrm{Ker}(u) \Leftrightarrow u(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 0$$

u est injective sur un espace de dimension finie donc u est bijective

2) $F = \text{Vect}(f_1, f_2) = \{ v \in \mathbb{R}^4, \ v = \lambda f_1 + \mu f_2, \ \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \}$
$G = \text{Vect}(f_3, f_4) = \{ v \in \mathbb{R}^4, \ v = \lambda f_3 + \mu f_4, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}^2 \}$

F est stable par u càd $u(F) \subset F \Leftrightarrow \forall x \in F, u(x) \in F$

Soit $x \in F$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\exists \mu \in \mathbb{R}$ tq $x = \lambda f_1 + \mu f_2$

Alors
$$\begin{aligned} u(x) &= u(\lambda f_1 + \mu f_2) \\ &= \lambda u(f_1) + \mu u(f_2) \\ &= \lambda e_1 + \mu e_2 \\ &= \ldots f_1 + \ldots f_2 \end{aligned}$$

$f_1 = e_1 - e_2$
$f_2 = e_1 + e_2$
$e_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$
$e_2 = \frac{1}{2}(f_2 - f_1)$

On obtient
$$u(x) = \lambda \left(\frac{f_1 + f_2}{2} \right) + \mu \left(\frac{f_2 - f_1}{2} \right)$$
$$= (\lambda - \mu) \frac{1}{2} f_1 + \frac{\lambda + \mu}{2} f_2 \in F$$

Montrer que G est stable par u

$G = \text{Vect}(f_3, f_4) = \text{Vect}(e_3 - e_4, e_3 + e_4) = \text{Vect}(e_3, e_4) =$
$\text{Vect}(u(f_3), u(f_4))$

3) Matrice de u dans (f_1, f_2, f_3, f_4) puis dans (e_1, e_2, e_3, e_4)

donc
$$M_{(f_1, f_2, f_3, f_4)} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} u(f_1) & u(f_2) & u(f_3) & u(f_4) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{matrix} \end{array}$$

Matrice de passage d'une base B_1 à une base B_2 :
$$P = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} & B_1 \\ B_2 & \end{array}$$

8

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

déterminant d'une matrice diagonale par bloc = produit des ~~termes~~ déterminants des blocs diagonaux

La famille de vecteurs colonnes de M forment une base de $\mathbb{R}^4$

$u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par $u(f_i) = e_i$ pour $1 \leq i \leq 4$

$x \mapsto u(x)$

(f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de $\mathbb{R}^4$, donc il existe (x_1', x_2', x_3', x_4') 4 réels tels que

$x = x_1' f_1 + x_2' f_2 + x_3' f_3 + x_4' f_4$

$u(x) = x_1' u(f_1) + x_2' u(f_2) + x_3' u(f_3) + x_4' u(f_4)$

$= x_1' e_1 + x_2' e_2 + x_3' e_3 + x_4' e_4$ u est donc défini $\forall x \in \mathbb{R}^4$

Mq u est un isomorphisme

Par définition $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ est linéaire donc c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

Il faut montrer que u est bijectif.

On commence par chercher si u est injective

On cherche $\mathrm{Ker}(u)$

$x \in \mathrm{Ker}(u) \Leftrightarrow u(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 0$$

u est injective sur un espace de dimension finie donc u est bijective

2) $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2) = \{ v \in \mathbb{R}^4, \ v = \lambda f_1 + \mu f_2, \ \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \}$

$G = \mathrm{Vect}(f_3, f_4) = \{ v \in \mathbb{R}^4, \ v = \lambda f_3, \mu f_4, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}^2 \}$

F est stable par u càd $u(F) \subset F \Leftrightarrow \forall x \in F, u(x) \in F$

Soit $x \in F$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\exists \mu \in \mathbb{R}$ tq $x = \lambda f_1 + \mu f_2$

Alors
$$\begin{aligned} u(x) &= u(\lambda f_1 + \mu f_2) \\ &= \lambda u(f_1) + \mu u(f_2) \\ &= \lambda e_1 + \mu e_2 \\ &= \dots f_1 + \dots f_2 \end{aligned}$$

$f_1 = e_1 - e_2$

$f_2 = e_1 + e_2$

$e_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$

$e_2 = \frac{1}{2}(f_2 - f_1)$

On obtient

$$u(x) = \lambda \left(\frac{f_1 + f_2}{2} \right) + \mu \left(\frac{f_2 - f_1}{2} \right)$$

$$= (\lambda - \mu) \frac{1}{2} f_1 + \frac{\lambda + \mu}{2} f_2 \in F$$

Montrer que G est stable par u

$G = \mathrm{Vect}(f_3, f_4) = \mathrm{Vect}(e_3 - e_4, e_3 + e_4) = \mathrm{Vect}(e_3, e_4) =$
$\mathrm{Vect}(u(f_3), u(f_4))$

3) Matrice de u dans (f_1, f_2, f_3, f_4) puis dans (e_1, e_2, e_3, e_4)

donc
$$M_{(f_1, f_2, f_3, f_4)} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} u(f_1) & u(f_2) & u(f_3) & u(f_4) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{matrix} \end{array}$$

Matrice de passage d'une base B_1 a une base B_2 :
$$P = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} & B_1 \\ B_2 & \end{array}$$

On a les (f_i) en fonction des (e_i) on a donc des (e_i) on a donc la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3, e_4) à (f_1, f_2, f_3, f_4)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi la matrice de passage de (f_1, f_2, f_3, f_4) à (e_1, e_2, e_3, e_4)

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} u(e_1) \dots u(e_4) & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_4 \end{matrix} \end{array} = \begin{array}{cc} f_1 \dots f_4 & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & P & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_4 \end{matrix} \end{array} \begin{array}{cc} u(f_1) \dots u(f_4) & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ f_4 \end{matrix} \end{array} \begin{array}{cc} e_1 \dots e_4 & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & P^{-1} & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ f_4 \end{matrix} \end{array}$$

TD2 - Rappel d'algèbre linéaire bis, déterminant en dimension 2 et 3

Exercice 1

1) Soient P_1 et P_2 dans $\mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$\varphi(P_1 + \lambda P_2) = \int_0^1 (P_1(x) + \lambda P_2(x))\,dx = \int_0^1 P_1(x)\,dx + \lambda \int_0^1 P_2(x)\,dx$

$= \varphi(P_1) + \lambda \varphi(P_2)$

d'où φ est linéaire. On peut directement dire que φ est une A.L d'après la linéarité de l'intégrale

2) $$M_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \dots & \varphi(X^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \dots & 1/(n+1) \end{pmatrix} \end{array} (1)$$

3) $$M_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \dots & \varphi(X^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & \dots & 1/3(n+1) \end{pmatrix} \end{array} (3)$$

4) $\dim \mathbb{R}_n[X] = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$

donc $\dim \operatorname{Ker} \varphi = n$

Exercice 2

φ forme n-linéaire

$\varphi : \begin{cases} E \to K \\ (x_1, \dots, x_n) \to \varphi(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$

Pour tout $1 \leq j \leq n$

$\varphi[(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) + \lambda(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots x_n)]$

$= \varphi((x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)) + \lambda \varphi((x_1, \dots, x_n))$

Dans l'exercice

$\pi(\lambda(x_1, \dots, x_n)) = \pi(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda x_n)$

$= \pi(\lambda_1 x_1, \dots \lambda x_n) = \lambda^n \prod x_i$ donc pas linéaire

Soient $(x_1 \ldots x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ et
$(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Pi(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$

$= \Pi x_j = x_1 x_2 \ldots x_{j-1} (x_j + \lambda x'_j) x_{j+1} \ldots x_n$

$= x_1, x_2 \ldots x_{j-1}, x_j, x_{j+1} \ldots x_n$
$+ \lambda x_1 . x_2 \ldots x_{j-1} . x'_j . x_{j+1} \ldots x_n$

$= \Pi((x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots x_n)) + \lambda \Pi((x_1, \ldots, x'_j, \ldots, x_n))$

Π est une forme n linéaire.

Lorsque qu'on échange 2 variable le résultat change de signe.

Ainsi π n'est pas alternée

Exercice 3

1) $\det \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$ donc base de $\mathbb{R}^2$

2) Déterminant de (e_1, e_2) dans (v_1, v_2)
C'est le déterminant de la matrice inverse de la precedate
$\det(e_1, e_2)_{(v_1, v_2)} = \frac{1}{7}$

3) Matrice de changement de base depuis (e_1, e_2) dans (v_1, v_2)

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$$

4) $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 3x-y \end{pmatrix}$

Matrice de u dans (e_1, e_2)

$u(e_1) = (1\ 3) = 1e_1 + 3e_2$
$u(e_2) = (1\ -1) = e_1 - e_2$

Matrice dans (e_1, e_2)

$$M_{(e_1,e_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrice de u dans (v_1, v_2)

$u(v_1) = u(1\ 2) = (3\ 1)$
$= \alpha v_1 + \beta v_2 = 6/7\, v_1 + 4/7\, v_2$

$u(v_2) = u(-3\ 1) = (-2\ -10)$
$= -\frac{32}{7} v_1 + \frac{18}{21} v_2$

$$M_{(v_1,v_2)} = \begin{pmatrix} 6/7 & -32/7 \\ 4/7 & -18/7 \end{pmatrix}$$

déterminant de A c'est le déterminant de sa matrice

Exercice 4

E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie.
ψ et φ 2 formes linéaires.
Si ~~Ker ψ~~ = Ker φ alors $\psi = \lambda \varphi$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$

1er cas Ker ψ = Ker φ = E alors ψ et φ sont égalent à la forme linéaire nulle.
d'où $\psi = \varphi$

$2^{\text{ème}}$ cas :

- $\text{Ker } \psi = \text{Ker } \varphi$ est un hyperplan de E. càd un de E de dim $n-1$.

Sur $\text{Ker } \psi = \text{Ker } \varphi$ on a $\psi(x) = 0 = \varphi(x)$ d'où $\psi(x) = \lambda \varphi(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Comme $\text{Ker } \psi = \text{Ker } \varphi = N$ est de dimension $n-1$
D'après le th de la base incomplète, il existe $v \in E$
$v \notin \underbrace{\text{Ker } \psi = \text{Ker } \varphi}_{= N}$ tel que

$E = \langle v \rangle \oplus N$

Sur $\langle v \rangle$:

On cherche l'image de v

$\psi(v) = \alpha_1 \in \mathbb{K}^*$

$\varphi(v) = \alpha_2 \in \mathbb{K}^*$

$\psi(v) = \alpha_1 \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} \in \mathbb{K}$ car $\alpha_1 \neq 0$

$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = y + z \right\}$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ donc H est un hyperplan de E.

Trouver 2 forme linéaires sur $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est H

$\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y, z) \longmapsto x - y - z$

Exercice 5

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Au lieu de considérer $z \in \mathbb{C}$

$z \mapsto az$ on considère $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$f(z) = a.z = (a_1 + ia_2)(z_1 + iz_2)$$
$$= a_1 z_1 - a_2 z_2 + (a_1 z_2 + a_2 z_1)$$

Par f $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ donne $\begin{pmatrix} a_1 z_1 - a_2 z_2 \\ a_1 z_2 + a_2 z_1 \end{pmatrix}$ f revient à l'application

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 z_1 - a_2 z_2 \\ a_1 z_2 + a_2 z_1 \end{pmatrix}$$

On cherche une expression matricielle de φ.

$\varphi\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = M \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 z_1 - a_2 z_2 \\ a_1 z_2 + a_2 z_1 \end{pmatrix}$ avec $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ alors

$M = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$ φ est définie par une matrice

$\det(\varphi) = |a|^2$

$\operatorname{tr}(\varphi) = 2\operatorname{Re}(a)$

Exercice 6

$\det A = b$ puisque triangulaire par bloc.

A est inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0$

Exercice 7

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & a^2 \end{vmatrix} = a - a^2 \quad \cancel{\neq 0} \quad \cancel{\neq 1}$$

On cherche $a(a-1) = 0$

donc $a = \{0, 1\}$

donc base si $a \neq 0 \neq 1$

La famille est liée si $\det(A) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

TD 3

Exercice 1

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^4 & b^4-a^4 & c^4-a^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^4-a^4 & c^4-a^4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{matrix} b-a & \cancel{c-a} \\ \cancel{(b-a)(b+a)(b^2+a^2)} & \end{matrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (b+a)(b^2+a^2) & (c+a)(c^2+a^2) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\left[(c+a)(c^2+a^2) - (b+a)(b^2+a^2)\right]$$

$$B = \begin{vmatrix} a+b+c+d & a+b+c+d & a+b+c+d & a+b+c+d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & a-b & d-b & c-b \\ c & d-c & a-c & b-c \\ d & c-d & b-d & a-d \end{vmatrix}$$

transvection

$$= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} a-b & d-b & c-b \\ d-c & a-c & b-c \\ c-d & b-d & a-d \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c+d)(-1)(a+d-b-c) \begin{vmatrix} d-a & b-c \\ c-b & a-d \end{vmatrix}$$

Exercice 2

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_1^2$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2-a_1 & a_2-a_1 \\ a_1 & a_2-a_1 & a_3-a_1 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_2-a_1 \\ a_2-a_1 & a_3-a_1 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (a_2-a_1)(a_3-a_2)$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2-a_1 & a_2-a_1 & a_2-a_1 \\ a_1 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & a_3-a_1 \\ a_1 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & a_4-a_1 \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \prod_{i=2}^{n} (a_i - a_{i-1})$$

Exercice 3

Contraposée $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, si f, g liée $\det = 0$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^-$ tel que $g = \lambda f$

$\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \begin{vmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} f(x) & f(y) \\ f(x) & f(y) \end{vmatrix}$

Exercice 4

1) Si $n = 2$: $V(a_{11}, a_{12}) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$

on retrouve bien l'égalité.

Si $n = 3$: $V(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{array}{l} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 \\ 0 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix}$$

On a une matrice triangulaire par bloc

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 \\ a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_1 \\ 1 & a_3 + a_1 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_1 + a_3 - (a_1 + a_2))$$
$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$$

on retrouve la formule.

