Mathématiques

Algèbre Semestre 3

Table des matières

Première partie

Rappels d'algèbre linéaire

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E est un $\mathbb{K}-ev$. I désigne un ensemble (tels que $\{1,...n\}$) qui va indexer une famille.

1 Bases et sommes dans un espace vectoriel.

Définition 1. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille finie de E. On dit que x est une combinaison linéaire (c.l) des x_i s'il existe une famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{K}$ tels que $x = \sum\limits_{i\in I} \alpha_i x_i$.

Définition 2. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si pour toute famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{K}$, on a $\sum\limits_{i\in I} \alpha_i x_i = 0$ $\Rightarrow (\alpha_i = 0, \forall i \in I)$.

Une famille non libre est lié. Cela signifie : il existe des α_i, non tous nuls, tels que $\sum\limits_{i\in I} \alpha_i x_i = 0$.

Remarque. Toute famille contenant 0 est liée. En effet, si la famille est $x_1, 0, ..., x_n$ on choisit $0, ..., \alpha_j, 0, ..., 0$ où α_j est quelconque et différent de 0 et on a bien $\sum \alpha_i x_i = 0 \times x_1 + ... + \alpha_j \times 0 + ... + 0 \times x_n = 0$.

Définition 3. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite génératrice dans E si tout vecteur x de E est une combinaison linéaire des x_i. Autrement dit $\forall x \in E, \exists (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$, tels que $x = \sum\limits_{i\in I} \alpha_i x_i$.

Remarque. Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

Définition / Proposition 4. Une famille libre et génératrice est appelée une base de E. On a alors : $\forall x \in E, \exists ! (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ tel que $x = \sum\limits_{i\in I} \alpha_i x_i$. Les α_i sont appelés les coordonnées de x dans la base des $(x_i)_{i\in I}$. La dimension de E est le cardinal de la famille $(x_i)_{i\in I}$.

Remarque. La dimension de E est différent du degré P et différent de $card$(ensemble).

La dimension de E est :

— le plus grand cardinal d'une famille libre.

— le plus petit cardinal d'une famille génératrice.

On admet l'unicité de ce nombre, ainsi que l'existence d'une base dans un espace vectoriel.

Démonstration de l'unicité des coefficients. Soient $(\alpha_i)_{i\in I}$ et $(\alpha'_i)_{i\in I}$, deux familles telles que $x = \sum\limits_{i\in I} \alpha_i x_i = \sum\limits_{i\in I} \alpha'_i x_i$. Donc $\sum\limits_{i\in I} (\alpha_i - \alpha'_i) x_i = 0$. Donc, puisque $(x_i)_{i\in I}$ est libre, $\alpha_i - \alpha'_i = 0, \forall i \in I$ donc $\alpha_i = \alpha'_i$.

Théorème. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathcal{F}$ une famille de n éléments. Alors : $\mathcal{F}$ est libre $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ est une base $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ est génératrice dans E.

Remarque. Si $(E_i)_{i=1,...,n}$ sont des espaces vectoriels, alors $\prod_{i=1}^{n} E_i$ (Rappel : $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$) par définition $\{(x_1, ..., x_n), x_1 \in E_1, ..., x_n \in E_n\}$ est un espace vectoriel. De plus, sa dimension est $\sum_{i=1}^{n} dim(E_i)$. Ainsi $dim(\mathbb{R}^n) = dim(\mathbb{R}) + ... + dim(\mathbb{R}) = n$. On en connaît une base : $(e_1, ...e_n)$, où $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$.

Exercice. Montrer cela pour deux espaces vectoriels :

$$dim(E \times F) = dim(E) + dim(F)$$

Solution. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E, et $(f_1, ..., f_p)$ une base de F.
On considère la famille $\{(e_1, 0), ..., (e_n, 0), (0, f_1), ..., (0, f_p)\}$. C'est une famille de $(n+p)$ éléments de $E \times F$. Montrons qu'elle est libre et génératrice.

- **Libre.** Soient $(\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}, ..., \alpha_{n+p})$ tels que $\alpha_1(e_1, 0) + ... + \alpha_n(e_n, 0) + \alpha_{n+1}(0, f_1) + ... + \alpha_{n+p}(0, f_p) = 0 \Leftrightarrow (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i . \sum_{i=1}^{p} \alpha_{n+i} f_i) = 0$.
- **Générateurs.** Soit $x \in E \times F$. On l'écrit $x = (e, f)$, où $e \in E$, et $f \in F$ puisque (e_i) et (f_i) sont des bases de E et F, on a : $e = \sum_{1}^{n} \alpha_i e_i$ et $f = \sum_{1}^{p} \beta_i f_i$. On a alors $(e, f) = (\sum_{1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{1}^{p} \beta_i f_i) = \sum_{1}^{n} \alpha_i(e_i, 0) + \sum_{1}^{p} \beta_i(0, f_i)$ est une combinaison linéaire de la famille $((e_1, 0), ..., (e_n, 0), (0, f_1), ..., (0, f_p))$.

Remarque. Une union d'un espace vectoriel n'est pas un espace vectoriel.

Exemple. Si $E = \mathbb{R}^2, E_1 = Vect\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $E_2 = Vect\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Alors $E_1 \cup E_2$ n'est pas un espace vectoriel. En effet $e_1 + e_2 \notin E_1 \cup E_2$ (mais une intersection d'espace vectoriel est un espace vectoriel).

Définition 5. Si $(E_i)_{i\in I}$ sont des sev de E, alors la "somme" $\sum_{i\in I} E_i$ est un sev de E, défini par :

$$\sum_{i\in I} E_i = \left\{ \sum_{i\in I} x_i, (x_i)_{i\in I} \in (E_i)_{i\in I} \right\}$$

C'est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments des E_i.
De plus on dit que la somme $\sum_{i\in I} E_i$ est directe si $\sum_{i\in I} x_i = 0 \Rightarrow (x_i = 0, \forall i \in I)$. On note alors $\bigoplus_{i\in I} E_i$.

Exercice. F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Démonstration.
- $\Rightarrow$ Soit $x \in F \cap G$. Alors $\underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{-x}_{\in G} = 0$. Or F et G sont en somme directe. Donc $\begin{cases} x = 0 \\ -x = 0 \end{cases}$. Donc $F \cap G = \{0\}$.
- $\Leftarrow$ Soit $f \in F$ et $g \in G$ tels que $f + g = 0$. Donc $f = -g$. Donc $f \in g$. Or $\begin{cases} f \in F \\ F \cap G = \{0\} \end{cases}$. Donc $f = 0$ puis $g = -f = 0$.

□

Remarque. Ceci est faux si on a plus de 2 sous espaces vectoriels.

Exemple. $E = \mathbb{R}^2, E_1 = Vect(e_1), E_2 = vect(e_2)$, et $E_3 = vect(e_1 + e_2)$. On a $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \{0\}$. Mais $(-e_1) + (-e_2) + (e_1 + e_2) = 0$.

Définition 6. Soient F et G des sous espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. On dit que F et G sont supplémentaires dans E. On dit aussi que G est un supplémentaire de F dans E.

Définition 7. Soit F un sous espace vectoriel de E. Soit B une base de E. On dit qu'elle est "adaptée" à F à F s'il existe une base B' de F telle que B est de la forme $B = (B', e_{p+1}, ..., e_n)$.

Exemple. Si $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \text{plan}(0xy) = \{(x, y, 0), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$. $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est adaptée à F.

En effet $B' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est bien une base de F.

Remarque. On parle de la base canonique $\mathbb{R}^n$, il s'agit de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, usuellement notée $e_1, ..., e_n$.

Proposition 8. Soient E_i des sev de E, et $\mathcal{F}$ des familles génératrices de chaque E_i. Alors $\bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{F}_i$ génère $\sum\limits_{i \in I} E_i$.

Démonstration. Soit $x \in \sum\limits_{i \in I} E_i$. Alors x s'écrit $x = \sum\limits_{i \in I} x_i$, où $x_i \in E_i$. On note $\mathcal{F}_i = (e_{i,j})_{j \in \mathcal{J}_i}$. Alors puisque $\mathcal{F}_i$ génère E_i, il existe des scalaires $(\alpha_{i,j})_{j \in \mathcal{J}_i}$ tels que $x_i = \sum\limits_{j \in \mathcal{J}_i} \alpha_{i,j} \times e_{i,j}$.
On a alors $x = \sum\limits_{i \in I} x_i = \sum\limits_{i \in I} \times \sum\limits_{j \in \mathcal{J}_i} \alpha_{i,j}.e_{i,j}$. C'est bien une combinaison linéaire des $(e_{i,j})_{i \in I, j \in \mathcal{J}_i}$, i.e des éléments $\bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{F}_i$. ☐

Proposition 9. Si la somme des E_i est directe, et si $\mathcal{F}_i$ sont des familles libres des E_i, alors $\bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{F}_i$ est encore une famille libre.

Démonstration. On note encore $\mathcal{F}_i = (e_{i,j})_{j \in \mathcal{J}_i}$. On suppose qu'il existe des scalaires $(\alpha_{i,j})$ tels que $\sum\limits_{i,j} \alpha_{i,j}.e_{i,j} = 0$. On pose $x_i = \sum\limits_{j \in \mathcal{J}_i} \alpha_{i,j}.e_{i,j}$. Alors $\sum\limits_{i,j} \alpha_{i,j}.e_{i,j} = \sum\limits_{i \in I} x_i = 0$. Or $x_i \in E_i$ et les E_i sont en somme directe.
Donc $x_i = 0, \forall i \in I$, c'est à dire : $\sum\limits_{j \in \mathcal{J}_i} \alpha_{i,j}.e_{i,j} = 0$. Or $(e_{i,j})_{j \in \mathcal{J}_i}$ est libre $\alpha_{i,j} = 0, \forall j \in \mathcal{J}_i$, ceci étant vrai, pour tout $i \in I$ on a bien $(a_{i,j})_{i \in I, j \in \mathcal{J}_i}$ qui est la famille nulle. ☐

Corollaire 10. Supposons que (E_i) sont des sev en somme directe. Soient B_i des bases de chaque E_i. Alors $\bigcup_{i \in I} B_i$ est une base de $\oplus E_i$.
On dit que cette base est adaptés à la somme $\oplus E_i$.

Proposition 11. Soit E_i des sev de E. Alors $\sum\limits_{i\in I} dim(E_i) \geq dim \sum\limits_{i\in I} \in i$. Si de plus la somme des E_i est directe, alors c'est une égalité.

Démonstration. Soient B_i des bases correspondant aux E_i

$$\sum_{i\in I} dim(E_i) = \sum_{i\in I} card(B_i) = card(\bigcup_{i\in I} B_i)$$

Or $\bigcup\limits_{i\in I} B_i$ génère $\sum\limits_{i\in I} E_i$. Donc $card(\bigcup B_i) \geq dim(\sum\limits_{i\in I} E_i)$. Donc $\sum\limits_{i\in I} dim(E_i) \geq dim(\sum\limits_{i\in I} E_i)$. Si de plus, la somme est directe, $\bigcup\limits_{i\in I} B_i$, est une base de $\bigoplus\limits_{i\in I} E_i$ d'après le corollaire 10. Donc $card(\bigcup_{i\in I} B_i) = dim \bigoplus_{i\in I} E_i$: on a bien égalité. □

Proposition 12. Soit (E_i) des sev tels que $dim(\sum\limits_{i\in I} E_i) = \sum\limits_{i\in I} dim(E_i)$. Alors la somme est directe.

Démonstration. Soient $(x_i) \sum\limits_{i\in I}$ avec $x_i \in E_i$ et $\sum\limits_{i\in I} x_i = 0$ chaque vecteur x_i est complété en une base B_i de E_i. Alors $\bigcup B_i$ engendre $\sum E_i$ d'après la proposition 8. De plus $\bigcup B_i$ a pour cardinal $\sum dim(E_i)$ qui vaut $dim(\sum E_i)$, par hypothèse. Donc c'est une base par le théorème de rappel. Or $(x_i)_{i\in I}$ est une sous famille de $\bigcup B_i$, donc elle est libre. Or $\sum\limits_{i\in I} x_i = 0$, donc $x_i = 0, \forall i \in I$. □

Définition 13. On dit qu'une fonction $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur lorsque $pop = p$. On projette sur $Im(p)$, parallèlement à $Ker(p)$.

Exemple. $E = \mathbb{R}^2, E_1 = Vect(e_1)$ et $E_2 = Vect(e_2)$. Soit $p(x,y) = (x,0)$. On a vu que p est le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2. (vérifier que $E_2 = Ker(p)$ et $E_1 = Im(p)$). Soient (E_i) des sev en somme directe, tels que $E = \bigoplus\limits_{i\in I} E_i$. Alors $\forall x \in E, \exists!$ famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E_i tels que $x = \sum\limits_{i\in I} x_i$. En effet :

— l'existence vient du fait que $E = \sum E_i$

— Montrons l'unicité : supposons que $x = \sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{i\in I} x'$, où x'_i et x_i sont dans E_i. Alors $\sum\limits_{i\in I}(x_i - x'_i) = 0$. Or $x_i - x'_i \in E_i$, et la somme est directe. Donc $x_i = x'_i$, $\forall i \in I$.

Proposition 14. La fonction $p_i : \begin{cases} E' \to E_i \\ x \mapsto x_i \end{cases}$ est un projecteur. Il projette sur E_i, parallèlement à $\bigcup_{j\neq i} E_j$.

De plus, $i \neq i' \Rightarrow \begin{cases} p_i o p'_i = 0 \\ \sum_{i\in I} p_i = Id \end{cases}$.

Démonstration. $p_i o p_i(x) = p_i(x_i)$. Or x_i s'écrit bien $x_i = 0 + ... + x_i + ... + 0$. Donc $p_i(x_i) = x_i$. Ainsi $pop(x) = p(x)$ et p est un projecteur. Par définition, $Im(p_i) \subset E_i$, car $p_i(x) = x_i \in E_i$. De plus, soit $y \in E_i$, alors $p_i(y) = y$. Donc $y \in Im(p_i)$. Ainsi, $p_i = E_i$. Soient $i \neq i'$ deux indices. On a $E'_i \subset \bigcup_{j\neq i} E_j = Ker(p_i)$. Or $p'_i(x) \in E'_i$. Donc $p_i(p'_i(x)) = 0$. Donc $p_i o p'_i = 0$. On a $x = \sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{i\in I} p_i(x) = (\sum\limits_{i\in I p_i}(x)$. Donc $\sum\limits_{i\in I} P_i = Id$. □

2 Applications linéaires.

$\mathcal{L}(E,F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F. C'est un ev de dimension $dim(E) \times dim(F)$.

2.1 Rang.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On rappelle que $Ker(u) = \{0\} \Leftrightarrow u$ est injective. $Im(u) = F \Leftrightarrow u$ est surjective.

Définition 1. On définit le rang de u : $rg(u) = dim(Im(u))$.

Théorème I.2.
1. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, et soit E' tel que $E = E' \oplus Ker(u)$. Alors u' définit par $u' : E' \to Im(u)$ et $x \mapsto u(x)$ est un isomorphisme.
2. $dim(Ker(U)) + rg(U) = dim(E)$

Rappel. Un isomorphisme est une application linéaire bijectif.

Démonstration. u' est clairement linéaire, à valeurs dans $Im(u)$, car u l'est. De plus montrons que :
- u est injectif. Soit $x \in E'$ tel que $u'(x) = 0$. Alors $u(x) = 0$. Donc $x \in Ker(u)$. Donc $x \in Keru \cap E'$. Or la somme est directe donc $x = 0$.
- u' est surjectif dans $Im(u)$. Soit $y \in Im(u)$. Alors $\exists x \in E$ tel que $y = u(x)$. Or $E = E' \oplus Ker(u)$. Donc on écrit $x = x' + t$ avec $x' \in E', t \in Ker(u)$ et $u(x) = u(x'+t) = u(x') + u(t) = u(x')$ caar $t \in Ker(u)$. Ainsi u' est surjectif.

