Correction

TD

Algèbre

Polynômes : division euclidienne, algorithme d'Euclide

Exercice 1

1) $A(X) = X^5 - 7X^4 - X^3 - 9X + 9$

$B(X) = X^2 - 5X + 4$

$$\begin{array}{r|l}
X^5 - 7X^4 - X^3 - 9X + 9 & X^2 - 5X + 4 \\
\hline
-(X^5 - 5X^4 + 4X^3) & X^3 - 2X^2 - 15X - 67 \\
\cline{1-1}
-2X^4 - 5X^3 - 9X + 9 & \\
+2X^4 - 10X^3 + 8X^2 & \\
\cline{1-1}
-15X^3 + 8X^2 - 9X + 9 & \\
+15X^3 - 75X^2 + 60X & \\
\cline{1-1}
-67X^2 + 51X + 9 & \\
+67X^2 - 335X + 268 & \\
\cline{1-1}
-284X + 277 &
\end{array}$$

Donc $Q = X^3 - 2X^2 - 15X - 67$

$R = -284X + 277$

2) $A(X) = X^3 - X^2 + 1$

$B(X) = X - 1 + 2i$

$$\begin{array}{r|l}
X^3 - X^2 + 1 & X - 1 + 2i \\
\hline
-X^3 + X^2 - 2iX^2 & X^2 - 2iX - 4 - 2i \\
\cline{1-1}
-2iX^2 + 1 & \\
+2iX^2 - 2iX + 4i^2X & \\
\cline{1-1}
-2iX - 4X + 1 & \\
-(4+2i)X + 1 & \\
+(4+2i)X + (4+2i)(-1+i) & \\
\cline{1-1}
-8+6i+1 & \\
\cline{1-1}
-7+6i &
\end{array}$$

$Q = X^2 - 2iX - 4 - 2i$

$R = -7 + 6i$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 2

$X^{75} - 3X^2 + 1 = q(X^2-1) + R$ où $R = aX+b$

$\deg R < \deg (X^2-1)$

$X^{75} - 3X^2 + 1 = q(X)(X^2+1) + aX + b$

On cherche a et b :

$X = 1 \Rightarrow 1 - 3 + 1 = a + b$ donc $R = X - 2$

$X = -1 \Rightarrow -1 - 3 + 1 = b - a$

$$\begin{cases} -1 = a+b \\ -3 = b-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

Exercice 3

$X^2 + X + 1 \mid (X+1)^{2m+1} + X^{2m+2}$

$(X+1)^{2m+1} + X^{m+2} = q(X)(X^2+X+1) + aX + b$

Il s'agit de prouver que $a = b = 0$

Si $X = j \Rightarrow (j+1)^{2m+1} + j^{m+2} = aj + b$

$\Rightarrow (-j^2)^{2m+1} + j^{m+2} = aj + b$

$\Rightarrow -j^{4m+2} + j^{m+2} = aj + b$

$\Rightarrow -j^{m+2} + j^{m+2} = aj + b$

$\Rightarrow aj + b = 0$

donc $a = 0$ et $b = 0$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 4

$A(X) = Q_1(X)(X+1) + 3$
$A(X) = Q_2(X)(X-2) + 7$
$A(X) = Q_3(X)(X-3) + 13$

On cherche le reste dans : $A(X) = q(X)(X-1)(X-2)(X-3) + aX^2 + bX + c$
on cherche a, b, c.

$X = 1 \Rightarrow A(1) = a+b+c \quad 3 = a+b+c$
$X = 2 \Rightarrow A(2) = 4a+2b+c \quad 7 = 4a+2b+c$
$X = 3 \Rightarrow A(3) = 9a+3b+c \quad 13 = 9a+3b+c$

$$\begin{cases} 3 = a+b+c \\ 7 = 4a+2b+c \\ 13 = 9a+3b+c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Exercice 5

1) $A(X) = Q(X)(X-a) + R$ où le reste $R \in K$
$A(a) = R$

2) $A(X)(X-a)(X-b) + \lambda X + \mu$

$$\begin{cases} A(a) = \lambda a + \mu \\ A(b) = \lambda b + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = (A(a) - A(b))/(a-b) \\ \mu = (a A(b) - b A(a))/(a-b) \end{cases}$$

3) $A(X) = Q(X)(X-a)^2 + \alpha X + \beta$ (*)
dérivons (*) (garmeppement) $(X^R)' = RX^{R-1}$ déf

$A'(X) = Q'(X)(X-a)^2 + 2Q(X)(X-a) + \alpha$
d'où si $X = a$
$A'(a) = \alpha$
$\beta = A(a) - a A'(a)$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

3) On fait $b \to a$ dans $\begin{cases} \lambda = (A(b)-A(a))/(b-a) = \lambda(a,b) \\ \mu = (aA(b)-bA(a))/(a-b) = \mu(a,b) \end{cases}$

4) $A(X) = X^n$ $\quad X^2 - 2X - 3 = (X-3)(X+1)$

D'après questions d'avant, le reste recherché est $\lambda X + \mu$ d'où : $\lambda = \dfrac{3^n - (-1)^n}{4}$

$$\mu = \frac{3^n + 3(-1)^n}{4}$$

Exercice 6

$$\begin{array}{r|l} X^5 + aX^2 + b & X^3 + X^2 + cX + 1 \\ \hline -X^5 - X^4 - cX^3 - X^2 & X^2 - X + 1 - c \\ \hline -X^4 - cX^3 + (a-1)X^2 + b & \\ X^4 + X^3 + cX^2 + X & \\ \hline (1-c)X^3 + (a+c-1)X^2 + X + b & \\ +(c-1)X^3 + (c-1)X^2 + c(c-1)X + c - 1 & \\ \hline (a+2c-2)X^2 + (c^2-c+1)X + b + c - 1 & \end{array}$$

Le reste est nul si et seulement si $\begin{cases} a + 2c - 2 = 0 \\ c^2 - c + 1 = 0 \\ b + c - 1 = 0 \end{cases}$

$c^2 + c + 1 = 0 \iff c = -j$ ou $-\bar{j}$

et donc il y a deux solutions $\begin{cases} a = 2(j+1) \\ b = j+1 \\ c = -j \end{cases}$ et $\begin{cases} a = 2(\bar{j}+1) \\ b = \bar{j}+1 \\ c = -\bar{j} \end{cases}$

Rappel :

$j = e^{2i\pi/3}$

$j^3 = 1$

$1 + j + j^2 = 0$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 6

$$\begin{array}{r|l} X^3 + aX + b & X^2 + cX - 1 \\ \hline -X^3 - cX^2 + X & X - c \\ \hline -cX^2 + (a+1)X + b & \\ +cX^2 + c^2X - c & \\ \hline (c^2+a+1)X + b - c & \end{array}$$

$B(X)$ divise $A(X)$ ssi le reste $(c^2+a+1)X + b - c$ est le polynôme nul, i.e ssi et seulement si

$$\begin{cases} c^2 + a + 1 = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \quad \text{ie ssi} \quad \begin{cases} a = -1 - c^2 \\ b = c \end{cases}$$

avec c arbitraire

Exercice 7

1) $X^{343} - 2X^{15} + 5X + 1 = q(X).(X^2+1) + aX + b$

Pour $X = i$

$ai + b = -i + 2 + 5i + 1$

$\begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$

2) $X^{2m} + X^m - 2 = q_2(X)(X^2+1) + aX + b.$

$i^{2m} + i^m - 2 = ai + b$

$(-1)^m - 2 + i^m = ai + b$

quatre cas :

- $m = 4k+1$

alors $ai + b = 1 - 2 + i$ donc $a = b = 1$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

- $m = 4k+1$ alors $a = 1$ et $b = -3$: $R = X - 3$
- $m = 4k+2$, $a = 0$, $b = -2$
- $m = 4k+3$ i.e $a = -1$, $b = -3$

3) $(\cos\theta + i\sin\theta)^m = q_3(X)(X^2+1) + aX + b$

$X = i \Rightarrow ai + b = (\cos\theta + i\sin\theta)^m$

$= \cos(m\theta) + i\sin(m\theta)$

$a = \sin(m\theta)$

$b = \cos(m\theta)$

Exercice 8

1)

$$\begin{array}{r|l} X^6 - 7X^5 + X^4 + X^3 - 10X^2 + 22X - 3 & X^4 - 8X^3 + 9X^2 - 8X + 1 \\ \hline -X^6 + 8X^5 - 9X^4 + 8X^3 - X^2 & X^2 + X \\ \hline X^5 - 8X^4 + 9X^3 - 11X^2 + 22X - 3 & \\ -X^5 + 8X^4 - 9X^3 + 8X^2 - X & \\ \hline -3X^2 + 21X - 3 & \end{array}$$

Donc $A(X) = (X^2 + X)B(X) - 3(X^2 - 7X + 1)$

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 8X^3 + 9X^2 - 8X + 1 & X^2 - 7X + 1 \\ \hline -X^4 + 7X^3 - X^2 & X^2 - X + 1 \\ \hline -X^3 + 8X^2 - 8X + 1 & \\ +X^3 - 7X^2 + X & \\ \hline X^2 - 7X + 1 & \\ -X^2 + 7X - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc $B(X) = (X^2 - 7X + 1)(X^2 - X + 1)$

$D(X) = X^2 - 7X + 1$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$$M = \frac{AB}{D} = A \cdot \frac{B}{D} = A(X) \cdot (X^2 - X + 1)$$

$$= (X^6 - 7X^5 + X^4 + X^3 - 10X^2 + 22X - 3)(X^2 - X + 1)$$

$$= X^8 - 8X^7 + 9X^6 - 7X^5 - 10X^4 + 33X^3 - 35X^2$$
$$(-1-7) \quad (1+7+1) \quad (-1+1-7) \quad (1-1-10) \quad (1+10+22) \quad (-10-22-3)$$

$$+ 25X - 3$$
$$(22+3)$$

Cherchons U_0, V_0

$$A(X) = (X^2 + X) B(X) - 3D(X)$$
$$\Rightarrow D(X) = -\frac{1}{3} A(X) + \frac{1}{3} (X^2 + X) B(X)$$

d'où $U_0(X) = -\frac{1}{3}$, $V_0(X) = \frac{1}{3}(X^2 + X)$

$$\begin{cases} U(X) = U_0(X) + S(X) \dfrac{B(X)}{D(X)} \\ V(X) = V_0(X) - S(X) \dfrac{A(X)}{D(X)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} U(X) = \cancel{U_0(X)} - \frac{1}{3} + S(X)(X^2 - X + 1) \\ V(X) = \frac{1}{3}(X^2 + X) - S(X)(X^4 + X - 3) \end{cases}$$

$S(X) \in \mathbb{R}[X]$ arbitraire, car :
$A(X) / D(X) = X^4 + X - 3$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

2)

$6X^4 - 7X^3 - 10X^2 - 15X - 21$	$3X^2 + X + 4$
$-6X^4 - 2X^3 - 8X^2$	$2X^2 - 3X$
$-9X^3 - 18X^2 - 15X - 21$	
$+9X^3 + 3X^2 + 12X$	
$-15X^2 - 3X - 21$	
$+15X^2 + 5X + 20$	
$2X - 1$	

Donc $A(X) = (2X^2 - 3X + 5)\,B(X) + 2X - 1$

$3X^2 + X + 4$	$2X - 1$
$-3X^2 + \frac{3}{2}X$	$\frac{3}{2}X + \frac{5}{4}$
$21/4$	

Donc $B(X) = \left(\frac{3}{2}X + \frac{5}{4}\right)(2X - 1) + \frac{21}{4}$

$\deg(21/4) = 0$ Donc prochain reste nul.

C'est donc $D = 1$

donc $M(X) = \frac{A(X)}{cd(A)} \cdot \frac{B(X)}{cd(B)}$

$= \frac{1}{18} A(X) \cdot B(X)$.

$1 = \frac{4}{21} B(X) - \frac{4}{21}\left(\frac{3}{2}X + \frac{5}{4}\right)(2X - 1)$

$= \frac{4}{21} B(X) - \frac{4}{21}\left(\frac{3}{2}X + \frac{5}{4}\right)\left(A(X) - (2X^2 - 3X - 5)\,B(X)\right)$

$= -\frac{4}{21}\left(\frac{3}{2}X + \frac{5}{4}\right)A(X) + \frac{4}{21}\left[\left(\frac{3}{2}X + \frac{5}{4}\right)(2X^2 - 3X - 5) + 1\right]B(X)$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

d'où

$$U_0(X) = -\frac{4}{21}\left(\frac{3}{2}X + \frac{5}{4}\right)$$

$$V_0(X) = \frac{4}{21}\left(3X^3 - 2X^2 - \frac{45}{4}X + \frac{21}{4}\right)$$

Solution générale :

$U(X) = U_0(X) + S(X)\,B(X)$ avec $S(X) \in \mathbb{R}[X]$

$V(X) = V_0(X) + S(X)\,A(X)$

3) $X^6 - 64$ | $X^2 - 4$

Raisonnement

$$Y^3 - Z^3 = (Y - Z)(Y^2 + YZ + Z^2)$$

$$X^6 - 64 = (X^2)^3 - 4^3 = (X^2 - 4)(X^4 + 4X^2 + 16)$$

Et donc $D(X) = X^2 - 4$

$M(X) = X^6 - 64$

$U_0(X)\,A(X) + V_0(X)\,B(X) = D(X)$

avec $U_0 = 0$, $V_0 = 1$

$U(X) = S(X)$

$V(X) = 1 - S(X)\,\frac{A(X)}{D(X)}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

4)

$X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$	$X^3 + X^2 - X - 1$
$-X^4 - X^3 + X^2 + X$	X
$-2X^2 - 3X - 1$	

Donc : $A(X) = X \times B(X) - (2X^2 + 3X + 1)$

$X^3 + X^2 - X - 1$	$2X^2 + 3X + 1$
$-X^3 - \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}X$	$\frac{1}{2}X - \frac{1}{4}$
$-\frac{1}{2}X^2 - \frac{3}{2}X - 1$	
$\frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{4}X + \frac{1}{4}$	
$-\frac{3}{4}X - \frac{3}{4}$	

Donc $B(X) = \left(\frac{1}{2}X - \frac{1}{4}\right)(2X^2 + 3X + 1) - \frac{3}{4}(X+1)$

$2X^2 + 3X + 1$	$X+1$
$-2X^2 - 2X$	$2X + 1$
$X + 1$	
0	

Donc $D(X) = X + 1$

$M(X) = \frac{A(X)}{cd(A)} \quad \frac{B(X)/D(X)}{cd(B)} = A(X)\left[\left(\frac{1}{2}X - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{2X^2+3X+1}{X+1}\right) - \frac{3}{4}\right]$

$= A(X)\left[\frac{1}{2}\left(X - \frac{1}{2}\right)(2X+1) - \frac{3}{4}\right]$

$= X^6 + X^5 - 4X^4 - 5X^3 + 2X^2 + 4X + 1.$

$D(X) = -\frac{4}{3}B(X) + \frac{2}{3}\left(X - \frac{1}{2}\right)(2X^2 + 3X + 1)$

$= -\frac{4}{3}B(X) + \frac{2}{3}\left(X - \frac{1}{2}\right)$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

d'où $U_0(X) = -\frac{2}{3}\left(X - \frac{1}{2}\right)$

$$V_0(X) = \frac{2}{3}\left(X^2 - \frac{1}{2}X - 2\right)$$

$U(X) = U_0 + S(X)\ B(X)/D(X)$

$V(X) = V_0 - S(X)\ A(X)/D(X)$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 9

(1) $m = qR + r$

$A(X) = X^m - 1$

$B(X) = X^R - 1$

$X^m - 1 = X^{qR+r} - 1$

$- X^{qR+r} + X^{(q-1)R+r}$

$X^{(q-1)R+r} - 1$

$\vdots$

$X^r - 1$

$X^R - 1$

$X^{(q-1)R+r} + \dots + X^r$

(Récurrence évidente)

