Calcul différentiel

Semestre 4

Définition

Calcul des coefficients de Fourier

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i\pi x}dx$$

$$a_n(f) = c_n + c_{-n}$$
$$b_n(f) = i(c_n - c_{-n})$$

Somme partielle de Fourier

$$s_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)^{inx}$$

Produit scalaire

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}g(t)dt$$

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

Régularisée

$$f_r(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-}{2}$$

Convergence normale

Soit f 2π périodique et continue par morceau alors

$$c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}[c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n}] \to f$$

Dirichlet

$$f_r(x) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f)e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}$$

Convergence en moyenne quadratique

Convergence en moyenne quadratique : Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ alors $(s_p(f))_p \to f$ alors

$$\lim_{p\to+\infty} \|s_p(f)\|_2^2$$

Parseval

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty} \infty |c_n(f)|^2$$

Inégalité de Bessel

$$\sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2$$

Fonctions T-périodiques

$$c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)e^{-\frac{2i\pi}{T}nt}dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos(\frac{2\pi}{T}nt)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin(\frac{2\pi}{T}nT)dt$$