2) On va montrer que :
$F(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n$
avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$

$$F(t) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} & a_2^n \\ \vdots & & & & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} & a_n^n \\ 1 & t & t^2 & \dots & t^{n-1} & t^n \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière ligne

$$+\ 1(-1)^{n+2}\begin{vmatrix} a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \vdots & & & \\ a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} + \dots + t^n(-1)^{n+1+n+1}$$

Comme les coefficients que l'on obtient devant les t^i ne dépendent pas de t on a
$F(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n$ avec les $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et indépendant de t. F est une fonction polynômiale. en t donc $d° \leq n$.
De plus les coeff de t^n est $V(a_1, \dots, a_n)$
On a $F(a_1) = 0$ car la $1^{ère}$ et la dernière ligne sont égales.
De même on a $F(a_2) = \dots = F(a_n) = 0$ car il y a chaque fois 2 lignes égales.

3) On suppose que les a_i sont tous distincts
~~Rappel~~: D'après la question 2. F est un polynôme de $d° \leq n$ tq: $F(a_1) = \dots = F(a_n)$
D'où comme les a_i sont distincts ce sont les n racines de F. On a donc

$F(t) = \gamma(t-a_1)(t-a_2)\dots(t-a_n) \qquad \gamma \in \mathbb{R}$
$\quad = \gamma t^n + \dots$

D'après la question 2. $\gamma = V(a_1, \dots, a_n)$

4) Les a_i ne sont plus 2 à 2 distincts
Alors $V(a_1, \dots, a_n) = 0$ car on a toujours 2 lignes égales

5) Montrons par récurrence $V(a_1, \dots, a_n) = \prod (a_j - a_i)$

- on a montré que (P_2 est vraie P_n)
- on suppose (P_n) vraie pour un certain $n \geq 2$.

Mq (P_{n+1}) est encore vraie.

$$V(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_{n+1} & \dots & a_{n+1}^{n-1} & a_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

$$= V(a_1, \dots, a_n)[(a_{n+1} - a_1)(a_{n+1} - a_2) \dots (a_{n+1} - a_n)]$$

$$= \left(\prod_{1 \leq i \leq j \leq n} a_j - a_i\right)((a_{n+1} - a_1) \dots (a_{n+1} - a_n))$$

$$= \prod_{1 \leq i \leq j \leq n+1} (a_j - a_i)$$

ben19721

P_{n+1} est vraie

6) Nombre de terme $(a_j - a_i)$ dans

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

donc $\dfrac{n(n-1)}{2}$ termes

Exercice 6

1) $A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

2) $A_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$

on dvpt selon la dernière colonne

$$A_{n+1} = (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 1 & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

$+ (-1)^{2n+2} A_n$

On dvpt selon la dernière ligne.

$= A_n + (-1)^{n+2} \cdot (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix}$

$= A_n - 1$

3) $A_n = A_{n-1} - 1$ donc $A_{n+1} = A_3 + (n-2)(-1)$

$A_{n-1} = A_{n-2} - 1$ $\quad = -1 + (n-2)(-1)$

$\vdots$ $\quad = (n-1) = 1 - n$

$A_5 = A_4 - 1$ d'où pour $n \geq 3$

$A_4 = A_3 - 1$ $\quad A_n = 2 - n$

Exercice 8

1) $n = 2$

$M = \begin{pmatrix} a_1 & b \\ c & a_2 \end{pmatrix}$, $\det(M) = a_1 a_2 - bc$

2) $\det(M(t)) = \begin{vmatrix} a_1+t & b+t & \cdots & b_{n}+t \\ c+t & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b_n+t \\ c+t & \cdots & c+t & a_n+t \end{vmatrix}$

On soustrait à toutes les colonnes la première on obtient : $\begin{vmatrix} a_1+t & b-a_1 & \cdots & b-a_1 \\ c+t & a_2-c & b-c \cdots & b-c \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ & \vdots & & \\ c+t & 0 & \cdots\ 0 & a_n-c \end{vmatrix}$ À part la première colonne que des scalaires

en dvpt selon la $1^{ère}$ colonne on a
$= (a_1+t)(-1)^{n+1} *_1 + (c+t)(-1) *_2 + \dots + (c+t)(-1)^{n+1} *_n$
Donc polynôme de degrès 1 : $\alpha \cancel{t} + \beta t$

3) $\det(M(-b)) = \begin{vmatrix} a_1-b & & 0 \\ & \ddots & \\ c-b & & a_n-b \end{vmatrix} = \prod(a_i-b) = \Delta_1$

Idem $\det(M(-c)) = \prod(a_i-c) = \Delta 2$

4) $\det(M(0)) = \det(M)$
$\det(Mt) = \alpha + \beta t$

$\det(M(-b)) = \alpha + \beta(-b) = \Delta_1$
$\det(M(-c)) = \alpha + \beta(-c) = \Delta_2$

$\Leftrightarrow \Big\{$

M1CP3021 Maths algèbre II 2018-2019

TD3 : Déterminants - Corrigé exo 9 et 10

Exo 9

1. La fonction Θ_u est linéaire puisque, pour f et g dans $A_n(E)$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned}\Theta_u(f+\lambda g)(x_1,\dots,x_n) = (f+\lambda g)(u(x_1),\dots,u(x_n)) &= f(u(x_1),\dots,u(x_n)) + \lambda g(u(x_1),\dots,u(x_n)) \\ &= \Theta_u(f)(x_1,\dots,x_n) + \lambda\Theta_u(g)(x_1,\dots,x_n).\end{aligned}$$

   Ainsi Θ_u est une endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 1. Sa matrice dans n'importe quelle base est donc un scalaire, et Θ_u est une homothétie :

$$\exists\lambda \in \mathbb{K}, \forall f \in A_n(E), \quad \Theta_u(f) = \lambda f. \tag{1}$$

2. Par contruction, $\det_B$ est un élément de $A_n(E)$. Ainsi, en appliquant la formule (1) avec $f = \det_B$, on obtient

$$\forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n, \quad \det_B(u(x_1),\dots,u(x_n)) = \lambda \det_B(x_1,\dots,x_n). \tag{2}$$

   On applique la formule précédente avec $x_i = e_i$, et en utilisant que $\det_B(e_1,\dots,e_n) = 1$, on trouve $\det(u) = \det_B(u(e_1),\dots,u(e_n))$. Par construction, le scalaire λ est le rapport de l'homothétie Θ_u, il ne dépend pas de la base B.

3. En appliquant la formule précédente, on a

$$\det(u\circ v) = \det_B(u(v(e_1)),\dots,u(v(e_n))),$$

   puis en utilisant (2) avec $x_i = v(e_i)$:

$$\det_B(u(v(e_1)),\dots,u(v(e_n))) = \det u \times \det_B(v(e_1),\dots,v(e_n)) = \det u \times \det v.$$

   Notons que $\Theta_u \circ \Theta_v$ est la composée de deux homothéties de rapports respectifs $\det u$ et $\det v$, c'est donc une homothétie de rapport $\det u \times \det v$. De plus on a, par définition de $\Theta_{u\circ v}$, que $\Theta_u \circ \Theta_v = \Theta_{u\circ v}$. Cela conduit également à $\det(u\circ v) = \det u \times \det v$.

Exo 10

1. Voir cours.

2. Cette écriture n'est qu'une reformulation du produit matriciel AX. On le vérifie en explicitant les coefficients : si on note $C_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk}\end{pmatrix}$, alors $\sum_{k=1}^n x_k C_k$ est une colonne dont la i-ième composante est $\sum_{k=1}^n x_k a_{ik}$. Cette somme est bien la i-ème ligne du vecteur AX, par définition du produit matriciel. Puisque $AX = B$, on déduit l'identité demandée.

3. Fixons i et plaçons le vecteur B à la i-ème position :

$$\det_B(C_1,\dots,B,\dots,C_n) = \det_B(C_1,\dots,\sum_{k=1}^n x_k C_k,\dots,C_n) = \sum x_k \det_B(C_1,\dots,C_k,\dots,C_n)$$

par multilinéarité du déterminant. De plus, $\det_{\mathcal{B}}(C_1, \ldots, C_k, \ldots, C_n) = 0$ si $k \neq i$, car la colonne C_k apparaît alors deux fois dans le calcul du déterminant. Ainsi,

$$\det_{\mathcal{B}}(C_1, \ldots, B, \ldots, C_n) = x_i \det_{\mathcal{B}}(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n) = x_i \det A,$$

ce qui prouve les formules de Cramer.

4. Pour une matrice M quelconque, Me_j est la j-ième colonne de M. Ainsi, si X vérifie $AX = e_j$, on a aussi $X = A^{-1}e_j$, et X est la j-ième colonne de A^{-1}. Ainsi, en notant m_{ij} le coefficient (i, j) de A^{-1}, on a par la question précédente

$$m_{ij} = \frac{\det_{\mathcal{B}}(C_1, \ldots, e_j, \ldots, C_n)}{\det A},$$

où le vecteur e_j a été placé en i-ième position. En développant par rapport à cette colonne, on obtient que $\det_{\mathcal{B}}(C_1, \ldots, e_j, \ldots, C_n)$ est le cofacteur de la matrice (a_{ji}). Cela prouve que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ {}^t\mathrm{com}(A).$$

TD4 - réduction des endomorphismes

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Pour trouver les vp on cherche les racines du polynôme caractéristique.

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 1-X & 2 & 0 \\ 2 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 3-X \end{vmatrix} = (3-X)\begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ 2 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= (3-X)(1+X)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= -(3-X)^2(1+X)$$

On a donc -1 et 3 les valeurs propre.

* λ est une vp d'un matrice A s'il existe $x \neq \vec{0}$ tel que $Ax = \lambda x$. On dit que x est $\vec{vp}$ associé à la vp λ.
On note E_λ le sous espace propre associé à la vp λ.
$E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda I_d) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$.
$v \in E_\lambda \Leftrightarrow (A - \lambda I_3)v = \vec{0}$
$\Leftrightarrow Av = \lambda v$.

$\lambda = -1$ est une vp simple donc $\dim E_1 = 1$
$\lambda = 3$ est une vp double donc $1 \leqslant \dim E_1 \leqslant 2$

si $\dim E_3 = 2$ A sera diagonalisable.
si $\dim E_3 = 1$ A ne sera pas diagonalisable.

$\dim E_3 = 2 \rightarrow \mathcal{B} = (u_1, u_2)$
$\dim E_{-1} = 1 \rightarrow \mathcal{B} = (u_3)$
$E_3 \cap E_{-1} = \{0\}$ si $x \in E_3 \cap E_{-1}$

$$\left.\begin{array}{l} x \in E_3 \Rightarrow Ax = 3x \\ x \in E_{-1} \Rightarrow Ax = -x \end{array}\right\} \quad 3x = -x \Rightarrow x = \vec{0}$$

$E_3 \oplus E_{-1} = \mathbb{R}^3$ dans (u_1, u_2, u_3)

$$Av = -v \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -x \\ 2x + y = -y \\ 3z = -z \end{cases} \qquad v = (1\ -1\ 0)$$

donc $E_{-1} = \text{vect}\{\underbrace{(1\ -1\ 0)}_{u_1}\}$

$$Av = 3v \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3x \\ 2x + y = 3y \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{donc} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$E_3 = \text{Vect}\{\underbrace{(1\ 1\ 0)}_{u_2}, \underbrace{(0\ 0\ 1)}_{u_3}\}$

Dans la base (u_1, u_2, u_3). la matrice A s'écrit

$$\tilde{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Au_1 & Au_2 & Au_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}$$

$\tilde{A}$ est une matrice diagonale.

Ici, P est la matrice de passage de la base de départ à la base où l'on obtient une matrice diagonale.

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

2) $$\det(B - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 5 \\ 2 & 4-\lambda & 10 \\ -1 & -2 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\lambda \\ \lambda & -\lambda & -\lambda \\ -1 & -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_1 + L_3 \\ L_2 + L_3 - L_1 \\ \end{array}$$

$$= (-\lambda^2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} \qquad = \lambda^2[-4-\lambda+4] = -\lambda^3$$

$\lambda = 0$ est une vp triple de B.

$$= (-\lambda)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4\lambda \end{vmatrix}$$

$$B\vec{v} = 0\vec{v} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 5z = 0 \\ 2x + 4y + 10z = 0 \\ -x - 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x + 2y + 5z = 0$$

$$x = -2y - 5z$$

donc $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - 5z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & 36 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

Polynôme caractéristique

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 10-\lambda & 36 \\ 0 & 1 & 10-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 10-\lambda & 36 \\ 1 & 10-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)((10-\lambda)^2 - 36)$

$= (1-\lambda)(4-\lambda)(16-\lambda)$

$= -\lambda^3 + \lambda^2(16+4+1)$

A a 3 vp distinctes $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ et $\lambda_3 = 16$

On a 3 valeurs propres distinctes en dimension 3

donc A est diagonalisable.

$\dim E_{\lambda_1} = 1$, $\dim E_{\lambda_2} = 1$, $\dim E_{\lambda_3} = 1$

d'où $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus E_{\lambda_3} = \mathbb{R}^3$

Il existe une base de $\vec{vp}$

$A\vec{v} = \lambda_1 \vec{v} \Leftrightarrow A\vec{v} = \vec{v}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = x \\ 10y + 36z = y \\ y + 10z = 0 \end{cases} = \begin{cases} 2y + 3z = 0 \\ 9y + 36z = 0 \\ y + 9z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y + 9z = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$(x, y, z) = (x\ 0\ 0) = x(1\ 0\ 0)$ $\quad E_1 = \text{Vect}\{(1\ 0\ 0)\}$

$Av = 4v \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 4x \\ 10y + 36 = 4y \\ y + 10z = 4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y + 3z = 0 \\ 6y + 36z = 0 \\ y + 6z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3z \\ y = -6z \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -z \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

$E_4 = \text{Vect}\{(3\ 6\ -1)\}$

$Av = 16v \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 16x \\ 10y + 36z = 16y \\ y + 10z = 16z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 6z \end{cases} \Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}}$

~~donc~~ $\cancel{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$ $\quad E_{16} = \text{Vect}\{(1\ 6\ 1)\}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 6z \\ z \end{pmatrix} = z(1\ 6\ 1)$

Donc $\lambda_1 = 1$ $\quad X_1 = (1\ 0\ 0)$

$\lambda_2 = 4$ $\quad X_2 = (3\ 6\ -1)$

$\lambda_3 = 16$ $\quad X_3 = (1\ 6\ 1)$

3) B est une matrice tel que :

$AB = BA$

On veut

$BX_k = \lambda X_k$

On sait que $AX_k = \lambda_k X_k$

En multipliant par B

$BAX = B(\lambda_k X_k)$

$= \lambda_k B X_k$

$\Leftrightarrow ABX_k = \lambda_k BX_k$

$Av = \lambda_k v$

$v = BX_k \in E_{\lambda_k} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_k I)$

donc $BX_k = \lambda X_k$

4) $B^2 = A$

Est ce que A et B commutent

$AB = B^2 B = B . B^2 = BA$

(X_1, X_2, X_3) est une base de $\vec{vp}$ pour A et pour B.

