

Polynômes : division euclidienne, algorithme d'EuclideExercice 1

1) $A(x) = x^5 - 7x^4 - x^3 - 9x + 9$

$B(x) = x^2 - 5x + 4$

$ \begin{array}{r} x^5 - 7x^4 - x^3 - 9x + 9 \\ - (x^5 - 5x^4 + 4x^3) \\ \hline - 2x^4 - 5x^3 - 9x + 9 \\ + 2x^4 - 10x^3 + 8x^2 \\ \hline - 15x^3 + 8x^2 - 9x + 9 \\ + 15x^3 - 75x^2 + 60x \\ \hline - 67x^2 + 51x + 9 \\ + 67x^2 - 335x + 268 \\ \hline - 284x + 277 \end{array} $	$ \begin{array}{r} x^2 - 5x + 4 \\ x^3 - 2x^2 - 15x - 67 \end{array} $
---	---

Donc $Q = x^3 - 2x^2 - 15x - 67$

$R = -284x + 277$

2) $A(x) = x^3 - x^2 + 1$

$B(x) = x - 1 + 2i$

$ \begin{array}{r} x^3 - x^2 + 1 \\ - (x^3 + x^2 - 2ix^2) \\ \hline - 2ix^2 + 1 \\ + 2ix^2 - 2ix + 4i^2x \\ \hline - 2ix - 4x + 1 \\ - (4 + 2i)x + 1 \\ + (4 + 2i)x + (4 + 2i)(-1 + i) \\ \hline - 8 + 6i + 1 \\ \hline - 7 + 6i \end{array} $	$ \begin{array}{r} x - 1 + 2i \\ x^2 - 2ix - 4 - 2i \end{array} $
--	--

$Q = x^2 - 2ix - 4 - 2i$

$R = -7 + 6i$

Exercice 2

$$X^3 - 3X^2 + 1 = q(X^2 - 1) + R \quad \text{où } R = aX + b$$
$$\deg R < \deg (X^2 - 1)$$

$$X^3 - 3X^2 + 1 = q(X)(X^2 + 1) + aX + b$$

On cherche a et b :

$$X = 1 \Rightarrow 1 - 3 + 1 = a + b \quad \text{d'où } R = X - 2$$

$$X = -1 \Rightarrow -1 - 3 + 1 = b - a$$

$$\begin{cases} -1 = a + b \\ -3 = b - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

Exercice 3

$$X^2 + X + 1 \mid (X+1)^{2m+1} + X^{2m+2}$$

$$(X+1)^{2m+1} + X^{m+2} = q(X)(X^2 + X + 1) + aX + b$$

Il s'agit de prouver que $a = b = 0$

$$\begin{aligned} \text{Si } X = j &\Rightarrow (j+1)^{2m+1} + j^{m+2} = aj + b \\ &\Rightarrow (-j^2)^{2m+1} + j^{m+2} = aj + b \\ &\Rightarrow -j^{4m+2} + j^{m+2} = aj + b \\ &\Rightarrow -j^{m+2} + j^{m+2} = aj + b \\ &\Rightarrow aj + b = 0 \\ &\text{d'où } a = 0 \text{ et } b = 0 \end{aligned}$$

Algèbre

$$A(x) = Q_1(x) \cdot (x+1) + 3$$

$$A(x) = Q_2(x) \cdot (x-2) + 7$$

$$A(x) = Q_3(x) \cdot (x-3) + 13$$

On cherche le reste dans :

$$A(x) = q(x)(x-1)(x-2)(x-3) + ax^2 + bx + c$$

on cherche a, b, c .

$$x=1 \Rightarrow A(1) = a+b+c$$

$$3 = a+b+c$$

$$x=2 \Rightarrow A(2) = 4a+2b+c$$

$$7 = 4a+2b+c$$

$$x=3 \Rightarrow A(3) = 9a+3b+c$$

$$13 = 9a+3b+c$$

$$\begin{cases} 3 = a+b+c \\ 7 = 4a+2b+c \\ 13 = 9a+3b+c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Exercice 5

1) $A(x) = Q(x)(x-a) + R$ où le reste $R \in K$

$$A(a) = R$$

2) $A(x)(x-a)(x-b) + \lambda x + \mu$

$$\begin{cases} A(a) = \lambda a + \mu \\ A(b) = \lambda b + \mu \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = (A(a) - A(b)) / (a - b) \\ \mu = (a A(b) - b A(a)) / (a - b) \end{cases}$$

3) $A(x) = q(x)(x-a)^2 + \alpha x + \beta$ (*)

dérivons (*) (formellement) $(x^R)' \stackrel{\text{deg}}{=} R x^{R-1}$

$$A'(x) = q'(x)(x-a)^2 + 2q(x)(x-a) + \alpha$$

d'où si $x=a$

$$A'(a) = \alpha$$

$$\beta = A(a) - a A'(a)$$

3) On fait $b \rightarrow c$ dans $\begin{cases} \lambda = \frac{A(b) - A(a)}{(b-a)} = \lambda(a, b) \\ \mu = \frac{(aA(b) - bA(a))}{(a-b)} = \mu(a, b) \end{cases}$

4) $A(x) = x^m$ $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$
 D'après questions d'avant, le reste recherché
 est $\lambda x + \mu$ d'où : $\lambda = \frac{3^m - (-1)^m}{4}$
 $\mu = \frac{3^m + 3(-1)^m}{4}$

Exercice 6

$$\begin{array}{r|l} x^5 + ax^2 + b & x^3 + x^2 + cx + 1 \\ -x^5 - x^4 - cx^3 - x^2 & \\ \hline -x^4 - cx^3 + (a-1)x^2 + b & \\ -x^4 + x^3 + cx^2 + x & \\ \hline (1-c)x^3 + (a+c-1)x^2 + x + b & \\ + (c-1)x^3 + (c-1)x^2 + c(c-1)x + c-1 & \\ \hline (a+2c-2)x^2 + (c^2-c+1)x + b+c-1 & \end{array}$$

Le reste est nul si et seulement si : $\begin{cases} a+2c-2=0 \\ c^2-c+1=0 \\ b+c-1=0 \end{cases}$

$c^2 + c + 1 = 0 \Leftrightarrow c = -j$ ou $-\bar{j}$

et donc il y a des solutions $\begin{cases} a = 2(j+1) \\ b = j+1 \\ c = -j \end{cases}$ et $\begin{cases} a = 2(\bar{j}+1) \\ b = \bar{j}+1 \\ c = -\bar{j} \end{cases}$

Rappel :

$\omega = i/3$

$j = \omega$
 $j^3 = 1$
 $1 + j + j^2 = 0$

Exercice 6

3

$$\begin{array}{r|l} x^3 + ax + b & x^2 + cx - 1 \\ -x^3 - cx^2 + x & x - c \\ \hline -cx^2 + (a+1)x + b & \\ +cx^2 + c^2x - c & \\ \hline (c^2 + a + 1)x + b - c & \end{array}$$

$3(X)$ divise $A(X)$ si le reste $(c^2 + a + 1)x + b - c$ est le polynôme nul, i.e si et seulement si

$$\begin{cases} c^2 + a + 1 = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \text{ i.e si } \begin{cases} a = -1 - c^2 \\ b = c \end{cases}$$

avec c arbitraire

Exercice 7

1) $x^{343} - 2x^{16} + 5x + 1 = q(x) \cdot (x^2 + 1) + ax + b$

Pour $x = i$

$$ai + b = -i + 2 + 5i + 1$$

$$\begin{cases} ai = 4i \\ b = 3 \end{cases}$$

$$b = 3$$

2) $x^{2m} + x^m - 2 = q_2(x) \cdot (x^2 + 1) + ax + b$

$$i^{2m} + i^m - 2 = ai + b$$

$$(-1)^m - 2 + i^m = ai + b$$

quatre cas :

• $m = 4k$

alors $ai + b = 1 - 2 + i = -1 + i$ donc $a = b = 0$

Algèbre 7

- $m = 4k+1$ alors $a = 1$ et $b = -3$: $R = X - 3$

- $m = 4k+2$, $a = 0$, $b = -2$

- $m = 4k+3$ i.e $a = -1$, $b = -3$

3) $(\cos \theta + i \sin \theta)^m = Q_3(X)(X^2+1) + aX + b$

$$X = i \Rightarrow a + b = (\cos \theta + i \sin \theta)^m$$

$$= \cos(m\theta) + i \sin(m\theta)$$

$$a = \cos(m\theta)$$

$$b = \sin(m\theta)$$

Exercice 8

1) $\begin{array}{r} X^6 - 7X^5 + X^4 + X^3 - 10X^2 + 22X - 3 \\ -X^6 + 8X^5 - 9X^4 + 8X^3 - X^2 \\ \hline X^5 - 8X^4 + 9X^3 - 11X^2 + 22X - 3 \\ -X^5 + 8X^4 - 9X^3 + 8X^2 - X \\ \hline -3X^2 + 21X - 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} X^4 \cdot 8X^3 + 9X^2 - 8X + 1 \\ X^2 + X \end{array}$
--	--

Donc $A(X) = (X^2 + X)B(X) - 3(X^2 - 7X + 1)$

$\begin{array}{r} X^4 - 8X^3 + 9X^2 - 8X + 1 \\ -X^4 + 7X^3 - X^2 \\ \hline -X^3 + 8X^2 - 8X + 1 \\ +X^3 - 7X^2 + X \\ \hline X^2 - 7X + 1 \\ -X^2 + 7X - 1 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} X^2 - 7X + 1 \\ X^2 - X + 1 \end{array}$
--	--

Donc $B(X) = (X^2 - 7X + 1)(X^2 - X + 1)$

$$D(X) = X^2 - 7X + 1$$

$$M = \frac{AB}{D} = A \cdot \frac{B}{D} = A(X) \cdot (X^2 - X + 1)$$

4

$$\begin{aligned}
 &= (X^6 - 7X^5 + X^4 + X^3 - 10X^2 + 22X - 3)(X^2 - X + 1) \\
 &= \underset{(-1-7)}{X^8} - \underset{(1+7+1)}{8X^7} + \underset{(-1+1-7)}{9X^6} - \underset{(1-1-10)}{7X^5} - \underset{(1+10+22)}{10X^4} + \underset{(-10-22-3)}{33X^3} - \underset{(-10-22-3)}{35X^2} \\
 &\quad + \underset{(22+3)}{25X} - 3
 \end{aligned}$$

Cherchons U_0, V_0

$$A(X) = (X^2 + X) B(X) - 3D(X)$$

$$\Rightarrow D(X) = -\frac{1}{3} A(X) + \frac{1}{3} (X^2 + X) B(X)$$

$$d'o \quad U_0(X) = -\frac{1}{3}, \quad V_0(X) = \frac{1}{3} (X^2 + X)$$

$$\begin{cases}
 U(X) = U_0(X) + S(X) \frac{B(X)}{D(X)} \\
 V(X) = V_0(X) - S(X) \frac{A(X)}{D(X)}
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 U(X) = \underline{U_0(X)} - \frac{1}{3} + S(X)(X^2 - X + 1) \\
 V(X) = \frac{1}{3} (X^2 + X) - S(X)(X^2 + X - 3)
 \end{cases}$$

$S(X) \in \mathbb{R}[X]$ arbitraire, car:

$$A(X)/D(X) = X^2 + X - 3$$

$$\begin{array}{r|l}
 2) & 6x^4 - 7x^3 - 10x^2 - 15x - 21 \quad | \quad 3x^2 + x + 4 \\
 & - 6x^4 - 2x^3 - 8x^2 \\
 \hline
 & - 9x^3 - 18x^2 - 15x - 21 \\
 & + 9x^3 + 3x^2 + 12x \\
 \hline
 & - 15x^2 - 3x - 21 \\
 & + 15x^2 + 5x + 20 \\
 \hline
 & 2x - 1
 \end{array}$$

Donc $A(x) = (2x^2 - 3x + 5) B(x) + 2x - 1$

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 + x + 4 \quad | \quad 2x - 1 \\
 & - 3x^2 + \frac{3}{2}x \\
 \hline
 & 2\frac{1}{4}
 \end{array}$$

Donc $B(x) = \left(\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}\right)(2x - 1) + \frac{21}{4}$
 $\deg(2\frac{1}{4}) = 0$ Donc prochain reste nul.
 C-à-d donc $D = 1$

donc $M(x) = \frac{A(x)}{\text{cd}(A)} \cdot \frac{B(x)}{\text{cd}(B)}$
 $= \frac{1}{18} A(x) \cdot B(x)$

$$1 = \frac{4}{21} B(x) - \frac{4}{21} \left(\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}\right)(2x - 1)$$

$$= \frac{4}{21} B(x) - \frac{4}{21} \left(\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}\right)(A(x) - (2x^2 - 3x - 5)B(x))$$

$$= -\frac{4}{21} \left(\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}\right) A(x) + \frac{4}{21} \left[\left(\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}\right)(2x^2 - 3x - 5) + 1\right] B(x)$$

d'où

$$U_0(x) = -\frac{4}{21} \left(\frac{3}{2}x + \frac{5}{4} \right)$$

$$V_0(x) = \frac{4}{21} \left(3x^3 - 2x^2 - \frac{45}{4}x + \frac{21}{4} \right)$$

Solution générale :

$$U(x) = U_0(x) + S(x) B(x)$$

avec $S(x) \in \mathbb{R}[x]$

$$V(x) = V_0(x) + S(x) A(x)$$

3) $x^6 - 64$

$$x^2 - 4$$

Raisonnement :

$$y^3 - z^3 = (y - z)(y^2 + yz + z^2)$$

$$x^6 - 64 = (x^2)^3 - 4^3 = (x^2 - 4)(x^4 + 4x^2 + 16)$$

Et donc $D(x) = x^2 - 4$

$$M(x) = x^6 - 64$$

$$U_0(x) A(x) + V_0(x) B(x) = D(x)$$

avec $U_0 = 0$, $V_0 = 1$

$$U(x) = S(x)$$

$$V(x) = 1 - S(x) \frac{A(x)}{D(x)}$$

$$\begin{array}{r|l}
 4) & X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1 \\
 - & X^4 + X^3 + X^2 + X \\
 \hline
 & -2X^2 - 3X - 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 & X^3 + X^2 - X - 1 \\
 - & X \\
 \hline
 &
 \end{array}$$

Donc : $A(X) = \cancel{X^4 + X^3} X B(X) - (2X^2 + 3X + 1)$

$$\begin{array}{r|l}
 X^3 + X^2 - X - 1 & 2X^2 + 3X + 1 \\
 - & X^3 + \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X \\
 \hline
 & -\frac{1}{2}X^2 - \frac{3}{2}X - 1 \\
 & \frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{4}X + \frac{1}{4} \\
 \hline
 & -\frac{3}{4}X - \frac{3}{4}
 \end{array}$$

Donc $B(X) = \left(\frac{1}{2}X - \frac{1}{4}\right)(2X^2 + 3X + 1) - \frac{3}{4}(X + 1)$

$$\begin{array}{r|l}
 2X^2 + 3X + 1 & X + 1 \\
 - & 2X^2 + 2X \\
 \hline
 & X + 1 \\
 & 0
 \end{array}$$

Donc $D(X) = X + 1$

$$M(X) = \frac{A(X)}{\text{cd}(A)} \cdot \frac{B(X)/D(X)}{\text{cd}(B)} = A(X) \left[\left(\frac{1}{2}X - \frac{1}{4}\right) \frac{(2X^2 + 3X + 1) - \frac{3}{4}(X + 1)}{X + 1} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= A(X) \left[\frac{1}{2} \left(X - \frac{1}{2}\right) (2X + 1) - \frac{3}{4} \right] \\
 &= X^6 + X^5 - 4X^4 - 5X^3 + 2X^2 + 4X + 1
 \end{aligned}$$

$$D(X) = -\frac{4}{3} B(X) + \frac{2}{3} \left(X - \frac{1}{2}\right) (2X^2 + 3X + 1)$$

$$= -\frac{4}{3} B(X) + \frac{2}{3} \left(X - \frac{1}{2}\right)$$

$$d'où \quad U_0(x) = -\frac{2}{3} \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

$$V_0(x) = \frac{2}{3} \left(x^2 - \frac{1}{2}x - 2 \right)$$

$$U(x) = U_0 + S(x) \frac{B(x)}{D(x)}$$

$$V(x) = V_0 - S(x) \frac{A(x)}{D(x)}$$

Exercice 9

7

$$(1) \quad m = qR + R$$

$$A(X) = X^m - 1$$

$$B(X) = X^R - 1$$

$$\begin{array}{r|l} X^m - 1 = X^{qR+R} - 1 & \begin{array}{l} X^R - 1 \\ \hline (q-1)R + R \\ \hline X^{(q-1)R+R} + \dots + X^R + 1 \end{array} \\ - X^{qR+R} + X^{(q-1)R+R} & \\ \hline X^{(q-1)R+R} - 1 & \\ \vdots & \\ X^R - 1 & \end{array}$$