Donc u' est bijective. Montrons 2) : puisque u' est un isomorphisme, $dim(E') = dim(Im(u))$. Or $dim(E') + dim(Ker(u)) = dim(E)$. Ainsi $dim(E) - dim(Ker(u)) = rg(u)$.
On peut retenir de 1) : "tout supplméentaire de $Ker(u)$ est isomorphe à $Im(u)$." □

Corrolaire 3. Si $dim(E) = dim(F)$, alors u surjective est équivalent à u injective donc u est bijective.

Démonstration. Si u est injective, alors $Ker(u) = \{0\}$, et par le théorème du rang, $rg(u) = dim(E)$. Or $dim(E) = dim(F)$. Donc $rg(U) = dim(F)$ et $Im(u) \subset F \Rightarrow Im(u) = F$. Donc u est surjective. Réciproquement, si u est surjective, $rg(u) = F$, et $dim(Ker(u) = 0$ par le théorème du rang. Donc $Ker(u) = \{0\}$ et u injective. □

Remarque. On a utilisé $F \subset E$ et $dim(F) = dim(E) \Rightarrow F = E$ et $dim(F) = 0 \Rightarrow F = \{0\}$

Application du corollaire. (traité en TD)
- par 2 points passe une droite.
- par 3 points passe un polynôme de degrès 2.
- par n points passe un polynôme de degrès $n-1$. C'est le polynôme interpolateur de Lagrange.

2.2 Dualité.

Définition 4. On appelle forme linéaire toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. On note E^* l'ensemble des formes linéaires de E. On l'appelle le dual de E.

Exemple. Si $E = C^0([a,b])$, alors $\phi \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_a^b f(x)dx \end{cases}$ est une forme linéaire.

Démonstration. (A savoir.) ϕ est bien à valeurs dans $\mathbb{K}$. De plus $\phi(f_1 + \lambda f_2) = \int_a^b (f_1 + \lambda f_2)(x)dx = \int_a^b f_1(x) + \lambda f_2(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \lambda \int_a^b f_2(x)dx = \phi(f_1) + \lambda\phi(f_2)$. Donc ϕ est linéaire. □

Exemple. $P_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x \end{cases}$ est une forme linéaire. C'est un cas particulier d'un exemple fondamental :
Soit E un espace vectoriel muni d'une base $(e_1, ..., e_n)$ pour $x \in E, x$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, où $x_i \in \mathbb{K}$ sont les coordonnées. On pose $e_i^*(x) = x_i$. Alors e_i^* est un élément de E^*.

Exercice. Vérifier que e_i^* est linéaire.

Théorème I.5. Soit E un espace vectoriel muni d'une base $(e_1, ..., e_n)$. Alors E^* est un espace vectoriel, et une base est $(e_1^*, ..., e_n^*)$. ainsi, $dim(E^*) = dim(E)$

Démonstration. (A savoir.) On a que $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, est donc un espace vectoriel. On calcule d'abord $e_i^*(e_j)$:
On a $e_j = 0.e_1 + ... + 1.e_j + ... + 0.e_n$. Ainsi $e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 \text{si} i = j \\ 0 \text{sinon} \end{cases}$. On note cela $\delta_{ij} := \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{sinon} \end{cases}$ (symbole de Fronecker).
Soit $\phi \in E^*$. On va montrer que $\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi(e_i)e_i^*$. Appelons $\tilde{\phi}$ cette dernière somme. Calculons $\tilde{\phi}(e_j)$:

$$\tilde{\phi}(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \phi(e_i)e_i^*(e_j) = \phi(e_1)e_1^*(e_j) + ... + \phi(e_n)e_n^*(e_j) = \phi(e_j)e_j^*(e_j) = \phi(e_j)$$

. On a utilisé $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$.
On a utilisé que dans la somme, tous les termes disparaissent sauf 1. (le j-ème). ainsi on a $\tilde{\phi}(e_j) = \phi(e_j), \forall j \in \{1, ..., n\}$. Donc ϕ et $\tilde{\phi}$ coïncident sur une base de E. Donc $\phi = \tilde{\phi} = \sum_{i=1}^{n} \phi(e_i)e_i^*$. Donc $(e_i^*)_{i=1,...,n}$ est une famille génératrice de E^*.
Montrons que c'est une famille libre :
Soit $(\alpha_i)_{i=1,...,n}$ des scalaires tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^* = 0$ (application linéaire nulle). On évolue cela en e_j. On a donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*(e_j) = 0$. Donc $\alpha_j = 0$, et ce pour tout j. Donc la famille est libre. On déduit donc que $(e_i^*)_{i=1,...,n}$ est une base de E^*, et donc $dim(E^*) = n = dim(E)$. □

Théorème I.6. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $\phi \in E^* \setminus \{0\}$ (i.e $\phi \in E^*$ et $\phi \neq 0$). Alors $Ker(\phi)$ est de dimension $n-1$. On dit que c'est un hyperplan de E.

Remarque. La réciproque est vraie (tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire).

Démonstration. (A savoir.) On applique le théorème du rang : $dim(Ker(\phi)) + dim(Im(\phi)) = dim(E) = n$. Or $\phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Donc $Im(\phi) \subset \mathbb{K}$. Or les sev de $\mathbb{K}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{K}$. Si $Im(\phi) = \{0\}$, alors $\phi = 0$. Or $\phi \neq 0$. Donc $Im(\phi) = \mathbb{K}$, et $rg(\phi) = 1$. Donc dim $Ker(\phi) = n-1$. □

2.3 Traces.

Définition / Proposition 7. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit B une base de E et $A = Mat_B(u)$. On note (a_{ij}) ses coefficients. alors le nombre $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ ne dépend que de u, et pas du choix de B. On l'appelle la trace de u. On note $tr(u) = tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. De plus , $tr(AB) = tr(BA)$, et l'application $tr : \begin{cases} E \to \mathbb{K} \\ u \mapsto tr(u) \end{cases}$ est une forme linéaire.

Démonstration. Commençons par montrer que $tr(AB) = tr(BA)$. Soit $C = AB$ et $D = BA$. Notons (C_{ij}) les coefficients de C. Alors $C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. De même, $D_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{k_j}$. ainsi $tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} C_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$ et $tr(BA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{ik}$. Ainsi $tr(BA) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ik} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} a_{pq}b_{qp}$ et $tr(AB) = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} a_{pq}b_{qp}$. Donc ces 2 sommes sont égales.
Soit B une matrice de u, dans une base B'. Alors $B = P^{-1}AP$, où P est la matrice de changement de base (A et B sont semblables). On a alors $tr(B) = tr(P^{-1}AP) = tr(P^{-1} \times (PA)) = tr(IA) = tr(A)$. Ainsi $tr(u)$ ne dépend pas du choix de la base. Puisque $tr(A + \lambda B) = tr(A) + \lambda tr(B)$, c'est clairement une forme linéaire. $\square$

3 Matrices par blocs et sev stables.

3.1 Règles absolues.

Rappel Pour multiplier 2 matrices A et B, le nombre de colonnes de A doit être le nombre de lignes de B (pour faire AB). Autrement dit : $A \in M_{qn}$ et $B \in M_{n,p}$, alors $AB \in M_{qp}$. On peut découper une matrices par blocs : $A\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A_{t1} & \cdots & A_{ts} \end{pmatrix}$ où A_{ij} sont des "sans matrices" (au des blocs), avec $A_{ij}ßM_{n_i,p_j}, i = \{1, ..., t\}\, etj \in \{1, ..., s\}$ et si $A \in M_{n,p}$ on a $\sum_{i=1}^{t} n_i = n$ et $\sum_{j=1}^{s} p_j = p$.

Exemple. Soit $X \in M_{m,1}(\mathbb{K})$ et $Y \in M_{p,1}(\mathbb{K})$. Alors $(X, Y) \in M_{n+p,1}(\mathbb{K})$ et (X, Y) n'a aucun sens.

Manipulations. On peut additionner des matrices par blocs (si les blocs sont compatibles) : $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} + \lambda B_{11} & ... \\ ... & ... \end{pmatrix}$.
On peut aussi les multiplier : $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}.B_{11} + A_{12}.A_{21} & ... \\ ... & .... \end{pmatrix}$.
On peut aussi les transposer : Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, a pour coefficient les $(a_{ij_{i=1,\dots,n \text{ et } j=1,\dots,p}}$, alors ${}^tA$ est une matrice de $\mathcal{L}_{pn}$, de coefficients (a_{ij}).
Pour une matrice par blocs : ${}^t\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA_{11} & {}^tA_{21} \\ {}^tA_{12} & {}^tA_{22} \end{pmatrix}$.

3.2 Matrices "creuses" et bien avec les sev stables.

Définition 1. Une matrice est dite triangulaire par blocs supérieurs si elle est de la forme. $\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots A_{1n} & \\ 0 & \dots & A_{nm} \end{pmatrix}$.

Remarque. Une matrice triangulaire est triangulaire par blocs (ils sont de taille 1), la réciproque est fausse.

Définition 1 bis. O définit de même les matrices diagonales par blocs, elles sont de la forme $\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{nm} \end{pmatrix}$. Les blocs peuvent être de tailles différentes.

Proposition 2. Les matrices triangulaires par blocs supérieurs et inférieurs et diagonales sont 3 sous ensembles stables par combinaison linéaire (ce sont des ev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) qui sont stables par produit.

Démonstration. Par le calcul, identique aux preuves de stabilité pour les matrices triangulaires et diagonales.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_{SS} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1S} \\ \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & B_{SS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} & \dots \\ 0 & A_{22}B_{22} & \dots \\ 0 & \dots & A_{SS}B_{SS} \end{pmatrix}.$$ □

Rappel. A est inversible si et seulement si $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = BA = I_n$. On note $B = A^{-1}$. On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles.

Proposition 3. Soit A une matrice diagonales par blocs ou triangulaires par blocs telle que les blocs diagonaux sont inversibles. Alors cette matrice est inversible, de plus : $\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & 0 \\ . & \ddots & . \\ 0 & \dots & A_{SS} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & \dots & 0 \\ . & \ddots & . \\ 0 & \dots & A_{SS}^{-1} \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_{SS} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_{SS}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Pour les matrices diagonales on vérifie que $\begin{pmatrix} A_{11} & . & 0 \\ . & \ddots & . \\ 0 & \dots & A_{SS} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & \dots & 0 \\ . & \ddots & . \\ 0 & \dots & A_{SS}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}.A_{11}^{-1} & . & 0 \\ . & \ddots & . \\ 0 & . & A_{SS}A \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} I_{n_1} & . & 0 \\ . & \ddots & . \\ 0 & . & I_{n_S} \end{pmatrix} = I_n$. La preuve pour les matrices triangulaires est plus dure. On verra une preuve rapide avec le déterminant. □

Définition 4. Soit $U \in \mathcal{L}(E)$, et soit $F \subset E$ un sev de E. On dit que F est stable par U si $U(F) \subset F$. On a alors que $U_{|F}$, la restriction de U à F, est un endomorphisme de F.

Remarque. F stable par $U \Leftrightarrow \forall x \in F, u(x) \in F$

Notation. Si $f : E \to F$ est une fonction, et si $A \subset E$ est un sous ensemble de E. Alors $f_{|A}$, désigne la restriction de f à A. On la définit par $f_{|A} \begin{cases} A \to F \\ x \to f(x) \end{cases}$.

Proposition 5. Pour que F sait stable par u, il faut et il suffit qu'il existe une base $B = (e_1, ..., e_n)$ telle que $(e_1, ..., e_p)$ est une base de F (donc B est adaptée à F), telle que $Mat_B(u)$ et de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où $A, B, C, 0$ sont des blocs.

Démonstration. Supposons F stable par U. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une base de F, que l'on complète en une base $(e_1, ..., e_p, ..., e_n)$ de E. On décompose $u(e_1)$ dans la base : on sait que si $i \leq p, u(e_i) \in F$ (car F est stable). Donc il existe des nombres $(a_{ij})_{j=1,...,p}$ tels que $u(e_i) = a_{ii}e_1 + ... + a_{ip}e_p = a_{i1}e_1 + ... + a_{ip}e_p + 0e_{p+1} + ... + 0e_n$. Ainsi, si $B = (e_1, ..., e_n)$, la i-ème colonne de $Mat_B(u)$ est donnée par les coefficients de $u(e_1)$, dans B. Autrement, la i-ème colonne, pour $i \leq e$ est $\begin{pmatrix} a_{1i} & \dots & a_{pi} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Donc $Mat_B(u)$ est de la forme : $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} & \dots \\ \vdots & & & \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix}$.

Supposons que $Mat_B(u)$ est de cette forme , où $B = (e_1, ..., e_p, ..., e_n)$. Soit $x \in F$. Alors x s'écrit $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$, puisque $(e_1, ..., e_p)$ est une base de F, où (x_i) sont des scalaires. On a alors $u(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i u(e_i)$, or $u(e_i) = a_{1i}e_1 + ... + a_{pi}e_p + 0e_{p+1} + ... + 0e_n$, pour $i \leq p$. Donc $u(e_i) \in F$ pour $i \leq p$. Donc $u(x) \in F$. $\square$

Remarque. A est en fait $Mat_{e_1,...,e_p}(U_{|F})$.

Proposition 5 bis. Soient $(E_i)_{i=1,...,s}$ des sev stables par u, tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{s} E_i$. Alors dans une base adaptée à cette somme, le matrice de u est diagonale par blocs. De plus, si (B_i) sont les bases des E_i, et que $B = \bigcup_{i=1}^{S} B_i$, alors $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_s \end{pmatrix}$, où $A_i = Mat_{B_i}(u_{|E_i})$.

Démonstration. Adaptée depuis P5. $\square$

Exemple. Soit $u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \to (-y, x, z) \end{cases}$ Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Donc $vect(e_1, e_2)$ et $vect(e_3)$ sont stables et U restreint à E_1 a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En effet $E_1 = (Oxy)$ et $E_2 = (Oz)$ sont biens stables par cette relation.

Deuxième partie

Déterminants

1 Déterminants d'une famille de vecteur.

Définition 1. Une fonction n-linéaire est une fonction $f = E^n \to \mathbb{K}$, qui est de plus linéaire par rapport à chaque variable. Cela veut dire que $\forall (x_i)_{i=1,\ldots,n} \in E^n$, $\begin{cases} \text{si on fixe } j \text{ , alors } x_j \to f(x_1, ..., x_j, ..., x_n) \text{ est linéaire} \\ \text{si on fixe } (x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n) E \to \mathbb{K} \end{cases}$

Exemple. La fonction $\begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x.y \end{cases}$ est 2-linéaire (on dit "bilinéaire"). En effet on fixe $x \in \mathbb{R}^n$, alors $f(x, y_1 + \lambda y_2) = x.(y_1 + \lambda y_2) = xy_1 + \lambda xy_2 = f(x, y_1) + \lambda f(x, y_2)$. De même on fixe $y \in \mathbb{R}^n$, alors $f(x_1 + \lambda x_2, y) = y(x_1 + \lambda x_2) = yx_1 + \lambda yx_2 = f(x_1, y) + \lambda f(x_2, y)$.

Définition 1 bis. Une forme n-linéaire est alternée si : $(i \neq j$ et $x_i = x_j) \Rightarrow f(x_1, ..., x_i, ..., x_j j, ...x_n) = 0$ (c'est à dire je répète 2 fois le même vecteur ce qui implique que f vaut 0). On note $\mathcal{A}_n(E)$ les formes n-linéaires alternées sur E.

Proposition 2. Si $f \in \mathcal{A}_n(E)$, et si $(x_1, ..., x_n)$ est liée, alors $f(x_1, ..., x_n) = 0$.

Démonstration. On suppose que $(x_1, ..., x_n)$ est liée. Donc $\exists (\alpha_i)_{i=1,\ldots,n}$ des scalaires tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$, et $\exists i_0$ tel que $\alpha_{i_0} \neq 0$ (car les scalaires sont non tous nuls).
Donc $x_{i_0} = -\dfrac{1}{\alpha_{i_0}} \sum\limits_{i \neq i_0} \alpha_i x_i$. Donc $f(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., -\dfrac{1}{\alpha_0} \sum\limits_{i \neq i_0} \alpha_i x_i, ..., x_n) = -\sum\limits_{i \neq i_0} \dfrac{\alpha_i}{\alpha_{i_0}} f(x_1, x_i, ..., x_n)$, par linéarité de f par rapport à la variable i_0. Or $f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = 0$, car x_i est aux places i et i_0, donc on utilise que f est alternée. □

Théorème II.3. Soit E un espace vectoriel de $dim(n)$. Alors $\mathcal{A}_n(E)$ est un espace vectoriel de $dim(1)$. Si $B = (e_1, ..., e_n)$ est une base de E, alors il existe une unique fonction dans $\mathcal{A}_n(E)$, notée det_B, telle que $det_B(e_1, ..., e_n) = 1$. On l'appelle le déterminant dans la base B.