(car d'après 3 les $\vec{vp}$ de B sont les mêmes que ceux de A si $AB = BA$)

Dans cette base on a

$\tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

$\tilde{B} = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$

on cherche $B \,/\, B^2 = A$

$\tilde{A} = P^{-1}AP = P^{-1}B^2P$

$= P^{-1}BP \; P^{-1}BP$

$= \tilde{B}^2$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & & 0 \\ & \alpha_2^2 & \\ 0 & & \alpha_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 4 & \\ 0 & & 16 \end{pmatrix}.$

Il y a donc 2^3 possibilités.

Exercice 4

$\det(A - \lambda I_3)$

$$= \begin{vmatrix} m-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Si $m \neq 1$ est vp simple
et 1 vp double
Si $m = 1$ 1 vp triple

$$= (m-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Si $m = 1$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est diagonale au départ si $m \neq 1$ on cherche E_1

$$Av = 1v \Leftrightarrow \begin{cases} mx = x \\ y + (m^2-1)z = y \\ z = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)x = 0 \\ (m^2-1)z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (m+1)z = 0 \end{cases}$$

1^{er} sous cas $m = -1$:

$x = 0$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Comme la dimension de tous les sous espaces propre est égale à la multiplicité des vp associés A est diago.

$2^{ème}$ sous cas $m \neq -1$

$$\begin{cases} x = 0 \\ (m+1)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E_1 = \mathrm{Vect}\left((0\,1\,0)\right)$$

Comme $\dim E_1 = 1 < 2$

A n'est pas diago

Donc A diago $\Leftrightarrow$ $m \in \{1, -1\}$

$$B := \begin{vmatrix} m & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(B - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} m-\lambda & 0 & m-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ m & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} m-\lambda & m \\ m & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left[(m-\lambda)(1-\lambda) - m^2\right]$$

$$= (1-\lambda)\left[\lambda^2 - (1+m)\lambda - m^2 + m\right]$$

$$\lambda^2 - (1+m)\lambda - m^2 + m = 0$$

$$\Delta = (1+m)^2 - 4(-m^2 + m)$$

$$= (m-1)^2 + 4m^2$$

$$> 0$$

donc 2 racines distinctes :

$$\lambda_1 = \frac{(1+m) + \sqrt{(m-1)^2 + 4m^2}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{(1+m) - \sqrt{(m-1)^2 + 4m^2}}{2}$$

On sait que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ on compare λ_1, λ_2 et 1

Si $\lambda_1 = 1$

$\Leftrightarrow \quad 1 + m + \sqrt{(m-1)^2 + 4m^2} = 2$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(m-1)^2 + 4m^2} = 1 - m$

En prenant le carré :

$(m-1)^2 + 4m^2 = (1-m)^2$ on trouve $m = 0$

pour $m = 0$, $\lambda_1 = 1$

Si $\lambda_2 = 1$

$\Leftrightarrow \quad 1 + m - \sqrt{(m-1)^2 + 4m^2} = 2$

$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{(m-1)^2 + 4m^2} = 1 - m$ possible si $1 - m \leq 0$ donc $m \geq 1$

En passant au carré :

$(m-1)^2 + 4m^2 = (1-m)^2$

$\Leftrightarrow \quad m = 0$

$\lambda_2 \neq 1$ toujours. puisque

Dans le cas $m \neq 0$ on a 3 vp distinctes donc la matrice est diagonalisable.

Si $m = 0$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{1} \end{pmatrix}$

Exercice 5

1) $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$

$= (5-\lambda) \begin{vmatrix} -4-\lambda & -6 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix}$

$= (5-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$

A a 3 vp distinctes 5, 2 et -1

donc A est diagonalisable.

Il existe donc une base dans laquelle la matrice $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

2) On cherche maintenant une base de vecteurs propres (v_1, v_2, v_3) associés au vp.

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = 2$

$\lambda_3 = 5$

Pour $\lambda_3 = 5$ on peut prendre $u_3 = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit u_1 tel que :

$Au_1 = -u_1$

$$\begin{cases} -4x - 6y = -x \\ 3x + 5y = -y \\ 5x + 6y + 5z = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 6y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \\ 5x + 6y + 6z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ -10y + 6y + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ 6z = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = \frac{2}{3}y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 2/3\, y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad u_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ +2 \end{pmatrix}$$

Soit u_2 tel que :

$Au_2 = 2u_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 6y = 2x \\ 3x + 5y = 2y \\ 5x + 6y + 5z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 6y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \\ 5x + 6y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ -5y + 6y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = -3y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z \\ -3z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On note P la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (u_1, u_2, u_3)

$$P = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On détermine $P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t co(P)$ la matrice de passage de (u_1, u_2, u_3) à (e_1, e_2, e_3)

$$= \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & -2/3 & 0 \\ 1 & 4/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$A = P\tilde{A}P^{-1}$

Donc $A^n = (P\tilde{A}P^{-1})^n = P\tilde{A}^nP^{-1}$

3) $$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} = 5u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}$$

On ~~pose~~ $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ exprimer X_{n+1} en fonction de X_n

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = AX_n$$

4) En déduire On a $X_n = AX_{n-1} = A^2X_{n-2} = \dots = A^nX_0$

$X_n = A^nX_0$

Exercice 6

1) 1ère méthode :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On détermine le polynôme caractéristique :

$$\det(U - XI_5) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-X & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-X & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5-X & 5-X & 5-X & 5-X & 5-X \\ 1 & 1-X & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-X & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} \quad L_1 = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5$$

$$= (5-X) \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & C_2-C_1 & C_3-C_1 & C_4-C_1 & C_5-C_1 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -X & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -X & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -X & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -X \end{vmatrix} \end{array} = -X^4(5-X)$$

Les vp sont 5 et 0.

On note E_5 l'espace propre associé à la vp $\lambda_1 = 5$ alors $\dim E_5 = 1$

On note E_0 l'espace propre associé à la vp $\lambda_2 = 0$

On sait que $1 \leq \dim E_0 \leq 4$

On détermine E_0

$v \in E_0 \Leftrightarrow Uv = 0$

$$\begin{cases} x + y + z + s + t = 0 \\ \vdots \\ x + y + z + s + t = 0 \end{cases}$$

$(x, y, z, s, t) = (x, y, z, s, -x-y-z-s)$

$= x(1\,000-1) + y(1\,000-1) + z(0\,0\,1\,0-1) + z(0\,0\,0\,1-1)$

$\vdots$

$E_0 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$

$\dim E_0 = 4$

Comme $\dim E_0 + \dim E_5 = \dim \mathbb{R}^5$ alors la matrice est diagonalisable.

2) Fait.

~~3)~~ $\mathrm{Ker}\, f = \{ v \in \mathbb{R}^5 \,/\, f(x) = 0 \}$

$= \{ v \in \mathbb{R}^5 \,/\, f(x) = 0.v \}$

$= E_0$ espace associé à $\lambda = 0$

d'où on a : $\dim E_0 = \dim \mathrm{Ker}\, f = 4$

et donc $\dim E_0 + \dim E_5 = 5 = \dim \mathbb{R}^5$

$\rightarrow$ v est diagonalisable

On sait que $\lambda_5 = 5$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$

On sait que $X - 5 \mid \chi(X)$

$X^5 - 5X^4 + \ldots \pm (\lambda - 5) X^4$

3) $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & \cdots \\ b & \ddots & b \\ \vdots & b & a \end{pmatrix} = bU + (a-b) I_5$

Si $b = 0$, $\det(M(a,b)) = \det(aI_5) = a^5$

$\det(M(a,b)) = \det\left(b\left(U - \frac{b-a}{b} I_5\right)\right)$

$= b^5 \det\left(U - \frac{b-a}{b} I_5\right)$

$= b^5 \left(-\left(\frac{b-a}{b}\right)^4\right)\left(\frac{b-a}{b} - 5\right)$

$= (b-a)^4 (a + 4b)$

Exercice 7

A tq $rg(A) = 1$

L'espace image de l'endomorphisme associé à f.

$\dim \operatorname{Im} f = 1$

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(X)$

$f(e_i) \in \operatorname{Im} f$ d'où $\exists\, a_i \in \mathbb{R}$ tq $f(e_i) = a_i X_i$

$A = [a_1 X_1, a_2 X, \dots, a_m X]$

$A^2 = A.A$

$= \left(\left(A(a_1 X)\right)\left(A(a_2 X)\right)\left(A(a_m X)\right)\right) \overset{?}{=} Tr(A)\, A$

Pour $1 \leq i \leq m$

$A(a_i X) \overset{?}{=} Tr(A)\, a_i X$

$A(a_i X) = a_i AX$ $rg(A) = 1$ $\dim \operatorname{Ker} f = m - 1$

par th du rg

$\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$

$\Downarrow$ E_0 $\quad \overset{\shortparallel}{\operatorname{Vect}(X)}$ $\quad E_0 \oplus E_X = \mathbb{R}^m$

$f(X) = \lambda X$

Trace invariante donc :

$0 + \lambda = Tr(A)$

D'où $f(X) = Tr(A) X$

Conclusion $A^2 = Tr(A) A$

Si $Tr(A) \neq 0$ est diagonalisable

On a $\dim \mathbb{R}^n = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

$\operatorname{Ker} f = E_0$ = espace propre associé à la vp

$\lambda = 0$

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(X)$ avec X tq $f(X) = Tr(A) X$

$f(\alpha X) = \alpha f(X) = \alpha Tr(A) X$

$= Tr(A)(\alpha X)$

Donc $\operatorname{Vect}(X)$ l'espace associé à la vp $\lambda_i = Tr(A) \neq 0$

Le polynôme carac $(-1)^n X^{n-1} (X - Tr(A))$

Si $Tr(A) = 0$

On a toujours $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(X)$ avec $f(X) = 0X$

c'est à dire $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$

$\operatorname{Im} f$ n'est pas un sep de f.

Il y a une seule vp 0.

Donc le polynôme carac est $(-1)^n X^n$

Cela signifie que A a une seule vp qui est 0.

Donc son polynôme carac est $(-1)^n X^n$

Si A est diagonalisable alors A ~~est~~ doit être diagonale au départ (1 seule vp 0)

et donc A doit être égale à la matrice nulle 0.

La seule matrice nilpotente diagonalisable est la matrice nulle $(-1)^n (X - 0) \ldots (X - 0)(X - Tr(A))$,

$rg(0) = 0$ A est une matrice nilpotente tq par hypothèse $rg(A) = 1$

$A \neq \begin{pmatrix} 0 & - & 0 \\ | & & | \\ 0 & - & 0 \end{pmatrix}$ donc A n'est pas diagonalisable

TDS - Réduction des endomorphismes

Exercice 1

$\mathrm{Ker}(f) = \{v \in E \,/\, f(v) = 0\}$

$\mathrm{Ker}(f^2) = \{v \in E \,/\, f^2(v) = 0\}$

$f^2 = f \circ f$.

Soit $v \in \mathrm{Ker}\, f$ on a $f(v) = 0$

$f^2(v) = f \circ f(v) = f(f(v))$

$= f(0) = 0$ car f est une A.L

d'où $v \in \mathrm{Ker}\, f^2$ et donc $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2$

Soit $v \in \mathrm{Ker}\, f^2$ on a $f^2(v) = 0$

$f^2(v) = f(f(x)) = 0$

cela entraine que $f(v) \in \mathrm{Ker}(f)$ on ne peut rien conclure sur v.

Remarque: Si $\mathrm{Im}\, f \cap \cancel{\mathrm{Ker}\, f} = \{0\}$ alors $\mathrm{Ker}\, f^2 \subset \mathrm{Ker}\, f$

donc $\mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f$.

$\mathrm{Im}\, f = \{w \in E, \exists\, v \in E, w = f(v)\}$

$\mathrm{Im}\, f^2 = \{w \in E, \exists\, v \in E, w = f^2(v)\}$

$w \in \mathrm{Im}\, f$, $\exists\, v \in E \,/\, f(v) = w$

Est ce on peut trouver $\tilde{v} \in E$ tq $f(\tilde{v}) = w$?

$w \in \mathrm{Im}\, f^2$, $\exists\, v \in E \,/\, f^2(v) = w$

Existe t'il $\tilde{v} \in E \,/\, f(\tilde{v}) = w$

On a $f(f(v)) = w$ d'où $f(\tilde{v}) = w \Rightarrow w \in \mathrm{Im}\, f$

Donc $\mathrm{Im}\, f^2 \subset \mathrm{Im}\, f$.

M1CP3021 Maths algèbre II 2018-2019

TD5 - réduction des endomorphismes bis - Corrigé exo 1

Exercice 1

On suppose que P s'écrit

$$P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k.$$

1. Fait en TD.

2. Soit $x \in \ker(P(f))$, c'est-à-dire que x vérifie $P(f)(x) = 0$. On écrit $P(X) = a_0 + XQ(X)$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$, et par hypothèse sur P, on a $a_0 \neq 0$. Ainsi $P(f)(x) = 0$ devient

$$a_0 x + \big(f \circ Q(f)\big)(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{1}{a_0}\big(f \circ Q(f)\big)(x) = f(t),$$

   où on a utilisé la linéarité de f et on a posé $t = -\frac{Q(f)(x)}{a_0}$. Ceci prouve que $x \in \operatorname{Im} f$.

3. Soit $x \in \ker f$ vérifiant de plus $x \neq 0$. Alors $P(f)(x) = 0$. Ecrivons $P(X) = a_0 + XQ(X)$, en notant que $a_0 = P(0)$. Ceci conduit à

$$-a_0 x = \big(Q(f) \circ f\big)(x) = Q(f)(f(x)) = Q(f)(0) = 0.$$

   Puisque $x \neq 0$, on a donc $a_0 = 0$.

4. On écrit encore une fois $P(X) = a_0 + XQ(X)$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$. Soit $x \in E$ quelconque et $y = P(f)(x) = a_0 x + f\big(Q(f)(x)\big)$. Alors par hypothèse, $y \in \operatorname{Im} f$, or $f\big(Q(f)(x)\big) \in \operatorname{Im} f$, donc, puisque $\operatorname{Im} f$ est un espace vectoriel, on a $a_0 x \in \operatorname{Im} f$. Ainsi, si $a_0 \neq 0$, on a montré

$$\forall x \in E, x \in \operatorname{Im} f.$$

   ceci contredit $\operatorname{Im} f \neq E$. Donc $a_0 = 0$.