$\deg(X^r - 1) = r < R$ donc $X^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de A par B

(2) $X^m - 1 = Q_1(X)(X^m - 1) + R_1(X)$ Dans $\mathbb{R}[X]$

$+ X^{R_1} - 1$ d'après (1)

$X^m - 1 = Q_2(X)(X^{R_2} - 1) + X^{R_2} - 1$

$\vdots$

$X^{R_{q-2}} - 1 = Q_q(X)(X^{R_{q-1}} - 1) + X^{R_q} - 1$

$X^{R_q} - 1$ = dernier reste $\neq 0$

$= \text{pgcd}(X^m - 1, X^m - 1)$

$m = R_1 m + R_1$

$m = R_2 R_1 + R_2$

$\vdots$

$R_{q-2} = R_q R_{q-1} + R_q$

$R_{q-1} = R_{q+1} R_q + 0$

c.-à-d donc

$\text{pgcd}(X^m - 1, X^m - 1)$

$= X^{\text{pgcd}(m,m)} - 1 = X^d - 1.$

$X^p - 1 \mid X^m - 1$

$\Leftrightarrow \text{pgcd}(X^p - 1, X^m - 1)$

$= X^p - 1 \Leftrightarrow X^{\text{pgcd}(p,m)} - 1 = X^p - 1$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$\Leftrightarrow$ pgcd $(P, m) = P$

$\Leftrightarrow$ $P \mid m$

(3) PGCD $(X^m - a^n, X^m - a^m)$

Si $a = 0$:

PGCD $(X^m - a^n, X^m - a^m)$ = PGCD $(X^m, X^m) = X^{\min(m, m)}$

Si $a \neq 0$:

PGCD $(X^m - a^n, X^m - a^m)$ = PGCD $(a^n[(X/a)^m - 1], a^m[(X/a)^m - 1])$

= PGCD $((X/a)^m - 1, (X/a)^m - 1) = [(X/a)^{\text{pgcd}(m,m)} - 1]/cd$

où $cd = 1/a^{\text{pgcd}(m,m)}$ $= X^{\text{pgcd}(m,m)} - a^{\text{pgcd}(m,m)}$

$$\frac{(X/a)^{\text{pgcd}(m,m)} - 1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\text{pgcd}(m,m)}} = X^{\text{pgcd}(m,m)} - a^{\text{pgcd}}$$

Exercice 10

(1) $X = (X-1) + 1$

$X^2 = [(X-1)+1]^2$

$= (X-1)^2 + 2(X-1) + 1$

$X^3 = [(X-1)+1]^3 = (X-1)^3 + 3(X-1)^2 + 3(X-1) + 1$

$X^4 = [(X-1)+1]^4 = (X-1)^4 + 4(X-1)^3 + 6(X-1)^2 + 4(X-1) + 1$

(2) $P(X) = X^4 + 5X^3 - 2X^2 - X + 3$

$= (X-1)^4 + 4(X-1)^3 + 6(X-1)^2 + 4(X-1) + 1 + 5(X-1)^3$

$+ 15(X-1)^2 + 15(X-1) + 5 - 2(X-1)^2 - 4(X-1) - 2$

$- (X-1) - 1 + 3$

$= (X-1)^4 + 9(X-1)^3 + 19(X-1)^2 + 14(X-1) + 6$

(3) $P(X) = P(1 + (X-1)) = P(1) + P'(1)(X-1) + P''(1)/2 (X-1)^2$

$+ \frac{P^{(3)}(1)}{6} (X-1)^3 + \frac{P^{(4)}(1)}{24} (X-1)^4$

$P(1) = 6$ $\quad P^{(3)}(X) = 24X + 30 = 54$

$P'(X) = 4X^3 + 15X^2 - 4X - 1 = 14$ $\quad P^{(4)}(X) = 24$

$P''(X) = 12X^2 + 30X - 4 = 38$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

On retrouve bien $P(X)$ comme polynôme en $X-1$:

Exercice 11

Soit $P(X) = (X-1)^5 (X+1)^3 (X-3)$

1 racine d'ordre 5 de P $\Rightarrow$ 1 racine d'ordre 4 de P'

1 racine d'ordre 3 de P $\Rightarrow$ " " " 2 de P'

Donc $P'(X) = c.(X-1)^4 (X+1)^2 Q$

avec $\deg Q = 2$

(car $\deg P' = \deg P - 1 = 8$) et $Q \nmid P$

Donc $PGCD(P, P') = (X-1)^4 (X+1)^2$

Exercice 12

$P(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$

$P(1) = 0$: 1 est racine de multiplicité ≥ 1

$P'(X) = n(n+1)X^n - (n+1)nX^{n-1}$

$P'(1) = 0$

$P''(X) = n^2(n+1)X^{n-1} - n(n+1)X^{n-2}(n-1)$

$P''(1) \neq 0$

Donc la multiplicité de la racine est double

Exercice 13

(1) $a_1, \ldots, a_k$ distincts

$A(a_i) - B(a_i) = 0$, $1 \leq i \leq k$

Il s'agit de justifier que si $k > n$ alors $A - B = 0$

A, B de degrés $\leq n \Rightarrow \deg(A-B) \leq n$

$((A-B)(a_i) = 0, 1 \leq i \leq k) \Rightarrow A - B$ possède au moins k racines

$\Rightarrow A - B = 0$ (seul polynôme de degré $\leq n$ qui ait plus que n racines)

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Rappel : tout polynôme non nul de degré d a au plus d racines (comptées avec multiplicité)

(2) $\deg A \leq 2n$, $\deg B \leq 2n$

$(A-B)(a_i) = 0$

$(A-B)'(a_i) = 0$ $\quad (1 \leq i \leq R)$

$R > n$ Justifier que $A - B = 0$

On a : $\deg(A-B) \leq 2n$

$\begin{cases} (A-B)(a_i) = 0 \\ (A-B)'(a_i) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ les a_i sont racines de $A-B$ de multiplicité ≥ 2

donc Σ (multiplicités des racines de $(A-B)$) $\geq 2R > 2n$

et donc $A - B = 0$

(3) $\deg A \leq nn$

$\deg B \leq nn$

$A^{(j)}(a_i) = B^{(j)}(a_i)$ $\quad 1 \leq i \leq R$

$R > n$ $\quad 0 \leq j \leq n-1$

$\Rightarrow A - B = 0$

En effet · $\deg(A-B) \leq nn$

· les a sont racines de $A-B$ de multiplicité $\geq n$

· donc Σ multiplicités $\geq Rn > nn \geq \deg(A-B)$

· et donc $A - B = 0$

Exercice 14

$A(1) = 0$ donc 1 racine d'ordre 3 de A

$A'(1) = 0$ donc $A(X) = cd\,A\,(X-1)^3 Q(X)$

$A''(1) = 0$ donc $A(X) = (X-1)^3 (X-a)$

$A'''(1) \neq 0$ $\quad A(0) = -2 = +a$

$\Rightarrow a = -2$

d'où $A(X) = (X-1)^3 (X+2)$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 15

(1) $X^4 - X^2 - 6$

D'après d'Alembert, trouver les facteurs irréductibles d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ équivaut à trouver ses racines :
car $X-a \mid P \Leftrightarrow a$ est racine de P

$X^4 - X^2 - 6 = 0$
$\Leftrightarrow (X^2)^2 - X^2 - 6 = 0$
$\Delta = 25$
$X^2 = 3$ ou -2

donc $X^4 - X^2 - 6 = (X^2-3)(X^2+2)$
$= (X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})(X+\sqrt{2}i)(X-\sqrt{2}i)$ dans $\mathbb{C}[X]$
$= (X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})(X^2+2)$

(2) $X^4 + 5X^2 + 9 = 0$
$\Delta = -11$
Donc $X^2 = \frac{-5 \pm i\sqrt{11}}{2}$

$(a+ib)^2 = -\frac{5+i\sqrt{11}}{2}$

$\begin{cases} a^2 - b^2 = -5/2 \\ 2ab = \sqrt{11}/2 \\ a^2+b^2 = \left|\frac{-5+i\sqrt{11}}{2}\right| = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} ab > 0 \\ a^2 = 1/4 \\ b^2 = 11/4 \end{cases}$

$a + ib = \pm\left(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$

Donc $X^4 + 5X^2 + 9 = \left(X - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{11}}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$
$\left(X - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{11}}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$ $\mathbb{C}[X]$

$= \left[(X-1/2)^2 - (i\sqrt{11}/2)^2\right]\left[(X+1/2)^2 - (i\sqrt{11}/2)^2\right]$
$= \left[(X-1/2)^2 + 11/4\right]\left[(X+1/2)^2 + 11/4\right]$
$= (X^2 - X + 3)(X^2 + X + 3)$ $\mathbb{R}[X]$

(3) $X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$
$= \frac{X^8 - 1}{X - 1}$

$= \frac{1}{(X-1)}(X-1)(X+1)\left(X - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - e^{\frac{3}{4}i\pi}\right)\left(X - e^{-\frac{3}{4}i\pi}\right)$
$\left(X - e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\left(X - e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)$

$= (X+i)\left(X - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(X - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(X + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(X + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)(X-i)(X+i)$ dans $\mathbb{C}[X]$
$= (X+1)(X^2 - \sqrt{2} + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2+1)$

(4) $(X^2 - X - 2)^2 + (X+1)^2$
$= \left[(X^2 - X - 2) - i(X+1)\right]\left[(X^2 - X - 2) + i(X+1)\right]$
$= (X^2 - (1+i)X - (2+1))(X^2 - (1-i)X - (2-i))$ ...

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$$(X^2-X-2)^2+(X+1)^2 = [(X+1)(X-2)]^2+(X+1)^2$$
$$= (X+1)^2[(X-2)^2+1]$$
$$= (X+1)^2(X^2-4X+5) \quad \mathbb{R}[X]$$
$$= (X+1)^2(X-2-i)(X-2+i) \quad \mathbb{C}[X]$$

Exercice 16

Si $A, B \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux alors ils n'ont pas de facteur $X-a$ en commun et donc pas de racine commune

D'après d'Alembert, la est vrai si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ car si A, B n'ont pas de facteur $X-a$ (forme générale des polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$) en commun, alors ils n'ont pas de facteur irréductible commun et donc ils sont premiers entre eux.

Cette réciproque n'est pas vraie dans $\mathbb{R}[X]$. Contre-exemple :
$$(X^2+1)(X-1) \wedge (X^2+1)(X+1)$$
ne sont pas premiers entre eux $PGCD = X^2+1$ et pourtant ils n'ont pas de racines communes dans $\mathbb{R}$.

Exercice 17

(1)
$$A(1)=0 \Leftrightarrow X-1 \mid A$$
$$A(0)=0 \Leftrightarrow X \mid A$$
$$A(i)=0 \Leftrightarrow X-i \mid A$$
$$A(-i)=0 \text{ car } A \text{ réel} \Leftrightarrow X+i \mid A$$
$$A(1+i)=0 \Leftrightarrow X-1-i \mid A$$
$$A(1-i)=0 \Leftrightarrow X-1+i \mid A$$

$$A(X) = cd(A)\, X(X-1)(X-i)(X+i)(X-1-i)(X-1+i) \quad \mathbb{C}$$
$$= cd(A)\, X(X-1)(X^2+1)(X^2-2X+2) \quad \mathbb{R}$$

(2)
$$\left.\begin{matrix} B(1)=0 \\ B'(1)=0 \end{matrix}\right\} (X-1)^2 \mid A$$

$$\left.\begin{matrix} B(1-i)=0 \\ B'(1-i)=0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} (X-1+i)^2 \mid A \\ (X-1-i)^2 \mid A \end{matrix} \quad \text{car } B \text{ réel}$$

donc $B(X) = cd(B)(X-1)^2(X-1+i)^2(X-1-i)^2 \quad \mathbb{C}$
$$= cd(B)(X-1)^2(X^2-2X+2)^2 \quad \mathbb{R}$$

(3)
$$PGCD(A,B) = (X-1)(X^2-2X+2)$$
$$PPCM(A,B) = (X-1)^2(X^2-2X+2)^2$$

(4)
$$P(X) = (X-1)^a X^b (X-i)^c (X+i)^d$$
avec $\begin{cases} a,b,c,d \geq 1 \\ a+b+c+d=5 \\ c=d \quad (P \in \mathbb{R}[X]) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow P(X) = (X-1)X(X^2+1)^c$$
où $\begin{cases} a,b,c \geq 1 \\ a+b+2c=5 \end{cases}$

$\deg (X-1)^a X^b \geq 2$
$\deg (X^2+1)^c \leq 3$
$\Rightarrow c=1$
et donc $\{a,b\} = \{1,2\}$

Donc : $P(X) = (X-1)^2 X(X^2+1)$
ou $= (X-1)X^2(X^2+1)$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

5) On a plus $c=d$ donc $\{a,b,c,d\} =$ $\{1,1,1,2\}$ $\mathbb{C}$
$\{1,1,2,1\}$ $\mathbb{C}$
$\{1,2,1,1\}$ $\mathbb{R}$
$\{2,1,1,1\}$ $\mathbb{R}$

Exercice 18

$$A(x) = \frac{X^m}{m!} + \frac{X^{m-1}}{(m-1)!} + \dots + \frac{X^2}{2!} + X + 1$$

Si A a une racine multiple $\quad A(x)=0$, $A'(x)=0$

$$A'(x) = \frac{mX^{m-1}}{m!} + \frac{(m-1)X^{m-2}}{(m-1)!} + \dots + \frac{2X}{2!} + 1$$

$$= A(X) - \frac{X^m}{m!}$$

Donc $\quad A(x)=0$

$$A(x) - \frac{X^m}{m!} = 0$$

$x^m = 0$ d'où $x=0$ or $A(0) = 1 \neq 0$ Donc pas de racine multiple.

Exercice 19

(1) $A(X) = X(X^2+4)$ $\quad \mathbb{R}$

~~$B(X)$~~ $= X(X-2i)(X+2i)$ $\mathbb{C}$

$B(X) = (X^2)^2 - 5X^2 - 36 = (X-3)(X+3)(X+2i)(X-2i)$ $\mathbb{C}$

$\Delta = 169 = 13^2 \qquad = (X-3)(X+3)(X^2+4)$ $\mathbb{R}$

(2) $PGCD(A,B) = X^2+4$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 20

11 ff

$A(X) = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \dots + a_1 X + a_0$

(1) $A(p/q) = 0 \iff a_m \frac{p^m}{q^m} + a_{m-1} \frac{p^{m-1}}{q^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$

$\iff a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} q + \dots + a_1 p q^{m-1} + a_0 q^m = 0$ (*)

$\iff a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} q + \dots + a_1 p q^{m-1} = -a_0 q^m$

$\Rightarrow p \mid a_0 q^m \Rightarrow p \mid a_0$ car p et q premiers entre eux.

