Physique quantique

Devoir maison 2019 - Approche de Gamow de la radioactivité α

1 Calcul de l'expression du coefficient de transmission

1. (a) Soit l'équation aux valeurs propres, dans la région 1 on peut remarquer que $V(x) = -V_0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(x) - V_0\phi(x) = E\phi(x) \tag{1}$$

(b) Nous pouvons donc réécrire l'équation (1) :

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(x) - V_0\phi(x) &= E\phi(x) \\
\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(x) + (V_0 + E)\phi(x) &= 0 \\
\phi''(x) + \delta^2\phi(x) &= 0
\end{aligned}$$

avec $\boxed{\delta = \frac{\sqrt{2m(V_0 + E)}}{\hbar}}$ on a bien δ positif puisque V_0 et E sont positifs. Une solution de cette équation est

$$\phi_1(x) = Ae^{i\delta x} + Be^{-i\delta x}$$

(c) Dans cette équation nous avons $Ae^{i\delta x}$ qui correspond au terme de l'onde incidente. Et $Be^{-i\delta x}$ qui correspond au terme de l'onde réflechie par la barrière en $x = a$. Le signe négatif nous montre que l'onde est à contre sens par rapport à l'onde incidente c'est donc bien l'onde réfléchie.

2. (a) Soit l'équation aux valeurs propres, dans la région 2 on peut remarquer que $V(x) = V_1$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(x) + V_1\phi(x) = E\phi(x) \tag{2}$$

(b) Nous pouvons donc réécrire l'équation (2) :

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(x) + V_1\phi(x) &= E\phi(x) \\
\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(x) + (E - V_1)\phi(x) &= 0 \\
\phi''(x) - \frac{2m(V_1 - E)}{\hbar^2}\phi(x) &= 0 \\
\phi''(x) - \rho^2\phi(x) &= 0
\end{aligned}$$

avec $\boxed{\rho = \frac{\sqrt{2m(V_1 - E)}}{\hbar}}$ on a bien ρ positif puisque $V_1 > E$. Une solution de cette équation est

$$\phi_2(x) = Ce^{\rho x} + D^{-\rho x}$$

3. (a) Soit l'équation aux valeurs propres, dans la région 3 on peut remarquer que $V(x) = 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(x) = E\phi(x) \tag{3}$$

(b) Nous pouvons donc réécrire l'équation (3) :

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(x) &= E\phi(x) \\ \phi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\phi(x) &= 0 \\ \phi''(x) + k^2\phi(x) &= 0 \end{aligned}$$

avec $\boxed{k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}}$ on a bien k positif puisque E est positif. Une solution de cette équation est

$$\phi_3(x) = Ee^{ikx} + F^{-ikx}$$

(c) Dans cette équation nous avons Ee^{ikx} qui correspond au terme de l'onde transmise après $x = b$. Et Fe^{-ikx} qui est nul d'après l'énoncé. En effet ce terme correspond au particule qui reviennent après avoir franchi la barrière. On peut donc réécrire l'équation de ϕ_3 :

$$\phi_3(x) = Ee^{ikx}$$

4. (a) Par identification on a $\phi_I = Ae^{i\delta x}$ et $\phi_T = Ee^{ikx}$. On peut donc calculer le courant incident J_I et le courant transmis J_T grâce à la formule suivante

$$J(x) = \frac{\hbar}{i2m}[\phi^*(x)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x} - \phi(x)\frac{\partial\phi^*(x)}{\partial x}] \tag{4}$$

On a donc

$$\begin{aligned} J_I &= \frac{\hbar}{i2m}[\phi_I^*(x)\frac{\partial\phi_I(x)}{\partial x} - \phi_I(x)\frac{\partial\phi_I^*(x)}{\partial x}] \\ &= \frac{\hbar}{i2m}[|A|e^{-\delta x}i|A|\delta e^{\delta x} + |A|e^{\delta x}|A|e^{-\delta x}\delta i] \\ &= \frac{\hbar}{2m}|A|^2\delta \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} J_T &= \frac{\hbar}{i2m}[\phi_T^*(x)\frac{\partial \phi_T(x)}{\partial x} - \phi_T(x)\frac{\partial \phi_T^*(x)}{\partial x}] \\ &= \frac{\hbar}{i2m}[|E|e^{-ikx}|E|ike^{ikx} + |E|e^{ikx}|E|ike^{-ikx}] \\ &= \frac{\hbar}{m}|E|^2 k \end{aligned}$$

On a utilisé que $e^y \times e^{-y} = 1$.