1) $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_m X^m$

$P(f) = a_0 + a_1 f + \ldots + a_m f^m \in \mathcal{L}(E)$

$(P(f))(\vec{v})$ si $P(0)=0$ alors $\mathrm{Ker}(f) \in \mathrm{Ker}\, P(f)$

et $\mathrm{Im}\, P(f) \subset \mathrm{Im}\, f$

c'est la généralisation devant

<u>Plus généralement</u>

Si $P(0)=0$ alors $a_0 = 0$

d'où $P(f) = a_1 f + a_2 f^2 + \ldots + a_m f^m$

$= (a_1 I_d + a_2 f + \ldots + a_m f^{m-1}) \circ f$

Soit $v \in \mathrm{Ker}\, f$ alors $f(v)=0$

D'où $P(f)(v) = \underbrace{(a_1 I_d + \ldots + a_m f^{m-1})}_{\in \mathcal{L}(E)} (\underbrace{f(v)}_{=0})$

$= 0$ càd $v \in \mathrm{Ker}(P(f))$ donc $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, P(f)$

Soit $w \in \mathrm{Im}\, P(f)$

$\exists\, v \in E \;/\; w = P(f)(v)$

$= f \circ (a_1 I_d + \ldots + a_m f^{m-1})(v)$

$= f\big((a_1 I_d + \ldots + a_m f^{m-1})(v)\big)$

d'où $w \in \mathrm{Im}\, f$ càd $\mathrm{Im}\, P(f) \subset \mathrm{Im}\, f$

2) Si $P(0) \neq 0$ alors $\mathrm{Ker}\, P(f)$, alors $P(f)(v) = 0$

On veut mq $v \in \mathrm{Im}\, f$

$\exists\, v \in E \;/\; v = f(v)$

$a_0 + a_1 f + \ldots + a_m f^m$ avec $a_0 \neq 0$

$P(f)(v) = 0$

$\Rightarrow (a_0 I_d + a_1 f + \ldots + a_m)(v) = 0$

$\Rightarrow a_0 v + (a_1 f + \ldots + a_m f^m)(v) = 0$

$\Rightarrow v + \left(\frac{a_1}{a_0} f + \ldots + \frac{a_m}{a_0} f^m\right)(v) = 0$ car $a_0 \neq 0$ car $P(0) \neq 0$.

Exercice 2

$f : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$ tel que si $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ est la base canonique :

$f(e_1) = e_m$, $f(e_2) = e_1$, ..., $f(e_m) = e_{m-1}$

$v = x_1 e_1 + \ldots + x_m e_m = (x_1, \ldots, x_m)$

$f(v) = x_1 f(e_1) + \ldots + x_m f(e_m)$

$= (x_2, x_3, \ldots, x_m, x_1)$

1) Matrice de f dans $(e_1, \ldots, e_m)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

2) Calculer f^m on a :

$e_1 \xrightarrow{f} e_m \xrightarrow{f} e_{m-1} \xrightarrow{f} \ldots \xrightarrow{f} e_1$

idem pour toutes les coordonnées

On trouve que $\begin{cases} f^m = Id \\ A^m = Id \end{cases} \Leftrightarrow A^m - Id = 0$

Donc c'est un polynôme annulateur de A.

Les racines de ce polynôme contient les vp de A

Comme $d°(P) = d°(A)$ on cherche les racines

$P(X) = 0$ Les racines de ce polynôme

$\Leftrightarrow X^m - 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$ sont les racines mième

$\Leftrightarrow X^m = 1$ de 1.

1) $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_m X^m$

$P(f) = a_0 + a_1 f + \ldots + a_m f^m \in \mathcal{L}(E)$

$(P(f))(\vec{v})$ Si $P(0)=0$ alors $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\, P(f)$

et $\mathrm{Im}\, P(f) \subset \mathrm{Im}\, f$

C'est la généralisation devant

<u>Plus généralement</u>

Si $P(0) = 0$ alors $a_0 = 0$

d'où $P(f) = a_1 f + a_2 f^2 + \ldots + a_m f^m$

$= (a_1 I_d + a_2 f + \ldots + a_m f^{m-1}) \circ f$

Soit $v \in \mathrm{Ker}\, f$ alors $f(v) = 0$

D'où $P(f)(v) = \underbrace{(a_1 I_d + \ldots + a_m f^{m-1})}_{\in \mathcal{L}(E)} (\underbrace{f(v)}_{0})$

$= 0$ càd $v \in \mathrm{Ker}\,(P(f))$ donc $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, P(f)$

Soit $w \in \mathrm{Im}\, P(f)$

$\exists\, v \in E \,/\, w = P(f)(v)$

$= f \circ (a_1 I_d + \ldots + a_m f^{m-1})(v)$

$= f\left((a_1 I_d + \ldots + a_m f^{m-1})(v) \right)$

d'où $w \in \mathrm{Im}\, f$ càd $\mathrm{Im}\, P(f) \subset \mathrm{Im}\, f$

2) Si $P(0) \neq 0$ alors $\mathrm{Ker}\, P(f)$, alors $P(f)(v) = 0$

On veut mq $v \in \mathrm{Im}\, f$

$\exists\, v \in E \,/\, v = f(v)$

$a_0 + a_1 f + \ldots + a_m f^m$ avec $a_0 \neq 0$

$P(f)(v) = 0$

$\Rightarrow (a_0 I_d + a_1 f + \ldots + a_m)(v) = 0$

$\Rightarrow a_0 v + (a_1 f + \ldots + a_m f^m)(v) = 0$

$|X^m| = 1 \iff |X| = 1^{1/m} = 1$

$X = |X| e^{i\theta}$

$\iff X^m = |X|^m e^{im\theta} = 1 = e^{i0}$

$m\theta = 0 \; [2\pi]$

$\theta = \frac{0}{m} \; [\frac{2\pi}{m}]$

On obtient m solutions

$\{ e^{i0}, e^{i(0+\frac{2\pi}{m})}, \dots \}$

On obtient m valeurs propres distinctes

On travaille sur $\mathbb{C}^m$ ($\mathbb{C}$-ev) qui est de dimension m

D'où A est diagonalisable.

Si on pose $u_j \in \mathbb{C}^m$ tel que $f(u_j) = e^{i(0+j\frac{2\pi}{m})} u_j$

Alors $(u_0, u_1, \dots, u_{m-1})$ est une base de $\mathbb{C}^m$

On a donc la matrice de f :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi}{m}} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & e^{i(m-1)\frac{2\pi}{m}} \end{pmatrix}$$

Si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$ si :

$m = 1 \rightarrow$ diagonalisable

$m = 2 \rightarrow P(X) = X^2 - 1$ qui 2 racines $\mathbb{R}$ distinctes

$m > 2 \rightarrow P(X) = X^m - 1$ n'a pas de racines $\mathbb{R}$ donc A ne sera pas diago dans $\mathbb{R}^m$

~~$d^\circ(\chi_A) = m$~~

Exercice 3

A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $tr(AB) \neq 0$

$$f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
$$M \longmapsto tr(AM)B$$

$$\left.\begin{array}{l} tr(AM) \in \mathbb{R} \\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \end{array}\right\} \quad tr(AB)B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Soient M_1, M_2 2 matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(M_1 + \lambda M_2) &= tr(A(M_1 + \lambda M_2))B \\ &= tr(AM_1 + \lambda AM_2)B \\ &= (tr(AM_1) + \cancel{tr}(\lambda AM_2))B \\ &= tr(AM_1)B + \lambda\, tr(AM_2)B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^2 &= tr(A\, tr(AM)B)B \\ &= tr(AM)\, tr(AB)B \\ &= f(M)\, tr(AB) \end{aligned}$$

$$f^n = tr^{n-1}(AB) f(M)$$

$P(X) = X^2 - tr(AB)X$ est un polynôme annulateur de f.

Les vp de f sont incluses dans $\{0, tr(AB)\}$

Exercice 2

1 Matrice A de f dans la base canonique

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(e_1) & \cdots & f(e_n) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} e_1 \\ \\ \\ \\ e_n \end{matrix}$$

2 Calculer f^n

$f^2(e_1) = f(f(e_1)) = f(e_n) = e_{n-1}$

$f^3(e_1) = \cancel{f^3}f(f^2(e_1)) = f(e_{n-1}) = e_{n-1}$

A chaque fois on décale d'un cran (on fait un shift)

On en déduit que $f^n(e_1) = e_1$

De même $\forall\ 1 \le i \le n \quad f^n(e_i) = e_i$

<u>Conclusion</u> $f^n = Id$

On en déduit que $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de f

Comme il n'a que des racines simples f est diagonalisable

Les valeurs propres ~~de~~ f sont inclus dans les racines de $X^n - 1$

c'est-à-dire $\{e^{i\frac{2\pi k}{n}}, 1 \le k \le n\}$

Or $\det(A - X I_n) = \begin{vmatrix} -X & 1 & & 0 \\ & -X & \ddots & \\ & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & & & -X \end{vmatrix} = -X \begin{vmatrix} -X & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -X \end{vmatrix} + (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ -X & \ddots & \\ 0 & & -X \; 1 \end{vmatrix}$

$= (-1)^n X^n + (-1)^{1+n} = (-1)^n (X^n - 1)$

Les valeurs propres sont exactement les racines $n$ième de l'unité

3 Dans $\mathbb{R}$ il n'y a qu'une ~~[illegible]~~ vp. qui est 1 ou -1 dans ! ou deux

Mais le polynôme caractéristique a des racines complexes.

Donc f n'est pas diagonalisable.

Exercice 3

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $tr(AB) \neq 0$

On pose $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$M \longmapsto tr(AM)B$

1) Mq $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc $tr(AM) \in \mathbb{R}$

D'où $tr(AM)B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

De plus pour $M_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$tr(A(M_1+\lambda M_2)) = tr(AM_1 + \lambda AM_2) = tr(AM_1) + \lambda\, tr(AM_2)$

d'après la linéarité de la trace

D'où $f(M_1 + \lambda M_2) = f(M_1) + \lambda f(M_2)$

Donc f une application linéaire

C'est-à-dire que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ ← endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2) $f^2(M) = f(f(M)) = f(tr(AM)B) = tr(AM) f(B)$

$= tr(AM)\, tr(AB)\, B = tr(AB)\, tr(AM) B$

$= tr(AB) f(M)$

D'où $f(f(M)) = tr(AB) f(M)$

Donc tout $f(M)$ tq $f(M) \neq 0$ est un vecteur propre de f associé à la vp. $tr(AB)$ $(\neq 0)$

De plus tout M tq $M \neq 0$ et $tr(AM) = 0$ est un $\vec{vp}$ de f associé à la vp 0

car $f(M) = tr(AM)B = 0 \cdot B = 0 = 0 \cdot M$

Or comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace de dimension n^2 (fini) par le th. du rang on a $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

De plus : soit $M \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$ on a :

$f(M) = 0 \Leftrightarrow tr(AM)B = 0 \Leftrightarrow tr(AM) = 0$ car $B \neq 0$ sinon $tr(AB) =$

$M \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists M_1$ tq $M = tr(AM_1)B$

d'où $0 = tr(AM) = tr(A\, tr(AM_1)B) = tr(AM_1)\, tr(AB) \Leftrightarrow 0 = tr(AM_1)$ car $tr(AB) \neq$

Or $M = tr(AM_1)B$. Donc $M = 0$. $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0\}$

On en déduit que $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont des espaces propres f est diagonalisable

<u>Remarque</u> $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$

$$M = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{nn}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \; 1 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} E_{11} + a_{12} E_{12} + \cdots + a_{nn} E_{nn}$$

avec $E_{ij} = i \begin{pmatrix} 0 & \overset{j}{\vdots} & 0 \\ \cdots & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ matrice dont les coeff sont tous nuls sauf celui sur la ième ligne et la jème colonne qui vaut 1

Donc la famille $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ engendre l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

De plus si on prend des coefficients d_{ij} tq

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} d_{ij} E_{ij} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & & & \\ d_{n1} & \cdots & & d_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire que tous les d_{ij} sont nuls

<u>$\{E_{ij}, 1 \leq i,j \leq n\}$ est donc une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$</u>

$\longrightarrow$ il y a n^2 matrices dans cette famille

d'où <u>$\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$</u>

Exercice 4

1) $\chi = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} = X(X-2)$ donc A est diagonalisable

La matrice diagonale que l'on obtient dans (u_1, u_2) est $\begin{pmatrix} 2 & \\ & 0 \end{pmatrix}$

On cherche les $\vec{vp}$

- $\lambda = 2$: $Av = 2v$

$\begin{cases} x+y = 2x \\ x+y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow x = y$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow E_2 = \text{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\lambda = 0$ $Av = 0$

$\begin{cases} x+y = 0 \\ x+y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow E_0 = \text{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2) $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable c'est à dire il existe $(u_1, \dots, u_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ tq la matrice dans cette base s'écrit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$

Trouver $2n$ vecteurs propres pour B.

$$Bv = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX + AY \\ AX + AY \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

D'après la question 1) on voit que $\vec{vp}$ sont de la forme $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ on peut donc essayer des $\vec{u}$ de la forme $\begin{pmatrix}X\\X\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}X\\-X\end{pmatrix}$ avec X un vecteur propre de A.