Démonstration. Admise. □

Proposition 4. Soit $f \in \mathcal{A}_n(E)$. Alors $f = f(e_1, ..., e_n) \times det_B$. En particulier, $det_{B'} = det_{B'}(e_1, ..., e_n) \times det_{B'}$ où B' est une autre base de E.

Démonstration. Puisque $\mathcal{A}_n(E)$ est de dimension , tous ses éléments sont colinéaires. Ainsi, $\exists \lambda \in \mathbb{K}, f = \lambda det_B$. On évalue cela en $e_1, ..., e_n$: $f(e_1, ..., e_n) = \lambda det_B(e_1, ..., e_n)$. Donc on a la valeur de λ. La deuxième égalité n'est autre que la première avec $f = det_{B'}$. □

Proposition 5. Une famille $(x_1, ..., x_n)$ est liée si et seulement si $det_B(x_1, ..., x_n) = 0$. De plus, si B et B' sont 2 bases de E, alors $det_B(B') \times det_{B'}(B) = 1$.

Démonstration. On commence par montrer la formule. On évolue la deuxième égalité de $P4$ en B' : $det_{B'}(B') = det_{B'}(B) \times det_B(B')$. Maintenant supposons que $(x_1, ..., x_n)$ est libre, donc c'est une base car $dim(E) = n$. On la note B'. La formule montre que $det_B(B') \neq 0$. La réciproque est la contraposée de $P2$. □

Proposition 6. On a les effets suivants pour le det_B. Soit $(x_1, ..., x_n)$ des vecteurs de E, alors :

— Effet des "transvections" : $det_B(x_1, ..., x_j, ..., x_n) = det_B(x_1, ..., x_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i x_i, ..., x_n)$.

— Effet des "dilatations" : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, det_B(x_1, ..., \lambda x_i, ..., x_n) = \lambda det(x_1, ..., x_n)$

— Effets des "permutations" $\forall i \neq j, f(x_1, ..., x_i, x_j, ..., x_n) = -f(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_n)$

Preuve. Les effets de transvection et dilatation se déduisent directement de $f \in \mathcal{A}_n(E)$. Pour la permutation $f(x_1, ..., x_i + x_j, ..., x_i + x_j, ..., x_n) = 0$ car f est alternée. $f(x_1, ..., x_i, ..., x_i + x_j, ..., x_n) + f(x_1, ..., x_j, ..., x_i + x_j, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_i, ..., x_i, ..., x_n) + f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n) + f(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_n) + f(x_1, ..., x_j, ..., x_j, ..., x_n)$.

2 Déterminant d'un endomorphisme.

Proposition 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit B une base de E. alors $det_B(u(e_1), ..., u(e_n))$ ne dépend plus de B. On appelle $det(u)$ cette valeur. On a de plus, pour toute famille $(x_1, ..., x_n)$, $det_B(u(x_1), ..., u(x_n)) = (det(u)) \times det_B(x_1, ..., x_n)$

Démonstration. Voir travaux dirigés. □

Théorème II.2. Soient u et v dans $\mathcal{L}(E)$. Alors $det(uov) = det(u) \times det(v)$

Preuve. Soit B une base, alors $det(uov) = det_B((uov)(e_1), ..., (uov)(e_n))$. On appelle $x_1 = v(e_1), ..., x_n = v(e_n)$ et on applique $P1$. $det(uov) = det(u) \times det_B(x_1, ..., x_n) = det(u) \times det_B(v(e_1), ..., v(e_n))$

Proposition 3. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est inversible si et seulement si $det(u) \neq 0$. On a alors $det(u^{-1}) = \frac{1}{det(u)}$. De plus $det(Id) = 1$.

Démonstration. $det(I_D) = det_B(I_D(e_1), ..., I_D(e_n)) = det_B(e_1, ..., e_n) = 1$ par définition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $det(uou^{-1}) = det(u) \times det(u^{-1}) = det(I_D) = 1$ Donc $det(u) \neq 0$ et $det(u^{-1} = \frac{1}{det(u)}$
Supposons maintenant que $det(u) \neq 0$. Soit B une base de E, alors $det_B(u(e_1), ..., u(e_n)) \neq 0$ Donc par I-P3, $(u(e_1), ..., u(e_n))$ est libre. Or $dim(E) = n$. Donc c'est une base Donc elle est bijective. □

Proposition 4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $det(\lambda u) = \lambda^n \times det(u)$ où $n = dim(E)$

Démonstration. (A savoir.) Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Alors $det(\lambda u) = det_B((\lambda u)(e_1), ..., (\lambda u)(e_n)) = det_B(\lambda u(e_1), ..., \lambda u(e_n) = \lambda det_B(u(e_1), \lambda u(e_2), ..., \lambda u(e_n)) = ... = \lambda^n det_B(u(e_1), ..., u(e_n)) = \lambda^n det(u)$ □

3 Déterminant d'une matrice.

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice. On note c_i ses colonnes. On les identifie à des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Alors on pose $det(A) = det_B(c_1, ..., c_n)$

Proposition 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $det(u)$ est aussi le déterminant de n'importe qu'elle matrice représentant u, dans une base quelconque. Autrement dit : 2 matrices semblables ont le même déterminant.

Démonstration. voir TD □

Corollaire 3. On a $det(I_n) = 1 \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$,$det(AB) = det(A).det(B)$, $A \in C_{|n}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow (det(A)) \neq 0$, et alors $det(A)^{-1} = \dfrac{1}{det(A)}$

Démonstration. On utilise P2. I_n est la matrice de l'identité das n'importe quelle base donc $det(I_n) = det(I_d) = 1$. Si A représente U dans la base canonique alors λA représente λu. Si A représente u dans la base canonique et si B représente v dans la base canonique alors AB représente uov. Si A représente u dans la base canonique, alors A^{-1} représente u^{-1}. □

Remarque. $det(A + B) \neq det(A) + det(B)$

Proposition 4. (matrice diagonale)
Soit $D = \begin{pmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$ une matrice diagonale. Alors $det(D) = \prod\limits_{i=1}^{n} d_i = d_1 .... d_n$.

Démonstration. D a pour colonnes $d_1e_1, ..., d_ne_n$ où $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ à la i-ème place. Le $i - me$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Donc par $D1$, $det(D) = det_B(d_1e_1, ..., d_ne_n) = d_1 det_B(e_1, d_2e_2, ..., d_ne_n) = ... = (d_1...d_n) \times det_B(e_1, ..., e_n)$. □

4 Action sur les lignes - colonnes

Soit A une matrice dont on note (C_i) les colonnes. Alors :

— Remplacer c_j par $\sum\limits_{i \neq j} \lambda_i c_i$ ne change pas $det(A)$ (transvecteurs.)

— Remplacer c_j par λc_j change $det(A)$ en $\lambda det(A)$ (dilatations.)

— Echanger c_i et c_j change $det(A)$ en $-det(A)$ (permutations.)

Théorème II.5. Soit $T = (t_{ij})$ une matrice triangulaire supérieure. Alors $det(T) = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}$

Démonstration. (à savoir.) On distingue 2 cas : Si un des t_{ii} vaut 0.

— Si c'est t_{11}, alors $c_1 = 0$, et $(c_1, ..., c_n)$ est lié, donc $det_B(c_1, ..., c_n) = 0$, où B est la base canonique.

— Si c'est t_{ii} avec $i \geq 2$ c'est à dire que $T = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & t_{i-1i-1} & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots \end{pmatrix}$. Alors on remarque que $(c_1, ..., c_{i-1}) =$

$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & \dots \\ 0 & t_{22} & \dots & \dots \\ \vdots & 0 & ti-1i-1\dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une famille échelonnée, donc elle est libre.

Donc $vect(c_1, ..., c_{i-1}) = vect(e_1, ..., e_{i-1})$. Or $c_i = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ t_{i-1i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in vect(e_1, ..., e_{i-1})$. Donc $(c_1, ..., c_i)$ est liée.

Donc $(c_1, ..., c_n)$ est liée en tant que sur famille donc $det(T) = det_B(c_1, ..., c_n) = 0$.

— Si aucun des t_{ii} ne vaut 0. On remplace c_i par $c_i - \dfrac{t_{1i}}{t_{11}} c_1$, et ce pour i de 2 à n. On commence par $i = 2$:

on note $c_2' = c_2 - \dfrac{t_{12}}{t_{11}} c_1 = \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{t_{12}}{t_{11}} \begin{pmatrix} t_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

De même : $c_i' = c_i - \dfrac{t_{1i}}{t_{11}} c_1 = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ii} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{t_{1i}}{t_{11}} \begin{pmatrix} t_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t_{2i} \\ \vdots \\ t_{ii} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$. Ainsi ces opérations transforment T en

$T_1 = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$. On réitère l'opération pour $i \geq 3$, on fait $c_i' \leftrightarrow c_i' - \dfrac{t_{2i}}{t_{22}} c_2'$. On continue, en

faisant pour $i \geq j+1$, $c_i \leftarrow c_i - \dfrac{tji}{t_{ii}} c_j$. Au final, on obtient la matrice $\tilde{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_{22} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$.

Cette matrice diagonale a pour déterminant $\prod_{i=1}^{n} t_{ii}$ par P4, de plus sont déterminant et le même que le déterminant de T, car elle a été obtenue par des transvections.

□

Remarque. Un corollaire de la preuve est "par une série de transvections, on peut transformer une matrice triangulaire e une matrice diagonale". Sur les systèmes échelonnés $\begin{cases} y+x=-3 \\ 2y-6x=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y+x=-3 \\ y=-7 \end{cases}$. Si l'on les note sous forme matriciel : $S_1 : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, S_2 : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$. S_2 est dites échelonné. On dit aussi que des vecteurs sont "échelonnés" si ils sont de la forme. Avec $a_{ii} \neq 0 \forall i$. Alors : $\forall i \in \{1, ..., n\}, vect(c_1, ..., c_i) = vect(e_1, ..., e_{i})$.

Exemple. $vect(c_1, c_2), vect(a_{11}e_1, a_{12}e_1 + a_{22}e_2) = vect(a_{11}e_{11}, c_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}}c_1) = vect(a_{11}e_1, a_{12}e_2) = vect(e_1, e_2)$. La matrice donnée par les (c_i) est triangulaire. Un système linéaire associé se résout facilement " de proche en proche".

Théorème II.6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $det(A) = det(\,^tA)$.

Démonstration. admis □

Conséquence : toutes les opérations sur les colonnes sont valables sur les lignes. On parle d'opérations lignes colonnes. On les fait, les une après les autres.

Définition 7. On appelle mineur (i, j) d'une matrice A, le déterminant de la matrice obtenue en rayant la ième ligne et la jème colonne. On la note m_{ij}. Le cofacteur (i, j) vaut alors $(-1)^{i+j}m_{ij}$ (on la note ici A_{ij}). On note aussi M_{ij} la matrice mineur (i, j).

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Alors $M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, et $m_{23} = det(M_{23}) = 1 \times 3 - 2 \times 2 = -1$ et $A_{23} = (-1) \times (-1) = 1$

Théorème II.8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit j entre 1 et n, fixé. Alors $det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$, où (a_{ij}) sont les coefficients de A, et A_j ses cofacteurs. On peut aussi fixer i entre 1 et n on a :

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

Démonstration. Soient (c_i) les colonnes de A, A_{ij} les cofacteurs. On commence par montrer :

$$det \quad \underbrace{[c_1, ..., e_i, ..., c_n]}_{\text{matrice obtenue en plaçant } e_i \text{ à la } j-me \text{ colone de } A} \quad = A_{ij}$$

En effet, cette matrice est $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.
On permute la $j-me$ colonne et la $(j-1)me$, puis on recommence. On trouve que ce déterminant vaut :

$$det\begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 1 & c_1 & \dots & c_{j-1} & c_{j+1} & \dots & c_n \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix} \times (-1)^j.$$

$det(A) = det_B(c_1, ... \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i, ..., c_n)$ en effet, $c_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$. Par linéarité du déterminant : $det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}det_B(c_1, ..., e_i, ..., c_n)$. On peut de même développer par rapport à une ligne grâce à $det(A) = det({}^tA)$. □

5 Quelques calculs de déterminant

5.1 Développements.

Pour les petites dimensions :

$n = 1$. ici, $A = a \in \mathbb{R}$. On a $det(a) = adet(1)$. Or 1 est la base canonique de $\mathbb{R}$. Donc $det(a) = a$.

$n = 2$. on a $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a \times d + (-1)^{1+2}b \times c = ad - bc$.

$n = 3$. on utilise la règle de Sarrus $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd$

$n \geq 4$. pas de règle pour calculer, chercher à repérer une ligne (ou une colonne) avec des 0.Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. On développe par rapport à la 4ème colonne : $det(A) = (-1)^5 \times 4 \times \begin{vmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^8 \times (-3) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Exercice. Soient a et b deux réels , et $D(a,b) = \begin{vmatrix} a & \vdots & b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b & \dots & a \end{vmatrix}$.

1. Remplacer c_1 par $c_1 + \sum_{i\geq 2} c_i$: $D(a,b) = \begin{pmatrix} a+(n-1)b & b & \vdots & b \\ \vdots & a & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \dots & a \end{pmatrix}$.

2. Par une opération sur les lignes faire apparaître $(1,0,...,0)$ sur la première colonne : On a donc par dilatation : On pose $\lambda = (n-1)b + a$. $D(a,b) = \begin{vmatrix} \lambda & & & \\ \vdots & C_2 & \dots & C_n \\ \lambda & & & \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & & & \\ \vdots & c_2 & \dots & c_n \\ 1 & & & \end{vmatrix} = (n-1)b +$ $a \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & b \\ \vdots & a & \dots & b \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots \\ \vdots & b & \dots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & a \end{vmatrix}$. On fait fait $L_2 = L_2 - L_1$, et $L_3 = L_3 - L_1, ..., L_n = L_n - L_1$. Ainsi

$$D(a,b) = \lambda \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b & \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 0 & a-b & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 & \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & a-b & \end{vmatrix}$$

3. En déduire $D(a,b)$: On développe par rapport à la première colonne : $D(a,b) = \lambda \times 1 \times (-1)^2 \times \begin{vmatrix} a-b & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$.

Remarque. Ne pas toujours forcer sur Sarrus, par exemple : $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$. On développe par rapport à la 1ère ligne : $d = 0A_{11} + 0A_{12} + 2 \times A_{13} = 2 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -14$.

La somme des coefficients par colonnes vaut la même chose sur chaque ligne. Avec un même coefficient sur une colonne, on fait apparaître des 0.

5.2 Calculs par blocs.

Proposition 1. On a pour des matrices triangulaires par blocs la règle suivante

$$det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = det(A) \times det(C)$$

Démonstration. On décompose la matrice : $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$. Ici $n =$ taille de A et $P =$ taille de C. Or $det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = ... = det(C)$. De même, $det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_P \end{pmatrix} = det(A)$. On conclue avec

$det(PQ) = det(P) \times det(Q)$ □

Remarque. Si $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ est une matrice par blocs, $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq det(A)det(B) - det(B)det(C)$.

6 Applications

6.1 Formules de Cramer.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On cherche à résoudre $\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$. Cela se réécrit $AX = B$ où $X = (x_1, ..., x_p) \in \mathcal{M}_{p,1}$ est la nouvelle inconnue.

Soit u l'application associé à A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, soit b le vecteur de $\mathbb{R}^n$ associé à B dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et x le vecteur de $\mathbb{R}^n$ associé à X dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors $AX = B \Leftrightarrow u(x) = b$. Ainsi résoudre $AX = B$, c'est à dire trouver $u^{-1}(\{b\})$.

Définition 1. On dit que le système est "de Cramer" si $p = n$, et que $det(A) \neq 0$.