De même : (*) $\iff a_m p^m = -a_{m-1} p^{m-1} - \dots - a_1 p q^{m-1} - a_0 q^m$

$\Rightarrow q \mid a_m p^m$

$\Rightarrow q \mid a_m$

(2) $2X^3 - X^2 + X - 3 = A(X)$

Soit p/q une éventuelle racine rationnelle, avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\text{pgcd}(p, q) = 1$

D'après (1) $p \mid 3$ et $q \mid 2$

ie $p \in \{-3, -1, 1, 3\}$ et $q \in \{1, 2\}$

$A(-3) \neq 0$ $A(-3/2) \neq 0$

$A(-1) \neq 0$ $A(-1/2) \neq 0$ Il n'y a pas de racine

$A(1) \neq 0$ $A(1/2) \neq 0$

$A(3) \neq 0$ $A(3/2) \neq 0$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

(5) $A(X) = X^3 + X^2 - X + 2$

Éventuelles racines rationnelles.

p/q, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\text{pgcd}(p,q) = 1$

$p \mid 2$ et $q \mid 1 \Rightarrow q = 1$

Donc $p/q = p \in \mathbb{Z}$ et $p \mid 2$ donc $p/q = p \in \{-2, -1, 1, 2\}$

$p \neq -2$)

$A(-2) = 0$ l'unique racine de A est -2

$A(-1) \neq 0$

$A(1) \neq 0$

$A(2) \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} A(X) &= (X+2)(X^2 + bX + c) \\ &= X^3 + X^2 - X + 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Donc $A(X) = (X+2)(X^2 - X + 1)$ $\mathbb{R}[X]$

$= (X+2)(X + j)(X + \bar{j})$ $\mathbb{C}[X]$

Soit $B(X) = 3X^3 + 4X^2 + 10X + 3$

p/q où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\text{pgcd}(p,q) = 1$

et $p \mid 3$ et $q \mid 3$ Donc :

$p \in \{-3, -1, 1, 3\}$, $q \in \{1, 3\}$

$\text{pgcd}(p,q) = 1$

Notons que $x \geq 0 \Rightarrow B(x) > 0$ donc $p < 0$

Les seuls cas à envisager sont donc :

$(-1, 1)$, $p/q = -1 \Rightarrow B(-1) = -6 \neq 0$

$B(-3) \neq 0$

$B(-1/3) = 0$ l'unique racine rationnelle de B est $-1/3$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

On a donc $\left.\begin{aligned} B(X) &= 3(X+1/3)(X^2+bX+c) \\ &= 3X^3+4X^2+10X+3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c=3 \\ b+3c=10 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=3 \\ b=1 \end{cases}$$

$$= 3(X+1/3)\left(X+\frac{1+i\sqrt{11}}{2}\right)\left(X+\frac{1-i\sqrt{11}}{2}\right)$$

$\Delta = -11$

$X_1 = -1+i\sqrt{11}/2$

$X_2 = -1-i\sqrt{11}/2$

Posons enfin : $C(X) = 3X^3+5X^2+4X-2$

Les éventuelles racines rationnelles sont p/q, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\text{pgcd}(p,q)=1$ et $p \mid 2$ et $q \mid 3$

d'où $p \in \{-2,-1,1,2\}$ et $q \in \{1,2,3\}$

$A(-2) \neq 0$	$A(-1) \neq 0$
$A(-1) \neq 0$	$A(-1/2) \neq 0$
$A(1) \neq 0$	$A(1/2) \neq 0$
$A(2) \neq 0$	$A(1) \neq 0$
$A(2/3) \neq 0$	$A(-1/3) \neq 0$
$A(1/3) = 0$	$A(2/3) \neq 0$

donc $1/3$ racine

$$3X^3+5X^2+4X-2 = (X-1/3)(aX^2+bX+c)$$

$$= (3X-1)(aX^2+bX+c) = (3X+1)(X^2+2X+2)$$

$$3aX^3+(3b-a)X^2+(3c-b)X-c \qquad \in \mathbb{R}[X]$$

$$3X^3+(6-1)X^2+(6-2)X$$

$\Delta = -4$

$X_1 = \frac{-2 \pm i2}{2}$

$-1 \pm i$

$$\begin{cases} 3a=3 \\ 3b-a=5 \\ 3c-b=4 \\ c=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=2 \end{cases}$$

$$= (3X-1)(X+1+i)(X+1-i) \qquad \in \mathbb{C}[X]$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

II- Fractions rationnelles, décomposition en éléments simples

1

Exercice 21

(1)

$$\begin{array}{r|l} 1 + 3X + X^2 & 1+X \\ \hline -1 - X & 1 + 2X - X^2 + X^3 - X^4 \\ \hline 2X + X^2 & \\ -2X - 2X^2 & \\ \hline -X^2 & \\ +X^2 - X^3 & \\ \hline X^3 & \\ -X^3 - X^4 & \\ \hline -X^4 & \\ +X^4 + X^5 & \\ \hline X^5 & \end{array}$$

Donc la division suivant les puissances croissantes de $1+3X+X^2$ par $1+X$ est :

$(1 + 3X + X^2) = (1+X)(1 + 2X - X^2 + X^3 - X^4) + X^5$

(2)

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1 - X^2 \\ \hline -1 + X^2 & 1 + X^2 \times X^4 + X^6 + X^8 + X^{10} \\ \hline X^2 & \\ -X^2 + X^4 & \\ \hline X^4 & \\ \vdots & \\ X^{12} & \end{array}$$

Donc la division suivant les puissances croissantes de 1 par $1-X^2$ à l'ordre 10 est

$1 = (1-X^2)(1+X^2+X^4+X^6+X^8+X^{10}) + X^{12}$

On pouvait écrire directement

$\frac{1-X^{12}}{1-X^2} = 1 + X^2 + X^4 + X^6 + X^8 + X^{10}$ (5 termes suite géo raison X^2, premier terme 1)

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

d'où $1 = (1-X^2)(1+X^2+\dots+X^{10}) + X^{12}$

On peut généraliser à l'ordre $n = 2k$ ou $2k+1$

$$\frac{1-X^{2k+2}}{1-X^2} = 1 + X^2 + \dots + X^{2k}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = (1-X^2)\sum_{k=0}^{n} X^{2k} + X^{2k+2}$$

C'est la division de 1 par $1-X^2$ suivant les puissances croissantes à l'ordre $n = 2k$ ou $2k+1$

NB : On en déduit en faisant $X \to 0$ les DL_n en 0 de $1/1-X^2$

$$\frac{1}{1-X^2} = G_n(X) + \frac{R_n(X)}{1-X^2} \qquad = 1 + X^2 + X^4 + \dots + X^{2k} + \frac{X^{2k+2}}{1-X^2}$$

où $\dfrac{X^{2k+2}}{1-X^2} = o(X^n)$

(3)

$$\begin{array}{r|l}
1 - X^2 & 1 - 2X\cos\theta + X^2 \\
\hline
-1 + 2X\cos\theta - X^2 & 1 + 2X\cos\theta + 2X^2\cos(2\theta) \\
\hline
2X\cos\theta - 2X^2 & \\
\hline
2X^2(2\cos^2\theta - 1) - & 2X^3\cos\theta \\
\hline
2X^2\cos(2\theta) - 2X^3\cos\theta & \\
\hline
-2X^2\cos(2\theta) + 4X^3\cos\theta\cos(2\theta) - 2X^4\cos(2\theta) & \\
\hline
2X^3\cos\theta\,(2\cos(2\theta) - 1) - 2X^4\cos(2\theta) &
\end{array}$$

On attend $2X^3\cos(3\theta)$ à la place de $2X^3\cos\theta(2\cos(2\theta-1)$

Autrement dit, a-t'on : $\cos(3\theta) = \cos\theta(2\cos(2\theta) - 1)$

ie a-t'on :

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \cos(\theta)\,(2\,(2\cos^2\theta - 1) - 1) \\
&= \cos(\theta)\,(4\cos^2\theta - 3) \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \ ?
\end{aligned}$$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$\Rightarrow \cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta)$ 14

$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

Cette méthode permet d'exprimer $\cos(n\theta)$ comme un polynôme en $\cos\theta$, $\forall n$

Bref on a bien $R_2(x) = 2X^3\cos(3\theta) - 2X^4\cos(2\theta)$

Récap $Q_0 = 1$, $R_0 = 2X\cos\theta - 2X^2$

$Q_1 = 1 + 2X\cos\theta$, $R_1 = 2X^2\cos(2\theta) - 2X^3\cos\theta$

$Q_2 = 1 + 2X\cos\theta + 2X^2\cos 2\theta)$, $R_2 = 2X^3\cos(3\theta) - 2X^4\cos(2\theta)$

$1 - X^2$ | $1 - 2X\cos\theta + X^2$

$\vdots$ | $1 + 2X\cos\theta + \ldots + 2X^m\cos(m\theta) + 2X^{m-1}\cos((m-1)\theta)$

$2X^{m+1}\cos((m+1)\theta) - 2X^{m+2}\cos(m\theta)$

$-2X^{m+1}\cos((m+1)\theta) + 4X^{m+2}$

$\cos\theta\cos((m+1)\theta) -$

$2X^{m+3}\cos((m+1)\theta)$

2

R_{m+1} sera bien le reste attendu si

$2\cos\theta\cos((m+1)\theta) - \cos(m\theta) = \cos((m+2)\theta)$

c'est-ce le cas ? Autrement dit a-t-on :

$\cos((m+2)\theta) + \cos(m\theta) = 2\cos\theta\cos((m+1)\theta)$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 22

(1) D'après le th de décomposition en élément simple on a:

$$F(X) = \frac{(X+1)^2}{(X-1)(X+2)} = E + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+2}$$

La méthode générale pour calculer E (lemme 1) consiste à faire la division euclidienne du numérateur de F par son dénominateur (si deg $F \geq 0$ sinon pas de partie entière) et E est le quotient

→ si deg $E = 0$ (E = cte) il est plus rapide de faire $X \to +\infty$:

Ici: $\lim \frac{(X+1)^2}{(X-1)(X+2)} = E$

Il me manque que si deg $E = 0$ donc $E = 1$

Pour calculer a on peut écrire:

$$F(X)(X-1) = \frac{(X+1)^2}{X+2} = X - 1 + a + (X-1)\frac{b}{X+2}$$

$$\Rightarrow \lim [F(X)(X-1)] = \left.\frac{(X+1)^2}{X+2}\right|_{X=1} = a$$

d'où $a = 4/3$

De même:

$$b = \lim [F(X)(X+2)] = \left.\frac{(X+1)^2}{X-1}\right|_{X=2} = -1/3$$

Cette méthode fonctionne quand on a un élt simple $\frac{\lambda}{X-\alpha}$

Conclusion: $F(X) = \frac{(X+1)^2}{(X-1)(X+2)} = 1 + \frac{4/3}{X-1} - \frac{1/3}{X+2}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 22 - suite

$$F(X) = \frac{1}{X(X^2+X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{X^2+X+1}$$

où $a = \lim_{X \to 0} [XF(X)] = 1$

et $bj + c = \lim_{X \to j} [(X^2+X+1)F(X)] = \lim_{X \to j} \frac{1}{X} = \frac{1}{j} = -j-1$

$\Rightarrow b = c = -1$

Et donc $F(X) = \frac{1}{X} - \frac{X+1}{X^2+X+1}$

Si $X = 1$: $\frac{1}{3} = 1 + \frac{b+c}{3}$

$b + c = -2$

Si $X = 2$: $\frac{1}{14} = \frac{1}{2} + \frac{2b+c}{7}$

$2b + c = -3$

donc $\begin{cases} b+c = -2 \\ 2b+c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$

Et donc $F(X) = \frac{1}{X} - \frac{X+1}{X^2+X+1}$

Donc dans $\mathbb{C}(X)$: $F(X) = \frac{1}{X} + \frac{\alpha}{X-j} + \frac{\bar{\alpha}}{X-\bar{j}}$

$$\alpha = \lim_{X \to j} \frac{1}{X(X-\bar{j})} = \frac{1}{j(j-\bar{j})} = \frac{1}{i\sqrt{3}} = -\frac{i}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

(3) $F(X) = \dfrac{2X-1}{X(X+1)(X^4+X^2+1)} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X+1}$

car $X^4+X^2+1 = (X^2+\lambda X+\mu)(X^2-\lambda X+\mu)$

avec $\mu^2 = 1$ et $2\mu - \lambda^2 = 1$

$\mu = \pm 1 \Rightarrow \mu = 1,\ \lambda = \pm 1$

donc $X^4+X^2+1 = (X^2+X+1)(X^2-X+1)$

$a = \lim\limits_{X\to 0} (XF(X)) = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{2X-1}{(X+1)(X^4+X^2+1)}$

$= -1$

$b = \lim\limits_{X\to -1} [(X+1)F(X)] = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{2X-1}{X(X^4+X^2+1)} = \dfrac{-3}{-3} = 1$

et $cj+d = \lim\limits_{X\to j} \dfrac{2X-1}{X(X+1)(X^2-X+1)} = \dfrac{2j-1}{j(j+1)(j^2-j+1)} = \dfrac{2j-1}{2j}$

$= 1 - \dfrac{1}{2}\bar{j}$

et $-ej+f = \lim\limits_{X\to \bar{j}} (X^2-X+1)F(X) = \lim\limits_{X\to \bar{j}} \dfrac{2X-1}{X(X+1)(X^2+X+1)}$

$= \dfrac{-2\bar{j}-1}{-\bar{j}(-\bar{j}+1)(\bar{j}^2-\bar{j}+1)} = -\dfrac{1}{2}\bar{j} = -1-2j$

Finalement : $a = -1$

$b = 1$

$cj+d = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} i\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} c\, i\sqrt{3}/4 = 1/4\ i\sqrt{3} \\ -1/2\, c + d = 5/4 \end{cases}$

$-ej+f = -\dfrac{1}{2}\bar{j} = \dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow \begin{cases} e = -1/2 \\ f = 1/2 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} c = 1/2 \\ d = 3/2 \end{cases}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Conclusion : $F(X) = -\frac{1}{X} + \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2}\frac{X+3}{X^2+X+1} - \frac{1}{2}\frac{X-1}{X^2-X+1}$ dans $\mathbb{R}(X)$

Dans $\mathbb{C}(X)$:

$$F(X) = \frac{-1}{X} + \frac{1}{X+1} + \frac{\alpha}{X-j} + \frac{\bar{\alpha}}{X-\bar{j}} + \frac{\beta}{X+j} + \frac{\bar{\beta}}{X+\bar{j}}$$

on a $\alpha = \lim_{x \to j} (X-j) F(X)$ ...

Sinon $\frac{X+3}{X^2+X+1} = \frac{\lambda}{X-j} + \frac{\bar{\lambda}}{X-\bar{j}} \Rightarrow \lambda = \lim_{x \to j} (X-j)\frac{X+3}{X^2+X+1}$

$= \lim_{x \to j} \frac{X+3}{X-\bar{j}} = \frac{j+3}{j-\bar{j}} = \frac{j+3}{i\sqrt{3}}$

$\frac{X-1}{X^2-X+1} = \frac{\mu}{X+j} + \frac{\bar{\mu}}{X+\bar{j}} \Rightarrow \mu = \lim_{x \to -j} (X+j)\frac{X-1}{X^2-X+1} = \lim_{x \to j} \frac{X-1}{X+\bar{j}}$

$= \frac{-j-1}{-j+\bar{j}} = \frac{\bar{j}}{-i\sqrt{3}}$

Conclusion $F(X) = -\frac{1}{X} + \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{j+3}{i\sqrt{3}}\frac{1}{X-j} + cc\right)$

$+\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{j}}{i\sqrt{3}}\frac{1}{X+j} + cc\right)$ dans $\mathbb{C}(X)$

(4) $F(X) = \frac{1}{X^2(X^2+a^2)}$

Si $a = 0$: $F(X) = \frac{1}{X^4}$

Si $a \neq 0$ $F(X) = \frac{\alpha}{X^2} + \frac{\beta}{X} + \frac{\gamma X + \delta}{X^2+a^2}$

On remarque que $F(-X) = F(X) = \frac{1}{X^2(X^2+a^2)}$

donc $\frac{\alpha}{X^2} - \frac{\beta}{X} + \frac{-\gamma X + \delta}{X^2+a^2} = \frac{\alpha}{X^2} + \frac{\beta}{X} + \frac{\gamma X + \delta}{X^2+a^2}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

d'où (par unicité de la décomposition en éléments simples) :

$-\beta = \beta$ donc $\beta = 0$

$-\gamma = \gamma$ donc $\gamma = 0$

Donc $F(X) = \frac{\alpha}{X^2} + \frac{\delta}{X^2+a^2}$

$\alpha = \lim_{x\to 0} (X^2 F(X)) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{X^2+a^2} = \frac{1}{a^2}$

et $\delta = \lim_{x\to ia} [(X^2+a^2)F(X)] = \lim_{x\to ia} \left(\frac{1}{X^2}\right) = -\frac{1}{a^2}$

Conclusion : $F(X) = \frac{1}{X^2(X^2+a^2)} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{X^2} - \frac{1}{X^2+a^2}\right)$