Si on prend $\begin{pmatrix}u_1\\u_1\end{pmatrix}$ $\quad B\begin{pmatrix}u_1\\u_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A & A\\A & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Au_1 + Au_1\\Au_1 + Au_1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}u_1\\u_1\end{pmatrix}$ est un $\vec{vp}$ de B associé à la vp $2\lambda_1$ $\quad = \begin{pmatrix}\lambda_1 u_1 + \lambda_1 u_1\\\lambda_1 u_1 + \lambda_1 u_1\end{pmatrix} = 2\lambda_1\begin{pmatrix}u_1\\u_1\end{pmatrix}$

De même si on prend $\begin{pmatrix}u_i\\u_i\end{pmatrix}$ $\quad B\begin{pmatrix}u_i\\u_i\end{pmatrix} = 2\lambda_i\begin{pmatrix}u_i\\u_i\end{pmatrix}$ d'où $\begin{pmatrix}u_i\\u_i\end{pmatrix}$ ~~est~~ une $\vec{vp}$ de B associé à la vp $2\lambda_i$

De plus si on considère $\begin{pmatrix}u_i\\-u_i\end{pmatrix}$ on a :

$B\begin{pmatrix}u_i\\-u_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A & A\\A & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_i\\-u_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Au_i - Au_i\\Au_i - Au_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}u_i\\-u_i\end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix}u_i\\-u_i\end{pmatrix}$ est un $\vec{vp}$ de $\vec{B}$ associé à la vp 0

On obtient $2n$ $\vec{vp}$:

$\begin{pmatrix}u_1\\u_1\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}u_n\\u_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}u_1\\-u_1\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}u_n\\-u_n\end{pmatrix}$

Il reste à vérifier qu'ils forment une partie libre.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et $\beta_1, \dots, \beta_n$ tel que

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n\\\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n\end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n = 0\\\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n = 0\end{cases}$$

$$\underset{\ell_1 - \ell_2}{\overset{\ell_1 + \ell_2}{\Leftrightarrow}} \begin{cases}2\alpha_1 u_1 + \dots + 2\alpha_n u_n = 0\\2\beta_n u_1 + \dots + 2\beta_n u_n = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0 \\ \beta_1 = \dots = \beta_m = 0 \end{cases}$$

Comme on a une base de $2m$ vecteurs propres de B donc B diagonalisable.

Dans la base $\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ -v_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u_m \\ -v_m \end{pmatrix}$ B s'écrit

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 2\lambda_m & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

1) $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ est inversible

$\Leftrightarrow \exists\, B \in M_m(\mathbb{R}) \quad AB = BA = I_m$

A est tq $A^3 - A = I_m$

$\Leftrightarrow A(A^2 - I_m) = I_m$

$ \overset{\parallel}{(A^2 - I_m)A}$

d'où A est inversible et $A^{-1} = A^2 - I_m$

c'est à dire $\det(A) \neq 0$

2) Mq si $\det(A) < 0$ alors $\det(A + I_m) < 0$

$\det(A - I_m) > 0$

On sait que

$\det(A^3 - A) = \det(I_m) = 1$

$\det(A(A^2 - I_m)) = \det(A(A + I_m)(A - I_m))$

d'où $\det(A)\det(A + I_m)\det(A - I_m) = 1$

si $\det(A) < 0$ alors $\det(A + I_m)\det(A - I_m) < 0$

Polynôme carac $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$

On a $\det(A+I_n) = \chi_A(-1) < 0$

$\det(A - I_n) = \chi_A(1) > 0$

On sait que $\chi_A(0) = \det(A) < 0$

D'après la relation $A^3 - A = I_n$ on a

$A + I_n = A^3$.

d'où $\det(A+I_n) = \det(A^3)$

$= \det(A)^3 < 0$

$= \det(A)^3 > 0$

3) Le polynôme caractéristique χ_A vérifie.

	$-\infty$	-1	0	λ	1	$+\infty$
χ_A	?	<0	<0	0	>0	

χ_A étant continue il prend toutes les valeurs entre $\chi_A(0) < 0$ et $\chi_A(1) > 0$

Par le TVI il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que $\chi_A(\lambda) = 0$

Comme λ est une vp λ est une racine de tout polynôme annulateur de A.

Ici on a $A^3 - A - I_n = 0$ donc $X^3 - X - 1$ est un pol annulateur de A d'où λ est une racine de $X^3 - X - 1$.

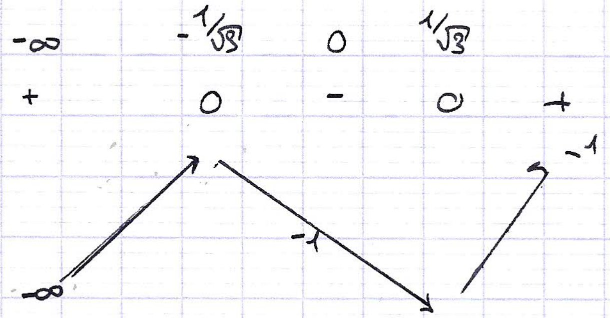
~~4.~~ 5) c'est un procédé par l'absurde puisque on veut conclure que $\det(A) > 0$ alors que l'on a supposé $\det A < 0$.

Montrons que $\lambda \in]0,1[$ est racine de $X^3 - X - 1$ est absurde

$P(X) = X^3 - X - 1$ ~~est absurde~~.

$P'(X) = 3X^2 - 1$

$=$



Sm

Exercice 6

$A \in M_n(\mathbb{R})$ trigonalisable $\Leftrightarrow \chi_A$ est scindé
c'est à dire il existe une base dans lequel la matrice s'écrit : $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\tilde{A}^2 = \tilde{A}.\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^2 + \tilde{A} + I_n = \begin{pmatrix} \lambda_1^2+\lambda_1+1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^2+\lambda_n+1 \end{pmatrix}$$

donc $\operatorname{tr}(\tilde{A}^2 + \tilde{A} + I_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + \lambda_i + 1$

La trace est invariante par changement de base.
donc $\operatorname{tr}(A^2 + A + I_n) = \operatorname{tr}(\tilde{A}^2 + \tilde{A} + I_n)$
$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + \lambda_i + 1$

Si on note P la matrice de passage de la base de dépat à la base de dépat à la base de diagonalisation.

$A = P\tilde{A}P^{-1} \Rightarrow A^2 = \tilde{P}A^2P^{-1}$ et $I_n = PI_nP^{-1}$
d'où $A^2+A+1 = P\tilde{A}^2P^{-1} + P\tilde{A}P^{-1} + PI_nP^{-1}$
$= P(\tilde{A}^2 + \tilde{A} + I_n)P^{-1}$

Il suffit de montrer que $P(x) = x^2 + x + 1 \geq 3/4$

$P'(X) = 2x+1$ $\quad P'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1/2$

$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & -1/2 & & +\infty \\ \hline P' & & - & 0 & + & \\ \hline P & +\infty & \searrow & 3/4 & \nearrow & +\infty \end{array}$$

$P(-1/2) = (-1/2)^2 + (-1/2) + 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

Déterminer une matrice tq:

$tr(A^2 + A + 1) = \frac{3}{4} n$

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + \lambda_i + 1 = \frac{3}{4} n$

Il suffit de trouver une matrice trigonalisable dont toutes les vp égale à $-1/2$

Par exemple $\begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix} -1/2 & * \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

TD6 - Application de la réduction

Exercice 1

1) $u_5 = 5$

2) $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$

Trouver A tel que $X_{n+1} = AX_n$

$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+1} + u_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a u_n + b u_{n+1} \\ c u_n + d u_{n+1} \end{pmatrix}$

Par identification

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A$

3) $X_n = AX_{n-1}$

$= A^2 X_{n-2}$

$\vdots$

$= A^n X_0$

4) Polynôme caractéristique de A.

$\chi_A(X) = \det(A - XI_2)$

$= \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} = -X(1-X) - 1 = X^2 - X - 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)$

$= 5$

il y a 2 racines distinctes distinctes

Comme χ_A est un pol. à racines simples. A est diago

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

• λ_1 : $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} x \\ x+y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} y \end{cases}$

$$x + \frac{1-\sqrt{5}}{2} x = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 x$$

$$= \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} x$$

$$= \frac{6-2\sqrt{5}}{4} x$$

$$= x + \frac{2-2\sqrt{5}}{4} x$$

$$= x + \frac{1-\sqrt{5}}{2} x$$

Le système est équivalent à

$y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} x$

$E_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\right)$

Pour $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} x & (1) \\ x+y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} y & (2) \end{cases}$ En remplaçant (1) dans (2) on trouve que l'égalité est vraie

d'où on obtient le système $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} x$
et donc $E_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\right)$

Soit P la matrice de passage de la base de départ à la base (u_1, u_2)

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \frac{1}{1+\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

5) $P^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix}$ déduire l'expression de u_n en fonction de $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^n$

On a $A = P\tilde{A}P^{-1}$ d'où $A^n = P\tilde{A}^nP^{-1}$

$$\tilde{A}^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mu^n & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu^n & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -\mu & +1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\begin{pmatrix} \mu^n & \lambda^n \\ \mu^{n+1} & \lambda^{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -\mu & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\begin{pmatrix} \mu^n & \lambda^n \\ \mu^{n+1} & \lambda^{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -\mu & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\begin{pmatrix} \mu^n\lambda - \lambda^n\mu & -\mu^n + \lambda^n \\ \mu^{n+1}\lambda - \lambda^{n+1}\mu & -\mu^{n+1} + \lambda^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -\mu^{n+1} + \lambda^{n+1} & -\mu^n + \lambda^n \\ -\mu^n + \lambda^n & -\mu^{n+1} + \lambda^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$X_n = A^n X_0 = A^n\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -\mu^n + \lambda^n \\ -\mu^{n+1} + \lambda^{n+1} \end{pmatrix}$$

6) Équivalent de la suite en $+\infty$

$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n\right)\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n\right)$$

$$-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} < 1$$

$\Leftrightarrow -1-\sqrt{5} < 1-\sqrt{5} < 1+\sqrt{5}$

donc $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} 1$$

donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$$u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Exercice 3

$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 4}$ diagonalisable on pose $u_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ t_n \end{pmatrix}$

Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et de A.
On a $u_{n+1} = A u_n$ c'est le système s'écrit sous forme matricielle.
Exprimer u_n en fonction de u_0 et de A
$u_n = A^n u_0$
Il faut donc déterminer A^n ou au moins pouvoir dire quelque chose sur $\lim\limits_{n \to +\infty} A^n$

Comme A est diagonalisable il existe une base de $\mathbb{C}^4$ dans laquelle la matrice A s'écrit:

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ Si on note P la matrice de passage de la $1^{ère}$ base à la base de diagonalisation

$A = P\tilde{A}P^{-1}$ et donc $A^n = P\tilde{A}^n P^{-1}$
D'où $\lim A^n = P \lim\limits_{n \to +\infty} \tilde{A}^n P^{-1}$ or $\tilde{A}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^n \end{pmatrix}$

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ tq $|\lambda| < 1$
$\lambda^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Comme $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1$ ...
$\lim\limits_{n \to +\infty} \tilde{A}^n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

d'où $\lim_{n\to+\infty} A^n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et donc $\lim u_n = \lim \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$u_{n+1} = a u_n$ Si $|a|<1$ $u_n \to 0$

$u_n = a^n u_0$

2) a) On suppose maintenant que λ_1 est une vp de A tq $|\lambda_1|>1$

Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$ un $\vec{vp}$ associé à λ_1

$AU = \lambda_1 U$ et $U \neq 0$ $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Si on pose $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix}$ alors l'une des suites $(|x_n|)$ $(|y_n|)$ $(|z_n|)$ et $(|t_n|)$ tend vers $+\infty$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \lambda_1^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ t_n \end{pmatrix} = \lambda_1^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$

En effet pour $n=0$

$\lambda_1^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$ ppté vraie

On suppose que l'on a

$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ t_n \end{pmatrix} = \lambda_1^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$

On montre que c'est encore vrai au rang $n+1$:

$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ t_n \end{pmatrix} = A \lambda_1^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$

$$= \lambda_1^{m} A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = \lambda_1^{m} \lambda_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = \lambda_1^{m+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$$

La ppté est vraie au rang $m+1$

On a $\begin{cases} x_m = \lambda_1^{m} x_0 \\ y_m = \lambda_{\cancel{2}}^{m} y_0 \\ z_m = \lambda_1^{m} z_0 \\ t_m = \lambda_1^{m} t_0 \end{cases}$

Comme $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A est une matrice triangulaire
On cherche donc A^m

On va montrer que

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Par récurrence :

Si $m = 1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

P_1 est vraie
On suppose la ppté vraie au rang m on l'a montre au rang $m+1$:

$$A^{m+1} = A^m . A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & m+1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où la propriété est encore vraie au rang $n+1$ et donc $\forall n \geq 1$ on a : $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ t_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \quad \text{D'où} \quad \begin{cases} x_n = x_0 + n t_0 \\ y_n = y_0 \\ z_n = z_0 \\ t_n = t_0 \end{cases}$$

(y_n), (z_n) et (t_n) sont des suites cte
La seule suite qui peut vérifier $|u_n| \to +\infty$ est donc (x_n).
Or $|x_n| = |x_0 + n t_0|$ donc il faut $t_0 \neq 0$

Exercice 6

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases}$$

$y'/y = 1 \Leftrightarrow \int y'/y = \int 1 \Leftrightarrow y = K_1 e^t, \ K_1 \in \mathbb{R}$

$x' = x + K e^x$
On cherche une solution de l'équation homogène
$x' = x$
$\Leftrightarrow x = K_2 e^t \quad K_2 \in \mathbb{R}$
Solution particulière de (1) par variation de la cte.
$x(t) = K_2(t) e^t$
$x'(t) = K_2'(t) e^t + K_2(t) e^t$
On remplace dans (1)
$K_2'(t) e^t + K_2(t) e^t = K_2(t) e^t + K_1 e^t$
D'où $K_2'(t) = K_1$ et donc $K_2(t) = K_1 t + K_3$, $K_3 \in \mathbb{R}$

$x(t) = (K_1 t + K_3) e^t$

Méthode utilisée en algèbre :

On écrit le système sous forme d'égalité matricielle

$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$

Le système devient $X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X(t) = AX(t)$

On va chercher une solution de la forme

$x(t) = \ldots \exp(tA)$

~~exp~~ Ici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc $t^n A^n = \begin{pmatrix} t^n & nt^n \\ 0 & t^n \end{pmatrix}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = \begin{pmatrix} \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} & \sum_{n \geq 0} \frac{nt^n}{n!} \\ 0 & \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{nt^n}{n!} = \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{(n-1)!} = \sum_{n \geq 1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = t \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} = t e^t$$

$n = n-1$

$\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$

$X(t) = \exp(tA) X_0 = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$

Exercice 5

$$\begin{cases} x'(t) = i\alpha y(t) \\ y'(t) = i\alpha x(t) \end{cases}$$

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i\alpha \\ i\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = AX(t)$$

$$\chi_A = \begin{vmatrix} -X & i\alpha \\ i\alpha & -X \end{vmatrix} = (X - i\alpha)(X + i\alpha)$$

Le polynôme caractéristique est scindé à racine simple d'où A est diagonalisable.