(Récurrence évidente)

$\deg(X^R - 1) = R < R$ donc $X^R - 1$ est le reste de la division euclidienne de A par B

$$(2) \quad X^m - 1 = Q_1(X)(X^m - 1) + R_1(X) \quad \text{Dans } R[X]$$

$$\qquad \qquad \qquad + X^R - 1 \quad \text{d'après (1)}$$

$$X^m - 1 = Q_2(X)(X^R - 1) + X^R - 1$$

⋮

$$X^{R_{q-2}} - 1 = Q_q(X)(X^{R_{q-1}} - 1) + X^{R_q} - 1$$

$$X^{R_q} - 1 = \text{dernier reste} \neq 0$$

$$= \text{pgcd}(X^m - 1, X^R - 1)$$

$$m = R_1 m + R_1$$

$$m = R_2 R_1 + R_2$$

$$\vdots$$

c'est donc

$$\text{pgcd}(X^m - 1, X^R - 1)$$

$$= X^{\text{pgcd}(m, R)} - 1 = X^d - 1.$$

$$R_{q-2} = R_q R_{q-1} + R_q$$

$$R_{q-1} = R_{q+1} R_q + 0$$

$$X^P - 1 \mid X^m - 1$$

$$\Leftrightarrow \text{pgcd}(X^P - 1, X^m - 1)$$

$$= X^P - 1 \Leftrightarrow X^{\text{pgcd}(P, m)} - 1 = X^P - 1$$

$$\Leftrightarrow \text{pgcd}(P, m) = P$$

$$\Leftrightarrow P \mid m$$

$$(3) \text{ PGCD}(X^m - a^m, X^n - a^n)$$

$$\text{Si } a = 0 :$$

$$\text{PGCD}(X^m - a^m, X^n - a^n) = \text{PGCD}(X^m, X^n) = X^{\min(m, n)}$$

$$\text{Si } a \neq 0 :$$

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(X^m - a^m, X^n - a^n) &= \text{PGCD}(a^m \left[\left(\frac{X}{a}\right)^m - 1 \right], a^n \left[\left(\frac{X}{a}\right)^n - 1 \right]) \\ &= \text{PGCD}\left(\left(\frac{X}{a}\right)^m - 1, \left(\frac{X}{a}\right)^n - 1\right) = \left[\left(\frac{X}{a}\right)^{\text{pgcd}(m, n)} - 1\right] / \text{cd} \\ \text{où } \text{cd} &= \frac{1}{a^{\text{pgcd}(m, n)}} = X^{\text{pgcd}(m, n)} - a^{\text{pgcd}(m, n)} \end{aligned}$$

Exercice 10

$$\frac{\left(\frac{X}{a}\right)^{\text{pgcd}(m, n)} - 1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\text{pgcd}(m, n)}} = X^{\text{pgcd}(m, n)} - a^{\text{pgcd}(m, n)}$$

$$(1) X = (X-1) + 1$$

$$X^2 = [(X-1) + 1]^2$$

$$= (X-1)^2 + 2(X-1) + 1$$

$$X^3 = [(X-1) + 1]^3 = (X-1)^3 + 3(X-1)^2 + 3(X-1) + 1$$

$$X^4 = [(X-1) + 1]^4 = (X-1)^4 + 4(X-1)^3 + 6(X-1)^2 + 4(X-1) + 1$$

$$(2) P(X) = X^4 + 5X^3 - 2X^2 - X + 3$$

$$= (X-1)^4 + 4(X-1)^3 + 6(X-1)^2 + 4(X-1) + 1 + 5(X-1)^3$$

$$+ 15(X-1)^2 + 15(X-1) + 5 - 2(X-1)^2 - 4(X-1) - 2$$

$$- (X-1) - 1 + 3$$

$$= (X-1)^4 + 9(X-1)^3 + 19(X-1)^2 + 14(X-1) + 6$$

$$(3) P(X) = P(1 + (X-1)) = P(1) + P'(1)(X-1) + \frac{P''(1)}{2!}(X-1)^2 + \frac{P^{(3)}(1)}{3!}(X-1)^3 + \frac{P^{(4)}(1)}{4!}(X-1)^4$$

$$P(1) = 6$$

$$P^{(3)}(X) = 24X + 30 = 54$$

$$P'(X) = 4X^3 + 15X^2 - 4X - 1 = 14 \quad P^{(4)}(X) = 24$$

$$P''(X) = 12X^2 + 30X - 4 = 43$$

On retrouve bien $P(X)$ comme polynôme en $X-1$:

Exercice 11

$$\text{Soit } P(X) = (X-1)^5 (X+1)^3 (X-3)$$

1 racine d'ordre 5 de $P \Rightarrow$ 1 racine d'ordre 4 de P'

1 racine d'ordre 3 de $P \Rightarrow$ " " " 2 de P'

$$\text{Donc } P'(X) = c \cdot (X-1)^4 (X+1)^2 Q$$

avec $\deg Q = 2$

(car $\deg P' = \deg P - 1 = 8$) et $Q \nmid P$

$$\text{Donc } \text{PGCD}(P, P') = (X-1)^4 (X+1)^2$$

Exercice 12

$$P(X) = m X^{m+1} - (m+1) X^m + 1$$

$P(1) = 0$: 1 est racine de multiplicité ≥ 1

$$P'(X) = m(m+1) X^m - (m+1) m X^{m-1}$$

$$P'(1) = 0$$

$$P''(X) = m^2 (m+1) X^{m-1} - m(m+1) X^{m-2} (m+1)$$

$$P''(1) \neq 0$$

Donc la multiplicité de la racine est double

Exercice 13

(1) $a_1, \dots, a_k$ distincts

$$A(a_i) - B(a_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq k$$

Il s'agit de justifier que si $k > m$ alors

$$A - B = 0$$

$$A, B \text{ de degré } \leq m \Rightarrow \deg(A-B) \leq m$$

$((A-B)(a_i) = 0, 1 \leq i \leq k) \Rightarrow A-B$ possède au moins k racines

$\Rightarrow A - B = 0$ (seul polynôme de degré $\leq m$ qui ait plus que m racines)

Rappel : tout polynôme non nul de degré d a au plus d racines (comptées avec multiplicité)

(2) $\deg A \leq 2m$, $\deg B \leq 2m$

$$(A-B)(a_i) = 0$$

$$(A-B)'(a_i) = 0 \quad (1 \leq i \leq R)$$

$R > m$ Justifions que $A-B=0$

On a : $\deg(A-B) \leq 2m$

$$\begin{cases} (A-B)(a_i) = 0 \\ (A-B)'(a_i) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{les } a_i \text{ sont racines de } A-B \text{ de multiplicité } \geq 2$$

donc $\sum (\text{multiplicités des racines de } (A-B)) \geq 2R > 2m$
et donc $A-B=0$

(3) $\deg A \leq mn$

$$\deg B \leq mn$$

$$A^{(j)}(a_i) = B^{(j)}(a_i) \quad 1 \leq i \leq R$$

$$R > m \quad 0 \leq j \leq m-1$$

$$\Rightarrow A-B=0$$

En effet : $\deg(A-B) \leq mn$

• les a_i sont racines de $A-B$ de multiplicité $\geq m$

• donc $\sum \text{multiplicités} \geq Rm \geq mn \geq \deg(A-B)$

• et donc $A-B=0$

Exercice 14

$$A(1) = 0$$

$$A'(1) = 0$$

$$A''(1) = 0$$

$$A'''(1) \neq 0$$

donc 1 racine d'ordre 3 de A

$$\text{donc } A(X) = c(X-1)^3 Q(X)$$

$$\text{donc } A(X) = (X-1)^3 (X-a)$$

$$A(0) = -2 = -a$$

$$\Rightarrow a = 2$$

$$\text{d'où } A(X) = (X-1)^3 (X+2)$$

Exercice 15

- (1) $X^4 - X^2 - 6 = 0$
 D'après d'Alembert, trouver les facteurs irréductibles d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ équivaut à trouver ses racines :
 car $X - a \mid P \Rightarrow a$ est racine de P

$$\begin{aligned} X^4 - X^2 - 6 &= 0 \\ \Rightarrow (X^2)^2 - X^2 - 6 &= 0 \\ \Delta &= 25 \\ X^2 &= 3 \text{ ou } -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } X^4 - X^2 - 6 &= (X^2 - 3)(X^2 + 2) \\ &= (X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})(X + \sqrt{2}i)(X - \sqrt{2}i) \\ &= (X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})(X^2 + 2) \end{aligned}$$

dans $\mathbb{C}[X]$

(e) $X^4 + 5X^2 + 9 = 0$

$$\Delta = -11$$

$$\text{D'où } X^2 = \frac{-5 \pm i\sqrt{11}}{2}$$

$$(a + ib)^2 = \frac{-5 + i\sqrt{11}}{2}$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -5/2 \\ 2ab = \sqrt{11}/2 \end{cases}$$

$$2ab = \sqrt{11}/2$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \left| \frac{-5 + i\sqrt{11}}{2} \right| = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab > 0 \\ a^2 = 1/4 \\ b^2 = 11/4 \end{cases} \quad a + ib = \pm \left(\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{11}}{2} \right)$$

$$\text{D'où } X^4 + 5X^2 + 9 = \left(X - \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{11}}{2} \right) \left(X + \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{11}}{2} \right)$$

$$\left(X - \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{11}}{2} \right) \left(X + \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{11}}{2} \right) \in \mathbb{C}[X]$$

$$= \left[\left(X - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(i \frac{\sqrt{11}}{2} \right)^2 \right] \left[\left(X + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(i \frac{\sqrt{11}}{2} \right)^2 \right]$$

$$= \left[\left(X - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{11}{4} \right] \left[\left(X + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{11}{4} \right]$$

$$= (X^2 - X + 3)(X^2 + X + 3) \quad \mathbb{R}[X]$$

(3) $X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$
 $= \frac{X^8 - 1}{X - 1}$

$$= \frac{1}{(X-1)} (X-1)(X+1)(X - e^{i\frac{\pi}{4}})(X - e^{-i\frac{\pi}{4}})(X - e^{\frac{3}{4}i\pi})(X - e^{-\frac{3}{4}i\pi})$$

$$(X - e^{i\frac{\pi}{2}})(X - e^{-i\frac{\pi}{2}})$$

$$= (X+i)(X - \frac{1+i}{\sqrt{2}})(X - \frac{1-i}{\sqrt{2}})(X + \frac{1-i}{\sqrt{2}})(X + \frac{1+i}{\sqrt{2}})(X-1)(X+1) \text{ dans } \mathbb{C}[X]$$

$$= (X+1)(X^2 - \sqrt{2} + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 + 1)$$

(4) $(X^2 - X - 2)^2 + (X+1)^2$

$$= [(X^2 - X - 2) - i(X+1)][(X^2 - X - 2) + i(X+1)]$$

$$= (X^2 - (1+i)X - (2+i))(X^2 - (1-i)X - (2-i)) \dots$$

$$\begin{aligned}
 (x^2 - x - 2)^2 + (x+1)^2 &= [(x+1)(x-2)]^2 + (x+1)^2 \\
 &= (x+1)^2 [(x-2)^2 + 1] \\
 &= (x+1)^2 (x^2 - 4x + 5) \in \mathbb{R}[X] \\
 &= (x+1)^2 (x-2-i)(x-2+i) \in \mathbb{C}[X]
 \end{aligned}$$

Exercice 16

Si $A, B \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux, alors ils n'ont pas de facteur $x-a$ en commun et donc pas de racine commune.

D'après d'Alembert, ça est vrai si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, car si A, B n'ont pas de facteur $x-a$ (forme générale des polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$) en commun, alors ils n'ont pas de facteur irréductible commun et donc ils sont premiers entre eux.

Cette réciproque n'est pas vraie dans $\mathbb{R}[X]$. Contre-exemple :

$(x^2+1)(x-1)$ et $(x^2+1)(x+1)$ ne sont pas premiers entre eux $\text{PGCD} = x^2+1$ et pourtant ils n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{R}$.

Exercice 17

$$\begin{aligned}
 (1) \quad A(1) &= 0 \Leftrightarrow x-1 \mid A \\
 A(i) &= 0 \Leftrightarrow x-i \mid A \\
 A(-i) &= 0 \Leftrightarrow x+i \mid A \\
 A(-i) &= 0 \text{ car } A \text{ réel} \Leftrightarrow x+i \mid A \\
 A(1+i) &= 0 \Leftrightarrow x-1-i \mid A \\
 A(1-i) &= 0 \Leftrightarrow x-1+i \mid A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \text{cd}(A) x(x-1)(x-i)(x+i)(x-1-i)(x-1+i) \\
 &= \text{cd}(A) x(x-1)(x^2+1)(x^2-2x+2) \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad B(1) &= 0 \quad \left. \begin{array}{l} B'(1) = 0 \end{array} \right\} (x-1)^2 \mid A & \text{donc } B(x) &= \text{cd}(B) (x-1)^2 (x-1+i)^2 \mathbb{C} \\
 & & & \quad (x-1-i)^2 \\
 & & & = \text{cd}(B) (x-1)^2 (x^2-2x+2)^2 \in \mathbb{R} \\
 B(1-i) &= 0 \quad \left. \begin{array}{l} B'(1-i) = 0 \end{array} \right\} (x-1+i)^2 \mid A \\
 & & & (x-1-i)^2 \mid A \quad \text{car } B \text{ réel}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \text{PGCD}(A, B) &= (x-1)(x^2-2x+2) \\
 \text{PPCM}(A, B) &= (x-1)^2 (x^2-2x+2)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad P(x) &= (x-1)^a x^b (x-i)^c (x+i)^d \\
 &\Rightarrow P(x) = (x-1)x(x^2+1)^c \\
 &\quad \text{ou } \begin{cases} a, b, c \geq 1 \\ a+b+2c = 5 \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} a, b, c, d \geq 1 \\ a+b+c+d = 5 \\ c=d \quad (P \in \mathbb{R}[X]) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \deg (x-1)^a x^b &\geq 2 \\
 \deg (x^2+1)^c &\leq 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow c=1 \\
 &\text{et donc } \{a, b\} = \{1, 2\} \quad 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc : } P(x) &= (x-1)^2 x (x^2+1) \\
 &\text{ou } = (x-1)x^2 (x^2+1)
 \end{aligned}$$

5) On a pbs $c=d$

donc $\{a, b, c, d\} =$

$$\begin{aligned} &\{1, 1, 1, 2\} \subset \\ &\{1, 1, 2, 13\} \subset \\ &\{1, 2, 1, 13\} \subset \mathbb{R} \\ &\{2, 1, 1, 13\} \subset \mathbb{R} \end{aligned}$$

10

Exercice 18

$$A(x) = \frac{x^m}{m!} + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \dots + \frac{x^2}{2!} + x + 1$$

Si A a une racine multiple $A(x) = 0$

$$A'(x) = \frac{m x^{m-1}}{m!} + \frac{(m-1) x^{m-2}}{(m-1)!} + \dots + \frac{2x}{2!} + 1$$

$$= A(x) - \frac{x^m}{m!}$$

Donc

$$A(x) = 0$$

$$A(x) - \frac{x^m}{m!} = 0$$

$x^m = 0$ d'où $x=0$ or $A(0) = 1 \neq 0$ Donc pas de racine multiple.