(b) D'après l'énoncé on a que $T = \frac{J_T}{J_I} = \frac{\hbar}{m}\frac{|E|^2 k}{|A|^2\delta}\frac{m}{\hbar}$ et donc

$$\boxed{T = \frac{k}{\delta}\frac{|E|^2}{|A|^2}}$$

5. (a) En utilisant la continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée au point a on a

$$\begin{cases} \phi_1(a) = \phi_2(a) \\ \phi_1'(a) = \phi_2'(a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ae^{i\delta a} + Be^{-i\delta a} = Ce^{\rho a} + De^{-\rho a} \\ i\delta(Ae^{i\delta a} - Be^{-i\delta a}) = \rho(Ce^{\rho a} - De^{-\rho a}) \end{cases}$$

On cherche à établir une expression de A pour ce faire on procède par combinaison, on effectue $i\delta$ fois la première ligne que l'on somme à la deuxième. On obtient donc

$$\begin{aligned} 2i\delta Ae^{i\delta a} &= i\delta(Ce^{\rho a} + De^{-\rho a}) + \rho(Ce^{\rho a} - De^{-\rho a}) \\ &= Ce^{\rho a}(i\delta + \rho) + De^{-\rho a}(i\delta - \rho) \\ A &= \frac{1}{2}\frac{e^{-i\delta a}}{i\delta}[Ce^{\rho a}(i\delta + \rho) + De^{-\rho a}(i\delta - \rho)] \end{aligned}$$

(b) En utilisant la continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée au point b on a

$$\begin{cases} \phi_2(b) = \phi_3(b) \\ \phi_2'(b) = \phi_3'(b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ce^{\rho b} + De^{-\rho b} = Ee^{ikb} \\ \rho(Ce^{\rho b} - De^{-\rho b}) = ikEe^{ikb} \end{cases}$$

Nous voulons isoler une expression de C et une expression de D, nous pouvons remarque que si l'on effectue ρ fois la première ligne sommé avec le deuxième ligne nous pouvons obtenir une expression de C. Si l'on effectue ρ fois la première ligne et que l'on retranche la deuxième nous pouvons obtenir une expression de D. En somme nous avons

— Nous cherchons une expression de C, $\rho(1) + (2)$

$$\begin{aligned} \rho Ce^{\rho b} + \rho De^{-\rho b} + \rho(Ce^{\rho b} - De^{-\rho b}) &= \rho Ee^{ikb} + ikEe^{ikb} \\ 2\rho Ce^{\rho b} &= Ee^{ikb}(\rho + ik) \\ C &= \frac{1}{2\rho e^{\rho b}}Ee^{ikb}(\rho + ik) \end{aligned}$$

— Nous cherchons une expression de D, $\rho(1) - (2)$

$$\begin{aligned} \rho Ce^{\rho b} + \rho De^{-\rho b} - \rho Ce^{\rho b} + \rho De^{-\rho b} &= \rho Ee^{ikb} - ikEe^{ikb} \\ 2\rho De^{-\rho b} &= Ee^{ikb}(\rho - ik) \\ D &= \frac{1}{2\rho e^{-\rho b}}Ee^{ikb}(\rho - ik) \end{aligned}$$