(5) $F(X) = \frac{X+2}{(X+1)^2(X-2)^2} = \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X-2)^2} + \frac{d}{X-2}$

où : $a = (X+1)^2 F(X)\Big|_{X=-1} = \frac{1}{9}$

$b = \left(\frac{X+2}{(X-2)^2}\right)'\Big|_{X=-1} = \frac{5}{27}$

$c = (X-2)^2 F(X)\Big|_{X=2} = \frac{4}{9}$

$d = \left(\frac{X+2}{(X+1)^2}\right)'\Big|_{X=2} = -\frac{5}{27}$ dans $R(X)$ et $C(X)$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

(6) $F(X) = \dfrac{X^2}{(X^4+X^2+1)^2} = \dfrac{X^2}{(X^2+X+1)^2(X^2-X+1)^2}$

$= \dfrac{aX+b}{(X^2+X+1)^2} + \dfrac{cX+d}{(X^2+X+1)^2} + \dfrac{eX+g}{(X^2-X+1)^2} + \dfrac{gX+h}{X^2-X+1}$

Mais $F(X) = F(-X)$ ie:

$= \dfrac{-aX+b}{(X^2-X+1)^2} + \dfrac{-cX+d}{(X^2-X+1)^2} + \dfrac{-eX+g}{(X^2+X+1)^2} + \dfrac{-gX+h}{(X^2+X+1)}$

donc $a = -e$

$g = b$

$g = c$

$h = d$

Conclusion: $\dfrac{aX+b}{(X^2+X+1)^2} + \dfrac{cX+d}{(X^2+X+1)} + \dfrac{-aX+b}{(X^2-X+1)^2} + \dfrac{-cX+d}{(X^2-X+1)}$

$aj+b = \lim\limits_{X\to j} \left[(X^2+X+1)^2 F(X) \right] = \dfrac{X^2}{(X^2-X+1)^2}\Big|_{X=j} = \dfrac{j^2}{(-2j)^2} = \dfrac{1}{4}$

$a = 0 \quad , \quad b = 1/4$

$F(X) = \dfrac{X^2}{(X^4+X^2+1)^2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(X^2+X+1)^2} + \dfrac{cX+d}{X^2+X+1} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(X^2-X+1)^2} + \dfrac{-c+d}{X^2-X+1}$

$X = 0 \Rightarrow d = -1/4$

$X = 1 \Rightarrow c = -1/4$

$F(X) = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(X^2+X+1)^2} - \dfrac{1}{4}\dfrac{(X+1)}{X^2+X+1} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(X^2-X+1)^2} + \dfrac{1}{4}\dfrac{X-1}{X^2-X+1}$ dans $\mathbb{R}(X)$.

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Dans $\mathbb{C}(X)$: $F(X) = \dfrac{X^2}{(X^4+X^2+1)^2} = \dfrac{\alpha}{(X-j)^2} + \dfrac{\beta}{X-j} + \dfrac{\gamma}{(X+j)^2} + \dfrac{\delta}{X+j} + \dots$

où $\alpha = (X-j)^2 F(X)\Big|_{X=j} = \left.\dfrac{X^2}{(X-\bar{j})^2(X^2-X+1)^2}\right|_{X=j}$

$= \dfrac{j^2}{(j-\bar{j})^2(j^2+j+1)^2} = \dfrac{j^2}{(i\sqrt{3})^2(-2j)^2} = -\dfrac{1}{12}$

$\beta = \left(\dfrac{X^2}{(X-\bar{j})^2(X^2-X+1)^2}\right)'\Big|_{X=j} = -\dfrac{1}{8} - \dfrac{i\sqrt{3}}{72}$

$\gamma = \left.\dfrac{X^2}{(X+\bar{j})^2(X^2+X+1)^2}\right|_{X=-j} = -\dfrac{1}{12} = \alpha$

$\delta = \left(\dfrac{X^2}{(X+\bar{j})^2(X^2+X+1)^2}\right)'\Big|_{X=-j} = \dfrac{7}{24} + \dfrac{13\sqrt{3}\,i}{72}$

(7) $F(X) = \dfrac{X^7+2}{(X^2+X+1)^3}$

Le dénominateur est une puissance d'un irréductible de $\mathbb{R}[X]$, la méthode que nous avons utilisée s'applique à toute fonction de la forme $\dfrac{A(X)}{P(X)^n}$

$X^7+2 = (X^2+X+1)(X^5-X^4+X^2-X) + X + 2$

d'où $\dfrac{X^7+2}{(X^2+X+1)^3} = \dfrac{X^5-X^4+X^2-X}{(X^2+X+1)^2} + \dfrac{X+2}{(X^2+X+1)^3}$

$X^5-X^4+X^2-X = (X^2+X+1)(X^3-2X^2+X+2) - 4X - 2$

d'où $\dfrac{X^7+2}{(X^2+X+1)^3} = \dfrac{X^3-2X^2+X+2}{X^2+X+1} + \dfrac{X+2}{(X^2+X+1)^3} + \dfrac{-4X-2}{(X^2+X+1)^2}$

$X^3-2X^2+X+2 = (X^2+X+1)(X-3) + 3X+5$

$= X - 3 + \dfrac{3X+5}{X^2+X+1} - \dfrac{4X+2}{(X^2+X+1)^2} + \dfrac{X+2}{(X^2+X+1)^3}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Dans $\mathbb{C}(X)$:

$$F(X) = \frac{X^7+2}{(X^2+X+1)^3} = X-3 + \frac{\alpha}{(X-j)^3} + \frac{\beta}{(X-j)^2} + \frac{\gamma}{(X-j)} + \alpha\alpha$$

où $\alpha = [(X-j)^3 F(X)]_{X\to j} = \left.\frac{X^7+2}{(X-\bar{j})^3}\right|_{X=j} = \frac{j+2}{(i\sqrt{3})^3}$

$$\beta = \frac{4j - 7\bar{j} - 6}{9}$$

$$\gamma = \frac{(14-21j)i\sqrt{3} - 2(4j-7\bar{j}-6)}{i9\sqrt{3}}$$

(8) 1ère méth

$$F(X) = \frac{2X^4+1}{(X-1)^3(X^2+1)} = \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{dX+e}{X^2+1}$$

où $a = (X-1)^3 F(X)\big|_{X\to 1} = 3/2$

$$b = \left(\frac{2X^4+1}{X^2+1}\right)'\Big|_{X=1} = \left.\frac{8X^3(X^2+1) - (2X^4+1)2X}{(X^2+1)^2}\right|_{X=1} = 5/2$$

$$c = \frac{1}{2}\left(\frac{2X^4+1}{X^2+1}\right)''\Big|_{X=1} = 11/4$$

$d = -3/4$ $\quad e = 3/4$ $\quad \mathbb{R}[X]$

2ème méth Pour $Y = X-1 \Leftrightarrow X = 1+Y$

alors $F(X) = \frac{2(1+Y)^4+1}{Y^3(Y^2+2Y+2)} = \frac{2Y^4+8Y^3+12Y^2+8Y+3}{Y^3(2+2Y+Y^2)}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$$3 + 8Y + 12Y^2 + 8Y^3 + 2Y^4 \;\Big|\; 2 + 2Y + Y^2$$

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{2}Y + \frac{11}{4}Y^2$$

$$\vdots$$

$$-\frac{3}{4}Y^4$$

$$F(X) = \frac{3}{2}\frac{1}{Y^3} + \frac{5}{2}\frac{1}{Y^2} + \frac{11}{4}\frac{1}{X+1} + \frac{3}{4}\frac{X-1}{X^2+1}$$

(a) $$F(X) = \frac{X+3}{(X-1)^4(X+1)}$$

$$= \frac{a}{(X-1)^4} + \frac{b}{(X-1)^3} + \frac{c}{(X-1)^2} + \frac{d}{X-1} + \frac{e}{X+1}$$

où $$a = (X+1)^4 F(X)\Big|_{X=1} = \frac{X+3}{X+1}\Big|_{X=1} = \left(1 + \frac{2}{X+1}\right)\Big|_{X=1} = 2$$

$b = -1/2$

$c = 1/4$

$d = -1/8$

$e = 1/8$

$$F(X) = \frac{4+Y}{Y^4(2+Y)}$$

$$4 + Y \;\Big|\; 2 + Y$$

$$-4 - 2Y \;\Big|\; 2 - \frac{1}{2}Y + \frac{1}{4}Y^2 - \frac{1}{8}Y^3$$

$$\vdots$$

$$-\frac{1}{4}Y^2$$

$$\frac{1}{8}Y^4$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 83

(1) $F(X) = \dfrac{1}{(1-X^2)(1-X^3)} = \dfrac{1}{(X-1)^2(X+1)(X-j)(X-\bar{j})}$

$= \dfrac{a}{(X-1)^2} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{c}{X+1} + \dfrac{d}{X-j} + \dfrac{\bar{d}}{X-\bar{j}}$

où $a = (X-1)^2 F(X)\big|_{X\to 1} = \left.\dfrac{1}{(X+1)(X^2+X+1)}\right|_{X=1} = \dfrac{1}{6}$

$b = \left(\dfrac{1}{(X+1)(X^2+X+1)}\right)'\Big|_{X=1} = -\left.\dfrac{X^2+X+1+(X+1)(2X+1)}{[(X+1)(X^2+X+1)]^2}\right|_{X=1}$

$= -\dfrac{1}{4}$

$c = (X+1)F(X)\big|_{X\to -1} = \left.\dfrac{1}{(X-1)(X^3-1)}\right|_{X=-1} = \dfrac{1}{4}$

$d = (X-j)F(X)\big|_{X\to j} = \left.\dfrac{1}{(X^2-1)(X-1)(X-\bar{j})}\right|_{X=j} = \dfrac{1}{(j^2-1)(j-1)(j-\bar{j})}$

Mais $(j^2-1)(j-1) = j^2+1-j-j^2 = 3$

et $j-\bar{j} = i\sqrt{3}$ donc $d = \dfrac{-i}{3\sqrt{3}}$

donc $F(X) = \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{(X-1)^2} - \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{X-1} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{X+1} - \dfrac{i}{3\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{X-j} - \dfrac{1}{X-\bar{j}}\right)$

(2) $1 = (1-X^2)(1+X^2+X^4+\dots+X^{2m}) + X^{2m+2}$

$= (1-X^2)\sum_{2j\le N} X^{2j} + X^{N+1}R_N(X)$ $\quad\begin{cases} R_{2m}(X) = X \\ R_{2m+1}(X) = 1 \end{cases}$

et $1 = (1-X^3)\left(\sum_{3k\le N} X^{3k}\right) + X^{N+1}S_N(X)$

(3) $F(X) = \dfrac{1}{(1-X^2)(1-X^3)} = \left(\sum_{2j\le N} X^{2j} + X^{N+1}\dfrac{R_N(X)}{1-X^2}\right)\left(\sum_{3k\le N} X^{3k} + X^{N+1}\dfrac{S_N(X)}{1-X^3}\right)$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$$= \sum_{\substack{\varepsilon_j \le N \\ 3k \le N}} X^{\varepsilon_j + 3k} + X^{N+1} \frac{\left(\sum_{j \le N} X^{\varepsilon_j}\right) S_N(X)(1-X^2)}{(1-X^3)(1-X^2)}$$

$$+ X^{N+1} \frac{\left(\sum_{3k \le N} X^{3k}\right) R_N(X)(1-X^3)}{(1-X^3)(1-X^2)} + X^{N+1} \frac{X^{N+1} S_N(X) R_N(X)}{(1-X^3)(1-X^2)}$$

$$= \sum_{\substack{\varepsilon_j \le N \\ 3k \le N}} X^{\varepsilon_j + 3} + X^{N+1} \frac{T_N(X)}{(1-X^2)(1-X^3)}$$

$$= \sum_{\varepsilon_j + 3k \le N} X^{\varepsilon_j + 3k} + X^{N+1} \frac{U_N(X)}{(1-X^2)(1-X^3)}$$

$$= \sum_{m \le N} \left(\sum_{\varepsilon_j + 3k = m} 1 \right) X^m + X^{N+1} \frac{U_N(X)}{(1-X^2)(1-X^3)}$$

$$= \sum_{m \le N} g(m) X^m + X^{N+1} \frac{U_N(X)}{(1-X^2)(1-X^3)} \quad \text{où } g(m) = \sum_{\varepsilon_j + 3k = m} 1 = \text{Pe}$$

nombre de façon d'écrire $m = \varepsilon_j + 3k$ avec $j, k \in \mathbb{N}$

La question est : calculer $g(m)$.

Taylor : $\dfrac{F^{(m)}(0)}{m!} = g(m)$ car $\left(X^{N+1} \dfrac{U_N(X)}{(1-X^2)(1-X^3)} \right)^{(m)} \Big|_{X=0} = 0$

puisque $N+1 > m$

Pour expliciter $F^{(m)}(0)$ on utilise la décomposition en éléments simples de la question (1), qui donne :

$$F^{(m)}(X) = \frac{1}{6} \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{x+1}$$

$$- \frac{i}{3\sqrt{3}} \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{1}{x-j} - \frac{1}{x-\bar{j}} \right)$$

Mais $\dfrac{d^m}{dx^m} \dfrac{1}{x-a} = \dfrac{(-1)^m m!}{(x-a)^{m+1}}$ et $\dfrac{d^m}{dx^m} \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{d^m}{dx^m} \left(-\dfrac{1}{x-1} \right)'$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$$= -\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}(m+1)!}{(x-1)^{m+2}}$$

Ainsi : $$\frac{F^{(m)}(x)}{m!} = \frac{1}{6}\frac{(-1)^{m+2}(m+1)}{(x-1)^{m+2}} - \frac{1}{4}\frac{(-1)^m}{(x-1)^{m+1}} + \frac{1}{4}\frac{(-1)^m}{(x+1)^{m+1}}$$

$$- \frac{i}{3\sqrt{3}}\left(\frac{(-1)^m}{(x-j)^{m+1}} - \frac{(-1)^m}{(x-\bar{j})^{m+1}}\right)$$

et donc $$g(m) = \frac{F^{(m)}(0)}{m!} = \frac{1}{6}(m+1) + \frac{1}{4}(1+(-1)^m) + \frac{i}{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{j^{m+1}} - \frac{1}{\bar{j}^{m+1}}\right)$$

or $$\frac{1}{j^{m+1}} - \frac{1}{\bar{j}^{m+1}} = 2i\ \mathrm{Im}\ \frac{1}{j^{m+1}} = 2i\ \mathrm{Im}\left(e^{-\frac{2\pi i}{3}(m+1)}\right) = -2i\sin\left(\frac{2\pi}{3}(m+1)\right)$$

d'où $$\frac{i}{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{j^{m+1}} - \frac{1}{\bar{j}^{m+1}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2\pi}{3}(m+1)\right)$$

C'est donc :

$$g(m) = \frac{1}{6}(m+1) + \frac{1}{4}(1+(-1)^m) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2\pi}{3}(m+1)\right)$$

mod 2 mod 3

On va regarder mod 6, $m = 6m+R$, $0 \le R \le 5$:

- $g(6m) = \frac{1}{6}(6m+1) + \frac{1}{2} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2\pi}{3}(6m+1)\right)$

$= m + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = m+1$

- $g(6m+1) = \frac{1}{6}(6m+2) + 0 + \frac{2}{3\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2\pi}{3}(6m+2)\right) = m$

- $g(6m+2) = m+1$
- $g(6m+4) = m+1$
- $g(6m+3) = m+1$
- $g(6m+5) = m+1$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 24

$$F(X) = \frac{1}{(X-a)^m (X-b)^m} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j(a,b)}{(X-a)^j} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j(b,a)}{(X-b)^j}$$

où $$\lambda_j(a,b) = \frac{1}{(m-j)!} \left(\frac{d}{dx}\right)^{m-j} \left((X-a)^m F(X)\right)\Big|_{x \to a}$$

$$= \frac{1}{(m-j)!} \left(\frac{d}{dx}\right)^{m-j} \left(\frac{1}{(x-b)^m}\right)\Big|_{x=a}$$

Rappel : $$\boxed{\left(\frac{d}{dx}\right)^k \frac{1}{x-b} = \frac{(-1)^k k!}{(x-b)^{k+1}}}$$

donc $$\frac{1}{(x-b)^m} = \frac{1}{(-1)^{m-1}(m-1)!} \left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1} \frac{1}{x-b}$$

et donc $$\lambda_j(a,b) = \frac{1}{(-1)^{m-1}(m-1)!} \left(\frac{d}{dx}\right)^{2m-j-1} \frac{1}{x-b}\Big|_{x=a}$$

$$= \frac{(-1)^{2m-j-1}(2m-j-1)!}{(-1)^{m-1}(m-1)!(m-j)!} \frac{1}{(a-b)^{2m-j}}$$

$$= (-1)^{m-j} \binom{2m-j-1}{m-1} \frac{1}{(a-b)^{2m-j}}$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 25

$E = \mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}\{1, X, X^2\} \Rightarrow \dim E = 3$

Remarque Plus généralement : $\mathbb{R}[X]$

Donc pour montrer que $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de E, il suffit de vérifier qu'elle est libre ou de vérifier qu'elle est génératrice. (on n'a pas besoin de faire les deux puisque card $\{P_1, P_2, P_3\} = 3$)

1ère méthode

Vérifions que $\{P_1, P_2, P_3\}$ est libre :

$$aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow a(X+1) + b(X-1) + c(X^2-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow cX^2 + (a+b)X + (a-b-c) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a+b = 0 \\ a-b-c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc (P_1, P_2, P_3) est libre et donc c'est une base de E.