Exercice 19

(1) $A(x) = x(x^2+4) \quad \mathbb{R}$

$$\cancel{B(x)} = x(x-2i)(x+2i) \subset \mathbb{C}$$

$$B(x) = (x^2)^2 - 5x^2 - 36 = (x-3)(x+3)(x+2i)(x-2i) \subset \mathbb{C}$$

$$\Delta = 169 = 13^2 = (x-3)(x+3)(x^2+4) \subset \mathbb{R}$$

(2) $\text{PGCD}(A, B) = x^2 + 4$

Exercice 20

11/12

$$A(X) = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

$$(1) \quad A\left(\frac{p}{q}\right) = 0 \Leftrightarrow a_m \frac{p^m}{q^m} + a_{m-1} \frac{p^{m-1}}{q^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} q + \dots + a_1 p q^{m-1} + a_0 q^m = 0 (*)$$

$$\Leftrightarrow a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} q + \dots + a_1 p q^{m-1} = -a_0 q^m$$

$$\Rightarrow p \mid a_0 q^m \Rightarrow p \mid a_0 \text{ car } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux.}$$

$$\text{De même : } (*) \Leftrightarrow a_m p^m = -a_{m-1} p^{m-1} q - \dots - a_1 p q^{m-1} - a_0 q^m$$
$$\Rightarrow q \mid a_m p^m$$
$$\Rightarrow q \mid a_m$$

$$(2) \quad 2X^3 - X^2 + X - 3 = A(X)$$

Soit $\frac{p}{q}$ une éventuelle racine rationnelle, avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\text{pgcd}(p, q) = 1$

D'après (1)

$$\text{ic } p \mid 3 \text{ et } q \mid 2$$
$$p \in \{-3, -1, 1, 3\} \text{ et } q \in \{1, 2\}$$

$$A(-3) \neq 0$$

$$A(-\frac{3}{2}) \neq 0$$

$$A(-1) \neq 0$$

$$A(-\frac{1}{2}) \neq 0$$

$$A(1) \neq 0$$

$$A(\frac{1}{2}) \neq 0$$

$$A(3) \neq 0$$

$$A(\frac{3}{2}) \neq 0$$

Il n'y a pas de racine

$$(13) \quad A(X) = X^3 + X^2 - X + 2$$

Éventuelles racines rationnelles.

$$P/q, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}^*, \quad \text{pgcd}(p, q) = 1$$

$$p \mid 2 \text{ et } q \mid 1 \Rightarrow q = 1$$

Donc $P/q = p \in \mathbb{Z}$ et $p \mid 2$ donc $P/q = p \in \{-2, -1, 1, 2\}$
 $p \neq -2$

$$A(-2) = 0$$

L'unique racine de A est -2

$$A(-1) \neq 0$$

$$A(1) \neq 0$$

$$A(2) \neq 0$$

$$A(X) = (X+2)(X^2 + bX + c) \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$= X^3 + X^2 - X + 2$$

$$\text{Donc } A(X) = (X+2)(X^2 - X + 1) \quad \mathbb{R}[X]$$

$$= (X+2)(X + \frac{1}{2})(X + \frac{1}{2}) \quad \mathbb{C}[X]$$

$$\text{Soit } B(X) = 3X^3 + 4X^2 + 10X + 3$$

$$P/q \text{ où } p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}^*, \quad \text{pgcd}(p, q) = 1$$

et $p \mid 3$ et $q \mid 3$ Donc:

$$p \in \{-3, -1, 1, 3\}, \quad q \in \{1, 3\}$$

$$\text{pgcd}(p, q) = 1$$

Notons que $X > 0 \Rightarrow B(X) > 0$ donc $p < 0$

Les seuls cas à envisager sont donc:

$$(-1, 1), \quad P/q = -1 \Rightarrow B(-1) = -6 \neq 0$$

$$B(-3) \neq 0$$

$$B(-\frac{1}{3}) = 0$$

L'unique racine rationnelle de
 B est $-\frac{1}{3}$

$$\text{On a donc } B(x) = 3(x + \frac{1}{3})(x^2 + bx + c) \Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b + 3c = 10 \end{cases}$$

$$= 3x^3 + 4x^2 + 10x + 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$= 3(x + \frac{1}{3})(x + \frac{1 + i\sqrt{11}}{2})(x + \frac{1 - i\sqrt{11}}{2})$$

$$\Delta = -11$$

$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{11}}{2}$$

Racine emise : $C(x) = 3x^3 + 5x^2 + 4x - 2$

Les éventuelles racines rationnelles sont p/q , $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\text{pgcd}(p, q) = 1$ et $p \mid 2$ et $q \mid 3$
 d'où $p \in \{-2, -1, 1, 2\}$ et $q \in \{1, 3\}$

$$A(-2) \neq 0$$

$$A(-1) \neq 0$$

$$A(-1) \neq 0$$

$$A(-\frac{2}{3}) \neq 0$$

$$A(1) \neq 0$$

$$A(\frac{1}{2}) \neq 0$$

donc $\frac{1}{3}$ racine

$$A(2) \neq 0$$

$$A(1) \neq 0$$

$$A(\frac{2}{3}) \neq 0$$

$$A(-\frac{1}{3}) \neq 0$$

$$A(\frac{1}{3}) = 0$$

$$A(\frac{2}{3}) \neq 0$$

$$3x^3 + 5x^2 + 4x - 2 = (x - \frac{1}{3})(ax^2 + bx + c)$$

$$= (3x - 1)(ax^2 + bx + c) = (3x - 1)(x^2 + 2x + 2)$$

$$3ax^3 + (3b - a)x^2 + (3c - b)x - c \in \mathbb{R}[x]$$

$$3x^3 + (6 - 1)x^2 + (6 - 2)x$$

$$= (3x - 1)(x + 1 + i)(x + 1 - i)$$

$$\in \mathbb{C}[x]$$

$$\Delta = -9$$

$$x_1 = \frac{-2 \pm i2}{2}$$

$$-1 \pm i$$

$$\begin{cases} 3a = 3 \\ 3b - a = 5 \\ 3c - b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$c = 2$$

II - Fractions rationnelles, décomposition en éléments simples

Exercice 21

(1)

$1 + 3X + X^2$ $-1 - X$ $2X + X^2$ $-2X - 2X^2$ $-X^2$ $+X^2 - X^3$ $-X^3$ $-X^3 - X^4$ $-X^4$ $+X^4 + X^5$ X^5	$1 + X$ $1 + 2X - X^2 + X^3 - X^4$
---	---

Donc la division suivant les puissances croissantes de $1 + 3X + X^2$ par $1 + X$ est :

$$(1 + 3X + X^2) = (1 + X)(1 + 2X - X^2 + X^3 - X^4) + X^5$$

(2)

1 $-1 + X^2$ X^2 $-X^2 + X^4$ X^4 $-X^4 + X^6$ X^6 $-X^6 + X^8$ X^8 $-X^8 + X^{10}$ X^{10} $-X^{10} + X^{12}$ X^{12}	$1 - X^2$ $1 + X^2 + X^4 + X^6 + X^8 + X^{10}$
--	---

Donc la division suivant les puissances croissantes de 1 par $1 - X^2$

à l'ordre 10 est

$$1 = (1 - X^2)(1 + X^2 + X^4 + X^6 + X^8 + X^{10}) + X^{12}$$

On pouvait écrire directement

$$\frac{1 - X^{12}}{1 - X^2} = 1 + X^2 + X^4 + X^6 + X^8 + X^{10}$$

(Si l'on utilise la suite géométrique de raison X^2 , premier terme 1)

d'où $1 = (1-x^2)(1+x^2+\dots+x^{10})+x^{12}$

On peut généraliser à l'ordre $m=2k$ ou $2k+1$

$$\frac{1-x^{2k+2}}{1-x^2} = 1+x^2+\dots+x^{2k}$$

$$\Rightarrow 1 = (1-x^2) \sum_{k=0}^m x^{2k} + x^{2k+2}$$

C'est la division de 1 par $1-x^2$ sur les puissances croissantes à l'ordre $m=2k$ ou $2k+1$

NB: On en déduit en faisant $x \rightarrow 0$ le D_k en 0 de $\frac{1}{1-x^2}$

$$\frac{1}{1-x^2} = Q_m(x) + \frac{R_m(x)}{1-x^2} = 1+x^2+x^4+\dots+x^{2k} + \frac{x^{2k+2}}{1-x^2}$$

où $\frac{x^{2k+2}}{1-x^2} = o(x^m)$

(3)	$ \begin{array}{r} 1 - x^2 \quad \quad 1 - 2x \cos \theta + x^2 \\ -1 + 2x \cos \theta - x^2 \quad \quad 1 + 2x \cos \theta + 2x^2 \cos(2\theta) \\ \hline 2x \cos \theta - 2x^2 \quad \quad \\ -2x^2(2\cos^2 \theta - 1) - \quad \quad 2x^3 \cos \theta \\ 2x^2 \cos(2\theta) - 2x^3 \cos \theta \quad \quad \\ -2x^2 \cos(2\theta) + 4x^3 \cos \theta \cos(2\theta) - 2x^4 \cos(2\theta) \quad \quad \\ \hline 2x^3 \cos \theta (2\cos(2\theta) - 1) - 2x^4 \cos(2\theta) \quad \quad \end{array} $
-----	---

On attend $2x^3 \cos(3\theta)$ à la place de $2x^3 \cos \theta (2\cos(2\theta) - 1)$

Autrement dit, a-t'on : $\cos(3\theta) = \cos \theta (2\cos(2\theta) - 1)$

ie a-t'on :

$$\cos(3\theta) = \cos \theta (2(2\cos^2 \theta - 1) - 1)$$

$$= \cos \theta (4\cos^2 \theta - 3)$$

$$= 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta ?$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta - 3\cos \theta \sin^2 \theta$$

$$\Rightarrow \cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) \\ = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

Cette méthode permet d'exprimer $\cos(m\theta)$ comme un polynôme en $\cos \theta$, $\forall m$

Bref on a bien $R_2(x) = 2x^3 \cos(3\theta) - 2x^4 \cos(2\theta)$

Récap $Q_0 = 1$, $R_0 = 2x \cos \theta - 2x^2$
 $Q_1 = 1 + 2x \cos \theta$, $R_1 = 2x^2 \cos(2\theta) - 2x^3 \cos \theta$
 $Q_2 = 1 + 2x \cos \theta + 2x^2 \cos(2\theta)$, $R_2 = 2x^3 \cos(3\theta) - 2x^4 \cos(2\theta)$

$$\begin{array}{l|l} 1 - x^2 & 1 - 2x \cos \theta + x^2 \\ \vdots & \\ 2x^{m+1} \cos((m+1)\theta) - 2x^{m+2} \cos(m\theta) & 1 + 2x \cos \theta + \dots + 2x^m \cos(m\theta) + 2x^{m+1} \cos((m+1)\theta) \\ - 2x^{m+1} \cos((m+1)\theta) + 4x^{m+2} \cos(m\theta) & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x^{m+1} \cos((m+1)\theta) - 2x^{m+2} \cos(m\theta) \\ - 2x^{m+1} \cos((m+1)\theta) + 4x^{m+2} \cos(m\theta) \\ \hline 2x^{m+2} \cos(m\theta) \end{array}$$

2

R_{m+1} sera bien le reste attendu si

$$2 \cos \theta \cos((m+1)\theta) - \cos(m\theta) = \cos((m+2)\theta)$$

C'est-ce le cas ? Autrement dit a-t-on :

$$\cos((m+2)\theta) + \cos(m\theta) = 2 \cos \theta \cos((m+1)\theta)$$

Exercice 22

(1) D'après le th de décomposition en élément simple on a:

$$F(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+2)} = C^- + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

La méthode générale pour calculer C^- (lemme 1) consiste à faire la division euclidienne du numérateur de F par son dénominateur (si $\deg F \geq 0$ sinon pas de partie entière) et C^- est le quotient

→ si $\deg C^- = 0$ ($C^- = cte$) il est plus rapide de faire $x \rightarrow +\infty$:

$$\text{Ici: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+2)} = C^-$$

2 me marque que si $\deg C^- = 0$ donc $C^- = 1$

Pour calculer a on peut écrire:

$$F(x)(x-1) = \frac{(x+1)^2}{x+2} = x-1 + a + (x-1) \frac{b}{x+2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} [F(x)(x-1)] = \left. \frac{(x+1)^2}{x+2} \right|_{x=1} = a$$

$$\text{d'où } a = \frac{4}{3}$$

De même:

$$b = \lim_{x \rightarrow -2} [F(x)(x+2)] = \left. \frac{(x+1)^2}{x-1} \right|_{x=-2} = -\frac{1}{3}$$

Cette méthode fonctionne quand on a un elt simple $\frac{1}{x-\alpha}$

$$\text{Conclusion: } F(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+2)} = 1 + \frac{4/3}{x-1} - \frac{1/3}{x+2}$$

Exercice 22 - suite

15

$$F(x) = \frac{1}{x(x^2+x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} [xF(x)] = 1$$

$$cf \quad b+j+c = \lim_{x \rightarrow j} [(x^2+x+1)F(x)] = \lim_{x \rightarrow j} \frac{1}{x} = \frac{1}{j} = -j-1$$

$$\Rightarrow b=c=-1$$

$$cf \quad \text{dome } F(x) = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

$$S' \quad x=1: \quad \frac{1}{3} = 1 + \frac{b+c}{3}$$

$$b+c = -2$$

$$S' \quad x=2: \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{2b+c}{4}$$

$$2b+c = -3$$

$$\text{dome } \begin{cases} b+c = -2 \\ 2b+c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$cf \quad \text{dome } F(x) = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

$$\text{Dome dome } G(x) = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x-j} + \frac{\bar{\alpha}}{x-\bar{j}}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{x \rightarrow j} \frac{1}{x(x-j)} = \frac{1}{j(j-\bar{j})} = \frac{j}{j\sqrt{3}} = -\frac{j}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$(3) F(x) = \frac{2x-1}{x(x+1)(x^4+x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

$$\text{car } x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + \lambda x + \mu)(x^2 - \lambda x + \mu) \\ \text{avec } \mu^2 = 1 \quad \text{et} \quad 2\mu - \lambda^2 = 1 \\ \mu = \pm 1 \quad \Rightarrow \mu = 1, \lambda = \pm 1$$

$$\text{donc } x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} (x F(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-1}{(x+1)(x^4+x^2+1)} \\ = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -1} [(x+1)F(x)] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{x(x^4+x^2+1)} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$\text{et } c_j + d = \lim_{x \rightarrow j} \frac{2x-1}{x(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{2j-1}{j(j+1)(j^2-j+1)} = \frac{2j-1}{2j} \\ = 1 - \frac{1}{2j}$$

$$\text{et } -e_j + f = \lim_{x \rightarrow j} (x^2 - x + 1)F(x) = \lim_{x \rightarrow j} \frac{2x-1}{x(x+1)(x^2+x+1)} \\ = \frac{-2j-1}{-j(-j+1)(j^2-j+1)} = -\frac{1}{2j} = -1 - 2j$$

Finalement: $a = -1$

$$b = 1$$

$$c_j + d = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} i\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} c i\sqrt{3}/4 = 1/4 i\sqrt{3} \\ -1/2 c + d = 5/4 \end{cases} \\ -e_j + f = -\frac{1}{2j} = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \Rightarrow \begin{cases} e = -1/2 \\ f = 1/2 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 1/2 \\ d = 3/2 \end{cases}$$

Conclusion: $F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{x+3}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \frac{x-1}{x^2-x+1}$ dans $\mathbb{R}(x)$

Dans $\mathbb{C}(x)$:

$$F(x) = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{\alpha}{x-j} + \frac{\bar{\alpha}}{x-\bar{j}} + \frac{\beta}{x+j} + \frac{\bar{\beta}}{x+\bar{j}}$$

on a $\alpha = \lim_{x \rightarrow j} (x-j) F(x) \dots$

Si on $\frac{x+3}{x^2+x+1} = \frac{\lambda}{x-j} + \frac{\bar{\lambda}}{x-\bar{j}} \Rightarrow \lambda = \lim_{x \rightarrow j} (x-j) \frac{x+3}{x^2+x+1}$

$$= \lim_{x \rightarrow j} \frac{x+3}{x-\bar{j}} = \frac{j+3}{j-\bar{j}} = \frac{j+3}{i\sqrt{3}}$$

$$\frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{\mu}{x+j} + \frac{\bar{\mu}}{x+\bar{j}} \Rightarrow \mu = \lim_{x \rightarrow -j} (x+j) \frac{x-1}{x^2-x+1} = \lim_{x \rightarrow -j} \frac{x-1}{x+\bar{j}}$$

$$= \frac{-j-1}{-j+\bar{j}} = \frac{\bar{j}}{-i\sqrt{3}}$$

Conclusion $F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{j+3}{i\sqrt{3}} \frac{1}{x-j} + cc \right)$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{j}}{i\sqrt{3}} \frac{1}{x+j} + cc \right) \text{ dans } \mathbb{C}(x)$$

(4) $F(x) = \frac{1}{x^2(x^2+a^2)}$

Si $a=0$: $F(x) = \frac{1}{x^3}$

Si $a \neq 0$ $F(x) = \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma x + \delta}{x^2+a^2}$

On remarque que $F(-x) = F(x) = \frac{1}{x^2(x^2+a^2)}$

donc $\frac{\alpha}{x^2} - \frac{\beta}{x} + \frac{-\gamma x + \delta}{x^2+a^2} = \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma x + \delta}{x^2+a^2}$

d'où (par unicité de la décomposition en éléments simples):

$$-\beta = \beta \quad \text{donc } \beta = 0$$

$$-\gamma = \gamma \quad \text{donc } \gamma = 0$$

$$\text{Donc } F(x) = \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\delta}{x^2 + a^2}$$

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 F(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2}$$

$$\text{et } \delta = \lim_{x \rightarrow ia} [(x^2 + a^2) F(x)] = \lim_{x \rightarrow ia} \left(\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{a^2}$$

Conclusion: $F(x) = \frac{1}{x^2(x^2 + a^2)} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + a^2} \right)$

$$(5) F(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2(x-2)^2} = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x-2)^2} + \frac{d}{x-2}$$

$$\text{où: } a = (x+1)^2 F(x) \Big|_{x=-1} = \frac{1}{9}$$

$$b = \left(\frac{x+2}{(x-2)^2} \right)' \Big|_{x=-1} = \frac{5}{27}$$

$$c = (x-2)^2 F(x) \Big|_{x=2} = \frac{4}{9}$$

$$d = \left(\frac{x+2}{(x+1)^2} \right)' \Big|_{x=2} = -\frac{5}{27} \quad \text{dans } R(x) \text{ et } C(x)$$