Proposition 2. Soit $AX = B$ un système de Cramer. Alors il admet une unique une unique solution, qui est donnée par : $X = \begin{pmatrix} x_a \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ où

$$x_k = \frac{1}{det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Démonstration. Puisque $det(A) \neq 0$, $det(u) \neq 0$ aussi, et u est bijective, donc l'équation $u(x) = b$ admet une unique solution. Le reste de la preuve est admise □

Corollaire 3. Soit A tel que $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)}\, {}^t com(A)$ est la matrice des cofacteurs.

Démonstration. Voir TD. □

Remarque. Cela permet de calculer A^{-1} en dimension 3, mais en dimension supérieur à 4, cela donne de gros calculs.

6.2 Déterminant de Vandermonde.

Soient $(x_1, ..., x_n)$ des réels. On appelle déterminant de Vandermonde :

$$V(x_1, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Théorème II.4. On a

$$v(x_1, ..., x_n) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

Démonstration. Admis □

Troisième partie

Réduction des endomorphismes (et de leurs matrices)

1 Valeurs propres et vecteurs propres

Ici E désigne un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit que λ est une valeur propre (notée vp) de f si il existe $x \in E$ non nul tel que $f(x) = \lambda x$. On dit que $x \in E$ est vecteur propre de f si $x \neq 0$ et si $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$.
L'ensemble des valeurs propre de f est le spectre de f, noté $sp(f)$, c'est un sous ensemble de $\mathbb{K}$.

Définition 1 bis. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. De même : λ est valeur propre de A si $\exists X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$, où $X \in \mathbb{R}^n$ et X est vecteur propre de A si $X \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que$AX = XX$.

Remarque. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où $dim(E) = n$. Soit B une base de E et $A = mat_B(f)$. Alors λ est valeur propre de f donc λ est valeur propre de A. De plus x est valeur propre de f donc X est valeur propre de A où $X = mat_B(n)$.

Proposition 2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et E un espace vectoriel de dimension finie ($n = dim(E)$). $\lambda \in sp(f) \Leftrightarrow f - \lambda I_d$ est non injectif $\Leftrightarrow Ker(f - \lambda I_d) \neq \{0\} \Leftrightarrow rg(f - \lambda I_d) < n$.

Proposition 2 bis. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\lambda \in sp(A) \Leftrightarrow Ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \Leftrightarrow A - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow rg(A - \lambda I_n) < n$.
En particulier : $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow 0 \notin sp(A)$.

Démonstration. Soit $\lambda \in sp(f)$. Donc $\exists x \neq 0$ dans E tel que $f(x) - \lambda x$. Donc $(f - \lambda I_d)(x) = 0$. Donc $x \in Ker(f - \lambda I_d)$. Donc $Ker(f - \lambda I_d) \neq \{0\}$ et $f - \lambda I_d$ est non injectif. La réciproque est vraie si $Ker(f - \lambda I_d) \neq \{0\}$, $\exists x \neq 0$ dans $Ker(f - \lambda I_d)$, i.e $\begin{cases} (f - \lambda I_l)(x) = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \lambda x \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in sp(f)$ puisque $dim(E) < +\infty$, $f - \lambda I_d$ non injectif c'est à dire $f - \lambda I_d$ sont surjectifs donc $rg(f - \lambda I_d) < n$. □

Définition - Proposition 3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in sp(f)$. Si x est tel que $x \neq 0$ et $f(x) = \lambda x$, on dit que λ et x sont valeurs propres et vecteur prores associés. On appelle sous espaces propres associé à λ, noté parfois $sep(\lambda)$, le sev $Ker(f - \lambda I_d)$. Il est formé des vecteurs propres de f associé à λ, ainsi que de 0.

Démonstration. Soit $x \in sep(\lambda)$, alors $(f - \lambda I_d)(x) = 0$ i.e $f(x) = \lambda x$, i.e, x est vecteur propre associé à λ (ou bien $x = 0$). □

Remarque. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in sp(f)$. Alors $SEP(\lambda)$ est un sev de E.

Remarque. $sep(\lambda)$ est un sev stable par f. De plus, la restriction de f à ce sev est l'homothétie de rapport λ :

$$f_{|sep(\lambda)} = \lambda I_d$$

Rappel. Soit E un espace vectoriel, l'homothétie de rapport λ est l'application λI_d. On la note h_λ, on a $\forall x \in E, h(x) = \lambda x$. Sa matrice dans n'importe quelle base est $\begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n$.

On remarque que le $sp(h) = \{\lambda\}$ et tout vecteur est vecteur propre associé.

Exemples. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définit par $u(e_1) = 2e_1$ et $u(e_2) = -e_2$. Alors $2 \in sp(u)$ et $e_1 \in sep(2)$, $1 \in sp(u)$ et $e_2 \in sep(-1)$. La matrice de u dans $B = (e_1, e_2)$ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de A, et les vecteurs propres associés.

On résout l'équation aux valeur propres $AX = \lambda X$ ici λ et X sont inconnues. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Alors

$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + ... + x_n = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_1 + ... + x_n = \lambda x_n \end{cases}$. Donc $\lambda x_1 = ... = \lambda x_n$. Donc soit $\lambda = 0$, soit $x1 = ... = x_n$.

— Si $\lambda = 0$, alors $x_1 + ... + x_n = 0$

— Si $x_1 = ... = x_n$ alors $nx_1 = \lambda x_1$, si $x_1 = 0$, alors $X = 0$. Or on cherche des $X \neq 0$. Donc $x_1 \neq 0$.

Conclusion : $sp(A) = \{0, n\}$. De plus, $sep(0) = \{X \in \mathbb{R}^n, x_1 + ... + x_n = 0\}$. C'est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. Une base e_n est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a aussi $sep(n) = \{X \in \mathbb{R}^n, x_1 = ... = x_n\}$. C'est une droite engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarque. Soit $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ \lambda \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \end{cases}$. C'est une forme linéaire et donc $sep(0) = Ker(\phi)$ est bien un hyperplan.

La base donnée doit être vérifié (libre et génératrice).

Remarque. Donner les vecteurs propres de f veut dire décrire les *sep* en donnant leurs dimension ainsi qu'une base.

Proposition 4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soient $\lambda_1, ..., \lambda_N$ des valeur propres de f. Alors les *sep* associés sont en somme directe.

Démonstration. (à savoir) Par récurrence sur N :

Initialisation. Si N=2. Supposons que $x_1 \in sep(\lambda_1)$ et $x_2 \in sep(\lambda_2)$ sont tel que $x_1 + x_2 = 0$. On applique f : $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = 0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ donc $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ \lambda_1(x_1 + x_2) = 0 \end{cases}$ puis $(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 = 0$. Or $\lambda_2 \neq \lambda_1$ donc $x_2 = 0$ puis $x_2 = -x_1 = 0$.

Hérédité. Supposons la propriété vraie au rang N. Montrons qu'elle est vraie au rang $N+1$: Soient $(x_i)_{i=1,...,N+1}$ avec $x_i \in sep(\lambda_i)$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{N+1} x_i = 0$. Alors de même, $f(\sum x_1) = \sum\limits_{1}^{N+1} \lambda_i x_i = 0$.
On multiplie $\sum\limits_{1}^{N+1} x_i$ par λ_{N+1}, et on le soustrait à $\sum\limits_{1}^{N+1} \lambda_i x_i = 0$. On obtient $\sum\limits_{i=1}^{N} (\lambda_{N+1} - \lambda_i)x_i = 0$.
Or les $sep(\lambda_i)$, pour $i = 1, ..., N$, forment N *sep*. Par hypothèse de récurrence, ils sont en somme directe.
Donc $\sum\limits_{i=1}^{N} (\lambda_{N+1} - \lambda_i)x_i = 0 \Rightarrow (\lambda_{N+1} - \lambda_i)x_i = 0, \forall i \leq N$. La propriété est montrée au rang $N+1$.

$\square$

Exemple (hors programme). Soit $E = C^\infty(\mathbb{R})$. Soit $D : \begin{cases} E \to E \\ f \mapsto f' \end{cases}$. Alors $D(f+\lambda g) = (f+\lambda g)' = f' + \lambda g'$.
Donc $D \in \mathcal{L}(E)$.
De plus $\lambda \in sp(D) \Leftrightarrow \exists f \neq 0, D(f) = \lambda f \Leftrightarrow f' = \lambda f \Leftrightarrow f(x) = Ce^{\lambda x}$, où $C \in \mathbb{R}$. Ainsi, tout $\lambda \in \mathbb{R}$ est *vp* et $sp(D) = \mathbb{R}$. Ici, $dim(E) = +\infty$ en appliquant P4, on retrouve l'exercice 2 de la faille 1, (les vp forment une famille libre puisque les *sep* sont en somme directe).

2 Polynôme caractéristique.

Définition - proposition 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors la fonction $\begin{cases} \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ X \mapsto det(A - XI_n) \end{cases}$ est un polynôme, appelé "polynôme caractéristique". On le note souvent χ_A.
De même, si $f \in \mathcal{L}(E)$, on définit $\chi_f(X) = det(f - XI_D)$, le polynôme caractéristique de f.

Remarque. Si A est une matrice de f, alors par définition du déterminant on a $\chi_f = \chi_A$. On peut la vérifier : en effet si $A \sim B$, alors A et B représentent le même endomorphisme, et $B = P^{-1}AP$, où $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors $\chi_B(X) = det(B - XI_n) = det(P^{-1}AP - XP^{-1}P) = det(P^{-1}(A - XI_n)P) = det(P^{-1})det(A - XI_n)det(P) = det(A - XI_n) = \chi_A(X)$.
Ainsi "2 matrices semblables ont le même polynôme caractéristique". La réciproque est fausse : Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\chi_{A_1}(X) = det(A_1 - XI_2) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 0 & -X \end{vmatrix} = X^2$ et $\chi_{A_2} = \begin{vmatrix} -X & 0 \\ 0 & -X \end{vmatrix} = X^2$.
Donc $\chi_{A_1} = \chi_{A_2}$. Mais A_1 non semblable à A_2.

Exemple. Soit $h_\lambda : \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto \lambda x \end{cases}$. Alors dans n'importe quelle base B, $mat_B(h_\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$. En effet, si $B = (e_1, ..., e_n), h_\lambda(e_1) = \lambda e_1 = \lambda e_1 + 0.e_2 + ... + 0e_n$. Donc la première colonne est $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et pareil pour les autres colonnes, ainsi : $\chi_{h_\lambda}(X) = det(h_\lambda - XI_n) = det(\lambda I_n - XI_n) = det((\lambda - X)I_n) = (\lambda - X)^n det(I_n) = (\lambda - X)^n$.

Remarque. Dans DP1, on a admis que χ_f est un polynôme. Cela se voit en développant : $\begin{vmatrix} a_{11} - X & a_{12} & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - X \end{vmatrix}$.

Proposition 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors χ_A est de la forme :

$$\chi_A(X) = (-1)^n(X^n - tr(A)X^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{coefficients pas gentils}} + (-1)^n det(A))$$

Démonstration. (partielle.) On développe $\begin{vmatrix} a_{11} - X & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - X \end{vmatrix}$ par rapport à la première colonne : $(a_{11}-X)\begin{vmatrix} a_{22} - X & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} - X \end{vmatrix} + \sum_{i\geq 2} a_{i1} \underbrace{cofacteur(i,1)}_{\text{déterminant de matrices du même type de taille } n-1} = ... = (a_{11}-X)...(a_{11}-X) + \text{termes de degré} \leq n-1 = (-X)^n + (-1)^n(\sum_{i\geq 1} a_{11})X^{n-1} + ... + \text{termes de degré (dur...)}$.
De manière plus accessible : $\chi_A(0) = det(A - 0.I_n) = det(A)$. Ainsi, le terme est de χ_A est det(A). □

.

Démonstration. (à savoir.)

— si $n = 2$, on obtient avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, que

$$\chi_A(X) = X^2 - (tr(A))X + det(A) = X^2 - (a + d)X + (ad - bc)$$

— $deg(\chi_A) = n$, et $\chi_A(0) = det(A)$.

□

Exercice. Retrouver par le calcul que, si $n = 2$, $\chi_A(X) = X^2 - tr(AX) + det(A)$. On a $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} a - X & b \\ c & d - X \end{vmatrix} =$ ...

Théorème III.3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors le spectre de f est constitué de l'ensemble des racines de χ_f. Autrement dit $\lambda \in sp(f) \Leftrightarrow \chi_f(\lambda) = 0$. Ou encore $sp(f) = \chi_f^{-1}(\{0\})$.

Démonstration. Soit $\lambda \in sp(f)$. Ceci équivaut à $f - \lambda Id$ non injectif $\Leftrightarrow det(f - \lambda I_d) = 0 \Leftrightarrow \chi_f(\lambda) = 0$. □

Exercice. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On utilise le T3 : on calcule χ_A et on cherche ses racines : $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ 2 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2 - 4 = (X+1)(X-3)$. Donc les racines de χ_A sont -1 et 3. Ainsi, puisque les valeurs propres sont les racines de χ_A on a que le $sp(A) = \{-1, 3\}$.

On cherche les vecteurs propres associé, c'est à dire on déduit les *sep* :

— pour $\lambda = -1$, on résout $AX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -x \\ 2x + y = -y \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0$. Ainsi, $(1, y) \in Ker(A + I_D) \Leftrightarrow x + y = 0$. Autrement dit : $sep(-1) = Ker(A + I_d) = \{(x, y) \in \mathbb{R}, x = -y\}$. C'est une droite, engendrée par $(1, -1)$.

— Pour $\lambda = 3$, on résout $AX = 3X$ donc on résout $\begin{cases} x + 2y = 3x \\ 2x + y = 3y \end{cases} \Leftrightarrow x = y$. Ainsi, $Ker(A - 3I_d) = vect(1, 1)$ c'est une droite.

Corollaire 4. Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u a au plus n valeur propre distinctes.

Démonstration. Puisque les valeurs propres sont les racine de χ_u et que $deg(\chi_u) = n$, on déduit le corollaire. □

En particulier $card(sp(u)) < +\infty$, pareil pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 5. Soit $\lambda \in sp(u)$. On appelle "multiplicité" de λ, notée parfois $m(\lambda)$ ou m_λ, l'ordre de λ en tant que racine du polynôme χ_u.
Ainsi m_λ est le plus grand nombre tel que $\chi_u(X) = (X - \lambda)^{m_\lambda} Q(X)$. Si $m_\lambda = 1$ alors on dit que λ est racine simple.

Proposition 6. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in sp(u)$. Alors on a

$$1 \leq dim(Ker(u - \lambda I_d) \leq m_\lambda$$

Démonstration. (à savoir) Puisque $\lambda \in sp(u)$, on a $Ker(u - \lambda I_d) \neq \{0\}$. Donc sa dimension est au moins 1.
On note $d_0 = dim(Ker(u - \lambda I_d))$. Soit $(e_1, ..., e_{d_0})$ une base de ce sev. On la complète en une base B de E. Dans cette, la matrice de u est :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & b & b \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & c & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_{d_0} & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

On a alors $\chi_u(X) = \begin{vmatrix} (\lambda - X)I_{d_0} & B \\ 0 & C - XI_{n-d_0} \end{vmatrix} = (\lambda - X)^{d_0} Q(x)$. Or $\chi_u = (X-\lambda)^{m_\lambda}\tilde{Q}(X)$ où m_λ est le plus grand nombre possible pour cette écriture. Ainsi on a $d_0 \leq m_\lambda$. □

Corrolaire 7. Si λ est simple, alors $dim(Ker(u - \lambda I_d)) = 1$.

Démonstration. Par P6 on a $1 \leq d_0 \leq 1$. Donc $d_0 = 1$. □

Exemple. Pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, on avait $m(-1) = dim(Ker(A + I_2)) = 1$ et $m(3) = dim(Ker(A - 3I_2)) = 1$ ainsi les 2 valeurs propres sont simples.

3 Diagonalisation

Définition 1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est diagonalisable si il existe une base B de E tel que $mat_B(f)$ est diagonale. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale, c'est à dire $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ et D diagonale tel que $A = PDP^{-1}$. Diagonaliser A veut donc dire "trouver D et P".