2ème méthode

Vérifions que $\{P_1, P_2, P_3\}$ est génératrice. Il suffit de vérifier que les éléments de la base canonique $1, X, X^2$ sont engendrés par P_1, P_2, P_3.

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{cases} P_1 = X+1 \\ P_2 = X-1 \\ P_3 = X^2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{1}{2}(P_1 - P_2) \\ X = 1/2\,(P_1+P_2) \\ X^2 = 1+P_3 = \frac{1}{2}(P_1-P_2)+P_3 \end{cases}$$

Donc (P_1, P_2, P_3) est génératrice de $\mathcal{L}$ et donc c'est une base.

<u>3ème méthode</u>

Montrons autrement que $\{P_1, P_2, P_3\}$ est génératrice: en utilisant Vect:

$$\begin{aligned} \text{Vect}\{P_1, P_2, P_3\} &= \text{Vect}\{x+1, x-1, x^2-1\} \\ &= \text{Vect}\{x+1-(x-1), x-1, x^2-1\} \\ &= \text{Vect}\{2, x-1, x^2-1\} \\ &= \text{Vect}\{1, x-1+1, x^2-1\} \\ &= \text{Vect}\{1, x, x^2-1+1\} \\ &= \text{Vect}\{1, x, x^2\} \\ &= \mathcal{L}. \end{aligned}$$

<u>À retenir</u> Dans un Vect, on peut ajouter à l'un des vecteurs présent une combinaison linéaire des autres vecteurs (présent dans le Vect) : cela ne modifie pas l'espace défini par le Vect.

Écrivons $x^2 - 5x + 4$ dans la base (P_1, P_2, P_3).

Si on a utilisé la deuxième méthode, c'est immédiat: $x^2 - 5x + 4 = \frac{1}{2}(P_1 - P_2) + P_3 - \frac{5}{2}(P_1 + P_2)$

$$+2(P_1 - P_2)$$

$$= -5P_2 + P_3$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Les coordonnées de $X^2 - 5X + 4$ dans la base (P_1, P_2, P_3) sont $(0, -5, 1)$ (ordre !)

Si on a utilisé une autre méthode que la 2ème, eh bien on cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tq $X^2 - 5X + 4$

$$= aP_1 + bP_2 + cP_3$$
$$= a(X+1) + b(X-1) + c(X^2-1)$$
$$= cX^2 + (a+b)X + (a-b-c)$$

on identifie $c = 1$, $a+b = 5$, $a-b-c = 4$

donc : $c = 1$, $a+b = 5$, $a-b = 5$

et donc : $c = 1$, $a = 0$, $b = -5$

et redonc : $X^2 - 5X + 4 = -5P_2 + P_3$

et on retrouve le résultat précédent.

Exercice 28

(1) • $\mathcal{L}$ contient $0 = (0)_{n \in \mathbb{N}}$. En effet : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1}$$

si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0)_{n \in \mathbb{N}}$

• $\mathcal{L}$ est stable par combinaison linéaire. En effet si $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}$

, alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1} & \times \lambda \\ y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1} & \times \mu \end{cases}$

et donc, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, en multipliant la relation pour (x_n) par λ et par (y_n) par μ, et en ajoutant, on obtient : $\lambda x_{n+1} + \mu y_{n+1} = 4(\lambda x_n + \mu y_n) - (\lambda x_{n-1} + \mu y_{n-1})$

et donc $\lambda x + \mu y = (\lambda x_n + \mu y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}$.

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

(2) Si λ et μ existent alors en particulier on a :

$$\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{cases} \quad \text{et donc } \lambda = \frac{\begin{vmatrix} u_0 & y_0 \\ u_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}} = \frac{u_0 y_1 - u_1 y_0}{x_0 y_1 - x_1 y_0}$$

et $\mu = \dfrac{\begin{vmatrix} x_0 & u_0 \\ x_1 & u_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}} = \dfrac{x_0 u_1 - x_1 u_0}{x_0 y_1 - x_1 y_0}$ à condition bien sûr que $\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \neq 0$

Vérifions que $\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \neq 0$

Si $\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0$, alors $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

ou $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

En effet : $\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0 \iff x_0 y_1 = x_1 y_0$

$\Rightarrow$
- si $y_0 \neq 0$, $x_1 = \frac{y_1}{y_0} x_0$ et donc $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \frac{x_0}{y_0} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$
- si $y_1 \neq 0$, $x_0 = \frac{y_0}{y_1} x_1$ et donc $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \frac{x_1}{y_1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$
- si $y_0 = y_1 = 0$: $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

De même si $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$, ie si $\begin{cases} x_0 = \alpha y_0 \\ x_1 = \alpha y_1 \end{cases}$ alors

en vertu ...

* Cela prouve que si $\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0$, alors $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Mais si $y_0 = y_1 = 0$, alors en vertu de la relation de récurrence $y_{n+1} = 4 y_n - y_{n-1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ on aura $y_n = 0$, $\forall n$ et donc $y = 0$ et donc $\{x, y\}$ n'est pas possible : contraire aux hypothèses donc exclu

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

... de la relation de récurrence, on aura $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \alpha y_n$, ie $x = \alpha y$ et cela contredira l'hypothèse que $\{x, y\}$ est libre.
Donc $\{x, y\}$ libre $\Rightarrow \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \neq 0$

Conclusion

Si λ et μ existent, alors (sous les conditions de l'énoncé) $\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \neq 0$ et λ, μ sont données par les expressions données plus haut (Cramer)

(3) $(R^n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, R^{n+1} = 4R^n - R^{n-1}$

$$\begin{cases} R = 0 \\ R^2 = 4R - 1 \end{cases}$$

$R^2 - 4R + 1 = 0$

$\Leftrightarrow R_\pm = \dfrac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

i.e ssi $R_+ - R_- \neq 0$: c'est le cas

Vu le (2), $((R_-^n), (R_+^n))$ sera une base de E si et seulement si elles sont l.i.m. indép

ie ssi $\begin{vmatrix} R_-^0 & R_+^0 \\ R_-^1 & R_+^1 \end{vmatrix} \neq 0$

ie ssi $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ R_- & R_+ \end{vmatrix} \neq 0$

Soit $(u_n) \in E$ / $u_0 = a$, $u_1 = b$. D'après le (2), $u_n = \lambda R_-^n + \mu R_+^n$ où

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & R_+ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ R_- & R_+ \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ R_- & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ R_- & R_+ \end{vmatrix}}$$

ie $\lambda = \dfrac{(2+\sqrt{3})a - b}{2\sqrt{3}}$ et $\mu = \dfrac{-(2-\sqrt{3})a + b}{2\sqrt{3}}$

et donc $u_n = \dfrac{(2+\sqrt{3})a + b}{2\sqrt{3}} (2-\sqrt{3})^n + \dfrac{-(2-\sqrt{3})a + b}{2\sqrt{3}} (2+\sqrt{3})^n$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 27

"On a l'âge de ses algèbres"

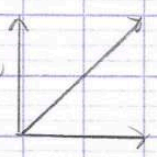
$F = \text{Vect}\{(2,-3,1), (2,-2,1)\}$

$\dim F = \begin{cases} 2 & \text{si } \{(2,-3,1),(2,-2,1)\} \text{ est libre} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Il est clair que $(2,-3,1)$ et $(2,-2,1)$ ne sont pas colinéaires donc $\{(2,-3,1),(2,-2,1)\}$ est libre. Et donc $\dim F = 2$.

Deux vecteurs sont linéairement indépendants car $\lambda u + \mu v = 0$ avec $\lambda \neq 0$ (par exemple) $\Rightarrow u = -\frac{\mu}{\lambda} v$ $\Rightarrow u, v$ colinéaire. Mais trois vecteurs (ou davantage) non colinéaires ne sont pas nécessairement lin. indép

Exemple :



ils ne sont pas colinéaires mais liés puisque $(u+v)-u-v = 0$

Relation linéaire non triviale

Deux vecteurs non colinéaires $\Rightarrow$ indépendants

Trois vecteurs non coplanaires $\Rightarrow$ indépendants

$(2,-3,1), (2,-2,1)$ ne sont pas colinéaires et donc F est libre et donc c'est une base de F et donc $\dim F = 2$

$(x,y,z) \in F = \text{Vect}\{(2,-3,1),(2,-2,1)\}$

$\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / (x,y,z) = \lambda(2,-3,1) + \mu(2,-2,+1)$

$\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \begin{cases} x = 2\lambda + 2\mu \\ y = -3\lambda - 2\mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -\lambda - x \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$\Leftrightarrow \quad \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ / \begin{cases} x = 2z \\ \lambda = -x - y \\ \mu = x + y + z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad x = 2z$

Donc $(x, y, z) \in F \Leftrightarrow x - 2z = 0$

$\left.\begin{array}{l} \dim F = 0 \\ F \text{ d'équation } x - 2z = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$ F est le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - 2y = 0$

Exercice 28

$$a\{1, 1, 0, 0, c) + b(1, 1, 0, 1, 0) + c(1, 1, 2, 1, 1) = 0 \in \mathbb{R}^5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ 2c = 0 \\ b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

donc $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est libre.

D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ en une base de $\mathbb{R}^5$ en y adjoignant des vecteurs pris dans une partie génératrice donnée de $\mathbb{R}^5$, par exemple la base canonique. $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$

$\text{Vect}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} = \text{Vect}\{e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_4, e_1 + e_2 + 2e_3 + e_4 + e_5\}$

$= \text{Vect}\{e_1 + e_2, e_4, 2e_3 + e_4 + e_5\}$

$= \text{Vect}\{e_1 + e_2, e_4, 2e_3 + e_5\}$ ↓ adjoignons e_1

$= \text{Vect}\{e_1 + e_2, e_4, 2e_3 + e_5, e_1\}$

$= \text{Vect}\{e_2, e_4, 2e_3 + e_5, e_1\}$ ↓ $\oplus e_3$

$= \text{Vect}\{e_2, e_4, e_5, e_1, e_3\}$

$= \text{Vect}\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} = \mathbb{R}^5$ Et donc $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, e_1, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^5$.

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 29

1ère méthode $0 = (0,0,0,0) \in F_1$: clair !

car $(0+0+0+0=0)$

Et F_1 est stable par combinaison linéaire car

si $\begin{cases} (x,y,z,t) \in F_1 \\ (x',y',z',t') \in F_1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x+y+z+t=0 & (\times\lambda) \quad (1) \\ x'+y'+z'+t'=0 & (\times\mu) \quad (2) \end{cases}$

et donc $\lambda(x+y+z+t) + \mu(x'+y'+z'+t') = 0$ $(1)+(2)$

ie $(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') + (\lambda t + \mu t') = 0$

ie $(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z', \lambda t + \mu t') \in F_1$

2ème méthode Il est clair que $F_1 = \ker \varphi$ où $\varphi(x,y,z,t) = x+y+z+t$ (évident linéaire), donc F_1 est un sev de $\mathbb{R}^4$

De même pour F_2 (ou est stable par comb lin, ou $F_2 = \ker \psi$ avec $\psi(x,y,z,t) = x+y-z-t$ évidemment linéaire).

$(x,y,z,t) \in F_1 \Leftrightarrow x+y+z+t=0 \Leftrightarrow t = -x-y-z$

$\Leftrightarrow (x,y,z,t) = (x,y,z,-x,-y,-z)$

$\Rightarrow (x,y,z,t) \in \text{Vect}\{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}$ $= x(1,0,0,-1) + y(0,1,0,-1) + z(0,0,1,-1)$

et réciproquement :

$(x,y,z,t) \in \text{Vect}\{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}$

alors $\exists a,b,c \in \mathbb{R} / (x,y,z,t) = a(1,0,0,-1) + b(0,1,0,-1) + c(0,0,1,-1))$

$= (a,b,c,-a-b-c)$ ie $\begin{cases} a = x \\ b = y \\ c = z \\ t = -x-y-z \end{cases}$

ie $t = -x-y-z$ ie $(x,y,z,t) \in F_1$

Donc $F_1 = \text{Vect}\{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}$

Vérifions que F_1 est libre

Clair $\Rightarrow a=b=c=0$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 29 (suite et fin)

$(x,y,z,t) \in F_2 \Leftrightarrow x+y=z+t \Leftrightarrow t = x+y-z$

$\Leftrightarrow (x,y,z,t) = (x,y,z,x+y-z)$

$= x(1,0,0,1) + y(0,1,0,1) + z(0,0,1,-1)$

$\Leftrightarrow (x,y,z,t) \in \text{Vect}\{(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,-1)\}$

Libre car : $x(1,0,0,1) + y(0,1,0,1) + z(0,0,1,-1) = (0,0,0,0)$

$\Leftrightarrow (x,y,z,x+y-z) = (0,0,0,0)$

$\Leftrightarrow x = y = z = 0$

Donc $((1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,-1))$ est une base de F_2 et donc $\dim F_2 = 3$

(2) $F_1 + F_2 = \text{Vect}\{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1),(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,-1)\}$

$= \text{Vect}\{e_1-e_4, e_2-e_4, e_3-e_4, e_1+e_4, e_2+e_4\}$

$= \text{Vect}\{e_1-e_4, e_1+e_4, e_2-e_4, e_2+e_4, e_3-e_4\}$

$= \text{Vect}\{e_1-e_4, e_1+e_4+e_1-e_4, e_2-e_4, e_2+e_4, e_2-e_4, e_3-e_4\}$

$= \text{Vect}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ $\Rightarrow$ Libre (extrait base can)

et donc $\dim(F_1+F_2) = 4$

Remarque : On en déduit que $\dim(F_1 \cap F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cup F_2)$

$= 2$.

Exercice 30

(1) • $0 \in L^-$: La suite nulle converge $\to 0$

• L^- est stable par comb. lin.

car $\begin{cases} x_n \to l \\ x'_n \to l' \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\Rightarrow \lambda x_n + \mu x'_n \to \lambda l + \mu l'$

$\Rightarrow \lambda (x_n)_{n \in \mathbb{N}} + \mu (x'_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Donc $\mathcal{L}^-$ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

(2) $C = \{$ suites cte $\}$ est un sev de $\mathcal{L}^-$ ($=$ $\{$ suites convergentes $\}$

- $C \subset \mathcal{L}^-$
- $C \ni 0$
- $\begin{cases} (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C : x_n = a \ \forall n \\ (x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C : x'_n = b \ \forall n \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda x_n + \mu x'_n = \lambda a + \mu b = cte$

$\Rightarrow \lambda (x_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu (x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C \ \forall n$

$\mathcal{L}^-$ et N est un sev de $\mathcal{L}^-$ car :

- $N \subset \mathcal{L}^-$ ($x_N \to 0 \Rightarrow (x_n)$ converge !)
- $N \ni 0$ (la suite nulle converge vers 0)
- $\begin{cases} x_N \to 0 \\ x'_N \to 0 \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \lambda x_n + \mu x'_n \to 0 \quad \lambda (x_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu (x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in N$

Dans C et N sont des sev de $\mathcal{L}^-$. Sont-ils supplémentaires (dans $\mathcal{L}^-$) ?