Exercice 22 - suite - suite et g'im (part être)

17

$$(6) F(x) = \frac{x^2}{(x^4 + x^2 + 1)^2} = \frac{x^2}{(x^2 + x + 1)^2 (x^2 - x + 1)^2}$$
$$= \frac{ax+b}{(x^2+x+1)^2} + \frac{cx+d}{(x^2+x+1)^2} + \frac{ex+g}{(x^2-x+1)^2} + \frac{gx+h}{x^2-x+1}$$

Mais $F(x) = F(-x)$ i.e.

$$= \frac{-ax+b}{(x^2-x+1)^2} + \frac{-cx+d}{(x^2-x+1)^2} + \frac{-ex+g}{(x^2+x+1)^2} + \frac{-gx+h}{(x^2+x+1)}$$

donc $a = -e$

$$g = b$$

$$g = c$$

$$h = d$$

Conclusion: $\frac{ax+b}{(x^2+x+1)^2} + \frac{cx+d}{(x^2+x+1)} + \frac{-ax+b}{(x^2-x+1)^2}$

$$+ \frac{-cx+d}{(x^2-x+1)}$$

$$aj+b = \lim_{x \rightarrow j} [(x^2+x+1)^2 F(x)] = \frac{x^2}{(x^2-x+1)^2} \Big|_{x=j} = \frac{j^2}{(-2j)^2} = \frac{1}{4}$$

$$a = 0, \quad b = 1/4$$

$$F(x) = \frac{x^2}{(x^4 + x^2 + 1)^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+x+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(x^2-x+1)^2}$$
$$+ \frac{-c+d}{x^2-x+1}$$

$$x=0 \Rightarrow d = -1/4$$

$$x=1 \Rightarrow c = -1/4$$

$$F(x) = \frac{1}{4} \frac{1}{(x^2+x+1)^2} - \frac{1}{4} \frac{(x+1)}{x^2+x+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(x^2-x+1)^2}$$
$$+ \frac{1}{4} \frac{x-1}{x^2-x+1} \quad \text{dans } \mathbb{R}(x).$$

Dans $C(x)$: $F(x) = \frac{x^2}{(x^4 + x^2 + 1)^2} = \frac{\alpha}{(x-j)^2} + \frac{\beta}{x-j} + \frac{\gamma}{(x+j)^2} + \frac{\delta}{x+j} + \alpha$

où $\alpha = (x-j)^2 F(x) \Big|_{x=j} = \frac{x^2}{(x-j)^2 (x^2-x+1)^2} \Big|_{x=j}$

$$= \frac{j^2}{(j-j)^2 (j^2+j+1)^2} = \frac{j^2}{(i\sqrt{3})^2 (-2j)^2} = -\frac{1}{12}$$

$\beta = \left(\frac{x^2}{(x-j)^2 (x^2-x+1)^2} \right)' \Big|_{x=j} = -\frac{1}{8} - \frac{i\sqrt{3}}{72}$

$\gamma = \frac{x^2}{(x+j)^2 (x^2+x+1)^2} \Big|_{x=-j} = -\frac{1}{12} = \alpha$

$\delta = \left(\frac{x^2}{(x+j)^2 (x^2+x+1)^2} \right)' \Big|_{x=-j} = \frac{7}{24} + \frac{13\sqrt{3}i}{72}$

(*) $F(x) = \frac{x^3+2}{(x^2+x+1)^3}$

Le dénominateur est une puissance d'un irréductible de $\mathbb{R}[x]$, la méthode que nous allons utiliser s'applique à toute fonction de la forme $\frac{A(x)}{P(x)^n}$

$x^3+2 = (x^2+x+1)(x^5-x^4+x^2-x) + x+2$

d'où $\frac{x^3+2}{(x^2+x+1)^3} = \frac{x^5-x^4+x^2-x}{(x^2+x+1)^2} + \frac{x+2}{(x^2+x+1)^3}$

$x^5-x^4+x^2-x = (x^2+x+1)(x^3-2x^2+x+2) - 4x-2$

d'où $\frac{x^3+2}{(x^2+x+1)^3} = \frac{x^3-2x^2+x+2}{x^2+x+1} + \frac{x+2}{(x^2+x+1)^3} + \frac{-4x-2}{(x^2+x+1)^2}$

$x^3-2x^2+x+2 = (x^2+x+1)(x-3) + 3x+5$

$$= x-3 + \frac{3x+5}{x^2+x+1} - \frac{4x+2}{(x^2+x+1)^2} + \frac{x+2}{(x^2+x+1)^3}$$

Dans $\mathbb{C}(X)$:

18

$$F(X) = \frac{X^3 + 2}{(X^2 + X + 1)^3} = X - 3 + \frac{\alpha}{(X-j)^3} + \frac{\beta}{(X-j)^2} + \frac{\gamma}{(X-j)} + \infty$$

$$\text{où } \alpha = \left[(X-j)^3 F(X) \right]_{X \rightarrow j} = \left. \frac{X^3 + 2}{(X-j)^3} \right|_{X=j} = \frac{j+2}{(i\sqrt{3})^3}$$

$$\beta = \frac{4j - 7\bar{j} - 6}{9}$$

$$\gamma = \frac{(14 - 21j)i\sqrt{3} - 2(4j - 7\bar{j} - 6)}{i9\sqrt{3}}$$

(8) 1^{ère} méth

$$F(X) = \frac{2X^4 + 1}{(X-1)^3 (X^2+1)} = \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{dX+e}{X^2+1}$$

$$\text{où } a = (X-1)^3 F(X) \Big|_{X \rightarrow 1} = 3/2$$

$$b = \left(\frac{2X^4 + 1}{X^2 + 1} \right)' \Big|_{X=1} = \frac{8X^3(X^2+1) - (2X^4+1)2X}{(X^2+1)^2} \Big|_{X=1}$$

$$c = \frac{1}{2} \left(\frac{2X^4 + 1}{X^2 + 1} \right)'' \Big|_{X=1} = 5/2$$

$$d = -3/4 \quad e = 3/4 \quad \mathbb{R}[X]$$

2^{ème} méth Pour $Y = X-1 \Rightarrow X = 1+Y$

$$\text{alors } F(X) = \frac{2(1+Y)^4 + 1}{Y^3(Y^2+2Y+2)} = \frac{2Y^4 + 8Y^3 + 12Y^2 + 8Y + 3}{Y^3(2+2Y+Y^2)}$$

$$\begin{array}{r}
 3 + 8y + 12y^2 + 8y^3 + 2y^4 \quad | \quad 2 + 2y + y^2 \\
 \hline
 3 + 5y + \frac{11}{4}y^2 \\
 \vdots \\
 - \frac{3}{4}y^4
 \end{array}$$

$$F(x) = \frac{3}{2} \frac{1}{y^3} + \frac{5}{2} \frac{1}{y^2} + \frac{11}{4} \frac{1}{y} + \frac{3}{4} \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$(a) \quad F(x) = \frac{x+3}{(x-1)^4(x+1)}$$

$$= \frac{a}{(x-1)^4} + \frac{b}{(x-1)^3} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{x-1} + \frac{e}{x+1}$$

$$\text{où } a = (x+1)^4 F(x) \Big|_{x=-1} = \frac{x+3}{x+1} \Big|_{x=-1} = \left(1 + \frac{2}{x+1}\right) \Big|_{x=-1} = 2$$

$$b = -1/2$$

$$c = 1/4$$

$$d = -1/4$$

$$e = 1/8$$

$$F(x) = \frac{4+y}{y^4(2+y)}$$

$$\begin{array}{r}
 4+y \quad | \quad 2+y \\
 \hline
 -4-2y \quad 2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{8}y^3 \\
 \vdots \\
 -\frac{1}{4}y^2 \\
 \frac{1}{8}y^4
 \end{array}$$

Exercice 28

1974

$$(1) \quad F(x) = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)(x-j)(x-\bar{j})}$$

$$= \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x-j} + \frac{\bar{d}}{x-\bar{j}}$$

$$\text{on } a = (x-1)^2 F(x) \Big|_{x \rightarrow 1} = \frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)} \Big|_{x=1} = \frac{1}{6}$$

$$b = \left(\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)} \right)' \Big|_{x=1} = - \frac{x^2+x+1 + (x+1)(2x+1)}{[(x+1)(x^2+x+1)]^2} \Big|_{x=1} = -\frac{1}{4}$$

$$c = (x+1)F(x) \Big|_{x \rightarrow -1} = \frac{1}{(x-1)(x^3-1)} \Big|_{x=-1} = \frac{1}{4}$$

$$d = (x-j)F(x) \Big|_{x \rightarrow j} = \frac{1}{(x^2-1)(x-1)(x-\bar{j})} \Big|_{x=j} = \frac{1}{(j^2-1)(j-1)(j-\bar{j})}$$

$$\text{Mais } (j^2-1)(j-1) = j^2+1-j-j^2 = 3$$

$$\text{et } j-\bar{j} = i\sqrt{3} \quad \text{donc } d = \frac{-i}{3\sqrt{3}}$$

$$\text{donc } F(x) = \frac{1}{6} \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} - \frac{i}{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{x-j} - \frac{1}{x-\bar{j}} \right)$$

$$(2) \quad 1 = (1-x^2)(1+x^2+x^4+\dots+x^{2m}) + x^{2m+2}$$

$$= (1-x^2) \sum_{2j \leq N} x^{2j} + x^{N+1} R_N(x) \quad \begin{cases} R_{2m}(x) = x \\ R_{2m+1}(x) = 1 \end{cases}$$

$$\text{et } 1 = (1-x^3) \left(\sum_{3k \leq N} x^{3k} \right) + x^{N+1} S_N(x)$$

$$(3) \quad F(x) = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)} = \left(\sum_{2j \leq N} x^{2j} + x^{N+1} \frac{R_N(x)}{1-x^2} \right) \left(\sum_{3k \leq N} x^{3k} + x^{N+1} \frac{S_N(x)}{1-x^3} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{2j \leq N \\ 3k \leq N}} x^{2j+3k} + x^{N+1} \frac{(\sum_{j \leq N} x^{2j}) S_N(x) (1-x^2)}{(1-x^3)(1-x^2)} \\
&\quad + x^{N+1} \frac{(\sum_{k \leq N} x^{3k}) R_N(x) (1-x^3)}{(1-x^3)(1-x^2)} + x^{N+1} \frac{x^{N+1} S_N(x) R_N(x)}{(1-x^3)(1-x^2)} \\
&= \sum_{\substack{2j \leq N \\ 3k \leq N}} x^{2j+3k} + x^{N+1} \frac{T_N(x)}{(1-x^2)(1-x^3)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{2j+3k \leq N} x^{2j+3k} + x^{N+1} \frac{U_N(x)}{(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$= \sum_{m \leq N} \left(\sum_{2j+3k=m} 1 \right) x^m + x^{N+1} \frac{U_N(x)}{(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$= \sum_{m \leq N} g(m) x^m + x^{N+1} \frac{U_N(x)}{(1-x^2)(1-x^3)} \quad \text{où } g(m) = \sum_{2j+3k=m} 1 = p_e$$

nombre de façon d'écrire $m = 2j + 3k$ avec $j, k \in \mathbb{N}$
 La question est : calculer $g(m)$.

$$\text{Taylor: } \frac{F^{(m)}(0)}{m!} = g(m) \quad \text{car } \left(x^{N+1} \frac{U_N(x)}{(1-x^2)(1-x^3)} \right)^{(m)} \Big|_{x=0} = 0$$

Pour expliciter $F^{(m)}(0)$ on utilise la décomposition en éléments simples de la fraction (1), qui donne :

$$\begin{aligned}
F^{(m)}(x) &= \frac{1}{6} \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{x+1} \\
&\quad - \frac{i}{3\sqrt{3}} \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{1}{x-j} - \frac{1}{x-\bar{j}} \right)
\end{aligned}$$

$$\text{Mais } \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{x-a} = \frac{(-1)^m m!}{(x-a)^{m+1}} \quad \text{et} \quad \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{d^m}{dx^m} \left(-\frac{1}{x-1} \right)$$

$$= - \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{(-1)^{m+1} (m+1)!}{(x-1)^{m+2}}$$

208

Ainsi :

$$\frac{F^{(m)}(x)}{m!} = \frac{1}{6} \frac{(-1)^{m+2} (m+1)}{(x-1)^{m+2}} - \frac{1}{4} \frac{(-1)^m}{(x-1)^{m+1}} + \frac{1}{4} \frac{(-1)^m}{(x+1)^{m+1}}$$

$$- \frac{i}{3\sqrt{3}} \left(\frac{(-1)^m}{(x-j)^{m+1}} - \frac{(-1)^m}{(x-\bar{j})^{m+1}} \right)$$

et donc $g(m) = \frac{F^{(m)}(0)}{m!} = \frac{1}{6} (m+1) + \frac{1}{4} (1 + (-1)^m) + \frac{i}{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{j^{m+1}} - \frac{1}{\bar{j}^{m+1}} \right)$

or $\frac{1}{j^{m+1}} - \frac{1}{\bar{j}^{m+1}} = 2i \operatorname{Im} \frac{1}{j^{m+1}} = 2i \operatorname{Im} \left(e^{-\frac{2\pi i}{3}(m+1)} \right) = -2i \sin\left(\frac{2\pi}{3}(m+1)\right)$

d'où $\frac{i}{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{j^{m+1}} - \frac{1}{\bar{j}^{m+1}} \right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2\pi}{3}(m+1)\right)$

et donc :

$$g(m) = \frac{1}{6} (m+1) + \frac{1}{4} (1 + (-1)^m) + \frac{2}{3\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2\pi}{3}(m+1)\right)$$

mod 2 mod 3

On va regarder mod 6, $m = 6m + r$, $0 \leq r \leq 5$.

$$g(6m) = \frac{1}{6} (6m+1) + \frac{1}{2} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2\pi}{3}(6m+1)\right)$$

$$= m + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = m+1$$

$$g(6m+1) = \frac{1}{6} (6m+2) + 0 + \frac{2}{3\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2\pi}{3}(6m+2)\right) = m$$

$$g(6m+2) = m+1$$

$$g(6m+4) = m+1$$

$$g(6m+3) = m+1$$

$$g(6m+5) = m+1$$

Exercice 24

$$F(x) = \frac{1}{(x-a)^m (x-b)^m} = \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j(a,b)}{(x-a)^j} + \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j(b,a)}{(x-b)^j}$$

$$\begin{aligned} \text{à } \lambda_j(a,b) &= \frac{1}{(m-j)!} \left(\frac{d}{dx} \right)^{m-j} ((x-a)^m F(x)) \Big|_{x=a} \\ &= \frac{1}{(m-j)!} \left(\frac{d}{dx} \right)^{m-j} \left(\frac{1}{(x-b)^m} \right) \Big|_{x=a} \end{aligned}$$

Rappel: $\left(\frac{d}{dx} \right)^R \frac{1}{x-b} = \frac{(-1)^R R!}{(x-b)^{R+1}}$

$$\text{donc } \frac{1}{(x-b)^m} = \frac{1}{(-1)^{m-1} (m-1)!} \left(\frac{d}{dx} \right)^{m-1} \frac{1}{x-b}$$

$$\begin{aligned} \text{et donc } \lambda_j(a,b) &= \frac{1}{(-1)^{m-1} (m-1)!} \left(\frac{d}{dx} \right)^{2m-j-1} \frac{1}{x-b} \Big|_{x=a} \\ &= \frac{(-1)^{2m-j-1} (2m-j-1)!}{(-1)^{m-1} (m-1)! (m-j)!} \frac{1}{(a-b)^{2m-j}} \\ &= (-1)^{m-j} \binom{2m-j-1}{m-1} \frac{1}{(a-b)^{2m-j}} \end{aligned}$$

IV- Espace vectoriels, dépendance linéaire

21

Exercice 25

$$\mathcal{L} = \mathbb{R}_2[X] = \text{Vect} \{1, X, X^2\} \Rightarrow \dim \mathcal{L} = 3$$

Remarque Plus généralement: $\mathbb{R}[X]$

Donc pour montrer que $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathcal{L}$, il suffit de vérifier qu'elle est libre ou de vérifier qu'elle est génératrice. (on n'a pas besoin de faire les deux puisque $\text{card} \{P_1, P_2, P_3\} = 3$)

1^{ère} méthode

Vérifions que $\{P_1, P_2, P_3\}$ est libre:

$$aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow a(X+1) + b(X-1) + c(X^2-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow cX^2 + (a+b)X + (a-b-c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a+b=0 \\ a-b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Donc } (P_1, P_2, P_3) \text{ est} \\ \text{libre et donc c'est} \\ \text{une base de } \mathcal{L}. \end{array}$$

2^{ème} méthode

Vérifions que $\{P_1, P_2, P_3\}$ est génératrice. Il suffit de vérifier que les éléments de la base canonique $1, X, X^2$ sont engendrés par P_1, P_2, P_3 .

$$\begin{cases} P_1 = x+1 \\ P_2 = x-1 \\ P_3 = x^2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{1}{2} (P_1 - P_2) \\ x = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) \\ x^2 = 1 + P_3 = \frac{1}{2} (P_1 - P_2) + P_3 \end{cases}$$

Donc (P_1, P_2, P_3) est génératrice de $\mathcal{C}^-$ et donc c'est une base.