Proposition 2. Les points suivants sont équivalents :

1. f est diagonalisable.
2. Il existe une base de E formée de $\vec{v}_P$ de f.
3. La somme des sep de f vaut E.
4. La somme des dimensions de sep vaut $dim(E)$.

Démonstration. On montre que 1 est équivalent à 2. Soit B une base tel que $mat_B(f)$ est diagonale. On note $B = (e_1, ..., e_n)$ et $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ la matrice. Par lecture on a $f(e_i) = \lambda_i e_i$. Donc e_i est un $\vec{vp}$ de f.
Réciproquement : si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de $\vec{vp}$, associés à des vp $\lambda_1, ..., \lambda_n$ dans cette base, la matrice de f est $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.
On montre que 2 implique 3. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de $\vec{vp}$. Alors chaque e_i appartient à $\bigoplus_{\lambda \in sp(f)} Ker(f - \lambda I_d)$. Donc $vect(e_1, ..., e_n) \subset \bigoplus Ker(f - \lambda I_d)$. Donc $E = \bigoplus Ker(f - \lambda I_d)$.
On va montrer que 3 implique 4. On a vu que la somme des sep est directe. Ainsi $dim(E) = dim(\bigoplus_{\lambda \in sp(f)} Ker(f - \lambda I_d)) = \sum_{\lambda \in sp(f)} dim(Ker(f - \lambda I_d))$.
On va montrer que 4 implique 2. Supposons que $\sum_{\lambda \in sp(f)} dim(Ker(f - \lambda I_d)) = dim(E)$. Puisque la somme est directe, si B_i est une base de $Ker(f - \lambda_i)$, pour $\lambda_i \in sp(f)$, on a $\bigcup B_i$ est une base de E. Donc 2. □

Exercice. Pour notre matrice A, elle est diagonalisable car $\sum\limits_{\lambda \in sp(A)} (Ker(A - \lambda I_2)) = 1 + 1 = dim(\mathbb{R}^2)$.

Théorème III.3. (Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation.) f est diagonalisable si et seulement si

$$\begin{cases} \chi_f \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \\ \forall \lambda \in sp(f), dim(Ker(f - \lambda I_d)) = m_\lambda \end{cases}$$

Rappel. On dit que P est scindé sur $\mathbb{K}$ s'il est de la forme $\prod (X - \lambda_i)^{m_i}$.

Exemple. $(X-1)X(X+2)$ est scindé (à racines simples), X^2+1 n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Supposons f diagonalisable. Soit $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ sa matrice de diagonalisation. Alors $\chi_f(X) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - X & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n-X} \end{vmatrix} = \prod\limits_{i=1}^{n} (\lambda_i - X)$. De plus, par P2, $n = \sum\limits_{\lambda \in sp(f)} dim(Ker(f - \lambda I_d)) \leq \sum\limits_{\lambda \in sp(f)} m(\lambda) = n$. $\sum (m(\lambda)) - dim(Ker(f - \lambda I_d)) = 0$. Or par II-P6, ces termes sont supérieur à 0. Donc ils sont nuls, et $dim(Ker(f - \lambda I_d) = m(\lambda)$. □

Réciproque. Puisque $\sum\limits_{\lambda \in sp(f)} dim(Ker(f - \lambda I_d)) = \sum\limits_{\lambda \in sp(f)} m(\lambda) = deg(\chi_f) = n$.

Corollaire 4. Si f a n valeur propre distinctes (où $n = dim(E)$), alors ces *vp* sont simples et f est diagonalisable.

Démonstration. $\sum\limits_{\lambda \in sp(f)} dim(sep(\lambda)) = \underbrace{1 + ... + 1}_{n \text{ fois}} = dim(E)$. Donc on applique $P2$. □

Exercice. Soit T une matrices triangulaire, avec des coefficients diagonaux distincts 2 à 2. Alors elle est diagonalisable.

Solution. Supposons que $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$. On a $\chi_T(X) = det(T - XI_n) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - X & \dots & \lambda_{1n} \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \lambda_n - X \end{vmatrix} = \sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda_i - X)$. Donc les éléments diagonnaux sont des *vp*.

Exercice. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est elle diagonalisable ?. Alors $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 0 & -X \end{vmatrix} = X^2$. Donc A n'a qu'une seule vp : 0. On a 2 méthodes de réponse :

1. On calcule $sep(0)$: on résout $AX = 0$, on a donc $\begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$. Donc $dim(sep(0)) = 1$. Or 0 est de multiplicité 2. Ainsi A est non diagonalisable.

2. Puisque 0 est seule vp, si A était diagonalisable elle serait semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ c'est à dire $A = POP^{-1} = 0$. Absurde car $A \neq 0$.

4 Polynôme d'endomorphisme

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme. On le note $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k X^k$.

— Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $P(A) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k A^k$. Cela définit un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On parle d'un polynôme de matrice.

— Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $P(f) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k f^k$, avec la convention $f^{\circ} = I_d$. On parle d'un polynôme d'endomorphisme. On rappelle que $f^k = \underbrace{fo...of}_{k \text{ fois}}$.

Remarque. Si A est une matrice de f dans une base B, alors $P(A)$ est une matrice de $P(f)$ dans la base B.

Exemple. Si $P(X) = X - 1$. Alors $P(f) = f - I_d$.

Proposition 2. On dit que $\Phi : \begin{cases} P \mapsto P(f) \\ \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E) \end{cases}$ est un morphisme d'algèbre unitaire. Cela veut dire :

— $(P + \alpha Q)(f) = P(f) + \alpha Q(f)$

— $(PQ)(f) = P(f)oQ(f)$

— $1(f) = Id$

Démonstration. Évident ou admis □

Rappel. Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $g \in \mathcal{L}(E)$, alors en général, $fog \neq gof$. Si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors en général $AB \neq BA$.

Vocabulaire. On dit que f et g commutent lorsque $fog = gof$. Pareil pour les 2 matrices.

Proposition 3. Si f et g commutent, alors tout polynôme en f commute avec tout polynôme en g.

Démonstration. Soit P et Q deux polynômes, $P(X) = \sum\limits_{0}^{N} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum\limits_{0}^{M} b_k X^k$.
On part de $fog = gof$. On compose par f à gauche donc $f^2og = fofog = fogof = gofof = gof^2$.
De même, on prouve par récurrence que $f^k og = gof^k$:
On suppose cela vrai au rang k : $f^k og = gof^k \Rightarrow fof^k og = fogof^k = gof^{k+1}$. La propriété est donc vraie.
On a $P(f)og = (\sum\limits_{0}^{N} a_k f^k)og = \sum\limits_{0}^{N} a_k(f^k og) = \sum\limits_{0}^{N} a_k gof^k = go(\sum\limits_{0}^{N} a_k f^k) = goP(f)$.
On a en inversant les rôoles que $Q(g)oP(f) = P(f)oQ(g)$ □

Proposition 3 bis. Pareil pour les matrices.

Définition 4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f annule P lorsque $P(f) = 0$. On dit aussi que P est annulateur de f.

Exemple. Soit S une symétrie. Soit $P(X) = X^2 - 1$. Alors $P(S) = s^2 - I_d = 0$. Donc s annule P. Soit p un projecteur. Soit $Q(X) = X^2 - X$. Alors $Q(p) = p^2 - p = pop - p = 0$. Donc p annule Q.

Proposition 5. Soit $\lambda \in sp(f)$ et x un $\vec{vp}$ associé. Alors $P(f)x = P(\lambda)x$.

Démonstration. (à savoir) On a $f(x) = \lambda x$. Donc $f(f(x)) = f(\lambda x) \Leftrightarrow fof(x) = \lambda f(n) = \lambda\lambda x = \lambda^2 x$. On itère $\forall k \in \mathbb{N}, f^k(x) = \lambda^k x$, puis par combinaison linéaire : $(\sum\limits_0^N a_k f^k)(x) = \sum\limits_0^N (a_k \lambda^k x) = p(\lambda)x$ □

Corollaire 6. Supposons que f annule P : Alors $sp(f) \subset P^{-1}(\{0\})$ (c'est à dire les valeurs propres de f sont contenues dans les racines de P.

Démonstration. Si $P(f) = 0$, par $P5$, $p(\lambda)x = 0$ lorsque $\lambda \in sp(f)$. Or $\vec{x}$ est un $\vec{vp} \Rightarrow x \neq 0$. Donc $p(\lambda) = 0$. □

Exemple. Si s est une symétrie, quelles sont les valeurs propres possibles ? On a que $P(X) = X^2 - 1$ est annulateur de s. Donc $sp(f) \subset P^{-1}(\{0\})$. Or $P(X) = 0 \Leftrightarrow X^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow X = 1$ ou $X = -1$. Donc les vp d'une symétries peuvent être 1 ou -1.

Exemple. Si p est un projecteur, $sp(p) \subset \{0, 1\}$ (à faire).

Remarque. Le C6 donne un critère pour chercher les vp de f. Mais C6 n'est qu'une inclusion, par exemple si $f = I_d$ et $P(X) = X(X - 1)$. Alors $sp(f) = \{1\}$, et $P(f) = I_d(I_d - I_d) = 0$, et $P^{-1}(\{0\}) = \{0, 1\}$.

Théorème III.7. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Pour que f soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Démonstration. Soit f diagonalisable alors dans une base B de $\vec{vp}$, $Mat_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Ici les λ_i peuvent se répéter (ils ne sont pas différents deux à deux). Soient $(\mu_i)_{i=1,\dots,n}$ les vp (sans répétitions). On pose $P(X) = \prod\limits_{i=1}^{d}(X - N_i)$. Alors P est scindé à racines simples. Soit M la matrice ci dessus, alors $P(\mu) =$

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mu_2 - \mu_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mu_d - \mu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu_2 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \mu_3 - \mu_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mu_d - \mu_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu_d & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

La réciproque est admise et repose sur la lemme des noyaux. □

Exercice. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A^n =$? donc ... on déduit les vp de A.

Application. Projecteurs et symétries sont diagonalisable.

Exemple des symétries. Soit s tel que $s^2 = I_d$. Soit $P(X) = X^2 - 1$. Alors P est annulateur de s. Or $P(X) = (X-1)(X+1)$ est scindé à racines simples. Donc $\begin{cases} 1 \text{ et } -1 \text{ sont les } vp \text{ possibles de } s \\ s \text{ est diagonalisable} \end{cases}$. On a donc $E = \bigoplus_{\lambda \in sp(s)} sep(\lambda) = Ker(s - I_d) \bigoplus Ker(s + I_d)$, si on suppose que 1 et -1 sont valeurs propres.

Remarque. Si $sp(s) = \{1\}$, $s = I_d$ (car s a pour matrice I_n). Si $sp(S) = \{-1\}$, $s = -I_d$ (car s a pour matrice $-I_n$). Si 1 et -1 sont vp alors : $Ker(s - Id) = \{x \in E, sx = x\}$ est le plan de symétrie et $Ker(s + I_d) = \{x \in E, sx = -x\}$ est la direction de la symétrie.

Théorème III.8. (Théorème de Cayley-Hamilton). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et χ_f son polynôme caractéristique. Alors $\chi_f(f) = 0$

Démonstration. Ce n'est pas $\chi_f(f) = det(f - fI_d) = det(0) = 0$ Car $\chi_f(X) := det(f - XI_d)$. On ne peut pas remplacer X par f ici. □

Une application des polynômes annulateur. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P annulateur de A. Alors on peut calculer l'inverse de A via P :

- Si $P = \chi_A$ et si $P(0) = 0$, alors A n'est pas inversible, car $P(A) = 0det(A)$.
- Si P est un polynôme tel que $P(0) \neq 0$, alors A est inversible. En effet si $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, alors $P(A) = 0 \Leftrightarrow a_0 I_d + a_1 A + ... + a_d A^d = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{a_0}(a_1 A + ... + a_d A^d) = I_d \Leftrightarrow A[-\frac{1}{a_0}(a_1 I_d + ... + a_d A^{d-1})] = I_d$. Donc $A \in GL_n(\mathbb{K})$, et $A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(a_1 I_d + ... + a_d A^{d-1})$. Ceci permet d'exprimer A^{-1} en fonction de puissances de A. C'est pratique si on connait χ_A.

5 Trigonalisation

Définition. Un endomorphisme est trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire. Un matrice est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire : A trigonalisable $\Leftrightarrow A = PTP^{-1}$, où $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et T triangulaire.

Remarque. Une matrice diagonalisable est trigonalisable (réciproque fausse).

Théorème III.3. Une matrice (ou l'endomorphisme qu'elle représente) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Démonstration. Soit A un matrice.

— $\Rightarrow$: $\exists P \in GL_n$ et $T = \begin{pmatrix} t_{11} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{nn} \end{pmatrix}$ tel que $A = PTP^{-1}$. Or 2 matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. Ainsi $\chi_A(X) = det(T - XI_n) = \begin{vmatrix} t_{11} - X & & \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{nn} - X \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (t_i i - X)$ est scindé.

— $\Leftarrow$: O le montre par récurrence sur n.

Initialisation $n = 1$. Les matrices sont des scalaires. Donc elles sont diagonales.

Hérédité. Supposons que la propriété est vraie au rang n. Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ une matrice tel que χ_A est scindé. Puisque χ_A est scindé il admet au moins une racine λ_1. C'est donc une valeur propre de A. Soit x_1 un vecteur propre associé. On complète ce vecteur en une base de $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit P la matrice de passage depuis la base canonique vers cette base. Alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & l & \dots & l \\ 0 & a_1 & \dots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_1 & a_1 \end{pmatrix}$ où $L \in \mathcal{M}_{1,n}$ et $A_1 \in \mathcal{M}_n$. Cette dernière matrice étant triangulaire par blocs, on a $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - X & L \\ 0 & A_1 - XI_n \end{vmatrix} = (\lambda_1 - X)\chi_{A_1}(X)$.

Or χ_{A_1} est scindé car χ_A l'est. Donc A_1 est trigonalisable par hypothèse de récurrence : $\exists T_1$ triangulaire, $\exists Q \in GL_n$, $A_1 = QT_1Q^{-1}$. Soit $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q & \dots & q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & q & \dots & q \end{pmatrix}$.

Alors $\begin{pmatrix} \lambda_1 & L \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \lambda_1 & LQ \\ 0 & T_1 \end{pmatrix} R^{-1}$ (calcul à vérifier). Or la matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & LQ \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$ est triangulaire. A est semblable à cette matrice elle est donc trigonalisable.

□

Corollaire 3. Toute matrice est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

Démonstration. χ_A est un polynôme scindé par le théorème de d'Alembert. On applique ensuite T2. □

Exemple. Les matrices de nilpotentes. On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$. Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $P(X) = X^2$. Alors $P(A) = 0$, donc P est annulateur de A. Donc $sp(A) \subset P^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Donc la seule valeur propre de A est 0.

Si A était diagonalisable, elle serait semblable à 0 (la matrice diagonale avec les valeurs propres sur la diagonale). Or A semblable à 0 donc $A = P^{-1}0P = 0$. Or $A \neq 0$. Donc A non diagonalisable. On peut retrouver cela en analysant $sep(0)$ (déjà fait). Cette analyse est valable pour toute matrice nilpotente.

6 Applications aux suites récurrentes linéaires

But. Que dire des suites suivantes $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$? Et $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 2u_n - v_n \end{cases}$?

6.1 Puissances des matrices.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On veut calculer A^k. Voici 2 cas où on a une méthode :

— Si A est diagonalisable, $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Alors on a : $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$. De même par récurrence évidente $A^k = PD^kP^{-1}$. De plus $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$. Ceci permet de calculer A^k.

— Si A est de la forme $A = \alpha I_d + N$ où N est nilpotente. Soit p tel que $N^p \neq 0$ et $N^{p+1} = 0$. Alors $A^k = (\alpha I_n + N)^k = \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{j}{k} (\alpha I_n)^{k-j} N^j = \sum\limits_{j=0}^{p} \binom{j}{k} \alpha^{k-j} N^j$

Remarque. Si A et B sont deux matrices $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA$, pas de binôme en général, sauf si A et B commutent.

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Notons que $A = 2I_3 + N$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $N^3 = 0$. Ainsi $A^k = (2I_3 + N)^k = \sum\limits_{j=0}^{2} \binom{j}{k} \alpha^{k-j} N^j = 2^k I_3 + \binom{1}{k} 2^{k-1} N + \binom{2}{k} 2^{k-2} N^2 = \begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} & \frac{k(k+1)}{2} 2^{k-2} \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$.