<u>Rappel</u> C, N $\begin{cases} \text{supplémentaires dans } \mathcal{L}^- \\ \Leftrightarrow \begin{cases} C \cap N = \{0\} \\ C + N = \mathcal{L}^- \end{cases} \end{cases}$

- Analyse $C \cap N = \{0\}$, car :

soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C \cap N$:

$\begin{cases} (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow x_n = a \ \forall n \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in N \Rightarrow x_n \to 0 \end{cases}$

$\Rightarrow a = 0$ et donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$

- Analyse $\mathcal{L}^- = C + N$

Autrement dit, est ce que toute suite convergente est la somme d'une suite cte et d'une

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

suite qui CV vers 0 ?

- Soit $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^- : x_m \to \ell$

  $\forall m,\ x_m = \ell + (x_m - \ell) \in C + N$

Donc $\begin{cases} C \cap N = \{0\} \\ C + N = \mathcal{L}^- \end{cases}$ ce qué l'on peut résumer par : $\mathcal{L}^- = C \oplus N$

Exercice 31

(1) $\mathcal{L}^-_1 = \{(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : u_{10} = 0\}$

$= \operatorname{Ker} \varphi$ où $\varphi(u_0, u_1, u_2, \dots) = u_{10}$

(clairement linéaire car $\varphi(\lambda(u_m) + \mu(u_m)) = \varphi(\lambda u_0 + \mu v_0, \dots, \lambda u_{10} + \mu v_{10}) = \lambda u_{10} + \mu v_{10}$

$= \lambda\varphi((u_m)_{m\in\mathbb{N}}) + \mu\varphi((v_m)_{m\in\mathbb{N}})$

$\mathcal{L}^-_2 = \{(\ell^m u_0)_{m\in\mathbb{N}} : u_0 \in \mathbb{R}\}$

$= \mathbb{R}(\ell^m)_{m\in\mathbb{N}}$

: l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dirigée par le vecteur $(\ell^m)_{m\in\mathbb{N}}$

= le sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ engendré par le vecteur $(\ell^m)_{m\in\mathbb{N}}$

$= \operatorname{Vect}\{(\ell^m)_{m\in\mathbb{N}}\}$

et donc $\dim \mathcal{L}^-_2 = 1$ ($\mathcal{L}^-_2$ est engendrée par le vecteur $(\ell^m)_{m\in\mathbb{N}}$ c'est une droite dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

- $\mathcal{L}^-_3 \ni 0$ ($(0)_{m\in\mathbb{N}}$ est borné !)
- $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^-_3 : |x_m| \leq A\ \forall m$
  $(x'_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^-_3 : |x'_m| \leq B\ \forall m$

  $\Rightarrow \lambda x_m + \mu x'_m$

  $\Rightarrow \lambda(x_m)_{m\in\mathbb{N}} + \mu(x'_m)_{m\in\mathbb{N}}$

  $\leq |\lambda| A + |\mu| B$

Donc $\mathcal{L}^-_3$ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

(2) $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

A t on $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ = une suite de L_1^- + une suite de L_2^- ?

L'énoncé dit de considérer $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ déf par $v_m = \ell^{m-10} u_{10}$
$= \ell^m (\ell^{-10} u_{10})$.

On voit que $(v_m) \in L_2^-$

On peut écrire $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} = (w_m)_{m\in\mathbb{N}} + (v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ où
$w_m = u_m - v_m \quad \forall m$

donc $w_{10} = u_{10} - \ell^{10-10} u_{10} = 0$ donc $(w_m)_{m\in\mathbb{N}} \in L_1^-$

Et donc oui : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = L_1^- + L_2^-$

L_1^- et L_2^- sont supplémentaires si, de plus, $L_1^- \cap L_2^- = \{0\}$. Soit $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \in L_1^- \cap L_2^-$:

$(u_m) \in L_2^- \Rightarrow u_m = \ell^m u_0 \quad \forall m$

$(u_m) \in L_1^- \Rightarrow u_{10} = 0 \Rightarrow \ell^{10} u_{10} = 0$

$\Rightarrow u_0 = 0 \Rightarrow (\ell^m u_0 = 0 \ \forall m)$

$\Rightarrow (u_m = 0 \ \forall m) \Rightarrow (u_m)_{m\in\mathbb{N}} = 0$

Donc oui $L_1^- \cap L_2^-$

CQFD : L_1^- et L_2^- sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = L_1^- \oplus L_2^-$$

(3) Soit $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} = (u_0, u_1, \dots, u_9, u_{10}, u_{11}, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} = (u_0, u_1, \dots, u_9, 0, u_{11}, \dots) \in E_1$

$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} = (0, 0, 0, \dots, 0, u_{10}, 0, \dots) \in L_3^-$

Donc $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = L_1^- + L_3^-$

L_1^- et L_3^- sont-ils supplémentaires ? Est-ce-t-on $L_1^- \cap L_3^- = \{0\}$? Non car par exemple $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ $= (1, 0, \dots) \in L_1^- \cap L_3^-$ et est $\neq 0$ Donc L_1^- et L_3^- ne sont pas supplémentaires.

(4) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = L_2^- + L_3^-$ Ici est ce que toute suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de la forme

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 1

(1) Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille liée de vecteurs de E :
$\sum_i \lambda_i x_i = 0$ avec λ_j non tous nuls.

Application de f (linéaire) :
$\sum_i \lambda_i f(x_i) = f(0) = 0$ toujours vrai par f linéaire
et donc $(f(x_i))_{i\in I}$ est liée. (car les λ_i ne sont pas tous nuls, par tous nuls, par hyp)

(2) • Supposons que l'image par f de toute famille libre est libre.
Or tout x non nul est une famille libre (à un élément) car $\left.\begin{array}{l}\lambda x = 0 \\ x \neq 0\end{array}\right| \Rightarrow \lambda = 0$
Donc (par hyp) $f(x)$ est libre, i.e non nul (le vecteur 0 est lié : $1.0 = 0$)
Donc $x \neq 0 \Rightarrow x \notin \operatorname{Ker} f$. Cela signifie que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ et donc f est injective

• Réciproquement : supposons f injective. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille libre de vecteurs de E. On veut montrer que $(f(x_i))$ est libre.
Soit une relation linéaire :
$\sum \lambda_i f(x_i) = 0$ ie $f(\sum \lambda_i x_i) = 0$ ie puisque f est injective.
$\sum \lambda_i x_i = 0$ donc $\lambda_i = 0$ $\forall i$
(car $(x_i)_{i\in I}$ est libre)

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

(3) $(x_i)_{i\in I}$ génératrice de $\mathcal{L} \Rightarrow (f(x_i))_{i\in I}$ génératrice de $\operatorname{Im} f$

La conjonction de (2) et (3) redonne ce résultat du cours : f transforme toute base en une base ssi f est bijective (i.e est un isomorphisme)

$\Rightarrow (f(x_i))_{i\in I}$ génératrice de F ss' $F = \operatorname{Im} f$ i.e ss' f est surjective

Exercice 33

$(x, y) \in \operatorname{Ker} g_1 \Leftrightarrow (x+y, x-y) = (0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (x,y) = (0,0)$

donc $\operatorname{Ker} g_1 = \{(0,0)\}$

$g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

est injective, donc bijective, donc $\operatorname{Im} g_1 = \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2 = \operatorname{Vect}\{(1,0),(0,1)\} \Rightarrow \operatorname{Im} g_1 = \operatorname{Vect}\{g_1(1,0), g_1(0,1)\}$

$= \operatorname{Vect}\{(1,1),(1,-1)\}$

$= \operatorname{Vect}\{e_1+e_2, e_1-e_2\}$

$= \operatorname{Vect}\{e_1+e_2+e_1-e_2, e_1-e_2\}$

$= \operatorname{Vect}\{e_1, e_1-e_2\}$

$= \operatorname{Vect}\{e_1, e_2\} = \mathbb{R}^2$

où $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$(x,y) \in \text{Ker } g_2 \Leftrightarrow x - y = 0$

$\Leftrightarrow x = y$

$\Leftrightarrow (x,y) = (x,x) = x(1,1)$

Donc $\text{Ker } g_2 = \text{Vect}\{(1,1)\} = \mathbb{R}(1,1)$

$\text{Im } g_2 = \text{Vect}\{g_2(1,0), g_2(0,1)\} = \text{Vect}\{1,-1\} = \text{Vect}\{1\} = \mathbb{R}$

g_2 est surjective (mais pas injective)

Rem: $\dim \text{Im } g_2 = 2 - \dim \text{Ker } g_2$ (TR du Rang)

$= 2 - 1 = 1 = \dim \mathbb{R}$ espace d'arrivée

(on retrouve ainsi que $\text{Im } g_2 = \mathbb{R}$) de g_2

et que g_2 est surjective.

$(x,y,z) \in \text{Ker } g_3 \Leftrightarrow (x-y, y-z) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x,y,z) = (x,x,x) = x(1,1,1)$

Donc $\text{Ker } g_3 = \mathbb{R}(1,1,1) = \text{Vect}\{(1,1,1)\}$ la droite vectorielle (i.e passant par $(0,0,0)$) de $\mathbb{R}^3$ dirigée par le vecteur $(1,1,1)$.

$\text{Im } g_3 = \text{Vect}\{g_3(1,0,0), g_3(0,1,0), g_3(0,0,1)\} = \text{Vect}$

$\{(1,0),(-1,1),(0,-1)\} = \text{Vect}\{(1,0),(0,1)\} = \mathbb{R}^2$

donc g_3 est surjective.

Rem $\dim \text{Im } g_3 = 3 - \dim \text{Ker } g_3$

$= 2 = \dim \mathbb{R}^2$ et on retrouve que g_3

est surjective.

$(x,y,z) \in \text{Ker } g_4 \Leftrightarrow (x, y-z, 2x-y+z) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$\Leftrightarrow (x,y,z) = (0,y,y) = y(0,1,1)$

Donc $\operatorname{Ker} g_4 = \mathbb{R}(0,1,1)$

$\operatorname{Im} g_4 = \operatorname{Vect}\{g_4(1,0,0), g_4(0,1,0), g_4(0,0,1)\}$
$= \operatorname{Vect}\{(1,0,2), (0,1,-1), (0,-1,1)\}$

Rem

$\dim \operatorname{Im} g_4 = 3 - \dim \operatorname{Ker} g_1 = 2$

$(x,y) \in \operatorname{Ker} g_5 \Leftrightarrow (x,x,-x) = (0,0,0) \Leftrightarrow x = 0$
$\Leftrightarrow (x,y) = (0,y) = y(0,1)$

Donc $\operatorname{Ker} g_5 = \mathbb{R}(0,1)$

$\operatorname{Im} g_5 = \{(x,x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$
$= \{x(1,1,-1) : x \in \mathbb{R}\}$
$= \mathbb{R}(1,1,1)$

Rem $\dim \operatorname{Ker} g_5 + \dim \operatorname{Im} g_5 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$

$(z_1,z_2) \in \operatorname{Ker} g_6 \Leftrightarrow (iz_2, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_2 = 0 \Leftrightarrow (z_1,z_2) = (z_1,0) = z_1(1,0)$

Donc $\operatorname{Ker} g_6 = \mathbb{C}(1,0)$ (donc $\operatorname{Ker} g_6 = 1$)

$\operatorname{Im} g_6 = \operatorname{Vect}\{g_6(1,0), g_6(0,1)\} = \operatorname{Vect}\{(0,0),(i,1)\}$
$= \mathbb{C}(i,1)$.

Rem $\dim \operatorname{Ker} g_6 + \dim \operatorname{Im} g_6 = 2 = \dim \mathbb{C}^2$

$P \in \operatorname{Ker} g_7 \Leftrightarrow P' - P = 0 \Rightarrow P = 0$
car si $P \neq 0$ $\deg P' < \deg P$
et donc $P' \neq P$

Donc $\operatorname{Ker} g_2 = \{0\}$ ie g_7 est injective.

Comme $g_7 : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$ est de dim finie on en déduit que g_7 est surjective ie $\operatorname{Im} g_7 = \mathbb{R}_2[X]$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$P \in \ker g_8 \Leftrightarrow P'' = 0$

$\Leftrightarrow P \in \text{Vect}\{1, X\}$

$\Leftrightarrow P \in \mathbb{R}_1[X]$

$\text{Im } g_8 = \text{Vect}\{g_8(1), g_8(X), g_8(X^2), g_8(X^3)\}$

$= \text{Vect}\{2, 6X\}$

$= \text{Vect}\{1, X\} = \mathbb{R}_1[X]$

On a $\dim \ker g_8 + \dim \text{Im } g_8 = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$

$P \in \ker g_9 \Leftrightarrow (P(1), P'(1)) = (0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} P(1) = 0 \\ P'(1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 1$ est racine au moins double de P

$\Leftrightarrow (X-1)^2 \mid P(X)$

Mais $\begin{cases} P \in \mathbb{R}_2[X] \\ (X-1)^2 \mid P(X) \end{cases} \Leftrightarrow P(X) = c(X-1)^2$ où $c \in \mathbb{R}$

Et donc $\ker g_9 = \mathbb{R}(X-1)^2$ c'est la droite de $\mathbb{R}_2[X]$ engendrée par le vecteur $(X-1)^2$

$\text{Im } g_9 = \text{Vect}\{g_9(1), g_9(X), g_9(X^2)\}$

$= \text{Vect}\{(1,0), (1,1), (1,2)\}$

$= \text{Vect}\{(1,0), (1,0)+(0,1), (1,0)+2(0,1)\}$

$= \text{Vect}\{(1,0), (0,1)\} = \mathbb{R}^2$

On pouvait aussi dire directement : $\dim \text{Im } g_3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ - et $\text{Im } g_3$ est un sev de $\mathbb{R}^2$ donc c'est $\mathbb{R}^2$ $\dim \ker g_3 = 2$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 34

(1) $e_1 \xrightarrow{f} e_2 \xrightarrow{f} e_3 \xrightarrow{f} e_1$

$e_2 \to e_3 \to e_1 \to e_2$ donc $f^3 = id_{\mathbb{R}^3} = id_E$

$e_3 \to e_1 \to e_2 \to e_3$

$id_E(v)$

(2) $F = \{v \in E : f(v) - v = 0\} = \ker(f - id_E)$

donc F est un sev de E.