3^{ème} méthode

Montrons autrement que $\{P_1, P_2, P_3\}$ est génératrice en utilisant le Vect:

$$\begin{aligned} \text{Vect}\{P_1, P_2, P_3\} &= \text{Vect}\{x+1, x-1, x^2-1\} \\ &= \text{Vect}\{x+1 - (x-1), x-1, x^2-1\} \\ &= \text{Vect}\{\cancel{x} + 1 - \cancel{x} + 1, x-1, x^2-1\} \\ &= \text{Vect}\{1, x-1+1, x^2-1\} \\ &= \text{Vect}\{1, x, x^2-1+1\} \\ &= \text{Vect}\{1, x, x^2\} \\ &= \mathcal{C}^- \end{aligned}$$

À retenir Dans un Vect, on peut ajouter à l'un des vecteurs présent une combinaison linéaire des autres vecteurs (présent dans le Vect): cela ne modifie pas l'espace engendré par le Vect.

Écrivons $x^2 - 5x + 4$ dans la base (P_1, P_2, P_3) .

Si on a utilisé la deuxième méthode, c'est immédiat:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 4 &= \frac{1}{2} (P_1 - P_2) + P_3 - \frac{5}{2} (P_1 + P_2) \\ &\quad + 2(P_1 - P_2) \\ &= -5P_2 + P_3 \end{aligned}$$

Les coordonnées de $x^2 - 5x + 4$ dans la base (P_1, P_2, P_3) sont $(0, -5, 1)$ (ordre !)

Si on a utilisé une autre méthode que la 2^{ème}, eh bien on cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tq $x^2 - 5x + 4$
 $= aP_1 + bP_2 + cP_3$
 $= a(x+1) + b(x-1) + c(x^2-1)$
 $= cx^2 + (a+b)x + (a-b-c)$

on identifie $c=1$, $a+b=-5$, $a-b-c=4$

donc : $c=1$, $a+b=-5$, $a-b=-4$

et donc : $c=1$, $a=0$, $b=-5$

et re donc : $x^2 - 5x + 4 = -5P_2 + P_3$

et on retrouve le résultat précédent.

Exercice 28

(1) * $\mathcal{L}$ contient $0 = (0)_{n \in \mathbb{N}}$. $\mathcal{L}$ est effet : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1}$$

$$\text{si } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0)_{n \in \mathbb{N}}$$

* $\mathcal{L}$ est stable par combinaison linéaire. $\mathcal{L}$ est effet

si $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}$

$$\text{, alors : } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1} & \times \lambda \\ y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1} & \times \mu \end{cases}$$

et donc, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, en multipliant la relation pour (x_n) par λ et pour (y_n) par μ , et en ajoutant, on

obtient : $\lambda x_{n+1} + \mu y_{n+1} = 4(\lambda x_n + \mu y_n) - (\lambda x_{n-1} + \mu y_{n-1})$

et donc $\lambda x + \mu y = (\lambda x_n + \mu y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}$.

(2) Si λ et μ existent alors en particulier on a :

$$\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{cases} \quad \text{et donc } \lambda = \frac{\begin{vmatrix} u_0 & y_0 \\ u_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}} = \frac{u_0 y_1 - u_1 y_0}{x_0 y_1 - x_1 y_0}$$

$$\text{et } \mu = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & u_0 \\ x_1 & u_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}} = \frac{x_0 u_1 - x_1 u_0}{x_0 y_1 - x_1 y_0} \quad \text{à condition bien sûr que } \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Vérifions que $\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \neq 0$

Si $\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0$, alors $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

ou $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

En effet : $\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_0 y_1 = x_1 y_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{si } y_0 \neq 0, x_1 = \frac{y_1}{y_0} x_0 \text{ et donc } \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \frac{x_0}{y_0} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ \text{si } y_1 \neq 0, x_0 = \frac{y_0}{y_1} x_1 \text{ et donc } \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \frac{x_1}{y_1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ \text{si } y_0 = y_1 = 0 : \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

De même si $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$, i.e. si $\begin{cases} x_0 = \alpha y_0 \\ x_1 = \alpha y_1 \end{cases}$ alors

en vertu ...

* Cela prouve que si $\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0$, alors $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

mais si $y_0 = y_1 = 0$, alors en vertu de la relation de

Réurrence $y_{m+1} = 4 y_m - y_{m-1}$ ($m \in \mathbb{N}^*$) on aura

$y_m = 0$, $\forall m$ et donc $y = 0$ et donc $\{x, y\}$ n'est pas possible : contraire aux hypothèses donc exclu

... de la relation de récurrence, on aura

$\forall m \in \mathbb{N}$, $x_m = \alpha y_m$, i.e. $x = \alpha y$ et cela contredit l'hypothèse que $\{x, y\}$ est libre.

Donc $\{x, y\}$ libre $\Rightarrow \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \neq 0$

Conclusion

Si λ et μ existent, alors (sous les conditions de l'énoncé) $\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \neq 0$ et λ, μ sont données par

les expressions données plus haut (Cramer)

$$(3) \quad (R^m)_{m \in \mathbb{N}} \in E \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}^*, R^{m+1} = 4R^m - R^{m-1}$$

$$\begin{cases} R = 0 \\ R^2 = 4R - 1 \end{cases}$$

$$R^2 - 4R + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow R_{\pm} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

i.e. si $R_+ - R_- \neq 0$: c'est le

cas

Soit $(u_m) \in E$ / $u_0 = a$, $u_1 = b$. D'après le (2),

$$u_m = \lambda R_-^m + \mu R_+^m \quad \text{où}$$

$$\lambda = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & R_+ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ R_- & R_+ \end{vmatrix}$$

$$\text{et } \mu = \begin{vmatrix} 1 & a \\ R_- & b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ R_- & R_+ \end{vmatrix}$$

$$\text{i.e. } \lambda = \frac{(2+\sqrt{3})a - b}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{et } \mu = \frac{-(2-\sqrt{3})a + b}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{et donc } u_m = \frac{(2+\sqrt{3})a + b}{2\sqrt{3}} (2-\sqrt{3})^m + \frac{-(2-\sqrt{3})a + b}{2\sqrt{3}} (2+\sqrt{3})^m$$

Exercice 29

"On a l'âge de son algèbre"

$$F = \text{Vect} \{ (2, -3, 1), (2, -2, 1) \}$$

$$\dim F = \begin{cases} 2 & \text{si } \{ (2, -3, 1), (2, -2, 1) \} \text{ est libre} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est clair que $(2, -3, 1)$ et $(2, -2, 1)$ ne sont pas colinéaires donc $\{ (2, -3, 1), (2, -2, 1) \}$ est libre.

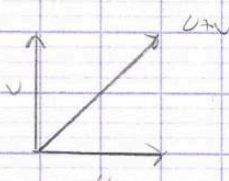
Et donc $\dim F = 2$.

Deux vecteurs sont linéairement indépendants car

$$\lambda u + \mu v = 0 \text{ avec } \lambda \neq 0 \text{ (par exemple)} \Rightarrow v = -\frac{\lambda}{\mu} u$$

$\Rightarrow u, v$ colinéaire. Mais trois vecteurs (ou davantage) non colinéaires ne sont pas nécessairement linéairement indépendants.

Exemple :



ils ne sont pas colinéaires mais liés puisque $(u+v) - u - v = 0$
Relation linéaire non triviale

Deux vecteurs non colinéaires $\Rightarrow$ indépendants

Trois vecteurs non coplanaires $\Rightarrow$ indépendants

$(2, -3, 1), (2, -2, 1)$ ne sont pas colinéaires et donc F est libre et donc c'est une base de F et

donc $\dim F = 2$

$$(x, y, z) \in F = \text{Vect} \{ (2, -3, 1), (2, -2, 1) \}$$

$$\Rightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / (x, y, z) = \lambda (2, -3, 1) + \mu (2, -2, 1)$$

$$\Rightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = 2\lambda + 2\mu \\ y = -3\lambda - 2\mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -\lambda - x \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = 2z \\ \lambda = -x - y \\ \mu = x + y + z \end{cases}$$

24

$$\text{Donc } (x, y, z) \in F \Leftrightarrow x - 2z = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \dim F = 0 \\ F \text{ d'équation } x - 2z = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow F \text{ est le plan de } \mathbb{R}^3 \text{ d'équation } x - 2z = 0$$

Exercice 28

$$\begin{aligned} & a(1, 1, 0, 0, 0) + b(1, 1, 0, 1, 0) + c(1, 1, 2, 1, 1) = 0 \in \mathbb{R}^5 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ 2c = 0 \\ b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad \text{donc } \{e_1, e_2, e_3\} \text{ est libre.} \end{aligned}$$

D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter $\{e_1, e_2, e_3\}$ en une base de $\mathbb{R}^5$ en y adjoignant des vecteurs pris dans une partie génératrice donnée de $\mathbb{R}^5$, par exemple la base canonique. $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$

$$\begin{aligned} \text{Vect } \{e_1, e_2, e_3\} &= \text{Vect } \{e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_4, e_1 + e_2 + 2e_3 + e_4 + e_5\} \\ &= \text{Vect } \{e_1 + e_2, e_4, 2e_3 + e_4 + e_5\} \\ &= \text{Vect } \{e_1 + e_2, e_4, 2e_3 + e_5\} \quad \text{adjoignons } e_1 \\ &= \text{Vect } \{e_1 + e_2, e_4, 2e_3 + e_5, e_1\} \\ &= \text{Vect } \{e_2, e_4, 2e_3 + e_5, e_1\} \quad \text{adjoignons } e_2 \\ &= \text{Vect } \{e_2, e_4, e_5, e_1, e_3\} \\ &= \text{Vect } \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} = \mathbb{R}^5 \quad \text{et donc } (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) \end{aligned}$$

est une base de $\mathbb{R}^5$.

Exercice 29

1^{ère} méthode

$0 = (0, 0, 0, 0) \in F_1$: clair !

car $(0+0+0+0 \neq 0)$

Et F_1 est stable par comb. linéaire car

$$\text{si } \begin{cases} (x, y, z, t) \in F_1 \\ (x', y', z', t') \in F_1 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} x+y+z+t=0 & (x, \lambda) & (1) \\ x'+y'+z'+t'=0 & (x, \mu) & (2) \end{cases}$$

et donc $\lambda(x+y+z+t) + \mu(x'+y'+z'+t') = 0 \quad (1)+(2)$

ie $(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') + (\lambda t + \mu t') = 0$

ie $(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z', \lambda t + \mu t') \in F_1$

2^{ème} méthode

Il est clair que $F_1 = \text{Ker } \varphi$ où $\varphi(x, y, z, t) = x + y + z + t$ (évident linéaire), donc F_1 est un s.v. de $\mathbb{R}^4$

De même pour F_2 (so est stable par comb. liné., ou $F_2 = \text{Ker } \psi$ avec $\psi(x, y, z, t) = x + y - z - t$ évidemment linéaire).

$$(x, y, z, t) \in F_1 \Leftrightarrow x + y + z + t = 0 \Leftrightarrow t = -x - y - z \\ \Leftrightarrow (x, y, z, t) = (x, y, z, -x - y - z)$$

$$\Rightarrow (x, y, z, t) \in \text{Vect} \{ (1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1) \} \\ = x(1, 0, 0, -1) + y(0, 1, 0, -1) + z(0, 0, 1, -1)$$

et réciproquement:

$$(x, y, z, t) \in \text{Vect} \{ (1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1) \}$$

$$\text{alors } \exists a, b, c \in \mathbb{R} / (x, y, z, t) = a(1, 0, 0, -1) + b(0, 1, 0, -1) + c(0, 0, 1, -1)$$

$$= (a, b, c, -a - b - c) \quad \text{ie } \begin{cases} a = x \\ b = y \\ c = z \\ t = -x - y - z \end{cases}$$

Donc $F_1 = \text{Vect} \{ (1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1) \}$

Vérifions que F_1 est libre

clair $\Rightarrow a = b = c = 0$

Exercice 29 (suite cf 8im)

25

$$(x, y, z, t) \in F_2 \Leftrightarrow x+y = z+t \Leftrightarrow t = x+y-z$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x, y, z, t) &= (x, y, z, x+y-z) \\ &= x(1, 0, 0, 1) + y(0, 1, 0, 1) + z(0, 0, 1, -1) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z, t) \in \text{Vect} \{ (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -1) \}$$

$$\text{P'bre car: } x(1, 0, 0, 1) + y(0, 1, 0, 1) + z(0, 0, 1, -1) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z, x+y-z) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = 0$$

Donc $((1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -1))$ est une base de F_2
et donc $\dim F_2 = 3$

$$\begin{aligned} (2) \quad F_1 + F_2 &= \text{Vect} \{ (1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), \\ &\quad (0, 0, 1, -1) \} \\ &= \text{Vect} \{ e_1 - e_4, e_2 - e_4, e_3 - e_4, e_1 + e_4, e_2 + e_4 \} \\ &= \text{Vect} \{ e_1 - e_4, e_1 + e_4, e_2 - e_4, e_2 + e_4, e_3 - e_4 \} \\ &= \text{Vect} \{ e_1 - e_4, e_1 + e_4 + e_1 - e_4, e_2 - e_4, e_2 + e_4, e_3 - e_4 \} \\ &= \text{Vect} \{ e_1, e_2, e_3, e_4 \} \Rightarrow \text{P'bre (est une base car)} \end{aligned}$$

et donc $\dim (F_1 + F_2) = 4$

Remarque: On en déduit que $\dim (F_1 \cap F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim (F_1 + F_2) = 2$.

Exercice 30

(1) $0 \in L^-$: la suite nulle converge $\rightarrow 0$

L^- est stable par comb. lin.

$$\begin{array}{l} \text{car} \left\{ \begin{array}{l} x_m \rightarrow p \\ x'_m \rightarrow p' \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda x_m + \mu x'_m \rightarrow \lambda p + \mu p' \\ \lambda (x_m)_{m \in \mathbb{N}} + \mu (x'_m)_{m \in \mathbb{N}} \in L^- \end{array} \end{array}$$

Donc $\mathcal{L}^-$ est un sev de $\mathbb{R}^N$

(2) $C = \{ \text{suite cte} \}$ est un sev de $\mathcal{L}^- (= \{ \text{suite convergente} \})$

- $C \subset \mathcal{L}^-$

- $C \ni 0$

- $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in C : x_m = a \quad \forall m$

- $(x'_m)_{m \in \mathbb{N}} \in C : x'_m = b \quad \forall m$

- $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lambda x_m + \mu x'_m = \lambda a + \mu b = \text{cte}$$

$$\Rightarrow \lambda (x_m)_{m \in \mathbb{N}} + \mu (x'_m)_{m \in \mathbb{N}} \in C \quad \forall m$$

$\mathcal{L}^- \cap N$ est un sev de $\mathcal{L}^-$ car :

- $N \subset \mathcal{L}^-$ ($x_n \rightarrow 0 \Rightarrow (x_n)$ converge !)

- $N \ni 0$ (la suite nulle converge vers 0)

- $x_n \rightarrow 0$

$$x'_n \rightarrow 0 \Rightarrow \lambda x_m + \mu x'_m \rightarrow 0 \quad \lambda (x_m)_{m \in \mathbb{N}} + \mu (x'_m)_{m \in \mathbb{N}} \in N$$

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Dans C et N sont des sev de $\mathcal{L}^-$. Sont-ils supplémentaires (dans $\mathcal{L}^-$) ?