Donc $\tilde{A} = \begin{pmatrix} i\alpha & 0 \\ 0 & -i\alpha \end{pmatrix}$

On obtient $t\tilde{A} = \begin{pmatrix} i\alpha t & 0 \\ 0 & -i\alpha t \end{pmatrix}$ et $\exp(tA) = \begin{pmatrix} \exp(i\alpha t) & 0 \\ 0 & \exp(-i\alpha t) \end{pmatrix}$

On a $\exp(tA) = P \exp(t\tilde{A}) P^{-1}$

$$= P \begin{pmatrix} e^{i\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$=$

On cherche les $\vec{vp}$:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = i\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} i\alpha x_2 = i\alpha x_1 \\ i\alpha x_1 = i\alpha x_2 \end{cases}$$

$E_{i\alpha} = \mathrm{Vect}\{(1,1)\}$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -i\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} i\alpha x_2 = -i\alpha x_1 \\ i\alpha x_1 = -i\alpha x_2 \end{cases}$$

$E_{-i\alpha} = \mathrm{Vect}\{(1,-1)\}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp(tA) = P\exp(t\tilde{A})P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha t} \end{pmatrix} (-1/2) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1/2) \begin{pmatrix} e^{i\alpha t} & e^{-i\alpha t} \\ e^{i\alpha t} & -e^{-i\alpha t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t} & -e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t} \\ e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t} & e^{i\alpha t} + e^{i\alpha t} \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \exp(tA)X_0$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\left((e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t})x_0 + (e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t})y_0 \right)$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\left((e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t})x_0 + (e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t})\, y_0 \right)$$

Exercice 6

Comme A est diagonalisable $A = P\tilde{A}P^{-1}$

On a alors $\exp(A) = P\exp(\tilde{A})P^{-1}$

$$\det(\exp(A)) = \det(P\exp(\tilde{A})P^{-1})$$

$$= \det(\exp(\tilde{A}))$$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) = \exp(\mathrm{tr}(A))$$

Exercice 7

Soit $X' = \begin{matrix} 2a & a & 0 \\ a & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{matrix} \quad X_0$

$$\chi_A = \begin{matrix} 2a-X & a & 0 \\ a & 2a-X & 0 \\ 0 & 0 & 2a-X \end{matrix} = (2a-X) \begin{vmatrix} 2a-X & a \\ a & 2a-X \end{vmatrix}$$
$$= -(X-2a)(X-3a)(X-a)$$

3 vp donc diago.

E_a : $Au = au \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + ay = ax \\ ax + 2ay = ay \\ 2az = az \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \; u_1$ $\quad E_a = \mathrm{Vect}((1,1,0))$

E_{2a} : $Au = 2au \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + ay = 2ax \\ ax + 2ay = 2ay \\ 2az = 2az \end{cases}$ $\quad E_{2a} = \mathrm{Vect}((0,\overset{u_2}{0},1))$

E_{3a} : $Au = 3au \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + ay = 3ax \\ ax + 2ay = 3ay \\ 2az = 3az \end{cases}$ $\quad u_3 \quad E_{3a} = \mathrm{Vect}((1,1,0))$

Donc $P = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$ et $\tilde{A} = \begin{matrix} a & & \\ & 2a & \\ & & 3a \end{matrix}$

$$\exp(tA) = P^{+1} \exp(t\tilde{A}) P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{at} & & \\ & e^{2at} & \\ & & e^{3at} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{at} + \frac{1}{2} e^{3at} & -\frac{1}{2} e^{at} + \frac{1}{2} e^{3at} & 0 \\ -\frac{1}{2} e^{at} + \frac{1}{2} e^{3at} & \frac{1}{2} e^{at} + \frac{1}{2} e^{3at} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2at} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \left(\frac{1}{2} e^{at} + \frac{1}{2} e^{3at}\right) x_0 + \left(-\frac{1}{2} e^{at} + \frac{1}{2} e^{3at}\right) y_0$$

$$y(t) = \left(-\frac{1}{2} e^{at} + \frac{1}{2} e^{3at}\right) x_0 + \left(-\frac{1}{2} e^{at} + \frac{1}{2} e^{3at}\right) y_0$$

$$z(t) = e^{2at} z_0$$

$$|x(t)| + |y(t)| + |z(t)| \pm e^{3at} x_0 - (e^{at} + e^{3at}) y_0 + e^{2at} y_0$$

Rappel

TD7 - Produit scalaire

E un ev

$\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto \varphi(x,y)$

φ est un produit scalaire ssi φ est une forme bilinéaire symétrique (fbs) définie positive.

φ bilinéaire : φ est linéaire par rapport à chaque variable.

- $x_1, x_2 \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\varphi(x_1 + \lambda x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \lambda \varphi(x_2, y)$

- $y_1, y_2 \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\varphi(x, y_1 + \lambda y_2) = \varphi(x, y_1) + \lambda \varphi(x, y_2)$

φ symétrique : $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$

Pour montrer que φ est fbs on montre φ positive et bilinéaire ou bilinéaire et symétrique

Exercice 1

On veut montrer que $\sum k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)}{2\sqrt{3}} \sqrt{2n+1}$

$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} = 1\sqrt{1} + \dots + n\sqrt{n}$

$= \langle X, Y \rangle$ $\quad X = (1, 2, \dots, n)$

$Y = (\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n})$

Appliquons Cauchy-Schwarz à X et Y

norme associée à $\langle \ , \ \rangle$

$N(X) = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

$|\langle X, Y \rangle| \leq N(X) N(Y)$ ici $|\langle X, Y \rangle| = \left|\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k}\right| = \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k}$

$$N(X) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^2} = \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^{1/2}$$

$$N(Y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k})^2} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{1/2}$$

$$N(X)N(Y) = \frac{n(n+1)}{2}\sqrt{\frac{2n+1}{3}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)}{2\sqrt{3}}\sqrt{2n+1}$$

Exercice 2

$E = C^0([a,b])$
$= \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ , continue} \}$
E est un $\mathbb{R}$-ev.

Montrons que $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$
$(f,g) \mapsto \varphi(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$

Donc $\varphi(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx \in \mathbb{R}$

φ est symétrique : $\varphi(g,f) = \int_a^b g(x)f(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$
$= \varphi(f,g)$.

φ est bilinéaire : Soient $f_1, f_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi(f_1+\lambda f_2, g) = \int_a^b (f_1(x)+\lambda f_2(x))\,g(x)\,dx$$
$$= \int_a^b f_1(x)g(x)\,dx + \lambda \int_a^b f_2(x)g(x)\,dx$$
$$= \varphi(f_1, g) + \lambda\varphi(f_2, g)$$

Donc φ est une fbs.

$\cdot\ \varphi$ est positive : $\varphi(f,f) = \int_a^b f^2(t)\,dt$
f^2 est une fonction positive donc son intégrale sur $[a,b]$ est positive.

φ est défini sur E

$\varphi(f,f) = 0 \Rightarrow \int_a^b f^2(t)\,dt = 0$

Comme f^2 est positive son intégrale est nulle ssi $f^2(t) = 0$ sur $[a,b]$ c'est à dire $f(t) = 0$ sur $[a,b]$

$\Rightarrow f = 0$.

2) Norme associée à φ : $N(f) = \sqrt{\varphi(f,f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt}$

D'après Cauchy-Schwarz. si $f, g \in E$ alors

$|\varphi(f,g)| \leq N(f)N(g)$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt}\,\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt}$$

Par rapport à l'inégalité on garde f et on pose $g = 1$. On obtient

$$0 \leq \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt}\,\sqrt{\int_a^b 1^2\,dt}$$

Il y a égalité dans Cauchy-Schwartz si f et g sont colinéaires càd $f = \lambda g$

On a pris $g = 1$ donc $f = \lambda$

c'est à dire que f doit être une fonction cte

3) f est de classe C^1 sur $[a,b]$ et $f(a) = 0$.

$$\int_a^b f'(u)\,du = [f(u)]_a^b = f(b) - f(a)$$

$$f(t) = \int_a^t f'(u)\,du = f(t) - f(a) = f(t)$$

$$\Rightarrow f^2(t) = \left(\int_a^t f'(t)\,dt\right)^2 \leq (t-a)\int_a^t f'^2(t)\,dt$$

$$f^2(t) \leq (t-a)\int_a^b (f'(u))^2 du$$

On a $0 \leq f^2(t) \leq (t-a)\int_a^b (f'(u))^2 du$

D'après les propriétés de l'intégrale :

$$\int_a^b f^2(t)dt \leq \int_a^b (f'(u))^2 du \int_a^b (t-a)dt$$

d'où $\int_a^b f^2(t)dt \leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (f'(t))^2 dt$

Exercice 3

1) Symétrie : $tr({}^tBA) = tr({}^t({}^tBA))$

$= tr({}^tA\,{}^t({}^tB))$

$= tr({}^tAB) = \langle A, B\rangle$

Linéaire par rapport à la $2^{ème}$ variable

Soient $A, B_1, B_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$\langle A, B_1 + \lambda B_2\rangle$

$= tr({}^tA(B_1 + \lambda B_2))$

$= tr({}^tAB_1) + \lambda tr({}^tAB_2)$ car $tr(\cdot)$ est linéaire

$= \langle A, B_1\rangle + \lambda\langle A, B_2\rangle$

Donc $\langle , \rangle$ est une fbs.

$\langle A, A\rangle = tr({}^tAA)$

$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$ ${}^tA = \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$

donc $tr({}^tAA) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0$

$\langle , \rangle$ est défini $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 0$.

$\Leftrightarrow a_{ij}^2 = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

2) Si E est un ev muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$.
- $F \subset E$ orthogonal de F : $F^\perp = \{ g \in E, \forall f \in F, \langle f, g \rangle = 0 \}$
- Si F est un sev de E, alors $F^\perp$ est un sev de E, on a $F \oplus F^\perp = E$.

$\mathcal{D} = \{ M \in M_n(\mathbb{R}), M$ est diagonale $\}$

Déterminons $\mathcal{D}^\perp$

$M \in \mathcal{D}^\perp \Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{D}, \langle D, M \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{D}, tr({}^tDM) = 0$

$\Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{D}, tr(DM) = 0$

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ réels

$\lambda_1 m_{11} + \ldots + \lambda_n m_{nn} = 0$

Ceci est vraie si $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$

$\Leftrightarrow m_{11} = 0$

En réitérant on obtient $m_{11} = m_{22} = \ldots = 0$

Donc $\mathcal{D}^\perp = \{ M \in M_n(\mathbb{R})$ à diagonale nulle $\}$

3) $\mathcal{N} = \{M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), \ tr(M) = 0\}$
$= Ker(tr) \Rightarrow$ c'est un sev.

c'est un hyperplan de E donc sa dimension est
$dim(E) - 1 = m^2 - 1$.

Comme $\mathcal{N}$ est un sev de E
$\mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^{\perp} = E$
d'où $dim \ \mathcal{N}^{\perp} = 1$
d'où $\mathcal{N}^{\perp}$ est engendré par 1 élément

$N \in \mathcal{N}^{\perp} \Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{N}, \langle M, N \rangle = 0$
$\Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{N}, \ tr({}^tNM) = 0$
Si $N = I_m$ alors ${}^tN = {}^tI_m = I_m$ et ${}^tNM = M$

—

$E = \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \ a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

$\mathcal{N} = \{M \in E, \ tr(M) = 0 = Ker(tr)$
$\mathcal{N}$ est sev de E tq $dim \ \mathcal{N} = m^2 - 1$

—

4) F le sev des matrices symétriques
- $F \neq \emptyset$ $\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in F$
- Si $M \in F$ alors ${}^tM = M$
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a
${}^t(\lambda M) = \lambda {}^tM = \lambda M \in F$
- Si $M_1, M_2 \in F$ alors
${}^t(M_1 + M) = {}^tM_1 + {}^tM_2 = M_1 + M_2 \in F$

$\dim F = \dfrac{n(n+1)}{2}$ — on devait faire des révisions

~~M=~~

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si ${}^tM = -M$

$G = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tM = -M \}$

Si ${}^tM = -M$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \qquad {}^tM = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{1n} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

${}^tM = -M \Rightarrow \forall\, 1 \leq i \leq n,\ m_{ii} = -m_{ii}$

$m_{ii} = 0$

$\dim G = \dfrac{(n-1)n}{2}$

$F \cap G = \{0\}$ $\qquad F \oplus G = E$

$\dim F + \dim G = \dim E = n^2$

Soit $M_1 \in F$, $M_2 \in G$ montrons que $\varphi(M_1, M_2) = 0$

$\varphi(M_1, M_2) = 0$

$= tr({}^tM_1 M_2) = tr(M_1 M_2)$

$= tr({}^tM_2 M_1) = -tr(M_1 M_2)$

d'où $tr(M_2 M_1) = 0$ donc $\varphi(M_1, M_2) = 0$

$F^{\perp} = G$.

$E = F \oplus F^{\perp}$

$M \in E,\ \exists!\ M_1 \in F,\ M_2 \in G,\ M = M_1 + M_2$

$P : E \to F$

$P(M) = P(M_1) + P(M_2)$ $\qquad {}^tM = -{}^t({}^tM)$

$= M_1 + 0$ $\qquad = -M$ $\qquad$ x

$M = M + {}^tM - {}^tM$

$= {}^t(M + {}^tM) - {}^tM = {}^tM + M - {}^tM$

$$M = \frac{M+{}^tM}{2} + \frac{M-{}^tM}{2}$$

$${}^t\left(\frac{M+{}^tM}{2}\right) = \frac{{}^tM+M}{2} = \frac{M+{}^tM}{2} \in F$$

$${}^t\left(\frac{M-{}^tM}{2}\right) = \frac{{}^tM-M}{2} = -\frac{M-{}^tM}{2} \in G$$

$$P(M) = \frac{M+{}^tM}{2}$$

Procédé de Gram - Schmidt

E ev euclidien $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E.
→ transformation en une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ c'est à dire $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

$\|.\|$ est la norme associée à $\langle , \rangle$.

- $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$

- $\varepsilon_2 = u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1$
  ε_2 est une combinaison linéaire de u_2 et e_1 c'est à dire de u_2, u_1 et donc $\varepsilon_2 \neq 0$
  de plus $\langle \varepsilon_2, e_1 \rangle = \langle u_2, e_1 \rangle - \langle u_2, e_1 \rangle \langle e_1, e_1 \rangle$
  $= 0$
  On pose alors $e_2 = \frac{\varepsilon_2}{\|\varepsilon_2\|}$

(e_1, e_2) vérifiant $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$
$\|e_1\| = \|e_2\| = 1$

- $\varepsilon_3 = u_3 - \langle u_3, e_1 \rangle e_1 - \langle u_3, e_2 \rangle e_2$

Comme avant $\varepsilon_3 \neq 0$ car combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_3 avec des coefficients non tous nuls.