$v = xe_1 + ye_2 + ze_3 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$f(v) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3)$

$= xe_2 + ye_3 + ze_1$

$= (z, x, y)$

$(x, y, z) \in F \Leftrightarrow (x, y, z) = (z, x, y)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = x \\ z = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (x, x, x) = x(1, 1, 1)$

Donc $F = \mathbb{R}(1, 1, 1)$ et $\dim F = 1$

Exercice 35

Trouvons d'abord une CN

Si $V = \ker f$ et $W = \operatorname{Im} f$

alors $\dim V + \dim W = \dim E$

Cette condition est aussi suffisante. On suppose donc que V est un sev de E, W est un sev de F et que $\dim V + \dim W = \dim E$. Peut on construire une appli $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $\ker f$ V et $\operatorname{Im} f = W$? Soit $(e_1, \dots, e_R)$ une base de V On la complète en une base de E, $(e_1, \dots, e_R, e_{R+1}, \dots, e_n)$ ($n = \dim E$). Définissons $f \in \mathcal{L}(E, F)$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

par : $f(e_1) = 0, \dots, f(e_k) = 0$, $f(e_{k+1}) = w_1, \dots, f(e_m) = w_{m-k}$ où $(w_1, \dots, w_{m-k})$ est une base de W (N.B $\dim W = m-k$ par hyp)

Alors : $V \subset \ker f$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{f(e_{k+1}), \dots, f(e_m)\} = W$

Le théorème du rang donne :

$\dim \ker f = \dim E - \dim \operatorname{Im} f$

$= m - \dim W = m - (m-k)$

$= k = \dim V$

or $V \subset \ker f$ donc $V = \ker f$

Exercice 36

$e_1 \to 0 \to 0 \to 0$

$e_2 \to e_1 \to 0 \to 0$

$e_3 \to e_1 + e_2 \to e_1 \to 0$

$e_4 \to 2e_1 - e_2 \to -e_1 \to 0$

$e_5 \to e_1 - e_2 + e_3 + e_4 \to 2e_1 \to 0$

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{0, e_1, e_1+e_2, 2e_1-e_2\}$

$= \operatorname{Vect}\{e_1, e_2, e_3+e_4\}$

$\operatorname{Rg} f = \dim \operatorname{Im} f = 3$

$\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Vect}\{e_1\} \Rightarrow \operatorname{Rg} f^2 = 1$

On en déduit (par le théorème du rang)

$\dim \ker f = 2$

$\dim \ker f^2 = 4$

(3) $f^2(e_3) = e_1 \neq 0 \Rightarrow e_3 \notin \ker(f^2)$ car $\lambda e_3 \in \ker f^3$

$\Rightarrow \lambda^{-1}(\lambda e_3) \in \ker(f^2)$

Donc $\mathbb{R}e_3 \cap \ker(f^2) = \{0\}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Et donc $\dim (\mathbb{R}e_3 + \ker(g^2)) = \mathbb{R}^5$ (seul sev de $\mathbb{R}^5$ de dim 5) et (puisque $\mathbb{R}e_3 \cap \ker(g^2) = \{0\}$) on a donc : $\mathbb{R}^5 = \mathbb{R}e_3 \oplus \ker(g^2)$ ie $\mathbb{R}e_3$ et $\ker(g^2)$ sont supplémentaires.

Exercice 37

(1) $(x,y,z) = x e_1 + y e_2 + z e_3$

$g(x,y,z) = x g(e_1) + y g(e_2) + z g(e_3)$

$= x e_1 - y e_1 + z e_3$

$= (x-y, 0, z)$

$(x,y,z) \in \ker g \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$(x,y,z) \in (x,x,0)$

$= x(1\,1\,0)$

Donc $\ker g = \mathbb{R}(1\,1\,0)$ (droite !) base $\{1\,1\,0\}$

$\operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}\{g(e_1), g(e_2), g(e_3)\}$

$= \operatorname{Vect}\{e_1, e_3\}$

(2) $e_1 \xrightarrow{g} e_1 \xrightarrow{g} e_1$ donc $g \circ g(e_i) = g(e_i)$ $(1 \leq i \leq 3)$

$e_2 \to -e_1 \to -e_1$ et donc $g \circ g = g$

$e_3 \to e_3 \to e_3$ Donc g est le projecteur sur $\operatorname{Im} g$ para

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 38

$u \in F_1 \Leftrightarrow f(u) = u$

$(x,y,z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$

$f(u) = x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3)$

$\Leftrightarrow x(13e_1 + 12e_2 + 6e_3) + y(-8e_1 - 7e_2 - 4e_3) + z(-12e_1 - 12e_2 - 5e_3)$
$- xe_1 - ye_2 - ze_3 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 8y - 12z = 0 \\ 12x - 8y - 12z = 0 \\ 6x - 4y - 6z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 3x = 2y + 2z$

C'est l'équa du plan : $\dim F_1 = 2$

De même $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x,y,z) = z(2\,2\,1)$ donc $F_2 = \mathbb{R}(2\,2\,1)$ et $\dim F_2 = 1$

On a donc obtenu que F_1 est un plan (donc un hyperplan de $\mathbb{R}^3$), F_2 est la droite dirigée par $(2\,2\,1)$
Or $(2\,2\,1) \notin F_1$ car $3\times 2 - 2\times 2 - 3\times 1 = -1 \neq 0$
($(2,2,1)$ ne satisfait pas l'équation de F_2) donc $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$

Si H est un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-ev E (de dim finie si on veut) et u un vecteur de E tel que $u \notin H$, alors $E = H \oplus \mathbb{K}u$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

C'est vrai si $\dim E = \infty$

On a obtenu que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$ donc tout $v \in \mathbb{R}^3$ se décompose de façon unique en $v = v_1 + v_2$ où $\begin{cases} v_1 \in F_1 \\ v_2 \in F_2 \end{cases}$ et alors : $s(v) = s(v_1) + s(v_2)$
$= v_1 - v_2$

Exercice 89

(1) $E = F_1 \oplus F_2$

$v = v_1 + v_2$ décompo unique

$p_{R_1}(v) = v_1 = v_1 + 0 \Rightarrow p_{R_1} \circ p_{R_1}(v) = p_{R_1}(v_1 + 0)$
$= v_1 = p_{R_1}(v)$. Donc $p_{R_1} \circ p_{R_1} = p_{R_1}$
comme il se doit (p_{R_1} est proj)

De même $p_{R_2} \circ p_{R_2} = p_{R_2}$
$p_{R_2} \circ p_{R_1}(v) = p_{R_2}(v_1 + 0) = 0$ donc $p_{R_2} \circ p_{R_1} = 0$
De même $p_{R_1} \circ p_{R_2} = 0$

Enfin :
$(p_{R_1} + p_{R_2})(v) = p_{R_1}(v) + p_{R_2}(v)$
$= v_1 + v_2 = v = id_E(v)$
donc $p_{R_1} + p_{R_2} = id_E$

(2) $E = \mathbb{R}^2$, $F_1 = \mathbb{R}(1,1)$, $F_2 = \mathbb{R}(1,-1)$

$\begin{cases} \dim F_1 + \dim F_2 = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \\ F_1 \cap F_2 = 0 \text{ car } (x,y) \in F_1 \cap F_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases} \\ \Leftrightarrow (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Donc $\mathbb{R}^2 = F_1 \oplus F_2$

$(x,y) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$

où $(x_1, y_1) \in F_1$ donc $y_1 = x_1$

$(x_2, y_2) \in F_2$ donc $y_2 = -x_2$

ie $(x,y) = (x_1, y_1)$

$= (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$

ie $\begin{cases} x = x_1 + x_2 \\ y = x_1 - x_2 \end{cases}$

Conclusion : La décomp de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ selon $F_1 \oplus F_2$ est : $(x,y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{x-y}{2}(1,-1)$

et donc $p_{R_1}(x,y) = \frac{x+y}{2}(1,1)$

$p_{R_2}(x,y) = \frac{x-y}{2}(1,-1)$

Exercice 40

$(id_E - f) \circ (id_E - f) = id_E \circ (id_E - f) - f \circ (id_E - f)$

$= id_E \circ id_E - id_E \circ f - f \circ id_E + f \circ f$

$= id_E - f - f + f$

$= id_E - f$

Donc $id_E - f$ est un proj

f est le proj sur $F = \mathrm{Im}\, f$ parallèlement à $N = \mathrm{Ker}\, f$ et $E = F \oplus N$

Tout $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = u + v$ où $u \in F$, $v \in N$ et par définition $f(x) = u$

Alors $(id_E - f)(x) = x - f(x)$

$= x - u = v$

donc $id_E - f$ est la projection sur N parallèlement à F

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 41

(1) $S(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i) = (X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n)$

$\Rightarrow S'(x_j) = (x_j - x_1) \dots (x_j - x_{i-1})(X - x_j)' (x_j - x_{i+1}) \dots (x_j - x_n) = \prod_{i \neq j} (x_j - x_i)$

$= \prod_{i \neq j} (x_j - x_n)$

tous les termes où on a dérivé $(X - x_i)$ avec $i \neq j$ s'annulent pq $X = x_j$ car ils contiennent le facteur $x_j - x_j = 0$. Seul subsiste le terme où on a dérivé $X - x_j$ car après il n'y a plus de facteur.

Donc $S'(x_j) = \prod_{i \neq j} (x_j - x_i)$

$$T_i(x_j) = \frac{1}{S'(x_i)} \frac{S(X)}{X - x_i}\Bigg|_{X = x_j}$$

Si $i \neq j$ dans $\left.\frac{S(X)}{X - x_i}\right|_{X = x_j}$ il y a le facteur $x_j - x_j = 0$

donc $T_i(x_j) = 0$

Si $i = j$ il y a dans $\left.\frac{S(X)}{X - x_i}\right|_{X = x_i}$ tous les facteurs $x_i - x_k$ où $k \neq i$, donc $\left.\frac{S(X)}{X - x_i}\right|_{X = x_i}$ tous les facteurs $x_i - x_k$ où $k \neq i$, donc $\left.\frac{S(X)}{X - x_i}\right|_{X = x_i}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Matrices

Exercice 42

(1) $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y \\ x-y \end{pmatrix}$ donc $f(x,y) = (x+3y, x-y)$

(2) $(3,1)$, $(1,-1)$ deux vecteurs non colinéaires, donc linéairement indépendants donc (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$

(3) Vu le (1)

$f(u) = f(3,1) = (6,2) = 2u$

$f(v) = f(1,-1) = (-2,2) = -2v$

Donc $\mathrm{Mat}_{(u,v)} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = A'$

(4) P matrice de passage de (e_1, e_2) à (u,v) :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{\det P}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

On a $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 43

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y \\ -5x+6y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f(x,y) = (-x+2y, -5x+6y)$

(2) $(1,1)$, $(2,5)$ non colinéaires $\Rightarrow (u,v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$

(3) $f(u) = (1,1) = u$

$f(v) = (8,20) = 4v$

Donc $A' = \mathrm{Mat}_{(u,v)} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

(4) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A' = P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 44

(1) $\begin{cases} v_1 = 2e_1 - e_2 \\ v_2 = e_1 - e_2 \end{cases}$ pas colinéaire donc (v_1, v_2) est une base de E

(2) $f(v_1) = 2v_1$
$f(v_2) = -3v_2$

$\text{Mat}_{(v,v)} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

Soit P la matrice de passage de (e_1, e_2) à (v_1, v_2)

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Notons $A = \text{Mat}_{(e_1,e_2)} f$, $A' = \text{Mat}_{(v_1,v_2)} f$

alors : $A' = P^{-1}AP$ donc $A = PA'P^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$$

Et donc $f(e_1) = 7e_1 - 5e_2$
$f(e_2) = 10e_1 - 8e_2$

$$A' = P^{-1}AP$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

la dernière question

Exercice 4

(1) $\begin{cases} u_1 = e_1 - e_2 \\ u_2 = e_2 - e_3 \\ u_3 = e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = u_1 + u_2 + u_3 \\ e_2 = u_2 + u_3 \\ e_3 = u_3 \end{cases}$

donc (u_1, u_2, u_3) est génératrice et donc c'est une base de E

(2) $A = M_{at}{}_{(e_1, e_2, e_3)}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Soit P la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (u_1, u_2, u_3)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

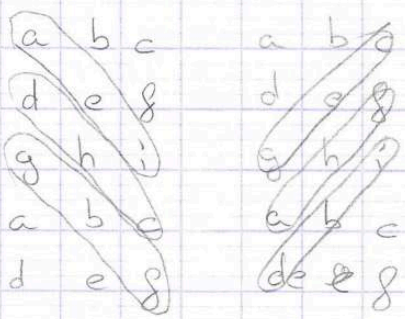
donc $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Soit P la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (v_1, v_2, v_3)

$v_1 = e_1 - e_2$
$v_2 = e_2 - e_3$
$v_3 = e_3$

donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} =$



Par le pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \quad L_2 \quad L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \quad L_2 + L_1 = L_2' \quad L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \quad L_1 \quad L_2'$$

$\det P = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0$
$= 1$

$|P_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$|P_{12}| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$|P_{13}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$

$|P_{21}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$|P_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$|P_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$

$|P_{31}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$

$|P_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$

$|P_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 17

(2) $\mathcal{B}_1$: $u_1 = e_2 + e_3$
$u_2 = e_1 + e_3$
$u_3 = e_1 + e_2$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A' = Q^{-1} A P$ où P est la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}_1$ et Q la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}_2$

$\mathcal{B}_2$: $u_1 = \frac{e_1}{2} + \frac{e_2}{2}$
$u_2 = \frac{e_1}{2} - \frac{e_2}{2}$

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 47

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+1+1-0-0-0 = 2 \neq 0$

donc $\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}^3$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ non colinéaires $\Rightarrow$ ils forment une base de $\mathbb{R}^2$

(2) $A' = Q^{-1} A P$

où P est la matrice de passage de la base can de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}_1$ et Q la matrice de passage de la base can de $\mathbb{R}^2$ à $\mathcal{B}_2$

Donc $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (on met en colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}_1$ dans l'ancienne base)

et $Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ et donc

$$Q^{-1} = -2 \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc $A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 48

(1) $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x - 6y \\ x \end{pmatrix}$ donc $f(x,y) = (5x-6y, x)$

(2) $(3,1), (2,1)$ non colinéaires donc ils forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(3) $A' = P^{-1} A P$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(4) $U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow U_{n+1} = A U_n$

$V_n = P^{-1} U_n \Leftrightarrow U_n = P V_n$

$V_{n+1} = P^{-1} U_{n+1} = P^{-1} A U_n = P^{-1} A P V_n = A' V_n$

Or a $U_{n+1} = A U_n$

donc $U_n = A^n U_0$

$V_{n+1} = A' V_n \Rightarrow V_n = A'^n V_0$

Mais A^n ne se laisse pas toujours calculer immédiatement Tandis que A'^n se calcule facilement que parce que A' est diagonal

$A'^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$A'^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Or a donc $V_n = A'^n V_0 = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} V_0$

$\Rightarrow U_n = P V_n = P \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} U_0$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^m & 0 \\ 0 & 2^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} U_0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^m & -2.3^m \\ 2^m & 3.2^m \end{pmatrix} U_0$$

$$= \begin{pmatrix} 3^{m+1} - 2^{m+1} & -2.3^{m+1} + 3.2^{m+1} \\ 3^m - 2^m & -2.3^m + 3.2^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (3^{m+1} - 2^{m+1}) u_1 + (-2.3^{m+1} + 3.2^{m+1}) u_0 \\ (3^m - 2^m) u_1 + (-2.3^m + 3.2^m) u_0 \end{pmatrix}$$

c'est $U_m = \begin{pmatrix} u_{m+1} \\ u_m \end{pmatrix}$ et donc $u_m = (3^m - 2^m) u_1 + (-2.3^m + 3.2^m) u_0$

Résout $u_{m+2} = 5u_{m+1} - 6u_m$

(S) $y'' - 5y' + 6y = 0$

$Y = \begin{pmatrix} y' \\ y \end{pmatrix}$

$$Y' = \begin{pmatrix} y'' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y' - 6y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ y \end{pmatrix} = AY$$

$$Z = P^{-1} Y = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \Rightarrow Z' = P^{-1} Y' = \begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix} = P^{-1} A P \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v \\ 2w \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v' = 3v \\ w' = 2w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = v_0 e^{3x} \\ w = w_0 e^{2x} \end{cases}$$

et donc $\begin{pmatrix} y' \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 e^{3x} \\ w_0 e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_0 e^{3x} + 2w_0 e^{2x} \\ v_0 e^{3x} + w_0 e^{2x} \end{pmatrix}$

donc $y = v_0 e^{3x} + w_0 e^{2x}$

Conditions initiales $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 49

$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ où P matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$

$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$

$A' = P^{-1}AP$

$\mathrm{tr}\, A' = \mathrm{tr}(P^{-1}(AP)) = \mathrm{tr}((AP)P^{-1}) = \mathrm{tr}(A(PP^{-1}))$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 54