Rappel C, N supplémentaires dans $\mathcal{L}^-$

$$\Leftrightarrow C \cap N = \{0\}$$

$$C + N = \mathcal{L}^-$$

• A t-on $C \cap N = \{0\}$, oui car :

soit $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in C \cap N$:

$$(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in C \Rightarrow x_m = a \quad \forall m$$

$$(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in N \Rightarrow x_m \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow a = 0 \quad \text{et donc} \quad (x_m)_{m \in \mathbb{N}} = 0$$

• A t-on $\mathcal{L}^- = C + N$

Autrement dit, est-ce que toute suite convergente est la somme d'une suite cte et d'une

suite qui CV vers 0?

$$\text{Soit } (x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : x_m \rightarrow p \\ \forall m, x_m = p + (x_m - p) \in \mathbb{C} + \mathbb{N}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \mathbb{C} \cap \mathbb{N} = \{0\} \\ \mathbb{C} + \mathbb{N} = \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \end{cases} \quad \text{ce que l'on peut résumer par: } \mathbb{C}^{\mathbb{N}} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{N}$$

Exercice 34

$$\begin{aligned} (1) \quad \mathbb{C}_1 &= \{(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : u_{10} = 0\} \\ &= \text{Ker } \varphi \text{ où } \varphi(u_0, u_1, u_2, \dots) = u_{10} \\ &\quad (\text{clairement linéaire car } \varphi(\lambda(u_m) + \mu(u'_m)) = \\ &\quad \varphi(\lambda u_0 + \mu u'_0, \dots, \lambda u_{10} + \mu u'_{10}) = \lambda u_{10} + \mu u'_{10} \\ &\quad = \lambda \varphi((u_m)_{m \in \mathbb{N}}) + \mu \varphi((u'_m)_{m \in \mathbb{N}})) \\ \mathbb{C}_2 &= \{(2^m u_0)_{m \in \mathbb{N}} : u_0 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R}(2^m)_{m \in \mathbb{N}} \\ &= \text{l'ensemble des vecteurs de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ dirigée par} \\ &\quad \text{le vecteur } (2^m)_{m \in \mathbb{N}} \\ &= \text{le sev de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ engendré par le vecteur } (2^m)_{m \in \mathbb{N}} \\ &= \text{Vect} \{(2^m)_{m \in \mathbb{N}}\} \end{aligned}$$

et donc $\dim \mathbb{C}_2 = 1$ ($\mathbb{C}_2$ est engendré par le vecteur $(2^m)_{m \in \mathbb{N}}$ c'est une droite dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$)

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathbb{C}_3 \ni 0 \quad ((0)_{m \in \mathbb{N}} \text{ est borné!}) \\ \bullet \quad \begin{aligned} (x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}_3 : |x_m| \leq A \quad \forall m \\ (x'_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}_3 : |x'_m| \leq B \quad \forall m \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} &\Rightarrow \lambda x_m + \mu x'_m \\ &\Rightarrow \lambda (x_m)_{m \in \mathbb{N}} + \mu (x'_m)_{m \in \mathbb{N}} \\ &\leq (|\lambda|A + |\mu|B) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{C}_3$ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$(2) (u_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

A t on $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} =$ une suite de $\tilde{L}_1$ + une suite de $\tilde{L}_2$?

L'énoncé dit de considérer $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ def par $u_m = 2^{m-10} u_{10}$
 $= 2^m (2^{-10} u_{10})$.

On voit que $(u_m) \in \tilde{L}_2$

On peut écrire $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} = (w_m)_{m \in \mathbb{N}} + (v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ où

$$w_m = u_m - v_m \quad \forall m$$

donc $w_{10} = u_{10} - 2^{10-10} u_{10} = 0$ donc $(w_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \tilde{L}_1$

Et donc où : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \tilde{L}_1 + \tilde{L}_2$

$\tilde{L}_1$ et $\tilde{L}_2$ sont supplémentaires si, de plus, $\tilde{L}_1 \cap \tilde{L}_2 = \{0\}$. Soit $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \tilde{L}_1 \cap \tilde{L}_2$:

$$(u_m) \in \tilde{L}_2 \Rightarrow u_m = 2^m u_0 \quad \forall m$$

$$(u_m) \in \tilde{L}_1 \Rightarrow u_{10} = 0 \Rightarrow 2^{10} u_{10} = 0$$

$$\Rightarrow u_0 = 0 \Rightarrow (2^m u_0 = 0 \quad \forall m)$$

$$\Rightarrow (u_m = 0 \quad \forall m) \Rightarrow (u_m)_{m \in \mathbb{N}} = 0$$

Donc où : $\tilde{L}_1 \cap \tilde{L}_2 = \{0\}$

CoP: $\tilde{L}_1$ et $\tilde{L}_2$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \tilde{L}_1 \oplus \tilde{L}_2$$

$$(3) \text{ Soit } (u_m)_{m \in \mathbb{N}} = (u_0, u_1, \dots, u_9, u_{10}, u_{11}, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

$$(u_m)_{m \in \mathbb{N}} = (u_0, u_1, \dots, u_9, 0, u_{11}, \dots) \in \tilde{L}_1$$

$$(u_m)_{m \in \mathbb{N}} = (0, 0, 0, \dots, 0, u_{10}, 0, \dots) \in \tilde{L}_2$$

$$\text{Donc } \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \tilde{L}_1 + \tilde{L}_3$$

$\tilde{L}_1$ et $\tilde{L}_3$ sont-ils supplémentaires ? Il y a-t-il

$\tilde{L}_1 \cap \tilde{L}_3 = \{0\}$? Non car par exemple $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$

$= (1, 0, \dots) \in \tilde{L}_1 \cap \tilde{L}_3$ et est $\neq 0$ Donc $\tilde{L}_1$ et $\tilde{L}_3$ ne sont pas supplémentaires.

(4) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \tilde{L}_2 + \tilde{L}_3$ Il est ce que toute suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de la forme

Exercice 1

- (1) Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille liée de vecteurs de E .
 $\sum \lambda_i x_i = 0$ avec λ_i non tous nuls.

Application de f (linéaire):

Si $\lambda_i f(x_i) = f(0) = 0$ toujours vrai pour f linéaire
 et donc $(f(x_i))_{i \in I}$ est liée. Car les λ_i ne sont
 pas tous nuls, pas tous nuls, par hyp)

- (2) Supposons que l'image par f de toute famille libre
 est libre.

Or tout x non nul est une famille libre (à un
 élément) car $\lambda x = 0 \mid \Rightarrow \lambda = 0$
 $x \neq 0$

Donc (par hyp) $f(x)$ est libre, i.e. non nul (le
 vecteur 0 est lié: $1 \cdot 0 = 0$)

Donc $x \neq 0 \Rightarrow x \notin \text{Ker } f$. Cela signifie que
 $\text{Ker } f = \{0\}$ et donc f est injective

Réciproquement: supposons f injective. Soit $(x_i)_{i \in I}$
 une famille libre de vecteurs de E . On veut montrer
 que $(f(x_i))_{i \in I}$ est libre.

Soit une relation linéaire:

$\sum \lambda_i f(x_i) = 0$ i.e. $f(\sum \lambda_i x_i) = 0$ i.e. puisque f est
 $\sum \lambda_i x_i = 0$ donc $\lambda_i = 0 \forall i$ injective.
 (car $(x_i)_{i \in I}$ est libre)

(3) $(x_i)_{i \in I}$ génératrice de $E \Rightarrow (g(x_i))_{i \in I}$ génératrice de $\text{Im } g$

La conjonction de (2) et $\Rightarrow (g(x_i))_{i \in I}$ génératrice de F ssi $F = \text{Im } g$
 (3) Redonne ce résultat du
 c  ns: g transforme toute base en une base ssi g est bijective i.e ssi g est surjective
 (i.e est un isomorphisme)

Exercice 33

$$(x, y) \in \text{Ker } g_1 \Leftrightarrow (x+y, x-y) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$\text{donc } \text{Ker } g_1 = \{(0, 0)\}$$

$$g_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

est injective, donc bijective, donc $\text{Im } g_1 = \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 = \text{Vect} \{ (1, 0), (0, 1) \} &\Rightarrow \text{Im } g_1 = \text{Vect} \{ g_1(1, 0), g_1(0, 1) \} \\ &= \text{Vect} \{ (1, 1), (1, -1) \} \\ &= \text{Vect} \{ e_1 + e_2, e_1 - e_2 \} \\ &= \text{Vect} \{ e_1 + e_2 + e_1 - e_2, e_1 - e_2 \} \\ &= \text{Vect} \{ 2e_1, e_1 - e_2 \} \\ &= \text{Vect} \{ e_1, e_1 - e_2 \} \\ &= \text{Vect} \{ e_1, e_2 \} = \mathbb{R}^2 \\ &\text{où } e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1) \end{aligned}$$

$$(x, y) \in \text{Ker } g_2 \Leftrightarrow x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (x, x) = x(1, 1)$$

$$\text{Donc } \text{Ker } g_2 = \text{Vect}\{(1, 1)\} = \mathbb{R}(1, 1)$$

$$\text{Im } g_2 = \text{Vect}\{g_2(1, 0), g_2(0, 1)\} = \text{Vect}\{1, -1\} = \text{Vect}\{1\} = \mathbb{R}$$

g_2 est surjective (mais pas injective)

Rem: $\dim \text{Im } g_2 = 2 - \dim \text{Ker } g_2$ (th du Rang)
 $= 2 - 1 = 1 = \dim \mathbb{R}$ espace d'arrivée

(on retrouve ainsi que $\text{Im } g_2 = \mathbb{R}$)
 et que g_2 est surjective.

$$(x, y, z) \in \text{Ker } g_3 \Leftrightarrow (x - y, y - z) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (x, x, x) = x(1, 1, 1)$$

Donc $\text{Ker } g_3 = \mathbb{R}(1, 1, 1) = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$ la droite vectorielle (i.e passant par $(0, 0, 0)$) de $\mathbb{R}^3$ dirigée par le vecteur $(1, 1, 1)$.

$$\text{Im } g_3 = \text{Vect}\{g_3(1, 0, 0), g_3(0, 1, 0), g_3(0, 0, 1)\} = \text{Vect}\{(1, 0), (-1, 1), (0, 1)\} = \text{Vect}\{(1, 0), (0, 1)\} = \mathbb{R}^2$$

donc g_3 est surjective.

Rem $\dim \text{Im } g_3 = 3 - \dim \text{Ker } g_3$
 $= 3 - 1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ et on retrouve que g_3 est surjective.

$$(x, y, z) \in \text{Ker } g_4 \Leftrightarrow (x, y - z, 2x - y + z) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (0, y, y) = y(0, 1, 1)$$

Donc $\text{Ker } g_4 = \mathbb{R}(0, 1, 1)$

$$\begin{aligned} \text{Im } g_4 &= \text{Vect} \{ g_4(1, 0, 0), g_4(0, 1, 0), g_4(0, 0, 1) \} \\ &= \text{Vect} \{ (1, 0, 2), (0, 1, -1), (0, -1, 1) \} \end{aligned}$$

Rem

$$\dim \text{Im } g_4 = 3 - \dim \text{Ker } g_4 = 2$$

$$\begin{aligned} (x, y) \in \text{Ker } g_5 &\Leftrightarrow (x, x, -x) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = 0 \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (0, y) = y(0, 1) \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker } g_5 = \mathbb{R}(0, 1)$

$$\begin{aligned} \text{Im } g_5 &= \{ (x, x, -x) : x \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ x(1, 1, -1) : x \in \mathbb{R} \} \\ &= \mathbb{R}(1, 1, -1) \end{aligned}$$

Rem $\dim \text{Ker } g_5 + \dim \text{Im } g_5 = 2 = \dim \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} (z_1, z_2) \in \text{Ker } g_6 &\Leftrightarrow (iz_2, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_2 = 0 \Leftrightarrow (z_1, z_2) = \\ &= (z_1, 0) = z_1(1, 0) \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker } g_6 = \mathbb{C}(1, 0)$ (donc $\text{Ker } g_6 = 1$)

$$\begin{aligned} \text{Im } g_6 &= \text{Vect} \{ g_6(1, 0), g_6(0, 1) \} = \text{Vect} \{ (0, 0), (i, 1) \} \\ &= \mathbb{C}(i, 1) \end{aligned}$$

Rem $\dim \text{Ker } g_6 + \dim \text{Im } g_6 = 2 = \dim \mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker } g_7 &\Leftrightarrow P' - P = 0 \Leftrightarrow P = 0 \\ &\text{car si } P \neq 0 \quad \deg P' < \deg P \\ &\quad \text{et donc } P' \neq P \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker } g_7 = \{0\}$ ie g_7 est injective.

Comme $g_7: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$ est de dim finie on en déduit que g_7 est surjective ie $\text{Im } g_7 = \mathbb{R}_2[X]$

$$P \in \text{Ker } g_g \Leftrightarrow P'' = 0$$

$$\Leftrightarrow P \in \text{Vect} \{1, x\}$$

$$\Leftrightarrow P \in \mathbb{R}_1[X]$$

$$\begin{aligned} \text{Im } g_g &= \text{Vect} \{g_g(1), g_g(x), g_g(x^2), g_g(x^3)\} \\ &= \text{Vect} \{2, 6x\} \\ &= \text{Vect} \{1, x\} = \mathbb{R}_1[X] \end{aligned}$$

$$\text{On a } \dim \text{Ker } g_g + \dim \text{Im } g_g = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$$

$$P \in \text{Ker } g_g \Leftrightarrow (P(1), P'(1)) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(1) = 0 \\ P'(1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 \text{ est racine au moins double de } P$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \mid P(x)$$

$$\text{Mais } \begin{cases} P \in \mathbb{R}_2[X] \\ (x-1)^2 \mid P(x) \end{cases} \Leftrightarrow P(x) = c(x-1)^2 \text{ où } c \in \mathbb{R}$$

C'est donc $\text{Ker } g_g = \mathbb{R}(x-1)^2$ c'est la droite de $\mathbb{R}_2[X]$ engendrée par le vecteur $(x-1)^2$

$$\begin{aligned} \text{Im } g_g &= \text{Vect} \{g_g(1), g_g(x), g_g(x^2)\} \\ &= \text{Vect} \{(1, 0), (1, 1), (1, 2)\} \\ &= \text{Vect} \{(1, 0), (1, 0) + (0, 1), (1, 0) + 2(0, 1)\} \\ &= \text{Vect} \{(1, 0), (0, 1)\} = \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

On pourrait aussi dire directement : $\dim \text{Im } g_g = \dim \mathbb{R}_2[X] - \dim \text{Ker } g_g$
 et $\text{Im } g_g$ est un sev de $\mathbb{R}^2$ donc c'est $\mathbb{R}^2$
 $\dim \text{Ker } g_g = 2$

Exercice 34

$$(1) \quad \begin{array}{ccccc} & f & & f & & f \\ e_1 & \xrightarrow{\quad} & e_2 & \xrightarrow{\quad} & e_3 & \xrightarrow{\quad} & e_1 \\ e_2 & \xrightarrow{\quad} & e_3 & \xrightarrow{\quad} & e_1 & \xrightarrow{\quad} & e_2 \\ e_3 & \xrightarrow{\quad} & e_1 & \xrightarrow{\quad} & e_2 & \xrightarrow{\quad} & e_3 \end{array} \quad \text{donc } f^3 = \text{id}_{\mathbb{R}^3} = \text{id}_{\mathbb{C}^-}$$

$$(2) \quad F = \{u \in \mathbb{C}^- : f(u) - u = 0\} = \text{Ker}(f - \text{id}_{\mathbb{C}^-})$$

donc $\mathbb{C}^-$ est un $\mathbb{R}$ -ev de $\mathbb{C}^-$.

$$\begin{aligned} u &= x e_1 + y e_2 + z e_3 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \\ f(u) &= x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3) \\ &= x e_2 + y e_3 + z e_1 \\ &= (z, x, y) \end{aligned}$$

$$(x, y, z) \in F \Leftrightarrow (x, y, z) = (z, x, y)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = x \\ z = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (x, x, x) = x(1, 1, 1)$$

$$\text{Donc } F = \mathbb{R}(1, 1, 1) \quad \text{et } \dim F = 1$$

Exercice 35

Trouvons d'abord une CN

$$S: V = \text{Ker } f \quad \text{et} \quad W = \text{Im } f$$

$$\text{alors } \dim V + \dim W = \dim \mathbb{C}^-$$

Cette condition est aussi suffisante. On suppose donc que V est un $\mathbb{R}$ -ev de $\mathbb{C}^-$, W est un $\mathbb{R}$ -ev de F et que $\dim V + \dim W = \dim \mathbb{C}^-$. Peut-on construire une appli $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^-, F)$ tel que $\text{Ker } f = V$ et $\text{Im } f = W$? Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de V . On la complète en une base de $\mathbb{C}^-$, $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_m)$ ($m = \dim \mathbb{C}^-$). Définissons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^-, F)$

par : $f(e_1) = 0, \dots, f(e_r) = 0, f(e_{r+1}) = w_1, \dots, f(e_m) = w_{m-r}$ à $(w_1, \dots, w_{m-r})$ est une base de W (N.B. $\dim W = m - r$ par hyp)

Alors : $V \subset \text{Ker } f$ et $\text{Im } f = \text{Vect}\{f(e_{r+1}), \dots, f(e_m)\}$

Le théorème du Rang donne : $\dim \text{Im } f = \dim W$

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker } f &= \dim E - \dim \text{Im } f \\ &= m - \dim W = m - (m - r) \\ &= r = \dim V \end{aligned}$$

or $V \subset \text{Ker } f$ donc $V = \text{Ker } f$

Exercice 36

$$\begin{array}{ll} e_1 \rightarrow 0 & \rightarrow 0 \rightarrow 0 \\ e_2 \rightarrow e_1 & \rightarrow 0 \rightarrow 0 \\ e_3 \rightarrow e_1 + e_2 & \rightarrow e_1 \rightarrow 0 \\ e_4 \rightarrow 2e_1 - e_2 & \rightarrow -e_1 \rightarrow 0 \\ e_5 \rightarrow e_1 - e_2 + e_3 + e_4 & \rightarrow 2e_1 \rightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= \text{Vect}\{0, e_1, e_1 + e_2, 2e_1 - e_2\} \\ &= \text{Vect}\{e_1, e_2, e_3 + e_4\} \end{aligned}$$

$$\text{Rg } f = \dim \text{Im } f = 3$$

$$\text{Im } f^2 = \text{Vect}\{e_1\} \Rightarrow \text{Rg } f^2 = 1$$

On en déduit (par le théorème du Rang)

$$\dim \text{Ker } f = 2$$

$$\dim \text{Ker } f^2 = 4$$

$$\begin{aligned} (3) \quad f^2(e_3) &= e_1 \neq 0 \Rightarrow e_3 \notin \text{Ker } (f^2) \quad \text{car } \lambda e_3 \in \text{Ker } f^3 \\ &\Rightarrow \lambda^{-1}(\lambda e_3) \in \text{Ker } (f^2) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathbb{R}e_3 \cap \text{Ker } (f^2) = \{0\}$$

Et donc $\dim (\operatorname{Re}_3 + \operatorname{Ker}(f^2)) = \mathbb{R}^5$ (seul vec de $\mathbb{R}^5$ de dim 5) et (puisque $\operatorname{Re}_3 \cap \operatorname{Ker}(f^2) = \{0\}$) on a donc : $\mathbb{R}^5 = \operatorname{Re}_3 \oplus \operatorname{Ker}(f^2)$ ie Re_3 et $\operatorname{Ker}(f^2)$ sont supplémentaires.