$\langle \varepsilon_3, e_1 \rangle = \langle u_3, e_1 \rangle - \langle u_3, e_1 \rangle \langle e_1, e_1 \rangle = \|e_1\|^2 = 1$
$- \langle u_3, e_2 \rangle \langle e_1, e_2 \rangle$
$\overset{\shortparallel}{0}$

$= \langle u_3, e_1 \rangle - \langle u_3, e_1 \rangle = 0$

$\Rightarrow e_3 \perp e_1$

$\langle \varepsilon_3, e_2 \rangle = \langle u_3, e_2 \rangle - \langle u_3, e_1 \rangle \underbrace{\langle e_1, e_2 \rangle}_{=0} - \langle u_3, e_2 \rangle \underbrace{\langle e_2, e_2 \rangle}_{=1}$

$= \langle u_3, e_2 \rangle - \langle u_3, e_2 \rangle = 0$

$\Rightarrow \varepsilon_3 \perp e_2$

On pose alors $e_3 = \dfrac{\varepsilon_3}{\|\varepsilon_3\|}$

On a (e_1, e_2, e_3) vérifiant $e_1 \perp e_2$, $e_1 \perp e_3$ et $e_2 \perp e_3$

$\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1$

Plus généralement si on a construit $(e_1, \dots, e_p)$ tel que tout ces $\vec{v}$ sont 2 à 2 $\perp$ et tel que $\|e_1\| = \dots = \|e_p\| = 1$

On construit ε_{p+1} et e_{p+1} de manière suivante :

$\varepsilon_{p+1} = u_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \langle u_{p+1}, e_i \rangle e_i$

Application

$u_1 = (1, 2, 2)$

$u_2 = (1, 3, 1)$

$u_3 = (0, 12, 6)$

1) $\det(u_1, u_2, u_3) = 18 \neq 0$ donc (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$

2) Par Gram Schmidt :

$e_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \dfrac{1}{3}(1, 2, 2)$

$\varepsilon_2 = u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1$

$\langle u_2, e_1 \rangle = \dfrac{1}{3}(1.1 + 2.3 + 2.1)$

$= 3$

$\varepsilon_2 = (0, 1, -1)$

$\|\varepsilon_2\| = \sqrt{2}$

d'où $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$

$\varepsilon_3 = u_3 - \langle u_3, e_1\rangle e_1 - \langle u_3, e_2\rangle e_2$

$\langle u_3, e_1\rangle = 12$.

$\langle u_3, e_2\rangle = 3\sqrt{2}$.

$\varepsilon_3 = (0, 12, 6) - \frac{12}{3}(1, 2, 2) \quad = \quad (-4, 1, 1)$

$- 3\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,(0, 1, -1)$

$\|\varepsilon_3\| = 3\sqrt{2}$

3) p projection $\perp$ sur $F = \mathbb{R}u_1 = \text{vect}(u_1) = \text{vect}(e_1)$

Matrice de p dans (e_1, e_2, e_3)

$$M = \begin{array}{cccc} p(e_1) & p(e_2) & p(e_3) & \\ 1 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_3 \end{array}$$

$p(e_1) = e_1$

$p(e_2) = 0$

$p(e_3) = 0$

La matrice de p dans (u_1, u_2, u_3)

$M = P\tilde{M}P^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -4/3\sqrt{2} \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \\ 2/3 & -1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -4 \\ 2\sqrt{2} & 3 & 1 \\ 2\sqrt{2} & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$P^{-1} =$

La matrice p dans (u_1, u_2, u_3)

$p(u_1) =$ projection de u_1 sur $\mathbb{R}u_1$

$$\begin{array}{cccc} p(u_1) & p(u_2) & p(u_3) & \\ \frac{\langle u_1 e_1\rangle}{\|u_1\|} & \frac{\langle u_2 e_1\rangle}{\|u_2\|} & \frac{\langle u_3 e_1\rangle}{\|u_3\|} & u_1 \\ 0 & 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 0 & u_3 \end{array}$$

$\text{rang}(P) = \text{rang}(\tilde{M})$
$= 1$

$\text{rang}(p) = \dim \text{Im}(p) = 1$

Exercice 2 (suite)

1) $F = \mathbb{R}_2[x]$

$\langle , \rangle : F \times F \to \mathbb{R}$

$(f,g) \mapsto \langle f,g \rangle$

$= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$

Base orthonormale : on part de la base canonique $(1, X, X^2)$.

$\|1\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} dx} = \sqrt{2}$

$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\varepsilon_2 = u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1$

$= u_2$

$e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \sqrt{2/3}$

$\varepsilon_3 = u_3 - \langle u_3, e_1 \rangle e_1 - \langle u_3, e_2 \rangle e_2$

$= X^3 - 1/3$

$e_3 = \frac{\varepsilon_3}{\|\varepsilon_3\|} = \sqrt{\frac{8}{45}}$

Exercice 4

1) $(F^\perp)^\perp = F$

$F^\perp = \{ y \in E, \forall x \in F, \langle x,y \rangle = 0 \}$

$(F^\perp)^\perp = \{ y \in E, \forall x \in F^\perp, \langle x,y \rangle = 0 \}$

Soit $y_0 \in F$, soit $x \in F^\perp$, $\langle x, y_0 \rangle = 0$ donc $F \subset (F^\perp)^\perp$

De plus comme F est un sev de E.

On a aussi $F \oplus F^\perp = E$

On a aussi $F^\perp \oplus (F^\perp)^\perp = E$

$$\begin{cases} \dim F + \dim F^\perp = \dim E \\ \dim F^\perp + \dim (F^\perp)^\perp = \dim E \end{cases}$$

$\Rightarrow \dim F = \dim (F^\perp)^\perp$

D'où $F = (F^\perp)^\perp$

F et G, 2 sev de E

$F+G := \{u_1+u_2,\ u_2 \in F,\ u_2 \in G\}$ est un sev de E. C'est le + petit sev de E qui contient F et G.

On veut montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

On a $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$

$\Rightarrow (F+G)^\perp \subset F^\perp$ et $(F+G)^\perp \subset G^\perp$

$\Rightarrow (F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$

$F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$?

Soit $y \in F^\perp$

On a $y \in F^\perp$ cad $\forall u \in F,\ \langle u,y\rangle = 0$

$y \in G^\perp$ $\quad \forall v \in G,\ \langle v,y\rangle = 0$

Soit $x \in F+G$, alors $\exists u \in F, \exists v \in G$ tq

$x = u+v$

$\langle x, y\rangle = \langle u,y\rangle + \langle v,y\rangle = 0$

D'où $y \in (F+G)^\perp$ cad $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$

On obtient $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

On veut montrer que $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

On écrit la relation que l'on vient de démontrer avec $F^\perp$ et $G^\perp$

$(F^\perp + G^\perp) = (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp$

$= F \cap G$

En passant à l'orthogonal $((F^\perp+G^\perp)^\perp)^\perp = (F\cap G)^\perp$

$\Rightarrow F^\perp + G^\perp = (F\cap G)^\perp$

Exercice 5

1) $G(x_1, \dots, x_m) = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_1, x_m \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ \langle x_m, x_1 \rangle & \dots & \langle x_m, x_m \rangle \end{pmatrix}$

$A = Mat_B(x_1, \dots, x_m)$ les lignes de ${}^tA$ sont les colonnes de A càd $({}^tx_1, \dots, {}^tx_m)$

Le coefficient de $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne de ${}^tAA$ s'obtient en multipliant la $i^{ème}$ ligne de ${}^tA$ et la $j^{ème}$ colonne de A

${}^tx_i \Leftrightarrow x_j = \langle x_i, x_j \rangle$ qui est le coeff à la $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne. D'où ${}^tAA = G$

2) $\det(G) = \det({}^tAA)$
$= \det({}^tA)\det(A)$
$= \det(A)\det(A) \geq 0$

$\det(G) = 0 \Leftrightarrow \det(A^2) = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0$
$\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_m)$ est une famille liée

3) $M = \begin{pmatrix} 1 & \omega & \dots & \omega \\ \omega & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \omega \\ \omega & \dots & \omega & 1 \end{pmatrix}$

M non inversible $\Leftrightarrow \omega = 1$ ou $-\frac{1}{m-1}$

M non inversible $\Leftrightarrow \det(M) = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \dots & \omega \\ \omega & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \omega \\ \omega & \dots & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1+(m-1)\omega & \omega & \dots & \omega \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & \omega & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \omega \\ 1+(m-1)\omega & \omega & \dots \omega & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$[1+(m-1)\omega] \begin{vmatrix} 1 & \omega & \cdots & \cdots & \omega \\ 0 & 1-\omega & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-\omega & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\omega \end{vmatrix}$$

c) $(u_1, \dots, u_m)$ ~~famille~~ famille

$(u_1, \dots u_m)$ famille de E tel que $\exists\ a \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ $\setminus\{0\}$ vérifiant $\begin{cases} \forall\ i \in \{1, \dots, m\} & \|u_i\| = 1 \\ \forall\ (i,j) \in \{1, \dots, m\} & i \neq j, \|u_i - u_j\| = 0 \end{cases}$

Montrons que la famille est libre.

On a vu $G(x_1, \dots, x_m) = 0$
$\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_m)$ est liée

$G(x_1, \dots, x_m) = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$

On va considérer

$G(u_1, \dots, u_m) = (\langle u_i, u_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq m}$

si $i = j$

$\langle u_i, u_j \rangle = \langle u_i, u_i \rangle = \|u_i\|^2 = 1$

si $i \neq j$

$$\begin{aligned} \|u_i - u_j\|^2 &= \langle u_i - u_j, u_i - u_j \rangle \\ &= \langle u_i, u_i \rangle - 2\langle u_i, u_j \rangle + \langle u_j, u_j \rangle \\ &= \|u_i\|^2 - 2\langle u_i, u_j \rangle + \|u_j\|^2 \end{aligned}$$

on a $\|u_i - u_j\|^2 = a^2$

$\Leftrightarrow \langle u_i, u_j \rangle = 1 - \frac{a^2}{2}$

$$G(u_1, \dots, u_m) = \begin{pmatrix} 1 & 1-\frac{a^2}{2} & \cdots & 1-\frac{a^2}{2} \\ 1-\frac{a^2}{2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1-\frac{a^2}{2} \\ 1-\frac{a^2}{2} & \cdots & 1-\frac{a^2}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

D'après la question 2 si on a une matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & \omega & \cdots & \omega \\ \omega & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \omega \\ \omega & \cdots & \omega & 1 \end{pmatrix}$ alors M inversible $\Leftrightarrow \omega \neq 1$

$\omega \neq \frac{1}{1-n}$

Ici $\omega = 1 - \frac{a^2}{2}$. Comme $a \neq 0$ alors $\omega \neq 1$.

On sait de plus que $a \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \setminus \{0\}$

$a \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \leq a \leq 0 \end{cases}$

$a \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \setminus \{0\} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \leq \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \leq a < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 0 < |a| \leq \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 0 < a^2 \leq 2$

$\Leftrightarrow 0 < \frac{a^2}{2} \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - \frac{a^2}{2} = \omega < 1$

Comme $\omega \geq 0$, $\omega \neq -\frac{1}{n-1}$

D'après la question 2

$G(u_1, \dots, u_n)$ est inversible

Donc la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre.

Exercice 6

$A \in GL_n(\mathbb{R})$

Si X est un vecteur colonne

- ${}^tXSX \geq 0$ (positive)
- ${}^tXSX = 0 \Leftrightarrow X = 0$ (définie)

${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

${}^tS = {}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA = S$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ donc ${}^tXSX = {}^tX\,{}^tAAX$

$= {}^t(AX)AX$

$= \langle AX, AX \rangle \geq 0$.

Si ${}^tXSX = 0$

$\Leftrightarrow \langle AX, AX \rangle = 0$

$\Leftrightarrow AX = 0$, A inversible $A^{-1}AX = 0$

$X = 0$

2) Ici $\varphi(X,Y) = \langle SX, Y\rangle \in \mathbb{R}$

• (symétrie) $\varphi(X,Y) = \langle SX, Y\rangle$

$\varphi(Y,X) = \langle SY, X\rangle$

$$\begin{aligned}
\varphi(X,Y) &= {}^t(SX) \cdot Y \\
&= {}^tX\,{}^tS \cdot Y \\
&= {}^tX\,({}^tSY) \in \mathbb{R} \\
&= {}^t({}^tX({}^tSY)) \\
&= {}^t({}^tSY)\,{}^t({}^tX) \\
&= {}^t(SY)\,X \\
&= \langle SY, X\rangle = \varphi(Y,X)
\end{aligned}$$

• (linéarité par la $2^{\text{ème}}$ variable)

$\varphi(X, Y_1+\lambda Y_2) = \langle SX, Y_1+\lambda Y_2\rangle$

$= SXY_1 + \lambda SXY_2$ (linéarité du produit scalaire usuel).

$= \varphi(X,Y_1) + \lambda\varphi(X,Y_2)$

donc bilinéaire.

• (positivité) $\varphi(X,X) = \langle SX, X\rangle$

$= {}^t(SX)\,X$

$= \langle AX, AX\rangle = \|AX\|_2^2 \geq 0$

De plus $\varphi(X,X) = 0$

$\Leftrightarrow \|AX\|_2^2 = 0 \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow X = 0$ car A inversible

φ est une fbs

norme associée :

$N(X) = \sqrt{\varphi(X,X)} = \|AX\|_2 \geq 0$

3) $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$
$$= {}^t X Y$$

Montrons que $\lambda_1 > 0$

S est symétrique donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$

$\exists X \neq 0$ tel que $SX = \lambda_1 X$

$\varphi(X, X) > 0$

$$\begin{aligned} \varphi(X, X) &= \langle SX, X \rangle \\ &= \langle \lambda_1 X, X \rangle \\ &= \lambda_1 \langle X, X \rangle \\ &= \lambda_1 \|X\|_2^2 \end{aligned}$$

$\lambda_1 \|X\|_2^2 > 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0$

Exercice 6

1) Mq $\forall X \in \mathbb{R}^m$

$\sqrt{\lambda_1}\, \|X\|_2 \leq N_A(X) \leq \sqrt{\lambda_m}\, \|X\|_2$

$\varphi(X,Y) = \langle SX, Y \rangle$

$N_A(X) = \|AX\|_2 = \sqrt{\langle AX, AX \rangle}$

On a aussi

$N_A(X) = \sqrt{\varphi(X,X)}$

$= \sqrt{\langle SX, Y \rangle}$

S est une matrice symétrique réelle tel que sa plus petite vp λ_1 vérifie $\lambda_1 > 0$

Comme S est symétrique réelle elle est diagonalisable

Il existe donc une base de $\mathbb{R}^m$ $(u_1, \dots, u_m)$ formée de $\vec{vp}$ de S.