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 5A + 4I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $A^2 - 5A + 4I = 0$ et donc A est inversible

ie $(A - 5I)A = -4I$ et $A^{-1} = -\frac{1}{4}(A - 5I)$

ie $-\frac{1}{4}(A - 5I)A = I$

Vérifions $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 10 = 4$

donc $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ et $-\frac{1}{4}(A - 5I) = -\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right]$

$$= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 50

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 5$$

$$\mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 4$$

donc A, B ✗

Exercice 51

U, V semblables $\Leftrightarrow \exists P$ tq $V = P^{-1}UP$

$AB = P^{-1}BAP$

il suffit de prendre $P = A^{-1}$ ou $P = B$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 53

$A = (a_{ij})$ $\quad B = (b_{ij})$, $\quad AB = C = (c_{ij})$

où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$

${}^tB = (b_{ji})$ $\quad {}^tA = (a_{ji})$

${}^tB\,{}^tA = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk}\right) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{ki}\right) = (c_{ji}) = {}^tC = {}^t(AB)$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} a+2b & a+4b \\ c+2d & c+4d \end{matrix}$

Feuille d'exo 7

Exercice 54

(1) $\det(u,v,w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

donc B' est une base de $\mathbb{R}^3$

ou bien : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Ou bien : $\begin{cases} u = e_1 + e_2 + e_3 \\ v = e_2 + e_3 \\ w = e_1 + e_3 \end{cases}$

donc (u,v,w) est génératrice de $\mathbb{R}^3$ et donc c'en est une base et on obtient en prenant les expressions de e_i en fonction de u, v, w

(2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

(4) $\mathcal{E} = \text{Vect}\{u, v, w\} = \mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w$

$= F \oplus G$

(5) $\text{Mat}_{\mathcal{B}'} P_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'} P_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(6) $\text{Mat}_{\mathcal{B}'} f^m = (\text{Mat}_{\mathcal{B}'} f)^m = A'^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^m & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^m \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}'} P_F + (-1)^m \text{Mat}_{\mathcal{B}'} P_G$

$= \text{Mat}_{\mathcal{B}'} (P_F + (-1)^m P_G)$

(7) $P_F(e_1) = P_F(u - v) = u$ donc $f^m(e_1) = P_F(e_1) + (-1)^m P_G(e_1)$

$P_F(e_2) = P_F(u - w) = u$ $= u + (-1)^{m+1} v$

$P_F(e_3) = P_F(-u + v + w) = -u$ $f^m(e_2) = u + (-1)^{m+1} w$

$f^m(e_3) = -u + (-1)^m v + (-1)^m w$

$P_G(e_1) = P_G(u - v) = -v$

$P_G(e_2) = P_G(u - w) = -v$ Si je les mets en colonnes j'ai $\text{Mat}_{\mathcal{BB}'} f^m$. Mais je veut $\text{Mat}_{\mathcal{B}} f^m$!

$P_G(e_3) = P(-u + v + w) = v + w$

Donc il faut exprimer les $f^m(e_i)$ dans la Base $\mathcal{B}$:

$f^m(e_1) = u + (-1)^{m+1} v = e_1 + e_2 + e_3 + (-1)^{m+1}(e_2 + e_3)$

$= e_1 + [1 + (-1)^{m+1}] e_2 + [1 + (-1)^{m+1}] e_3$

$f^m(e_2) = u + (-1)^{m+1} w = e_1 + e_2 + e_3 + (-1)^{m+1}(e_1 + e_3)$

$= [1 + (-1)^{m+1}] e_1 + e_2 + [1 + (-1)^{m+1}] e_3$

$f^m(e_3) = -u + (-1)^m v + (-1)^m w$

$= -e_1 - e_2 - e_3 + (-1)^m e_2 + (-1)^m e_3 + (-1)^m e_1 + (-1)^m e_3$

$= -e_1 - e_2 - e_3 + (-1)^m e_2 + (-1)^m e_3 + (-1)^m e_1 + (-1)^m e_3$

$= [-1 + (-1)^m] e_1 + [-1 + (-1)^m] e_2 + [-1 + 2(-1)^m] e_3$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = \begin{pmatrix} 1 & 1+(-1)^{n+1} & -1+(-1)^n \\ 1+(-1)^{n+1} & 1 & -1+(-1)^n \\ 1+(-1)^{n+1} & 1+(-1)^{n+1} & -1+2(-1)^n \end{pmatrix}$$

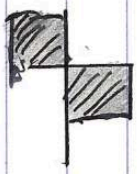
(bis) Calcul plus direct de A^n

$A^n = PA'^nP^{-1}$ $\left(\Leftrightarrow A'^n = P^{-1}A^nP\right)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+(-1)^{n+1} & -1+(-1)^n \\ 1+(-1)^{n+1} & 1 & -1+(-1)^n \\ 1+(-1)^{n+1} & 1+(-1)^{n+1} & -1+2(-1)^n \end{pmatrix}$$

Exercice 55

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0



Exercice 55 - suite

(2) $f(v_1) = 5v_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y - z = 5x \\ -4x + y + 3z = 5y \\ x + y - 2z = 5z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y - z = 0 \\ -4x - 4y + 3z = 0 \\ x + y - 7z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = x(1, -1, 0)$, on peut prendre $v_1 = (1, -1, 0)$

(3) $v_2 = (x, y, z)$: $f(v_2) = -3v_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y - z = -3x \\ -4x + y + 3z = -3y \\ x + y - 2z = -3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y - z = 0 \\ -4x + 4y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$(2) + 4(3) \Leftrightarrow 8y + 7z = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{7}{8} z$

Et alors $(3) \Rightarrow x = -y - z = -\frac{1}{8} z$

Et alors $(1) \Rightarrow -\frac{6}{8} z + \frac{14}{8} z - z = 0$

Donc la solution générale du système est

$$\begin{cases} x = -z/8 \\ y = -7z/8 \end{cases}$$

ie $(x, y, z) = z(-1/8, -7/8, 1)$

On peut prendre $v_2 = (-1, -7, 8)$

Récapitulons $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 7, -8)$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

(4) $v_3 = (1, 1, 1)$ montrons que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$$

Donc (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. On note $B' = (v_1, v_2, v_3)$

(5) $$P = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \end{matrix}$$

(6) On peut inverser la matrice par la méthode du pivot.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 = L_2' \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 & 1/8 & 1/8 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2' \\ \end{matrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 15/24 & -9/24 & -6/24 \\ 0 & 1 & 0 & 1/24 & 1/24 & -1/12 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} L_1' - L_2'' \\ L_2'' \\ L_3 \end{matrix}$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$$P^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 15 & -9 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $A' = Mat_{B'}\, f = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A' est diagonale donc $A'^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^n = PA'^nP^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 & -9 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 3.5^{n+1} + (-3)^n & -9.5^n + (-3)^n & -6.5^n - 2(-3)^n \\ -3.5^{n+1} + 7(-3)^n & 9.5^n + 3(-3)^n & 6.5^n - 14(-3)^n \\ -8.(-3)^n & -8(-3)^n & 16.(-3)^n \end{pmatrix}$$

Exercice 56

(1) $(A - 2I_2)^2 = \begin{pmatrix} -13-2 & 9 \\ -25 & 17-2 \end{pmatrix}^2$

$$= \begin{pmatrix} -15 & 9 \\ -25 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -15 & 9 \\ -25 & 15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $e_2' = (f - 2.id)(e_1)$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$$(A - 2I_2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15 & 9\\-25 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\-25\end{pmatrix}$$

donc $e_2' = (-15, -25)$; mon colinéaire à e_1 donc (e_2', e_1) est une base de $\mathbb{R}^2$

(3) $\text{Mat}_{(e_2', e_1)}(f - 2\cdot id) = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A' = \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}$$

(4) $P = \begin{pmatrix}-15 & 1\\-25 & 0\end{pmatrix}$

$$P^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}0 & -1\\25 & -15\end{pmatrix}$$

$$A' = P^{-1}AP$$

Vérifions : $P^{-1}AP$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix}0 & -1\\25 & -15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-15 & 9\\-25 & 17\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-15 & 1\\-25 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix}25 & -17\\50 & -30\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-15 & 1\\-25 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix}50 & 25\\0 & 50\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}$$

(5) I_2 commute avec toute matrice de $M_2(\mathbb{R})$ (élément neutre de $M_2(\mathbb{R})$!) donc $2I_2$

$$A' = 2I_2 + (A' - 2I_2)$$

$$\Rightarrow A'^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (2I_2)^{m-k} (A' - 2I_2)^k$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$$\Rightarrow A'^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (2I_2)^{m-k} (A' - 2I_2)^k$$

car $2I_2$ et $A' - 2I$ commutent

$$\Rightarrow A'^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 2^{m-k} (A' - 2I_2)^k$$

Mais $(A' - 2I_2)^0 = I_2$

$$(A' - 2I_2) = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A' - 2I_2)^2 = 0$$

et a fortiori : $(A' - 2I_2)^k = 0$ pour $k \geq 2$

Par conséquent

$$A'^m = 2^m I_2 + m \cdot 2^{m-1} (A' - 2I_2)$$

$$= \begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 2^m \end{pmatrix} + m\, 2^{m-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^m & m 2^{m-1} \\ 0 & 2^m \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$A^m = P A'^m P^{-1} = \begin{pmatrix} -15 & 1 \\ -25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^m & m 2^{m-1} \\ 0 & 2^m \end{pmatrix} \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 25 & -15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -15m\, 2^{m-1} + 2^m & 5m \cdot 2^{m-1} \\ -25m\, 2^{m-1} & 2^m + 15 \cdot 2^{m-1} \end{pmatrix}$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 57

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & a & \cdots & a \\ b & c_2 & \ddots & a \\ b & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & c_n \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$$

(1) $D = \begin{vmatrix} c_1+X & a+X & \cdots & a+X \\ b+X & c_2+X & \cdots & a+X \\ b+X & b+X & \cdots & a+X \\ \vdots & \vdots & & \\ b+X & b+X & \cdots & c_n+X \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} c_1+X & a+X & a+X & a+X & \cdots & a+X \\ b-c_1 & c_2-a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b-c_2 & b-a & c_3-a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b-c_1 & b-a & b-a & b-a & \cdots & c_n-a \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la 1ère ligne :

$D(X) = (c_1+X)d_1 - (a+X)d_2 + \cdots + (-1)^{n-1}(a+X)d_n$

où les d_m sont indépendants de X. Ainsi donc $D(X)$ est un polynôme du 1er degré en X : $D(X) = \lambda X + \mu$

(2) On suppose d'abord $b \neq a$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 58

$$V(a_1, \dots, a_m) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{m-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{m-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_m & a_m^2 & \cdots & a_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\beta}{=} \overset{C_6 - a_j C_{j-1}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1 a_2 & & a_2^{m-1} - a_1 a_2^{m-2} \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1 a_3 & & a_3^{m-1} - a_1 a_3^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_m - a_1 & a_m^2 - a_1 a_m & & a_m^{m-1} - a_1 a_m^{m-2} \end{vmatrix}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & (a_2 - a_1) a_2 & \cdots & (a_2 - a_1) a_2^{m-2} \\ 1 & a_3 - a_1 & (a_3 - a_1) a_3 & \cdots & (a_3 - a_1) a_3^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & (a_m - a_1) a_m & & (a_m - a_1) a_m^{m-2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & (a_2 - a_1) a_2 & \cdots & (a_2 - a_1) a_2^{m-2} \\ a_3 - a_1 & (a_3 - a_1) a_3 & \cdots & (a_3 - a_1) a_3^{m-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m - a_1 & (a_m - a_1) a_m & & (a_m - a_1) a_m^{m-2} \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_m - a_1) \times \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_2^{m-2} \\ 1 & a_3 & \cdots & a_3^{m-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_m & \cdots & a_m^{m-2} \end{vmatrix}$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_m - a_1) \times V(a_2, a_3, \dots, a_m)$

De même :

$V(a_2, \dots, a_m) = (a_3 - a_2)(a_1 - a_2) \dots (a_m - a_2) \times V(a_3, \dots, a_m)$

Donc $V(a_1, \dots, a_m)$

$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_m - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_m - a_2)$
$V(a_3, \dots, a_m)$

On réitère $V(a_1, \dots, a_m) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_m - a_1)$
$(a_3 - a_2) \dots (a_m - a_2)(a_m - a_{m-1}) V(a_m)$

Mais $V(a_m)$ est le déterminant à 1 ligne, 1 col dont l'unique élément est 1, donc $V(a_m) = 1$

Conclusion : $V(a_1, \dots, a_m) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_m - a_1)$
$(a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \dots (a_m - a_2)$
$\dots (a_m - a_{m-1})$
$= \prod_{1 \le i < j \le m} (a_j - a_i)$

On cherche un polynôme P de degré $\le m$ dont le graphe passe par tous les points i.e.
$P(a_i) = b_i$ $(1 \le i \le m)$ On note $P(X) = p_0 + p_1 X + p_2 X^2 + \dots + p_{m-1} X^{m-1}$

Les conditions sont :

$P(a_i) = b_i, \quad 1 \le i \le m$

$\Leftrightarrow p_0 + p_1 a_i + p_2 a_i^2 + \dots + p_{m-1} a_i^{m-1} = b_i$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{m-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_m & a_m^2 & \dots & a_m^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Exercice 59

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 5 & a & L_1 \\ -1 & 2 & -3 & b & L_2 \\ 4 & -3 & 8 & c & L_3 \end{array}\right. \leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 5 & a & L_1 \\ 0 & 7 & -1 & a+2b & L_2' = 2L_2 + L_1 \\ 0 & -9 & -2 & -2a+c & L_3' = L_3 - 2L_1 \end{array}\right.$$

$$\leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 5 & a & L_1 \\ 0 & 7 & -1 & a+2b & L_2' \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5a-18b-7c}{23} & L_3'' = -(9L_2' + 7L_3')/23 \end{array}\right.$$

$$\leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{-7c+39b+19a}{23} & L_1' = L_1 - 3L_2'' - 5L_3'')/2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4a+4b-c}{23} & L_2'' = (L_2' + L_3'')/7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5a-18b-7c}{23} & L_3'' \end{array}\right.$$

Donc le système est de Cramer, l'unique sol est :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} -7a+39b+19a \\ 4a+4b-c \\ 5a-18b-7c \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{23}\begin{pmatrix} -7 & 39 & 19 \\ 4 & 4 & -1 \\ 5 & -18 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Par Cramer

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 8 \end{vmatrix} = 32 + 15 + (-36) - 40 - 18 + 24 = -23$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 3 & 5 \\ b & 2 & -3 \\ c & -3 & 8 \end{vmatrix}}{-23} = \frac{a\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{-23}$$

$$= \frac{-7a+39b+19c}{23}$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ -1 & b & -3 \\ 4 & c & 8 \end{vmatrix}}{-23} = \frac{-a\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}}{-23}$$

$$= \frac{4a + 4b - c}{23}$$

et $z = \frac{5a - 18b - 7c}{23}$

Exercice 60

$$\begin{array}{cccc|cc} 2 & 3 & 5 & 1 & L_1 \\ -1 & 2 & -3 & 1 & L_2 \\ 7 & 0 & 19 & -1 & L_3 \end{array}$$

$$\leftrightarrow \quad \begin{array}{cccc|cc} 2 & 3 & 5 & 1 & L_1 \\ 0 & 7 & -1 & 3 & L_2' = 2L_2 + L_1 \\ 0 & 14 & -2 & 6 & L_3' = L_3 + 7L_2 \end{array}$$

deux lignes liées $\Rightarrow rg = 2$

Le système devient :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 1 \\ 7y - z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1 - 5z - 3y) \\ y = \frac{3+z}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = \left(-\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, 0\right) + z\left(-\frac{19}{7}, \frac{1}{7}, 1\right)$$

La sol est : $\left(-\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, 0\right) + \mathbb{R}(19, -1, -7)$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0