(c) Récapitulons les différents expressions que nous avons obtenu

$$A = \frac{1}{2}\frac{e^{-i\delta a}}{i\delta}[Ce^{\rho a}(i\delta + \rho) + De^{-\rho a}(i\delta - \rho)]$$

$$C = \frac{1}{2\rho e^{\rho b}}Ee^{ikb}(\rho + ik)$$

$$D = \frac{1}{2\rho e^{-\rho b}}Ee^{ikb}(\rho - ik)$$

Il vient naturellement d'injecter les expressions de C et D dans l'expression de A :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\frac{e^{-i\delta a}}{i\delta}[\frac{e^{-\rho b}}{2\rho}Ee^{ikb}(\rho + ik)e^{\rho a}(i\delta + \rho) + \frac{e^{\rho b}}{2\rho}Ee^{ikb}(\rho - ik)e^{-\rho a}(i\delta - \rho)] \\ &= \frac{1}{4}\frac{e^{-i\delta a + ikb}E}{i\delta\rho}[e^{-\rho(b-a)}(\rho + ik)(i\delta + \rho) + e^{\rho(b-a)}(\rho - ik)(i\delta - \rho)] \end{aligned}$$

Nous avons une expression de A en fonction de E, k, δ, ρ, a et b cependant au vu de la question suivante nous devons faire apparaître une expression qui nous permettra de faire apparaître un cosinus et un sinus hyperbolique. Essayons de développer le crochet

$$\begin{aligned} A &= \frac{e^{-i(\delta a - kb)}E}{4i\delta\rho}[e^{-\rho(b-a)}(i\delta\rho + \rho^2 - k\delta + ik\rho) + e^{\rho(b-a)}(i\delta\rho - \rho^2 + k\delta + ik\rho)] \\ &= \frac{e^{-i(\delta a - kb)}E}{4i\delta\rho}[e^{-\rho(b-a)}((\rho^2 - k\delta) + i(\delta\rho + k\rho)) + e^{\rho(b-a)}(-(\rho^2 - k\delta) + i(\delta\rho + k\rho))] \end{aligned}$$

L'expression finale de T ne possède pas de δ^2 ni de ρ on doit donc les enlever de A on obtient donc

$$A = \frac{e^{-i(\delta a - kb)}E}{4i}[e^{-\rho(b-a)}((\frac{\rho}{\delta} - \frac{k}{\rho}) + i(1 + \frac{k}{\rho})) + e^{\rho(b-a)}(-(\frac{\rho}{\delta} - \frac{k}{\rho}) + i(1 + \frac{k}{\delta}))]$$

(d) Par la question 4)b) on a $T = \frac{k}{\delta}\frac{|E|^2}{|A|^2}$ on cherche donc une expression de $|A|^2$. Pour ce faire on pose $\boxed{K = \frac{\rho}{\delta} - \frac{k}{\rho}}$ et $\boxed{G = 1 + \frac{k}{\delta}}$. On a clairement G positif et K n'est positif que si $\frac{\rho}{\delta} > \frac{k}{\rho}$ en anticipant la partie 2 de on a $K = \frac{\rho}{\delta} - \frac{k}{\rho} = 1.512$ Donc $K > 0$. On a donc

$$\begin{aligned}
|A|^2 &= |\frac{e^{-i(\delta a - kb)}E}{4i}|^2 |e^{-\rho(b-a)}(K+iG) + e^{\rho(b-a)}(iG-K)|^2 \\
&= \frac{|E|^2}{16}|K(e^{-\rho(b-a)} - e^{\rho(b-a)}) + iG(e^{\rho(b-a)} + e^{-\rho(b-a)})|^2 \\
&= \frac{|E|^2}{4}[|K|^2|\underbrace{\frac{1}{2}(e^{-\rho(b-a)} - e^{\rho(b-a)})}_{(-\sinh(\rho(b-a)))}|^2 + |G|^2|\underbrace{\frac{1}{2}(e^{\rho(b-a)} + e^{-\rho(b-a)})}_{(cosh(\rho(b-a)))}|^2] \\
&= \frac{|E|^2}{4}(K^2\sinh^2(\rho(b-a)) + G^2\cosh^2(\rho(b-a)))
\end{aligned}$$

On a donc au final

$$\begin{aligned}
T &= \frac{k}{\delta}\frac{|E|^2}{|A|^2} \\
&= \frac{k}{\delta}\frac{|E|^2}{\frac{|E|^2}{4}}\frac{1}{G^2\cosh^2(\rho(b-a)) + K^2\sinh^2(\rho(b-a))} \\
&= \frac{4k}{\delta(G^2\cosh^2(\rho(b-a)) + K^2\sinh^2(\rho(b-a)))}
\end{aligned}$$