Exercice 37

$$\begin{aligned} (1) \quad (x, y, z) &= x e_1 + y e_2 + z e_3 \\ f(x, y, z) &= x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3) \\ &= x e_1 - y e_1 + z e_3 \\ &= (x - y, 0, z) \end{aligned}$$

$$(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (x, y, z) &\Leftrightarrow (x, x, 0) \\ &= x(1, 1, 0) \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}(1, 1, 0)$ (droite!) base $\{1, 1, 0\}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \operatorname{Vect} \{ f(e_1), f(e_2), f(e_3) \} \\ &= \operatorname{Vect} \{ e_1, e_3 \} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} (2) & \begin{array}{ccc} e_1 & \xrightarrow{f} & e_1 \\ e_2 & \xrightarrow{f} & -e_1 \\ e_3 & \xrightarrow{f} & e_3 \end{array} & \begin{array}{l} \text{donc } f \circ f(e_i) = f(e_i) \text{ (1 \& 3)} \\ \text{et donc } f \circ f = f \\ \text{Donc } f \text{ est le projecteur} \\ \text{sur } \operatorname{Im} f \text{ pour} \end{array} \end{array}$$

Exercice 38

$$u \in F_1 \Rightarrow f(u) = u$$

"

$$(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

$$f(u) = x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3)$$

$$\Rightarrow x(13e_1 + 12e_2 + 6e_3) + y(-8e_1 - 9e_2 - 4e_3) + z(-12e_1 - 12e_2 - 5e_3)$$

$$= xe_1 - 8ye_1 - 12ze_1 - 12xe_2 - 9ye_2 - 12ze_2 - 6xe_3 - 4ye_3 - 5ze_3 = 0$$

$$\begin{cases} 12x - 8y - 12z = 0 \\ 12x - 8y - 12z = 0 \\ 6x - 4y - 6z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12x - 8y - 12z = 0 \\ 6x - 4y - 6z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x - 8y - 12z = 0 \\ 6x - 4y - 6z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x = 2y + 3z$$

C'est l'équa du plan : $\dim F_1 = 2$

$$\text{De même } \begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = z(2, 2, 1) \text{ donc } F_2 = \mathbb{R}(2, 2, 1) \text{ et } \dim F_2 = 1$$

On a donc obtenu que F_1 est un plan (donc un hyperplan de $\mathbb{R}^3$), F_2 est la droite dirigée par $(2, 2, 1)$.
Or $(2, 2, 1) \notin F_1$ car $3 \times 2 - 2 \times 2 - 3 \times 1 = -1 \neq 0$
($(2, 2, 1)$ ne satisfait pas l'équation de F_1) donc $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$

Si H est un hyperplan d'un K -ev E (de $\dim$ finie si on veut) et u un vecteur de E tel que $u \notin H$, alors $E = H \oplus Ku$

C'est vrai si $\dim L = \infty$

On a obtenu que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$ donc tout $u \in \mathbb{R}^3$ se décompose de façon unique en $u = u_1 + u_2$ où $\begin{cases} u_1 \in F_1 \\ u_2 \in F_2 \end{cases}$ et alors : $f(u) = f(u_1) + f(u_2) = u_1 - u_2$

Exercice 39

(1) $L = F_1 \oplus F_2$

$u = u_1 + u_2$ décomposition unique

$$\begin{aligned} \text{pr}_1(u) &= u_1 = u_1 + 0 \Rightarrow \text{pr}_1 \circ \text{pr}_1(u) = \text{pr}_1(u_1 + 0) \\ &= u_1 = \text{pr}_1(u) \quad \text{Donc } \text{pr}_1 \circ \text{pr}_1 = \text{pr}_1 \\ \text{comme il se doit (pr}_1 \text{ est proj)} \end{aligned}$$

De même $\text{pr}_2 \circ \text{pr}_2 = \text{pr}_2$

$\text{pr}_2 \circ \text{pr}_1(u) = \text{pr}_2(u_1 + 0) = 0$ donc $\text{pr}_2 \circ \text{pr}_1 = 0$

De même $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2 = 0$

Enfin :

$$\begin{aligned} (\text{pr}_1 + \text{pr}_2)(u) &= \text{pr}_1(u) + \text{pr}_2(u) \\ &= u_1 + u_2 = u = \text{id}_L(u) \end{aligned}$$

donc $\text{pr}_1 + \text{pr}_2 = \text{id}_L$

(2) $L = \mathbb{R}^2$, $F_1 = \mathbb{R}(1, 1)$, $F_2 = \mathbb{R}(1, -1)$

$$\begin{cases} \dim F_1 + \dim F_2 = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \\ F_1 \cap F_2 = 0 \quad \text{car } (x, y) \in F_1 \cap F_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases} \\ \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{Donc } \mathbb{R}^2 = F_1 \oplus F_2$$

$$(x, y) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$

$$\text{d'où } (x_1, y_1) \in F_1 \quad \text{donc } y_1 = x_1$$

$$(x_2, y_2) \in F_2 \quad \text{donc } y_2 = -x_2$$

$$\text{ie } (x, y) = (x_1, y_1) \\ = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$

$$\text{ie } \begin{cases} x = x_1 + x_2 \\ y = x_1 - x_2 \end{cases}$$

Conclusion: La décomp de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ selon

$$F_1 \oplus F_2 \text{ af: } (x, y) = \frac{x+y}{2} (1, 1) + \frac{x-y}{2} (1, -1)$$

$$\text{et donc } \text{pr}_1(x, y) = \frac{x+y}{2} (1, 1)$$

$$\text{pr}_2(x, y) = \frac{x-y}{2} (1, -1)$$

Exercice 40

$$\begin{aligned} (\text{id}_E - f) \circ (\text{id}_E - f) &= \text{id}_E \circ (\text{id}_E - f) - f \circ (\text{id}_E - f) \\ &= \text{id}_E \circ \text{id}_E - \text{id}_E \circ f - f \circ \text{id}_E + f \circ f \\ &= \text{id}_E - f - f + f \\ &= \text{id}_E - f \end{aligned}$$

Donc $\text{id}_E - f$ est un proj

f est le proj sur $F = \text{Im } f$ parallèlement à $N = \text{Ker } f$
et $E = F \oplus N$

Tout $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = u + v$ où
 $u \in F$, $v \in N$ et par définition $f(x) = u$

$$\begin{aligned} \text{Alors } (\text{id}_E - f)(x) &= x - f(x) \\ &= x - u = v \end{aligned}$$

donc $\text{id}_E - f$ est le projection sur N parallèlement à F

Exercice 41

$$(1) \quad S(X) = \prod_{i=1}^n (X - x_i) = (X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S'(x_i) &= (x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1}) (x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n) \\ &= \prod_{j \neq i} (x_i - x_j) \end{aligned}$$

tous les termes où on a dérivé $(X - x_i)$ avec $j \neq i$ s'annulent qd $X = x_i$ car ils contiennent le facteur $x_i - x_i = 0$; seul subsiste le terme où on a dérivé $X - x_i$ car alors il n'y a plus de facteur.

$$\text{Donc } S'(x_i) = \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)$$

$$T_i(x_i) = \frac{1}{S'(x_i)} \left. \frac{S(X)}{X - x_i} \right|_{X=x_i}$$

$$\text{Si } i \neq j \text{ dans } \left. \frac{S(X)}{X - x_j} \right|_{X=x_i} \text{ il y a le facteur } x_i - x_j = 0$$

$$\text{donc } T_j(x_i) = 0$$

$$\text{Si } i=j \text{ il y a dans } \left. \frac{S(X)}{X - x_i} \right|_{X=x_i} \text{ tous les facteurs } x_i - x_k$$

$$\text{où } k \neq i, \text{ donc } \left. \frac{S(X)}{X - x_i} \right|_{X=x_i} \text{ tous les facteurs } x_i - x_k$$

$$x_i - x_k \text{ où } k \neq i, \text{ donc } \left. \frac{S(X)}{X - x_i} \right|_{X=x_i}$$

MatricesExercice 42

$$(1) \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y \\ x-y \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad f(x,y) = (x+3y, x-y)$$

(2) $(3,1), (1,-1)$ deux vecteurs non colinéaires, donc linéairement indépendants donc (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$

(3) $\forall u$ de (1)

$$f(u) = f(3,1) = (6,2) = 2u$$

$$f(v) = f(1,-1) = (-2,2) = -2v$$

$$\text{Donc } \text{Mat}_{(u,v)} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = A'$$

(4) P matrice de passage de (e_1, e_2) à (u,v) :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a} \quad A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 43

$$(1) \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y \\ -5x+6y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = (-x+2y, -5x+6y)$$

(2) $(1,1), (2,5)$ non colinéaires $\Rightarrow (u,v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$

$$(3) \quad f(u) = f(1,1) = 0$$

$$f(v) = f(2,5) = 4v$$

$$\text{Donc } A' = \text{Mat}_{(u,v)} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A' &= P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 44

$$(1) \quad \begin{cases} u_1 = 2e_1 - e_2 \\ u_2 = e_1 - e_2 \end{cases} \quad \text{pas colinéaires donc } (u_1, u_2) \text{ est une base de } \mathbb{C}^2$$

$$(2) \quad \begin{aligned} f(u_1) &= 2u_1 \\ f(u_2) &= -3u_2 \end{aligned} \quad \text{Mat}_{(u_1, u_2)} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Soit P la matrice de passage de (e_1, e_2) à (u_1, u_2)

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Notons } A = \text{Mat}_{(e_1, e_2)} f, \quad A' = \text{Mat}_{(u_1, u_2)} f$$

$$\text{alors : } A' = P^{-1}AP \quad \text{donc} \quad A = PA'P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Et donc} \quad \begin{aligned} f(e_1) &= 7e_1 - 5e_2 \\ f(e_2) &= 10e_1 - 8e_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A' &= P^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 46

(1)

$$\begin{cases} u_1 = e_1 - e_2 \\ u_2 = e_2 - e_3 \\ u_3 = e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = u_1 + u_2 + u_3 \\ e_2 = u_2 + u_3 \\ e_3 = u_3 \end{cases}$$

donc (u_1, u_2, u_3) est génératrice
et donc c'est une base de E

(2)

$$A = \text{Mat}_{(e_1, e_2, e_3)} f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit P la matrice de passage
de (e_1, e_2, e_3) à (u_1, u_2, u_3)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Soit P la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (u_1, u_2, u_3)

$$u_1 = e_1 - e_2$$

$$u_2 = e_2 - e_3$$

$$u_3 = e_3$$

donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P^{-1} =$$

Par le pivot de Gauss :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & L_1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & L_3 \end{array}$$

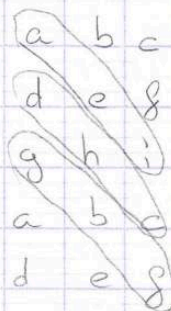
$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & L_2 + L_1 = L_2' \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & L_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & L_2' \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & L_3 + L_2' \end{array}$$

$$|P_{31}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|P_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$|P_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$



$$\det P = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$$

$$|P_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|P_{12}| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$|P_{13}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|P_{21}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|P_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|P_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 17

$$(2) B_1: u_1 = e_2 + e_3$$

$$u_2 = e_1 + e_3$$

$$u_3 = e_1 + e_2$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A' = Q^{-1} A P$$

où P est la matrice de passage de la base canonique à B_1 et Q la matrice de passage de la base à B_2

$$B_2: \begin{aligned} u_1 &= \frac{e_1}{2} + \frac{e_2}{2} \\ u_2 &= \frac{e_1}{2} - \frac{e_2}{2} \end{aligned}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A' &= \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 47

39

$$(1) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = 2 \neq 0$$

donc B_1 est une base de $\mathbb{R}^3$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ non colinéaires } \Rightarrow \text{ils forment une base de } \mathbb{R}^2$$

$$(2) \quad A' = Q^{-1}AP$$

où P est la matrice de passage de la base canon. de $\mathbb{R}^3$ à B_1 et Q la matrice de passage de la base canon. de $\mathbb{R}^2$ à B_2

$$\text{Donc } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{on met en colonnes les coordonnées des vecteurs de } B_1 \text{ dans l'ancienne base})$$

$$\text{et } Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \text{et donc}$$

$$Q^{-1} = -2 \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 48

$$(1) \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x - 6y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{donc } f(x, y) = (5x - 6y, x)$$

$$(2) \quad (3, 1), (2, 1) \text{ non colinéaires donc ils forment une base de } \mathbb{R}^2$$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad A' = P^{-1}AP \\ = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad U_{m+1} = \begin{pmatrix} u_{m+2} \\ u_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5u_{m+1} - 6u_m \\ u_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{m+1} \\ u_m \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U_{m+1} = AU_m$$

$$V_m = P^{-1}U_m \Leftrightarrow U_m = PV_m$$

$$V_{m+1} = P^{-1}U_{m+1} = P^{-1}AU_m = P^{-1}APV_m = A'V_m$$

$$\text{On a } U_{m+1} = AU_m$$

$$\text{donc } U_m = A^m U_0$$

$$V_{m+1} = A'V_m \Rightarrow V_m = A'^m V_0$$

Mais A^m ne se laisse pas toujours calculer immédiatement.
Tandis que A'^m se calcule facilement car parce que
 A' est diagonal

$$A'^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A'^m = \begin{pmatrix} 3^m & 0 \\ 0 & 2^m \end{pmatrix}$$

$$\text{On a donc } V_m = A'^m V_0 = \begin{pmatrix} 3^m & 0 \\ 0 & 2^m \end{pmatrix} V_0$$

$$\Rightarrow U_m = PV_m = P \begin{pmatrix} 3^m & 0 \\ 0 & 2^m \end{pmatrix} P^{-1} U_0$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^m & 0 \\ 0 & 2^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} U_0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^m & -2 \cdot 3^m \\ 2^m & 3 \cdot 2^m \end{pmatrix} U_0$$

$$= \begin{pmatrix} 3^{m+1} - 2^{m+1} & -2 \cdot 3^{m+1} + 3 \cdot 2^{m+1} \\ 3^m - 2^m & -2 \cdot 3^m + 3 \cdot 2^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (3^{m+1} - 2^{m+1}) U_1 + (-2 \cdot 3^{m+1} + 3 \cdot 2^{m+1}) U_0 \\ (3^m - 2^m) U_1 + (-2 \cdot 3^m + 3 \cdot 2^m) U_0 \end{pmatrix}$$

et $U_m = \begin{pmatrix} U_{m+1} \\ U_m \end{pmatrix}$

et donc $U_m = (3^m \cdot 2^m) U_1 + (-2 \cdot 3^m + 3 \cdot 2^m) U_0$

Rebut $U_{m+2} = 5U_{m+1} - 6U_m$

(5) $y'' - 5y' + 6y = 0$
 $Y = \begin{pmatrix} y' \\ y \end{pmatrix}$

$$Y' = \begin{pmatrix} y'' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y' - 6y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ y \end{pmatrix} = AY$$

$$Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \Rightarrow Z' = P^{-1}Y' = \begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix} = P^{-1}AP \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v \\ 2w \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v' = 3v \\ w' = 2w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = v_0 e^{3x} \\ w = w_0 e^{2x} \end{cases}$$

et donc $\begin{pmatrix} y' \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 e^{3x} \\ w_0 e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_0 e^{3x} + 2w_0 e^{2x} \\ v_0 e^{3x} + w_0 e^{2x} \end{pmatrix}$

donc $y = v_0 e^{3x} + w_0 e^{2x}$

Conditions initiales $y(0) = y_0, y'(0) = y'_0$

Exercice 49

$$\begin{aligned} A &= \text{Mat}_B f & \text{où } P \text{ matrice de passage de } B \text{ à } B' \\ A' &= \text{Mat}_{B'} f & B' \\ A' &= P^{-1} A P \end{aligned}$$

$$\text{tr } A' = \text{tr}(P^{-1}(AP)) = \text{tr}((AP)P^{-1}) = \text{tr}(A(P P^{-1}))$$