6.2 Systèmes de suites récurrentes.

On considère p suites $v^1, ..., v^p$ où elles sont "couplées" par le système : $\begin{cases} u_{n+1}^1 = a_{11} u_{1+...+a_{1p}u_n^p} \\ \vdots \\ u_{n+1}^p = a_{p1} u_n^1 + ... + a_{pp} u_n^p \end{cases}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n^1 \\ \vdots \\ u_n^p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$. Alors le système se réécrit $X_{n+1} = AX_n$, où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix}$. C'est une suite "géométrique", on a $X_2 = AX_1 = AAX_0 = A^2X_0$, puis par récurrence directe, $X_n = A^n X_0$. On peut avoir des formules pour les (u_n^i) si on sait calculer A^k.

6.3 Suites récurrentes d'ordre P.

Problématique. On a une seule suite $(u_n)_{n\geq 0}$ qui vérifie :

$$u_{n+p} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i u_{n+i}$$

Exemple. $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, ici $p = 2, a_0 = a_1 = 1$.

Résolution. On va transformer ce problème "linéaire scalaire et d'ordre p" en un problème "vectoriel d'ordre 1". Pour cela, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$.

On a alors :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & \dots & \dots & \dots & a_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} = AX_n$$

On a à nouveau $X_n = A^n X_0$. La matrice A a une forme particulière.

Définition-Proposition. Soit $P(X) = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - ... - a_0$. Alors A est la matrice "compagnon" de P. On a ainsi $\chi_A(X) = (-1)^p P(X)$

Démonstration. (Exercice classique.) On a $\chi_A(X) = det(A - XI_p) = \begin{vmatrix} -X & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & 1 \\ a_0 & \dots & \dots & a_{p-2} a_{p-1} - X \end{vmatrix}$. On fait $C_1 \leftarrow C_1 + XC_2$:

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 0 \\ -X^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_0 + Xa_1 \end{vmatrix}$$

On ajoute ensuite $X^2 C_3$ à C_1 :

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -X^3 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \end{vmatrix}$$

Ainsi de suite, on trouve en ajoutant $Xc_2 + ... + X^{p-1}C_p$ à C_1.

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & -X & \ddots & \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ a_0 + a_1X + ... + (a_{p-1} - X)X^{p-1} & \dots & \dots & a_{p-1} - X \end{vmatrix} = (-1)^{P+2}P(X) \times \begin{vmatrix} 1 & & & 0 \\ -X & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -X & 1 \end{vmatrix}$$

Et donc $\chi_A(X) = (-1)^P P(X)$. □

Ainsi pour diagonaliser A afin de calculer A^n, on doit résoudre $P(X) = 0$ pour chercher les valeurs propres.

Lien avec l'an dernier.

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

a pour équation $r^2 = ar + b$. Les racines sont en fait les valeurs propre de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$. De sorte que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & \end{pmatrix}^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1}$, où λ_i sont ses racines.

Quatrième partie

Équation différentielle linéaires application de la réduction des matrices

1 Systèmes d'équation différentielle. Généralités.

1.1 Le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Définition 1. Soit $A(t)$ une matrice (qui dépend de t) et $B(t)$ un vecteur (qui dépend de t).
On appelle "système différentiel linéaire d'ordre 1" le problème suivant : trouver X tel que $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.

Remarque. A et B sont des données. Ils sont continue par rapport à t.
Si $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, alors $X'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}$.

Définition 1 bis. On appelle "problème de Cauchy" la donnée de $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, et d'un système dit "de Cauchy" :

$$\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \qquad (C)$$

Théorème IV.2. Le problème de Cauchy (C) admet une unique solution $X : I \to \mathbb{K}^n$.

Démonstration. admis. □

1.2 Structure des solutions.

Théorème IV.3. Soit L l'ensemble des solutions de $X' = AX$, où X est l'inconnue, et $t \mapsto A(t)$ une fonction matricielle. Alors

— L est un espace vectoriel de dimension n (taille de A).
— Une solution non nulle ne s'annule jamais (c'est à dire $X \neq 0 \Rightarrow \forall t \in I, X(t) \neq 0$).

Démonstration. (à savoir) Montrons que L est un espace vectoriel. Soit X_1 et X_2 dans L et $\alpha \in \mathbb{K}$ alors montrons que $X1 + \alpha X_2 \in L = (X_1 + \alpha X_2)' = X'_1 + \alpha X'_2 = AX_1 + \alpha AX_2 = A(X_1 + \alpha X_2)$.
Donc L est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de I dans $\mathbb{K}^n$.
Montrons que $dim(L) = n$. Soit $\phi : \begin{cases} L \to \mathbb{K}^n \\ X \mapsto X(t_0) \end{cases}$ où $t_0 \in I$ est fixé. Alors ϕ est clairement linéaire, de plus par le théorème de Cauchy (T2), $\forall X_0 \in \mathbb{K}^n, \exists! X \in L, \phi(X) = X_0$. Donc ϕ est un isomorphisme donc $dim(L) = dim(\mathbb{K}^n) = n$.

On va montrer que la contraposée est vraie, c'est à dire, $\exists t_0, X(t_0) = 0 \Rightarrow X = 0$ sur I. Supposons donc que X s'annule en t_0, alors X est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = 0 \end{cases}$. Donc la fonction nulle est aussi solution de ce problème, par unicité (théorème de Cauchy), $X = 0$). □

Exemple. $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3ty(t) + e^t \\ y'(t) = -4tx(t) + y(t) + sin(t) \end{cases}$. Cela se réécrit en $X' = AX + B$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 2 & 3t \\ -4t & 1 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ sin(t) \end{pmatrix}$.

Définition 4. Soit $X' = AX + B$ un système différentiel. Alors le système $X' = AX$ est appelé "problème homogène" associé.

Théorème IV.5. Soit L l'ensemble des solutions de $X' = AX$ et soit X_p une solution particulière de $X' = AX + B$. Alors toute solution de $X' = AX + B$ est de la forme $X = X_p + X_g$, où $X_g \in L$.

Démonstration. On vérifie que $X_p + X_g$ est une solution. $(X_p + X_g)' = X_p' + X_g' = AX_p + B + AX_g = A(X_p + X_g) + B$
Réciproquement soit X une solution de $X' = AX + B$. Montrons que $X - X_p \in L$: $(X - X_p)' = X' - X_p' = AX + B - (AX_p + B) = A(X - X_p)$. □

Résolution. Le T5 donne une méthode de résolution (pour $X' = AX + B$) :

1. Résoudre l'équation homogène (on trouve un espace vectoriel de solutions)
2. Trouver une solution particulière
3. Conclure avec T5

Question. Comment vérifier que des solutions sont indépendantes ?

Définition - Proposition 6. Soient $(X_1, ..., X_n)$ des solutions de $X' = AX$. On introduit $W(t) = det_{\text{Base canonique}}(X_1(t), ..., \left|X_1(t)...X_n(t)\right|$. C'est le Wronskien des $(X_i(t))_{i=1,...,n}$ Alors $(X_i(t))_{i=1,...,n}$ est libre si et seuelement si $\exists t_0 \in I, W(t_0) \neq 0$.

Démonstration. admis □

1.3 Structure des solutions.

Théorème IV.6. Soit L l'ensemble des solutions de $X' = AX$, où X est l'inconnue, et $t \mapsto A(t)$ une fonction matricielle. Alors

— L est un espace vectoriel de dimension n (taille de A).

— Une solution non nulle ne s'annule jamais (c'est à dire $X \neq 0 \Rightarrow \forall t \in I, X(t) \neq 0$).

Démonstration. (à savoir) Montrons que L est un espace vectoriel. Soit X_1 et X_2 dans L et $\alpha \in \mathbb{K}$ alors montrons que $X1 + \alpha X_2 \in L = (X_1 + \alpha X_2)' = X_1' + \alpha X_2' = AX_1 + \alpha AX_2 = A(X_1 + \alpha X_2)$.
Donc L est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de I dans $\mathbb{K}^n$.
Montrons que $dim(L) = n$. Soit $\phi : \begin{cases} L \to \mathbb{K}^n \\ X \mapsto X(t_0) \end{cases}$ où $t_0 \in I$ est fixé. Alors ϕ est clairement linéaire, de plus par le théorème de Cauchy (T2), $\forall X_0 \in \mathbb{K}^n, \exists! X \in L, \phi(X) = X_0$. Donc ϕ est un isomorphisme donc $dim(L) = dim(\mathbb{K}^n) = n$.
On va montrer que la contraposée est vraie, c'est à dire, $\exists t_0, X(t_0) = 0 \Rightarrow X = 0$ sur I. Supposons donc que X s'annule en t_0, alors X est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = 0 \end{cases}$. Donc la fonction nulle est aussi solution de ce problème, par unicité (théorème de Cauchy), $X = 0$). □

Exemple. $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3ty(t) + e^t \\ y'(t) = -4tx(t) + y(t) + sin(t) \end{cases}$. Cela se réécrit en $X' = AX + B$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 2 & 3t \\ -4t & 1 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ sin(t) \end{pmatrix}$.

Définition 4. Soit $X' = AX + B$ un système différentiel. Alors le système $X' = AX$ est appelé "problème homogène" associé.

Théorème IV.5. Soit L l'ensemble des solutions de $X' = AX$ et soit X_p une solution particulière de $X' = AX + B$. Alors toute solution de $X' = AX + B$ est de la forme $X = X_p + X_g$, où $X_g \in L$.

Démonstration. On vérifie que $X_p + X_g$ est une solution. $(X_p + X_g)' = X_p' + X_g' = AX_p + B + AX_g = A(X_p + X_g) + B$
Réciproquement soit X une solution de $X' = AX + B$. Montrons que $X - X_p \in L$: $(X - X_p)' = X' - X_p' = AX + B - (AX_p + B) = A(X - X_p)$. □

Résolution. Le T5 donne une méthode de résolution (pour $X' = AX + B$) :

1. Résoudre l'équation homogène (on trouve un espace vectoriel de solutions)
2. Trouver une solution particulière
3. Conclure avec T5

Question. Comment vérifier que des solutions sont indépendantes ?

Définition - Proposition 6. Soient $(X_1, ..., X_n)$ des solutions de $X' = AX$. On introduit $W(t) = det_{\text{Base canonique}}(X_1(t), ...,$ $\begin{vmatrix} X_1(t)...X_n(t) \end{vmatrix}$. C'est le Wronskien des $(X_i(t))_{i=1,...,n}$ Alors $(X_i(t))_{i=1,...,n}$ est libre si et seuelement si $\exists t_0 \in I, W(t_0) \neq 0$.

Démonstration. admis □

2 Résolution pratique pour le cas homogène

On peut avoir une équation différentielle non linéaire (exemple : $\theta'' + \frac{m}{g} sin(\theta) = 0$). Et des équations différentielles linéaires avec second membre, il faut donc résoudre l'équation homogène par les matrices A diagonalisable et trigonalisable et par coefficients constants. Et trouver la solution particulière avec la variation de la constante.

2.1 Les cas où A est diagonalisable.

Cadre. On considère $X' = AX$, où $A(t)$ est diagonalisable $\forall t \in I$, dans une base qui ne dépend pas de t : $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \forall t \in I, A(t) = PD(t)P^{-1}$ où $D(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(t) \end{pmatrix}$.

On a $X' = AX \Leftrightarrow P^{-1}X'(t) = D(t)P^{-1}X(t)$. On pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$. Alors X est solution si et seulement si Y est solution de $Y' = DY$. Ce système se réécrit :

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1(t)y_1(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) - \lambda_n(t)y_n(t) \end{cases}$$

On dit que le système est découplé. Notons $\Lambda_i(t) = \int_0^t \lambda_i(S)dS$ une primitive de λ_i. Alors, cf première année les solutions de $y' = \lambda_i y$ forment un espace vectoriel de $dim(1)$, engendré par e^{Λ_i}. On peut écrire, soit L_i l'ensemble des solutions de $y_i' = \lambda_i y_i$, alors $L_i = \{t \mapsto Ce^{\Lambda_i(t)}, C \in \mathbb{K}\}$.

Ainsi $Y' = DY$ a pour solution $\left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} C_1 e^{\Lambda_1(t)} \\ \vdots \\ C_n e^{\Lambda_n(t)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\}$. On déduit X via $X(t) = PY(t)$.

2.2 Le cas trigonalisable.

Supposons que $\exists P \in GL_n$ tel que $A = PT(t)P^{-1}$, où $T(t) = \begin{pmatrix} \tau_{11}(t) & \dots & \tau_{1n}(t) \\ & \ddots & \vdots \\ & & \tau_{nn}(t) \end{pmatrix}$. De même, $Y = P^{-1}X$ permet de se ramener à $Y' = TY$, soit

$$\begin{cases} y_1'(t) = \tau_{11}y_1(t) + ... + \tau_{1n}(t)y_n(t) \\ y_n'(t) = \tau_{nn}(t)y_n(t) \end{cases}$$

O résout la dernière ligne : $y_n(t) = Ce^{\int \tau_{nn}(t)}$ puis l'avant dernière ligne devient $y_{n-1}'(t) = \tau_{n-1,n-1}y_{n-1}(t) + \tau_{n-1,n}y_n(t)$. On résout cette équation avec second membre, on résout de proche en proche jusqu'à y_1.

Exemple. Soit $A(t) = \begin{pmatrix} 7t & 10t \\ 3t & 4t \end{pmatrix}$. Résoudre $X'(t) = A(t)X(t)$, on calcule le polynôme caractéristique : $\chi_A = det(A(t) - XI_2) = \begin{vmatrix} 7t - X & 10t \\ -3t & 4t - X \end{vmatrix} = X^2 - tr(A(t))X + det(A(t)) = X^2 - 11tX + 58t^2$. On calcule le discriminant $\Delta = (11t)^2 - 4 \times 58t^2 = -t^2 111$.

Les valeurs propres de $A(t)$ sont les racines de $\chi_{A(t)}(X)$, soient : $\dfrac{11t \pm it\sqrt{111}}{2}$.

On a 2 valeurs propres distinctes, et la matrice $A(t)$ est de taille 2×2, donc elle est diagonalisable. Il faut calculer P et finir l'exercice.

On cherche les *sep* et on note $\lambda\pm$ ces deux valeurs propres, on résout $A(t)U = \lambda \pm U$.

Pour $\lambda+ := t(\dfrac{11 + i\sqrt{111}}{2})$. On a $A(t)U + \lambda + U \Leftrightarrow t \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda_+ + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} 7u_1 + 10u_2 = \dfrac{(11 + i\sqrt{111})u_1}{2} \\ -3u_1 - 4u_2 = \dfrac{(11 + i\sqrt{111})u_2}{2} \end{cases}$$

Donc $20u_2 = -3u_1 + i\sqrt{111}u_1$. Ainsi $sep(\lambda_+) = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } 20u_2 = -3u_1 + i\sqrt{111}u_1 \right\}$.

C'est une droite engendrée par $\begin{pmatrix} 20 \\ -3 + i\sqrt{111} \end{pmatrix}$.

De même, $sep(\lambda_-)$ est engendré par $\begin{pmatrix} 20 \\ -3 - i\sqrt{111} \end{pmatrix}$.

La matrice de passage est choisie comme :

$$P = \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ -3 + i\sqrt{111} & -3 - i\sqrt{111} \end{pmatrix}$$

On a donc $A(t) = P \begin{pmatrix} \lambda_+(t) & 0 \\ 0 & \lambda_-(t) \end{pmatrix} P^{-1}$. On pose $Y = P^{-1}X$, de suite que $X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY$.

$$\begin{cases} y_1'(t) = t(\dfrac{-11 + i\sqrt{111}}{2})y_1(t) \\ y_2'(t) = t(\dfrac{11 - i\sqrt{111}}{2})y_2(t) \end{cases}$$

On résout $y_1(t) = C_1 e^{\frac{t^2}{4}(11+i\sqrt{111})}$ et $y_2(t) = C_2 e^{\frac{t^2}{4}(11-i\sqrt{111})}$.

Les solutions sont donc $X = PY$.