On a $X = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_m u_m$

Pour chaque u_i, $\exists\ \lambda_j$ vp de S tel que $S(u_i) = \lambda_{j(i)} u_i$

On suppose donc que $(u_1, \dots, u_m)$ est orthonormée

$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

D'où on a $SX = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i S u_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_{j(i)} u_i$

$\langle SX, X \rangle = \sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{m} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \lambda_{j(i_1)} \langle u_{i_1}, u_{i_2} \rangle$

$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i_1}^2 \lambda_{j(i_1)}$

$\inf \lambda_{j(i_1)} \sum_{i_1=1}^{m} \alpha_{i_1}^2 \leq \sum_{i_1=1}^{m} \alpha_{i_1}^2 \lambda_{j(i_1)} \leq \sup \lambda_{j(i_1)} \sum_{i_1=1}^{m} \alpha_{i_1}^2$

$\lambda_1 \sum_{i_1=1}^{m} \alpha_{i_1}^2 \leq \langle SX, X \rangle \leq \lambda_m \sum_{i_1=1}^{m} \alpha_{i_1}^2$

$\sqrt{\lambda_1}\, \|X\|_2 \leq N_A(X) \leq \sqrt{\lambda_m}\, \|X\|_2$

λ₂

5) Montrer que $\sup_{X \neq 0} \frac{N_A(X)}{\|X\|_2} = \sqrt{\lambda_m}$

$\frac{N_A(X)}{\|X\|_2} \leq \sqrt{\lambda_m}$ Donc $\left\{ \frac{N_A(X)}{\|X\|_2}, X \neq 0 \right\}$ est un ensemble majoré

Par définition de la borne sup

$\sup_{X \neq 0} \frac{N_A(X)}{\|X\|_2} \leq \sqrt{\lambda_m}$

Par définition λ_m est la + grande vp de S. Donc $\exists X_1 \in \mathbb{R}^m$, $X_1 \neq 0$ tel que $SX_1 = \lambda_m X_1$

$N_A(X_1) = \sqrt{\langle SX_1, X_2 \rangle} = \sqrt{\langle \lambda_m X_1, X_2 \rangle}$
$= \sqrt{\lambda_m} \sqrt{\langle X_1, X_2 \rangle} = \sqrt{\lambda_m} \|X_2\|_2$

On obtient $\frac{N_A(X_1)}{\|X_1\|_2} = \sqrt{\lambda_m}$ d'où $\sup_{X \neq 0} \frac{N_A(X)}{\|X\|_2} = \sqrt{\lambda_m}$

Remarque Ici le sup est atteint en $X = X_1$ donc un max

Exercice 7

1) $\langle , \rangle$ produit scalaire sur E

u tel que $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$

$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_m)$ base orthonormée de E

A la matrice de u dans $\mathcal{B}$.

Par définition de A, ses colonnes sont les $u(e_i)$ écrit $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_m)$ dans la base $\mathcal{B}$.

On $u(e_i) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_m e_m$
$= \sum_{j=1}^{m} \langle u(e_i), e_j \rangle e_j$

<u>Rappel</u> $(e_1, \dots, e_m)$ base orthonormée $v \in E$

$v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m$

$\langle v, e_i \rangle = \alpha_1 \langle e_1, e_i \rangle + \alpha_2 \langle e_2, e_i \rangle + \dots + \alpha_m \langle e_m, e_i \rangle$

$= \alpha_i \langle e_i, e_i \rangle = \alpha_i$

D'où $A = \begin{pmatrix} \langle u(e_1), e_1 \rangle & \cdots & \langle u(e_m), e_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u(e_m), e_m \rangle & \cdots & \langle u(e_m), e_m \rangle \end{pmatrix}$

2) Soit E_{λ_1} et E_{λ_2} 2 sous espaces de U associés à 2 vp λ_1, λ_2 de u tel que $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Montrons que $E_{\lambda_1} \perp E_{\lambda_2}$

$E_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(u - \lambda_1 \mathrm{Id}) = \{ v \in E_{\lambda_1}, u(v) = \lambda_1 v \}$

$E_{\lambda_2} = \mathrm{Ker}(u - \lambda_2 \mathrm{Id}) = \{ v \in E_{\lambda_2}, u(v) = \lambda_2 v \}$

Soit $v_1 \in E_{\lambda_1}$ et $v_2 \in E_{\lambda_2}$ montrons que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

On sait que $u(v_1) = \lambda v_1$

$u(v_2) = \lambda v_2$

$\langle u(v_1), v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle$

$= \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle$

$\langle v_1, u(v_2) \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$

Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

D'où $E_{\lambda_1} \perp E_{\lambda_2}$

3) $\det(A - XI_4) = [(1-X)^2 - 2^2]^2 = (-1-X)^2 (3-X)^2$

$E_{-1} = \mathrm{Ker}(A + I_m)$

$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ on a $v_3 \perp v_1$

$E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

D'où (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base orthogonale dans laquelle la matrice de u.

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{matrix} \quad \text{on obtient } P = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

(u_1, u_2, u_3, u_4) est une base orthogonale

D'où $\left(\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \frac{u_3}{\|u_3\|}, \frac{u_4}{\|u_4\|}\right)$ est une base orthonormée

On obtient la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3, e_4) à $\left(\frac{u_1}{\sqrt{2}}, \frac{u_2}{\sqrt{2}}, \frac{u_3}{\sqrt{2}}, \frac{u_4}{\sqrt{2}}\right)$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = {}^tP$$

TD8 - Projection orthogonale et distance

Exercice 1

$x-y+z=0$
$y=x+z$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) $u_1 \rightarrow \varepsilon_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_2 = u_2 - \langle u_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1$

$\langle u_2, \varepsilon_1 \rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\|v_2\| = \sqrt{3/2}$

$\varepsilon_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|} = \sqrt{2/3}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base orthonormée de F.
Ici F est un hyperplan $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $x-y+z=0 = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

D'où $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est $\perp$ à F $F^\perp = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\varepsilon_3 = \dfrac{u_3}{\|u_3\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Remarque : Pour trouver $F^\perp$. On commence par chercher une base $(v_1, \dots, v_p)$ de F. Ensuite on cherche les vecteurs

v tel que $\begin{cases} \langle v, v_1 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle v, v_p \rangle = 0 \end{cases}$ $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

On obtient un système à n variables $x_1, \dots, x_n$ qui détermine $F^\perp$

$\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\varepsilon_2 = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\varepsilon_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Matrice p_1 de la projection orthogonale sur F

$$\begin{array}{c|ccc|c} & p_1(e_1) & p(e_2) & p(e_3) & \\ \hline & & & & e_1 \\ & & & & e_2 \\ & & & & e_3 \end{array}$$

$p_1(e_1)$ est la projection orthogonale de e_i sur F.

<u>Pour e_1</u> : $e_1 = \underbrace{\langle \varepsilon_1, e_1 \rangle \varepsilon_1}_{\in F} + \underbrace{\langle \varepsilon_2, e_1 \rangle \varepsilon_2}_{\in F} + \underbrace{\langle \varepsilon_3, e_1 \rangle \varepsilon_3}_{\in F^\perp}$

$p(e_1) = \langle \varepsilon_1, e_1 \rangle \varepsilon_1 + \langle \varepsilon_2, e_1 \rangle \varepsilon_2$

<u>Pour e_2</u> : $e_2 = \langle \varepsilon_1, e_2 \rangle \varepsilon_1 + \langle \varepsilon_2, e_2 \rangle \varepsilon_2 + \langle \varepsilon_3, e_2 \rangle \varepsilon_3$
$p(e_2) = \langle \varepsilon_1, e_2 \rangle \varepsilon_1 + \langle \varepsilon_2, e_2 \rangle \varepsilon_2$

<u>Pour e_3</u> : $e_3 = \langle \varepsilon_1, e_3 \rangle \varepsilon_1 + \langle \varepsilon_2, e_3 \rangle \varepsilon_2 + \langle \varepsilon_3, e_2 \rangle \varepsilon_3$
$p(e_3) = \langle \varepsilon_1, e_3 \rangle \varepsilon_1 + \langle \varepsilon_2, e_3 \rangle \varepsilon_2$

$p(e_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_1 - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\, \varepsilon_2$

$p(e_2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{2/3}\, \varepsilon_2$

$p(e_3) = \sqrt{2/3}\, \varepsilon_2$

On a la matrice $\begin{matrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{matrix}$

Remarque dans $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matrice p_2 dans (e_1, e_2, e_3)
$p_1(v) + p_2(v) = v \Leftrightarrow p_2 = Id - p_1$

Matrice de p_2, c'est la matrice I_n moins la matrice p_1

$Mat(P_2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$d(u,F) = \|u - p_F(u)\|$ Remarque si on a $v \in F$ par pythagore $\|u-v\|^2 = \|u - p_F(u)\|^2 + \|v - p_F(u)\|^2$

d'où $\forall v \in F$

$\|u-v\|_2^2 \geqslant \|u - p_F(u)\|_2^2$

Ici il faut projeter u soit $p_1(u) = p_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$d(u,F) = \|u - p_1(u)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$d(u, F^\perp) = \|u - p_2(u)\|_2$

$d_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad d_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\qquad d_1^2 + d_2^2 \neq \|u\|^2$ $\sqrt{8}$

Exercice 3

1) $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(x) Q(x)\, dx$

$\mathbb{R}_1$

$\|u_1\| = \left(\int_{-1}^{1} 1 \times 1 \, dx\right)^{1/2} = \sqrt{2}$

$P_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Pour P_2 : $\qquad Q_2 = u_2 - \langle u_2, P_1 \rangle P_1$

$\langle u_2, P_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\, dx = 0$

donc $Q_2 = u_2$

$P_2 = \frac{Q_2}{\|Q_2\|}$ $\qquad \|Q_2\| = \left(\int_{-1}^{1} x^2 dx\right)^{1/2}$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}$

$P_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x$

Pour P_3 $\qquad Q_3 = u_3 - \langle u_3, P_1 \rangle P_1 - \langle u_3, P_2 \rangle P_2$

$\langle u_3, P_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\, dx$

$= \frac{\sqrt{2}}{3}$

$\cancel{= \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$\langle u_3, P_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{3/2}\, x\, dx$

$= 0$

$Q_3 = u_3 - \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{1}{\sqrt{2}} = x^2 - \frac{1}{3}$

$P_3 = \frac{Q_3}{\|Q_3\|}$ $\qquad \|Q_3\| = \left(\int_{-1}^{1} (x^2 - 1/3)^2 dx\right)^{1/2}$

$= \left(\int_{-1}^{1} (x^4 - \frac{2}{3} x^2 + \frac{1}{9}) dx\right)^{1/2}$

$= \left(\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}\frac{x^3}{3} + \frac{x}{9}\right)^{1/2}$

$= \left(\frac{8}{45}\right)^{1/2}$

$P_3(x) = \cancel{} \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - 1/3\right)$

2) Orthogonal de $F = \mathrm{Vect}(1, x)$

$F^\perp = \{ P \in \mathbb{R}_2[X], \forall Q \in F, \langle P, Q \rangle = 0 \}$

Comme P_1 et P_2 ont été construites comme combinaisons linéaires de 1 et X

$\mathrm{Vect}(1, x) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\, x\right)$

D'où $F = \mathrm{Vect}(P_1, P_2)$, comme F est un de $\mathbb{R}_2[X]$

donc $\dim(F^\perp) = \dim \mathbb{R}_2[X] - \dim(F)$

$= 1.$

Par construction $P_3 \perp P_1$ et $P_3 \perp P_2$

d'où $P_3 \perp F$ et donc $F^\perp = \mathrm{Vect}(P_3)$

Projection orthogonale de $1+X$ sur F est $1+X$ car $1+X \in F$. Il suffit donc de projeter X^2 sur F comme (P_1, P_2) est une base orthonormée de F la projection orthogonale de X^2 sur F est $P(x) = \langle x^2, P_1 \rangle P_1 + \langle x^2, P_2 \rangle P_2$

$$X^2 = \sqrt{\frac{8}{45}} \left(P_3(x)\right) + 1/3$$

Projeter X^2 revient à projeter $\sqrt{\frac{8}{45}} P_3(x)$ puis $1/3$

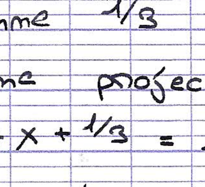
Le premier donne 0 car $P_3 \perp F$ et le deuxième donne $1/3$ car $1/3 \in F$

Donc projection orthogonale de $1 + X + X^2$ est

$1 + X + 1/3 = \frac{4}{3} + X.$

3) $\displaystyle \min_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} \left(\sin(t) - a - bt - ct^2\right)^2 dt$

c'est la distance au carré entre $\sin(t)$ et l'espace engendré par $(1, t, t^2)$



distance entre $\sin t$ et $\mathrm{vect}(1, t, t^2)$

Il faut projeter orthogonalement $\sin x$ sur $\mathbb{R}_2[X]$

On obtient

$\langle \sin x, P_1\rangle P_1 + \langle \sin x, P_2\rangle P_2 + \langle \sin x, P_3\rangle P_3$

1 2 3

1 : $\int_{-1}^{1} \sin(x) \frac{1}{\sqrt{2}}\, dx = 0$

2 : $\int_{-1}^{1} x \sin x \sqrt{\frac{3}{2}}\, dx \overset{IPP}{=} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(-2\cos(1) + 2\sin(1)\right)$

3 : $\int_{-1}^{1} \sin x \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - 1/3\right) dx = 0$

$\int_{-1}^{1} \left(\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} c x\right)^2 dx$

$= \int_{-1}^{1} \left(\sin^2(x) - 2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} c \sin(x)\, x + \frac{3}{2} c^2 x^2\right) dx$

$= \int_{-1}^{1} (1 - \cos^2(x))\, dx - 2c^2 + c^2$

$= 1 - \frac{1}{2}\sin 2 - c^2$