Exercice 52

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

35

$$\begin{aligned} A^2 - 5A + 4I &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $A^2 - 5A + 4I = 0$

ie $(A - 5I)A = -4I$

ie $-\frac{1}{4}(A - 5I)A = I$

et donc A est inversible

et $A^{-1} = -\frac{1}{4}(A - 5I)$

Vérifions $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 10 = 4$

$$\begin{aligned} \text{donc } A^{-1} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{4}(A - 5I) = -\frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right] \\ &= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 50

$$\text{tr}(AB) = \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 5$$

$$\text{tr}(BA) = \text{tr} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 4$$

donc A, B ~~ne~~

Exercice 54

$$U, V \text{ semblables} \Leftrightarrow \exists P \neq 0 \quad V = P^{-1}UP$$

$$AB = P^{-1}BAP$$

il suffit de prendre $P \in A^{-1}$ car $P = B$

Exercice 53

$$A = (a_{ij}) \quad B = (b_{ij}) \quad , \quad AB = C = (c_{ij})$$

$$\text{où } c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$

$${}^t B = (b_{ji}) \quad {}^t A = (a_{ji})$$

$${}^t B {}^t A = \left(\sum_{k=1}^m b_{ki} a_{kj} \right) = \left(\sum_{k=1}^m a_{jk} b_{ki} \right) = (c_{ji}) = {}^t C = {}^t (AB)$$

Faible d'exo 7

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+2b & a+b \\ c+2d & c+d \end{pmatrix}$$

Exercice 54

$$(1) \det(u, v, w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

donc B' est une base de E'

$$\text{ou bien : } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Ou bien : } \begin{cases} u = e_1 + e_2 + e_3 \\ v = e_2 + e_3 \\ w = e_1 + e_3 \end{cases}$$

donc (u, v, w) est génératrice de E' et donc E' en est une base

$$(2) P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on obtient en prime les expressions de e_i en fonction de u, v, w

$$(3) A' = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad \mathcal{E} = \text{Vect} \{u, v, w\} = R_u \oplus R_v \oplus R_w \\ = F \oplus G$$

$$(5) \quad \text{Mat}_B P_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}_B P_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(6) \quad \text{Mat}_B f^m = (\text{Mat}_B f)^m = A^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^m & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^m \end{pmatrix} = \text{Mat}_B P_F + (-1)^m \text{Mat}_B P_G \\ = \text{Mat}_B (P_F + (-1)^m P_G)$$

$$(7) \quad P_F(e_1) = P_F(u-v) = u \\ P_F(e_2) = P_F(u-w) = u \\ P_F(e_3) = P_F(-u+v+w) = -u$$

$$P_G(e_1) = P_G(u-v) = -v \\ P_G(e_2) = P_G(u-w) = -v \\ P_G(e_3) = P_G(-u+v+w) = v+w$$

$$\text{donc } f^m(e_1) = P_F(e_1) + (-1)^m P_G(e_1) \\ = u + (-1)^{m+1} v$$

$$f^m(e_2) = u + (-1)^{m+1} w$$

$$f^m(e_3) = -u + (-1)^m v + (-1)^m w$$

Si je pose mets en colonnes
j'ai $\text{Mat}_{BB} f^m$. Mais je
veux $\text{Mat}_B f^m$!

Donc il faut exprimer les $f^m(e_i)$ dans la Base B:

$$f^m(e_1) = u + (-1)^{m+1} v = e_1 + e_2 + e_3 + (-1)^{m+1} (e_2 + e_3) \\ = e_1 + [1 + (-1)^{m+1}] e_2 + [1 + (-1)^{m+1}] e_3$$

$$f^m(e_2) = u + (-1)^{m+1} w = e_1 + e_2 + e_3 + (-1)^{m+1} (e_1 + e_3) \\ = [1 + (-1)^{m+1}] e_1 + e_2 + [1 + (-1)^{m+1}] e_3$$

$$f^m(e_3) = -u + (-1)^m v + (-1)^m w \\ = -e_1 - e_2 - e_3 + (-1)^m e_2 + (-1)^m e_3 + (-1)^m e_1 + (-1)^m w \\ = -e_1 - e_2 - e_3 + (-1)^m e_2 + (-1)^m e_3 + (-1)^m e_1 + (-1)^m e_3 \\ = [-1 + (-1)^m] e_1 + [-1 + (-1)^m] e_2 + [-1 + 2(-1)^m] e_3$$

$$\text{Mat}_B J^n = \begin{pmatrix} 1 & 1+(-1)^{n+1} & -1+(-1)^n \\ 1+(-1)^{n+1} & 1 & 1+(-1)^n \\ 1+(-1)^{n+1} & 1+(-1)^{n+1} & -1+2(-1)^n \end{pmatrix}$$

18) Calcul plus direct de A^n

$$A^n = P A'^n P^{-1} \quad \Leftrightarrow A'^n = P^{-1} A^n P$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+(-1)^{n+1} & -1+(-1)^n \\ 1+(-1)^{n+1} & 1 & 1+(-1)^n \\ 1+(-1)^{n+1} & 1+(-1)^{n+1} & -1+2(-1)^n \end{pmatrix}$$

Exercice 55

Exercice 55 - suite

36

$$(2) \quad f(u_1) = 5u_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y - z = 5x \\ -4x + y + 3z = 5y \\ x + y - 2z = 5z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y - z = 0 \\ -4x - 4y + 3z = 0 \\ x + y - 7z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = x(1, -1, 0), \text{ on peut prendre } u_1 = (1, -1, 0)$$

$$(3) \quad u_2 = (x, y, z) : f(u_2) = -3u_2$$
$$\begin{cases} 3x - 2y - z = -3x \\ -4x + y + 3z = -3y \\ x + y - 2z = -3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y - z = 0 \\ -4x + 4y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$(2) + 4(3) \Leftrightarrow 8y + 7z = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{7}{8}z$$

$$\text{et alors (3)} \Rightarrow x = -y - z = -\frac{1}{8}z$$

$$\text{et alors (1)} \Rightarrow -\frac{6}{8}z + \frac{14}{8}z - z = 0$$

Donc la solution générale du système est

$$\begin{cases} x = -z/8 \\ y = -7z/8 \end{cases}$$

$$\text{ie } (x, y, z) = z(-1/8, -7/8, 1)$$

$$\text{On peut prendre } u_2 = (-1, -7, 8)$$

$$\text{Récapitulons } u_1 = (1, -1, 0), u_2 = (-1, -7, 8)$$

- (4) $u_3 = (1, 1, 1)$ montrons que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$$

Donc (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. On note $B' = (u_1, u_2, u_3)$.

(5) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix}$

- (6) On peut inverser la matrice par la méthode du pivot.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & L_1 \\ -1 & 7 & 1 & 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & -8 & 1 & 0 & 0 & 1 & L_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 8 & 2 & 1 & 1 & 0 & L_2 + L_1 = L_2' \\ 0 & -8 & 1 & 0 & 0 & 1 & L_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 8 & 2 & 1 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & = \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 15/24 & -9/24 & -6/24 & L_1 - L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/24 & 1/24 & -1/12 & L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & L_3 \end{array}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 15 & -9 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

(9) $A' = \text{Mat}_B f = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A' est diagonale donc $A'^m = \begin{pmatrix} 5^m & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^m = P A'^m P^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^m & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -9 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 3 \cdot 5^{m+1} + (-3)^m & -9 \cdot 5^m + (-3)^m & -6 \cdot 5^m - 2(-3)^m \\ -3 \cdot 5^{m+1} + 7(-3)^m & 9 \cdot 5^m + 9(-3)^m & 6 \cdot 5^m - 14(-3)^m \\ -8 \cdot (-3)^m & -8(-3)^m & 16 \cdot (-3)^m \end{pmatrix}$$

Exercice 56

(1) $(A - 2I_2)^2 = \begin{pmatrix} -13-2 & 9 \\ -25 & 17-2 \end{pmatrix}^2$

$$= \begin{pmatrix} -15 & 9 \\ -25 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -15 & 9 \\ -25 & 15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $e_2' = (f - 2 \cdot \text{id})(e_1)$

$$(A - 2I_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 9 \\ -25 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -25 \end{pmatrix}$$

donc $e_2' = (-15, -25)$: non colinéaire à e_1 donc (e_2', e_1) est une base de $\mathbb{R}^2$

$$(3) \text{Mat}_{(e_2', e_1)} (f - 2 \cdot \text{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(4) P = \begin{pmatrix} -15 & 1 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 25 & -15 \end{pmatrix}$$

$$A' = P^{-1} A P$$

Vérifions : $P^{-1} A P$

$$= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 25 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -15 & 9 \\ -25 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -15 & 1 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & -15 \\ 50 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -15 & 1 \\ -25 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 50 & 25 \\ 0 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(5) I_2 commute avec toute matrice de $M_2(\mathbb{R})$
(élément neutre de $M_2(\mathbb{R})$!) donc $2I_2$

$$A' = 2I_2 + (A' - 2I_2)$$

$$\Rightarrow A'^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (2I_2)^{m-k} (A' - 2I_2)^k$$

$$\Rightarrow A'^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (2I_2)^{m-k} (A' - 2I_2)^k$$

car $2I_2$ et $A' - 2I_2$ commutent

$$\Rightarrow A'^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} 2^{m-k} (A' - 2I_2)^k$$

$$\text{Mais } (A' - 2I_2)^0 = I_2$$

$$(A' - 2I_2) = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A' - 2I_2)^2 = 0$$

et a fortiori: $(A' - 2I_2)^k = 0$ pour $k \geq 2$

Par conséquent

$$A'^m = 2^m I_2 + m \cdot 2^{m-1} (A' - 2I_2)$$

$$= \begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 2^m \end{pmatrix} + m \cdot 2^{m-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^m & m \cdot 2^{m-1} \\ 0 & 2^m \end{pmatrix}$$

Donc :

$$A^m = P A'^m P^{-1} = \begin{pmatrix} -15 & 1 \\ 25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^m & m \cdot 2^{m-1} \\ 0 & 2^m \end{pmatrix} \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 25 & -15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -15m \cdot 2^{m-1} + 2^m & 5m \cdot 2^{m-1} \\ -25m \cdot 2^{m-1} & 2^m + 15 \cdot 2^m \end{pmatrix}$$

Exercice 57

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & a & \dots & a \\ b & c_2 & \dots & a \\ b & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & c_n & a \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad D = \begin{pmatrix} c_1 + X & a + X & \dots & a + X \\ b + X & c_2 + X & \dots & a + X \\ b + X & b + X & \dots & a + X \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b + X & b + X & \dots & c_n + X \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 + X & a + X & a + X & a + X & \dots & a + X \\ b - c_1 & c_2 - a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b - c_2 & b - a & c_3 - a & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b - c_n & b - a & b - a & b - a & \dots & c_n - a \end{pmatrix}$$

On développe par rapport à la 1^{ère} ligne :

$$D(X) = (c_1 + X)d_1 - (a + X)d_2 + \dots + (-1)^{n-1}(a + X)d_n$$

où les d_i sont indépendants de X . Et donc $D(X)$

est un polynôme du 1^{er} degré en X : $D(X) = \lambda X + \mu$

(2) On suppose d'abord $b \neq a$

Exercice 58

$\forall (a_1, \dots, a_m)$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{m-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{m-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_m & a_m^2 & \dots & a_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} \nearrow \\ c_j - c_1 c_{j-1} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1 a_2 & \dots & a_2^{m-1} - a_1 a_2^{m-1} \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_3^{m-1} - a_1 a_3^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_m - a_1 & a_m^2 - a_1 a_m & \dots & a_m^{m-1} - a_1 a_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & (a_2 - a_1) a_2 & \dots & (a_2 - a_1) a_2^{m-2} \\ 1 & a_3 - a_1 & (a_3 - a_1) a_3 & \dots & (a_3 - a_1) a_3^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_m - a_1 & (a_m - a_1) a_m & \dots & (a_m - a_1) a_m^{m-2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & (a_2 - a_1) a_2 & \dots & (a_2 - a_1) a_2^{m-2} \\ a_3 - a_1 & (a_3 - a_1) a_3 & \dots & (a_3 - a_1) a_3^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_m - a_1 & (a_m - a_1) a_m & \dots & (a_m - a_1) a_m^{m-2} \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_m - a_1) \times \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_2^{m-2} \\ 1 & a_3 & \dots & a_3^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_m & \dots & a_m^{m-2} \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_m - a_1) \times V(a_2, a_3, \dots, a_m)$$

De même:

$$V(a_2, \dots, a_m) = (a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \dots (a_m - a_2) \times V(a_3, \dots, a_m)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } V(a_1, \dots, a_m) &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_m - a_1) (a_3 - a_2) \dots (a_m - a_2) \\ &\quad V(a_3, \dots, a_m) \end{aligned}$$

$$\text{On réitère } V(a_1, \dots, a_m) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_m - a_1) (a_3 - a_2) \dots (a_m - a_2) (a_4 - a_2) \dots (a_m - a_2) V(a_4, \dots, a_m)$$

Mais $V(a_m)$ est le déterminant à 1 ligne, 1 col dont l'unique élément est 1, donc $V(a_m) = 1$

$$\begin{aligned} \text{Conclusion: } V(a_1, \dots, a_m) &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_m - a_1) \\ &\quad (a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \dots (a_m - a_2) \\ &\quad \dots (a_m - a_{m-1}) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq m} (a_j - a_i) \end{aligned}$$

On cherche un polynôme P de degré $\leq m$ dont la graph passe par tous les points i.e

$$P(a_i) = b_i \quad (1 \leq i \leq m) \quad \text{On note } P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_{m-1} x^{m-1}$$

Les conditions sont:

$$P(a_i) = b_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

$$\Leftrightarrow p_0 + p_1 a_i + p_2 a_i^2 + \dots + p_{m-1} a_i^{m-1} = b_i$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{m-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_m & a_m^2 & \dots & a_m^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Exercice 59

38

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & a \\ -1 & 2 & -3 & b \\ 4 & -3 & 8 & c \end{array} \quad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\leftrightarrow \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & a \\ 0 & 7 & -1 & a+2b \\ 0 & -9 & -2 & -2a+c \end{array} \quad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2' = 2L_2 + L_1 \\ L_3' = L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\leftrightarrow \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & a \\ 0 & 7 & -1 & a+2b \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5a-18b-7c}{23} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-7a+39b+19c}{23} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4a+4b-c}{23} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5a-18b-7c}{23} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2' \\ L_3'' = -(9L_2' + 7L_3')/23 \\ L_1' = L_1 - 3L_2' - 5L_3''/2 \\ L_2'' = (L_2' + L_3'')/7 \\ L_3'' \end{array}$$

Donc le système est de Cramer, l'unique sol est :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} -7a+39b+19c \\ 4a+4b-c \\ 5a-18b-7c \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{23} \begin{pmatrix} -7 & 39 & 19 \\ 4 & 4 & -1 \\ 5 & -18 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Par Cramer

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 8 \end{vmatrix} = 32 + 15 + (-36) - 40 - 18 + 24 = -23$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 3 & 5 \\ b & 2 & -3 \\ c & -3 & 8 \end{vmatrix}}{-23} = \frac{a \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{-23}$$

$$= \frac{-7a + 39b + 19c}{23}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ -1 & b & -3 \\ 4 & c & 8 \end{vmatrix}}{-23} = \frac{-a \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}}{-23}$$

$$= \frac{4a + 4b - c}{23}$$

$$\text{et } z = \frac{5a - 18b - 7c}{23}$$

Exercice 60

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 7 & 0 & 13 & -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & 3 \\ 0 & 14 & -2 & 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2' = 2L_2 + L_1 \\ L_3' = L_3 + 2L_2 \end{array}$$

deux lignes linéairement indépendantes $\Rightarrow \text{rang} = 2$
Le système devient :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 1 \\ 7y - z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} (1 - 5z - 3y) \\ y = \frac{3+z}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = \left(-\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, 0\right) + z \left(-\frac{13}{7}, \frac{1}{7}, 1\right)$$

$$\text{La sol est : } \left(-\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, 0\right) + \mathbb{R} (13, -1, -7)$$