Remarque. Les solutions sont sous la forme $y_1(t) = C_1 e^{t^2} 4(cos(\dfrac{\sqrt{111}}{4}t^2) + isin(\dfrac{\sqrt{111}}{4}t^2))$

2.3 Le cas à coefficient constant

On cherche à résoudre $X' = AX$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ne dépend pas de t. On définit $exp(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ comme $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{A^n}{n!}$. Soit $f_A(t) = exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$. Alors $f'_A(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nt^{n-1}A^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n = A \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(tA)^{n-1}}{(n-1)!}$

Remarque. (Sur l'exponentielle de matrices). On a posé $exp(A) = \sum_0^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$. A^n est une matrice dont les coefficients dépendent de n de manière compliqué. Donc $exp(A)$ est une matrice dont les coefficients sont des séries.

$$exp(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \sum_0^{+\infty} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n$$

Sauf si A est diagonale.

Si $f_A(t) = exp(At)$ alors en dérivant la série, o a $f'_A(t) = Af_A(t) = f_A(t)A$. Mais dériver une somme infinie est délicat cf le cours sur les séries. Ici on admet que

$$(\sum_0^{+\infty} \frac{(.^tA)^n}{n!})' = \sum_1^{+\infty} \frac{nt^{n-1}A^n}{n!}$$

Proposition / Théorème. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, qui ne dépend pas de t. Alors les solutions de $X'(t) = AX(t)$ est $\{exp(At)v, v \in \mathbb{K}^n\}$. En particulier, les solutions du problème de Cauchy sont

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad \text{est } t \mapsto exp((t-t_0)A)X_0$$

Démonstration. (à savoir) Notons pour v fixé, $f_A(t) = exp(At)v$. On a $f_A : I \to \mathbb{K}^n$, de plus, $f'_A(t) = Aexp(At)v = Af_A(t)$. Ainsi f_A est solution de $X' = AX$. Réciproquement, soit X une solution. Soit $g(t) = exp(-At)X(t)$. Alors $g'(t) = -Aexp(-At)X(t) + exp(-At)AX = 0$. Donc $g(t)$ est un vecteur constant noté v et $exp(-At)X(t) = v$, et $X(t) = exp(At)v$. Ici on a utilisé que $exp(At)exp(-At) = exp(0) = Id$.
Pour le problème de Cauchy : soit $\tilde{X}(t) = exp((t-t_0)A)X_0$. Alors $\tilde{X}(t) = exp(At)(exp(-At_0)X_0)$ donc c'est solution de $X' = AX$. De plus $\tilde{X}(t_0) = exp(0)X_0 = X_0$ □

Calcul. On s'est ramené à calculer $exp(At)$. On sait le faire si A est diagonalisable. En effet si $A = PDP^{-1}$, où $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors $A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$, et pour $K \geq 1$, $\sum_{k=0}^{K} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{K} \frac{PD^kP^{-1}}{k!} = P(\sum_{k=0}^{K} \frac{D^k}{k!})P^{-1}$.

Or $\frac{D^k}{k!} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & & \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix}$, et $\sum_0^K \frac{D^k}{k!} \to \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$, puis $P(\sum_0^K \frac{D^k}{k!})P^{-1} \to P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$

Ainsi puisque $At = P \begin{pmatrix} \lambda_1 t & & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & & \lambda_n t \end{pmatrix} P^{-1}$, on a $exp(At) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P^{-1}$.

2.4 Équation différentiel d'ordre $P \geq 2$.

Soit $*$ l'équation différentielle :

$$y^{(p)} + a_{p-1}(t)y^{(p-1)}(t) + ... + a_0(t)y(t) = b(t)$$

$y : I \to \mathbb{K}$ est la fonction d'inconnue $y^{(k)}$ est sa dérivée la ième, et $P \in \mathbb{N}^*$, a_k sont des fonctions données, et b aussi.

On introduit $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \vdots \\ y^{(p-1)}(t) \end{pmatrix}$. Alors $Y : I \to \mathbb{K}^p$ de plus on a :

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ \vdots \\ y^{(p)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 \\ -a_0(t) \dots - a_{p-1}(t) & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ \vdots \\ y^{(p-1)}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

On obtient une équation du type $Y' = AY + B$. On résout l'équation homogène $Y' = AY$. On a (cf chapitre sur les suites) $A(t)$ est la matrice compagnon du polynôme $X^p + a_{p-1}(t)X^{p-1} + ... + a_0(t)$. On a vu que $\chi_{A(t)}(X) = (X^p + a_{p-1}(t)X^{p-1} + ... + a_0(t))(-1)^P$. On cherche les racines de χ_A afin de la diagonaliser.

Exemple. Si A est à coefficient constant et $b = 0$ par exemple $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$. On se ramène à $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, puis $Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix} Y(t)$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, puis $\chi_A(X) = X^2 + \alpha X + \beta$.
On cherches les racines en résolvant $X^2 + \alpha X + \beta = 0$. On a 3 cas

1. Deux racines réelles
2. Une racine double
3. Deux racines complexes

Pour 1 et 3 on peut la diagonaliser et calculer son exponentielle.

Cinquième partie

Espace vectoriel euclidien (et préhilbertien)

3 Produit scalaire

Soit E un espace vectoriel.

Définition 1. Un produit scalaire sur E est une application bilinéaire symétrique définie positive. Cela veut dire $\phi : E \times E \to \mathbb{K}$ est un produit scalaire lorsque :

— $\phi(x+\lambda x', y) = \phi(x,y) + \lambda\phi(x',y)$ et $\phi(x, y+\lambda y') = \phi(x,y) + \lambda\phi(x,y')$: Bilinéaire

— $\phi(x,y) = \phi(y,x)$: Symétrique

— $(\phi(x,x) \geq 0)$ et $(\phi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0)$: Définie positif

Définition 2. On appelle espace euclidien ($e.v.e$) un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. On parle d'espace vectoriel préhilbertien si $dim(E) = +\infty$.

Exemple fondamentaux.

1. $E = \mathbb{R}^n$ et $\phi(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$. Vérifions que c'est un produit scalaire
2. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\phi(A,B) = tr(.^t AB)$
3. $E = C^0([0,1])$, et $\phi(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$

Remarque. Quand on prouve les 3 exemples, si on a prouvé la symétrie, alors on a la linnéairité par rapport à la première variable et par rapport à la deuxième variable.
En effet $f(x, y+\lambda y') = f(y+\lambda y', x) = f(y,x) + \lambda f(y',x) = f(x,y) + \lambda f(x,y')$.

Démonstration. (Preuve de la définition 1)

1. Symétrie : Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \phi(y,x) = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = \phi(x,y)$.
2. Bilinéarité : Soient $(x,x') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{K}$ et $y \in \mathbb{R}^n$. Alors $\phi(x+\lambda x', y) = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i + \lambda x'_i)y_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i + \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} x'_i y_i = \phi(x,y) + \lambda\phi(x',y)$. Donc ϕ est linéaire par rapport à la première variable et puisque elle est symétrique, elle est bilinéaire.
3. ϕ est définie positif. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors $\phi(x,x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$. De plus si $\phi(x,x) = 0$, alors $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$, et puisque $x_i^2 \geq 0$ pour chaque i, on a $x_i = 0$ pour $i = 1, ..., n$ donc $x = 0$.

□

Remarque. $x = 0 \Rightarrow \phi(x,x) = 0$ est triviale.

Remarque. Identité remarquable : Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique (en particulier si ϕ est un produit scalaire), alors on a l'identité suivante $\phi(x+y,x+y) = \phi(x,x) + \phi(y,y) + 2\phi(x,y)$.

Démonstration. Triviale. □

Théorème V.3. (Inégalité de Cauchy-Schwarz.) Soit $\phi : E\times E \to \mathbb{K}$ un produit scalaire. Alors $\forall(x,y) \in E\times E$,

$$|\phi(x,y)| \leq \sqrt{\phi(x,x)}\sqrt{\phi(y,y)}$$

De plus c'est une égalité si et seulement si (x,y) est liée.

Démonstration. (à savoir.) Pour simplfier, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $x,y \in E$. Considérons l'applicationn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (x+ty, x+ty)$. On a

$$f(t) = t^2 < y,y > +2t < x,y > + < x,x >$$

et $f(t) \geq 0$ pour tout t. Comme f est un polynôme du second degré, on en déduit que sont discriminant est négatif :

$$< x,y >^2 - < x,x >< y,y >\leq 0$$

Par suite $< x,y >^2 - < x,x >< y,y >\leq 0$ et le résultat est obtenu en prenant la racine carrée. □

Théorème V.4. (Minkowski.) $\forall(x,y) \in E\times E$,

$$\sqrt{\phi(x+y,x+y)} \leq \sqrt{\phi(x,y)} + \sqrt{\phi(y,y)}$$

Démonstration. On démarre avec Cauchy Schwarz : $\phi(x,y) \leq \sqrt{\phi(x,x)} \times \sqrt{\phi(y,y)}$. Donc $\phi(x,x) + \phi(y,y) + 2\phi(x,y) \leq \phi(x,x) + \phi(y,y) + 2\sqrt{\phi(x,x)} \times \sqrt{\phi(y,y)} = (\sqrt{\phi(x,x)} + \sqrt{\phi(y,y)})^2$.
En prenant la racine on obtient le résultat. □

Remarque. Pour trouver la preuve, il faut partir de la fin.

Théorème V.5. (à retenir.) Soit ϕ un produit scalaire. Alors l'application $N : E \to \mathbb{R}$, définie par $N(x) = \sqrt{\phi(x,x)}$, est une norme sur E (voir cours d'analyse pour la définition d'une norme.) On l'appelle la norme associée à (ou induite par) le produit scalaire ϕ.

Démonstration. (à savoir.) Prouvons que N vérifie les axiomes d'une norme :

— (positivité.) $N(x) = \sqrt{\phi(x,x)}$ est une racine positive, de plus $N(x) = 0 \Leftrightarrow \phi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ car ϕ est défini positif.

— (homogénéité.) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, alors $N(\lambda x) = \sqrt{\phi(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2\phi(x,x)} = |\lambda|\sqrt{\phi(x,x)} = |\lambda|N(x)$.

— (inégalité triangulaire.) Soient $(x,y) \in E\times E$, alors $N(x+y) = \sqrt{\phi(x+y,x+y)} \leq \sqrt{\phi(x,x)}+\sqrt{\phi(y,y)} = N(x) + N(y)$.

□

Remarque. Des fois, le produit scalaire se note $\phi(x,y) =< x,y >$ et $N(x) = ||x||$. On peut alors réécrire l'identité remarquable : $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2 < x,y >$.
On peut aussi réécrire Cauchy Schwarz : $| < x,y > | \leq ||x||.||y||$ et Minkowski $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Remarque. On réserve la notation $x.y$ au cas $E = \mathbb{R}^n$ et $x.y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$

Remarque. Soient f et g donc $C^\circ([0,1])$. Alors on a $| \int_0^1 f(x)g(x)dx| \leq \sqrt{\int_0^1 f(x)^2 dx}\sqrt{\int_0^1 y(x)^2 dx}$.
Ceci provient de $\begin{cases} (f,g) \mapsto \int_0^1 fg \text{ est un produit scalaire sur } C^\circ([0,1]) \\ \text{Cauchy - Schwarz} \end{cases}$. On peut ainsi définir $||f|| = \sqrt{< f.f >} = \sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx}$.

Remarque. On a beaucoup de notion : distance $d(x,y)$, normes $N(x)$ et des produits scalaires $< x,y >$. Si on a un produit scalaire on peut fabriquer une norme et si on a une norme on peut fabriquer une distance. Quand une norme est induite par un produit scalaire, elle est dite euclidienne.

4 Orthogonalité

Dans tout ce chapitre E est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $< .,. >$

Définition 1. Soit $(x,y) \in E \times E$. On dit que x et y sont orthogonaux si $< x,y >= 0$.

Définition 2. Soit $(x_1,...,x_N)$ une famille de E. On dit qu'elle est :

— orthogonale si les x_i sont orthogonaux 2 à 2, c'est à dire $i \neq j \Rightarrow < x_i, x_j >= 0$.

— orthonormale si elle est orthogonale et que $\forall i = 1,...,N$ on a $||x_i|| = 1$.

Remarque. Ici est dans ce chapitre, $||.||$ désigne la norme induite par $< .,. >$.

Théorème V.3. (Pytagore.) Soient $(x,y) \in E \times E$. Alors x et y sont orthogonaux si et seulement si $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$

Démonstration. (à savoir) $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2 < x,y >$. Ainsi $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ si et seulement si $< x,y >= 0$. □

Remarque. Cela se généralise à N vecteurs orthogonaux $(x_1,...,x_N)$: $||x_1 + ... + x_N||^2 = ||x_1||^2 + ... + ||x_N||^2$.

Proposition 4. Toute famille orthogonale, ne contenant pas le vecteur nul est libre.

Démonstration. (à savoir) Soit $(x_1,...,x_n)$ une famille orthogonale telle que $\sum\limits_{1}^{N} \lambda_i x_i = 0$, où $(\lambda_i)_{i=1,...,N}$ sont des scalaires. On fixe j et que l'on fais le produit scalaire avec x_j, on a alors $< \sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i x_i, x_j >=< 0, x_j >= 0$. Donc puisque $< x_i, x_j >= 0$ si $i \neq j$, on a $\lambda_j < x_j, x_j >= 0$. Or $x_j \neq 0$ donc $< x_j, x_j > \neq 0$. Donc $\lambda_j = 0$ puisque ceci est valable pour tout j de 1 à N, la famille est libre. □

Définition 5. Soit $A \subset E$. On définit, "l'orthogonal de A", noté $A^\perp$, comme

$$A^\perp := \{x \in E, \forall a \in A, < x, a >= 0\}$$

Exemple. Si $E = \mathbb{R}^3$, et $< x, y >= x.y$ et si

— $A = \{(0,0,1)\}$ alors $A^\perp =$ plan (Oxy)

— $A = vect((0,1,0),(1,0,0))$ alors $A^\perp = vect(0,0,1)$.

Exemple. En général si $A = \{0\}$, alors $A^\perp = E$. En effet $< x, 0 >= 0 \forall x \in E$. Si $A = E$, alors $E^\perp = \{0\}$. En effet, soit $x \in E^\perp$. Alors $\forall y \in E, < x, y >= 0$. En particulier si $y = x$ on a $< x, x >= 0$ donc $x = 0$.

Lemme 6. Soit $A \subset E$. Alors $A^\perp$ est un sev de E. De plus si $A = \{x\}$, alors $A^\perp$ est un hyperplan de E.

Démonstration. Soit x et y dans $A^\perp$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $a \in A$, on a $< x + \lambda y, a >=< x, a > +\lambda < y, a >= 0$. Donc $x + \lambda y \in A^\perp$. Donc $A^\perp$ est un sev de E.

On a $t \in \{x\}^\perp \Leftrightarrow < t, x >= 0$. Soit $\phi : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ v \mapsto < v, x > \end{cases}$

Alors ϕ est une forme linéaire sur E. De plus $Ker\phi = \{v \in E, < v, x >= 0\}$. Ainsi $\{x\}^\perp = Ker\phi$. Donc c'est un hyperplan, en tant que noyau d'une forme linéaire. □

Théorème V.7. Tout espace vectoriel euclidien admet une bon (base orthonormée).

Démonstration. On montre cela par récurrence sur la dimension.

— Si $dim(E) = 1$. Soit $x \in E$ tel que $||x|| = 1$, c'est une base de E elle est orthonormale.

— Supposons la propriété vraie au rang $n-1$. Soit E de dimension n. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. On note $H = \{x\}^\perp$. Alors H est un eve de dimension $n-1$ par le L6. Donc par hypothèse de récurrence, il admet une BON $(e_1, ..., e_{n-1})$. Alors $(e_1, ..., e_{n-1}, \frac{x}{||x||})$ est une BON de E, en effet :

— $< \frac{x}{||x||}, e_1 >= 0 \forall i = 1, ..., n-1$.

— $||\frac{x}{||x||}|| = 1$

Donc la propriété est vraie au rang n. Elle est vraie par récurrence.

□

Théorème V.8. (Procédé de Gramm Schmidt.) Soit E un eve, et $P < dim(E)$ un entier. Soit $(x_1, ..., x_p)$ une famille libre. Alors il existe $(v_1, ..., v_p)$ une famille orthonormale, telle que : $\forall k \in [1,p], vect(v_1, ..., v_k) = vect(x_1, ...x_k)$

Démonstration. importante, prochaine fois □

Proposition 9. Soit A et P inclus dans un eve E. Alors

— $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$

— $A^\perp = (Vect(A))^\perp$

Soit F et G deux sev de E, alors

— $(F+G)^{\perp} = (F^{\perp}) \cap (G^{\perp})$
— $(F \cap G)^{\perp} = (F^{\perp}) + (G^{\perp})$

Démonstration.

— Supposons $A \subset B$. Soit $x \in B^{\perp}$. Cela vaut $\forall b \in B, < x, b >= 0$. Soit $a \in A$. Alors $a \in B$ puisque $A \subset B$. Donc $< x, a >= 0$. Donc j'ai montré que $\forall a \in A, < x, a >= 0$. Donc $x \in A^{\perp}$. Donc $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
— On rappelle que $vect(A)$ est le sev engendré par les vecteurs de A, c'est aussi le plus petit sev de E contenant A. En particulier $A \subset Vect(A)$. Donc $(vect(A))^{\perp} \subset A^{\perp}$ par le premier point montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in A^{\perp}$. Soit $v \in vect(A)$ alors v s'écrit $\sum_{i=1}^{N} \gamma_i a_i$, où $a_i \in A$.
Ainsi $< x, v >= \sum_{i=1}^{N} \gamma_i < x, a_i >= 0$. Donc $x \in (vect(A))^{\perp}$.

□

Théorème V.10. Soit F un sev de E. Alors
— $E = F \oplus F^{\perp}$
— Soit $(e_1, ..., e_p)$ une base orthonormé de F, alors la projection P_F sur F, parallèlement à $F^{\perp}$, vérifie

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{P} < x, e_i > e_i$$

— En particulier , $\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{N} < x, e_i > e_i$, si $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormé de E.
— $dim(F^{\perp}) = dim(E) - dim(F)$

Démonstration. (à savoir.) On note $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{P} < x, e_i > e_i$. On a $\tilde{x} \in F$, car c'est une combinaison linéaire de vecteur qui sont dans F. Tel que $x - \tilde{x} \in F^{\perp}$. Soit $i \in [1, p]$ fixé, calculons $< x - \tilde{x}, e_i >$:

$$< x - \tilde{x}, e_i >=< x, e_i > - < \tilde{x}, e_i >=< x, e_i > - < \sum_{j=1}^{P} < x, e_j >, e_i >$$

$$=< x, e_i > - \sum_{j=1}^{P} < x, e_j > \underbrace{< e_j, e_i >}_{\delta_{ij} \text{ car BON}} =< x, e_i > - < x, e_i >= 0$$

Donc $(x - \tilde{x}) \perp e_i$, donc $x - \tilde{x} \in Vect(e_i)^{\perp} = F^{\perp}$.
Conclusion $x = \underbrace{\tilde{x}}_{\in F} + \underbrace{(x - \tilde{x})}_{\in F^{\perp}}$. Donc $E = F + F^{\perp}$. Montrons que la somme est directe, soit $x \in F \cap F^{-1}$.
Alors $< \underbrace{x}_{\in F}, \underbrace{x}_{\in F^{\perp}} >= 0 = ||x||^2$, donc $x = 0$. Donc $F \cap F^{\perp} = \{0\}$, et la somme est directe.
On a montré les deux premiers points, puisque $\tilde{x}$, étant le vecteur de F tel que $x - \tilde{x} \perp \tilde{x}$ est bien $P_F(x)$.
En particulier le 3ème point découle directement, avec $F = E$ puis puisque

$$E = F \oplus F^{\perp}, dim(F) + dim(F^{\perp}) = dim(E)$$

□

Exercice. Quel est le projeté de x sur $vect(x_1)$, parallèlement à $vect(x_2)$, ce n'est pas une projection orthogonale.

Ici, si on projette x sur $vect(x_1)$ parallèlement à $vect(x_2)$. On calcule cela avec $< x, x_1 >$, on a

$$P(x) =< x, x_1 > x_1$$

Proposition 11. Soit E un eve et $\underbrace{(e_1, ..., e_n)}_{B}$ une base orthonormé de E. Soit x et y dans E. Soit $X = MAT_B(x)$ et $Y = MAT_B(y)$. Ainsi , $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \backslash, \infty(\mathbb{R})$. Alors

$$< x, y >= {}^tX \times Y$$

Démonstration. Calcul matriciel □

5 Endomorphismes particuliers dans un espace vectoriel euclidien

5.1 Les endomorphismes symétriques.

Définition / Proposition 0. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un autre endomorphisme, noté u^*, appelé adjoint de u, tel que

$$\forall (x, y) \in E \times E, < u(x), y > . < x, u^*(y) >$$

De plus si u est la matrice de u dans une base orthonormée, alors t_u est la matrice de u dans cette base.

Démonstration. Soient x et y dans E, et B une base orthonormée fixée, et $u = MAT_B(0)$. Alors $< u(x), y >= {}^t(MX)Y = {}^tX\,{}^tMY$. On pose $u^*(y) = {}^tMY$, ainsi u^* est l'endomorphisme dont ${}^tM$ est la matrice dans B. Alors ${}^tX\,{}^tMY =< x, u^*(y) >$.

Montrons que c'est unique. Soient M_1 et M_2 deux matrice tel que ${}^tXM_1Y = .{}^tXM_2Y, \forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Montrons que $M_1 = M_2$. On évolue cette égalité pour $X = e_i$ et $Y = e_j$, où (e_i) est la base canonique.

Alors M_1e_j, est la j-ème colonne de M_1, puis ${}^te_iM_1e_j = e_icoeff(i, j)$ de M_1. Ainsi, ${}^te_iM_1e_j = {}^te_iM_2e_j, \forall (i, j)$, veut bien dire que $M_1 = M_2$. □

Définition 1. Soit $u_inL(E)$. Alors u est symétrique si et seulement si $U^* = U$, c'est à dire si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E \times E, < u(x), y >=< x, u(y) >$$

Remarque. Rien à voir avec les symétries, les endomorphismes tels que $S^2 = Id$.

Corollaire 2. Soit u symétrique, alors sa matrice S dans une base orthonormée est symétrique, c'est à dire

$${}^tS = S$$

On note $S_n(\mathbb{R})$ les matrices symétriques de taille $n \times n$.

Proposition 3. $\forall S \in S_n(\mathbb{R})$, $S^k \in S_n(\mathbb{R}), \forall k \geq 2$ et $\forall S \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$, $S^{-1} \in S_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. $.^t(S^k) = (.^tS)^k = S^k$ et $.^t(S^{-1}) = (.^tS)^{-1} = S^{-1}$. □

Remarque. Si A et B sont dans $S_n(\mathbb{K})$ alors $AB \in S_n$ est faux en général.

Proposition 4. $S_n(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sa dimension est : exercice

5.2 Les endomorphismes orthogonaux.

Définition 5. On dit que $U \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonal si $\forall(x, y) \in E \times E, < u(x), u(y) >=< x, y >$. (On dit que u préserve le produit scalaire).

Remarque. Ne parlez pas de l'orthogonal de U et U orthogonal à v.
On note $O(E)$ les endomorphismes orthogonaux sur E.

Proposition 2. $U \in O(E)$
$\Leftrightarrow \forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$ (u préserve la norme)
$\Leftrightarrow \forall BONB$ de E, $u(B)$ est une BON de E.

Démonstration. (à savoir) On prouve la première ligne. Supposons que $u \in O(E)$. Alors $||u(x)|| = \sqrt{< u(x), u(x) >} = \sqrt{< x, x >} = ||x||$ car u préserve le produit scalaire.
La réciproque repose sur la formule suivante (à savoir) :

$$< x, y >= \frac{1}{2}(||x + y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2) \text{ Identité de polarisation } (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

En effet $||x + y||^2 =< x + y, x + y >=< x, x > + < y, y > + < x, y > + < y, x >= ||x||^2 + ||y||^2 + 2 < x, y >$.
Supposons que u préserve les normes, $||u(x)|| = ||x||$, $\forall x \in E$.
On calcule $< u(x), u(y) >= \frac{1}{2}(||u(x) + u(y)||^2 - ||u(x)||^2 - ||u(y)||^2) = \frac{1}{2}(||u(x + y)||^2 - ||u(x)||^2 - ||u(y)||^2) = \frac{1}{2}(||x + y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2) =< x, y >$. Donc $u \in O(E)$. □

Proposition 3. $O(E)$ est un groupe pour la composition. Cela veut dire que

- $Id \in O(E)$
- u et v sont dans $O(E) \Rightarrow uov \in O(E)$
- $u \in O(E)$ implique que u est inversible et de plus $u^{-1} \in O(E)$

Démonstration. (à savoir)

- $||Id(x)|| = ||x||$ donc $Id \in O(E)$

— $||uov(x)|| = ||u(v(x))|| = ||v(x)|| = ||x||$. Donc $uov \in O(E)$ par P2.

— Soit $x \in E$ tel que $u(x) = 0$. Alors $||u(x)|| = ||x||$ donc $x = 0$ et u est injective. Comme c'est un endomorphisme, u est inversible. De plus $||u^{-1}(x)|| = ||u(u^{-1}(x))|| = ||x||$ donc $u^{-1} \in O(E)$.

□

Définition 4. On dit qu'une matrice Ω est orthogonale si l'endomorphisme associé dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthogonale.
On note $O_n(\mathbb{R})$ les matrices orthogonales de taille $n \times n$.

Théorème V.5. $\Omega \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow .^t\Omega\Omega = I_n \Leftrightarrow .^t\Omega = \Omega^{-1} \Leftrightarrow$ les colonnes de Ω forment une BON de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire $x.y$ de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. (à savoir.) Soit u l'endomorphisme associé à Ω dans la base canonique. On a alors : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, < u(x), u(y) >=< x, y >$ car $u \in O(E)$. De plus, si on note X et Y les colonnes représentant x et y dans la base canonique, on a $< u(x), u(y) >= .^t(\Omega X)\Omega Y = .^tX.^t\Omega\Omega Y =< x, y >= .^tXY$. Ainsi : $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, .^tX(.^t\Omega\Omega - I_n)Y = 0$. On évolue cela pour $X = e_i$ et $X = e_j$ et on trouve $.^t\Omega\Omega - I_n = 0$. Cela équivaut à $.^t\Omega = \Omega^{-1}$ □

Exemple. Ue rotation de $\mathbb{R}^2$ est un endomorphisme orthogonal. On note R_θ la rotation d'angle θ. Soit $B = (1,0), (0,1)$ la BON de $\mathbb{R}^2$. Alors $\Omega := MAT_B(R_\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$. On note que les colonnes C_1 et C_2 vérifient $C_1.C_2 = 0$ et $||C_1|| = 1$. Ainsi les colonnes forment bien une BON.

Remarque. $\Omega^{-1} = \frac{1}{det\Omega} \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{cos^2\theta + sin^2\theta}.^t\Omega = .^t\Omega.$

Remarque. Dans le T5, o a dit $.^t\Omega\Omega = I_n$, les colonnes de Ω forment une BON, il faut pour cela voir que l'élément (i,j) de $.^t\Omega\Omega$ est $.^tC_iC_j = C_i.C_j$ où (C_i) sont les colonnes de Ω. Ainsi $.^t\Omega\Omega = I_n \Leftrightarrow C_iC_j = \delta_{ij} \Leftrightarrow (C_i)_{i=1,\ldots,n}$ est une BON.

5.3 Réduction des matrices symétriques

Proposition 6. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Alors ses *sep* sont orthogonaux.

Démonstration. (à savoir.) Soit F et G deux *sep* de U distincts. Soient $x \in F$ et $y \in G$. Soient λ et μ les valeurs propres associés. Alors $< \lambda x, y >=< u(x), y >=< x, u(y) >=< x, \mu y >$. Ainsi $(\lambda - \mu) < x, y >= 0$, et $\lambda \neq \mu$, donc $x \perp y$. □

Proposition 7. Soit F un sev de E stable par u et u symétrique. Alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

Démonstration. (à savoir.) Soit $y \in F^\perp$, on veut montrer que $u(y) \in F^\perp$. Soit $x \in F$, alors $< x, u(y) > - < u(x), y >$ car u est symétrique. Or $\begin{cases} u(x) \in F \text{ car } F \text{ est stable par } u \\ y \in F^\perp \end{cases} \Rightarrow < u(x), y >= 0$ Donc $u(y) \in F^\perp$. □

Remarque. Plus généralement F stable par u est équivalent à $F^{\perp}$ est stable par $.^{t}u$ (voir D1 du chapitre).

Théorème V.8. (surpuissant) Toute matrice symétrique S est diagonalisable, dans une BON c'est à dire $\forall S \in S_n(\mathbb{R})$, il existe D diagonale et $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ tel que

$$S = \Omega D^t\Omega \text{ avec } {}^t\Omega = \Omega^{-1}$$

Démonstration. (à savoir)

Lemme. Toute matrice symétrique admet une valeur propre réelle.

Soit χ_S le polynôme caractéristique de S. Il se décompose en produit comme soit

$$\chi_S(X) = \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{m_i} \times \prod_{i=1}^{q}(X^2+\alpha_i X+\beta_i)^{n_i}$$

Supposons que S n'a pas de valeur propre, donc il n'y a ci dessus que des trinômes irréductibles c'est à dire $p = 0$.

Or $\chi_s(S) = 0$ (théorème de Cayley-Hamilton). Donc $\prod_{i=1}^{q}(S^2+\alpha_i S+\beta_i I_n)^{n_i} = 0$. Donc un de ces facteurs est non inversible (sinon le produit total serait inversible donc différent 0).

Donc $\exists x \in \mathbb{R}^n, n \neq 0$, tel que $(S^2+\alpha_i S+\beta_i I_n)^x = 0$, c'est à dire $S^2x = -\alpha_i Sx - \beta_i x$

Soit $F = vect(x, Sx)$. Alors F est stable par S puisque $vect(Sx, S^2x) = vect(Sx, -\alpha_i S_n - \beta_i x) = vect(x, Sx)$.

Soit u l'endomorphisme associé à S et U_F sa restriction à F, alors U_F est symétrique. Donc dans une BON, sa matrice est symétrique puisque F est de dimension 2, cette matrice est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (elle est symétrique).

Ainsi $\chi_{U_F}(X) = X^2-(a+d)X+ad-b^2$. On a $\Delta = (a+d)^2-4(ad-b^2) = a^2+d^2-2ad+4b^2 = (a-d)^2+4b^2 \geq 0$.

Donc χ_{U_F} admet une racine. C'est une valeur propre de U. Or on a supposé que u n'a pas de valeur propre, contradiction □

Démonstration. (Lemme) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Par le lemme, $\exists x$ un vecteur propre de S. Soit $F = vect(x)$ et par les propositions d'avant, $F^{\perp}$ est stable par S. Dans une BON adaptée $\tilde{B}$, la matrice de u (l'endomorphisme canoniquement associé à S), on a : $MAT_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & S' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ (c'est une matrice par blocs car $F^{\perp}$ est stable par u).

Hypothèse de récurrence : Toute matrice symétrique est diagonalisable en BON.

— Initialisation : facile

— Hérédité : se servir de $MAT_{\tilde{B}}(u)$ et diagonaliser S' avec l'hypothèse de récurrence.

□

5.4 Projections orthogonales : applications

Soit F un sev d'un eve E. Soit $x \in E$. On chercher à calculer $d(x, F) := inf||x-y||$

Théorème V.1. $d(x,F) = ||x - P_F(x)||$ où P_F est la projection orthogonale. De plus $P_F(x)$ est l'unique solution du problème "minimiser $||x,y||$ avec $y \in F$.

Démonstration. Soit $y \in F$ alors $||x-y||^2 = ||x - P_F(x) + P_F(x) - y||^2 = ||x - P_F(x)||^2 + ||P_F(x) - y||^2$ (par Pythagore) $\geq ||x - P_F(x)||$. Or, $P_F(x) \in F$. Donc $P_F(x$ répod au problème "minimiser $||x-y||^2$, avec $y \in F$". $\square$