6. (a) Quand $x >> 1$ on a $e^{-x} << 1$ et donc $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \sim \frac{e^x}{2}$ et $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \sim \frac{e^x}{2}$.
   (b) Puisque $\rho(b-a) >> 1$. En injectant l'approximation dans l'équation précédente on obtient

$$\begin{aligned}
T &= \frac{4k}{\delta}\frac{1}{G^2\frac{e^{2\rho(b-a)}}{4} + K^2\frac{e^{2\rho(b-a)}}{4}} \\
&= \frac{16k}{\delta}\frac{e^{-2\rho(b-a)}}{G^2 + K^2}
\end{aligned}$$

2 Estimation de la période radioactive de l'Uranium 238

7. On note m_{par} la masse de la particule α.
   (a) On a $m_{par} = 4m_{pn} = 6.68 \times 10^{-27} kg$. Ainsi
      i. $k = \frac{\sqrt{2m_{par}E}}{\hbar} = 8.985 \times 10^{14} m^{-1}$, l'analyse de dimension donne $[k] = \frac{\sqrt{kg.kg.m^2.s^{-2}}}{kg.m^2.s^{-2}} = m^{-1}$
      ii. $\delta = \frac{\sqrt{2m_{par}(V_0 + E)}}{\hbar} = 1.176 \times 10^{15} m^{-1}$, l'analyse de dimension est identique.
      iii. $\rho = \frac{\sqrt{2m(V_1 - E)}}{\hbar} = 2.248 \times 10^{15} m^{-1}$, l'analyse de dimension est identique.
   (b) On a $G = (1 + \frac{k}{\delta}) = 1.764$ sans unité et on a $K = \frac{\rho}{\delta} - \frac{k}{\rho} = 1.512$ sans unité.
   (c) D'après la question 6)b) on a $T = \frac{16k\exp(-2\rho(b-a))}{\delta(G^2 + K^2)} = 3.151 \times 10^{-39}$, l'analyse de dimension donne $[T] = \frac{m^{-1}}{m^{-1}} =$ sans unité ce qui est cohérent puisque nous assimilerons ensuite T à une probabilité donc sans unité. De plus on a le droit d'utiliser l'approximation de la question 6)b) puisque $\rho(b-a) = 44.7 >> 1$.

8. (a) L'énergie d'une particule a pour expression $E = T + V$ où T représente l'énergie cinétique et V l'énergie potentielle. Dans le puit on a $V(x) = V_0$ on a donc

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m_{par}v^2 - V_0 \\ \frac{1}{2}m_{par}v^2 &= E + V_0 \\ v^2 &= \frac{2(E+V_0)}{m_{par}} \\ v &= \sqrt{\frac{2(E+V_0)}{m_{par}}} \end{aligned}$$

On peut vérifier l'analyse de dimension $[v] = \sqrt{\frac{kg.m^2.s^{-2}}{kg}} = m.s^{-1}$ homogène à une vitesse.

(b) $v = 1.857 \times 10^7 m.s^{-1}$

9. (a) Le temps entre deux chocs consécutif est équivalent au temps que met la particule qui a tapé en a ou $-a$ à parcourir la distance pour taper en $-a$ ou a. On a donc $\Delta t = \frac{\Delta d}{v} \Rightarrow \tau_0 = \frac{2a}{v} = 9.155 \times 10^{-22}s$. On peut utiliser la physique classique puisque le facteur relativiste vaut $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1.001$ ce qui est négligeable.

(b) On cherche le nombre d'essai N de franchissement de la barrière par seconde. Ce nombre d'essai est la durée sur laquelle on regarde (une seconde) divisé par le laps de temps entre deux essais on a donc $N = \frac{\Delta t}{\tau_0} = \frac{1}{\tau_0} = \frac{v}{2a}$ essais par seconde.

10. (a) On assimile T à la probabilité de franchissement de la barrière par la particule α. On cherche la probabilité $\mathcal{P}$ de franchissement de la barrière par la particule par seconde. Sachant que l'on a le nombre d'essai de franchissement par seconde et la probabilité de franchissement il vient que $\mathcal{P}$ est le produit entre N et T donc $\mathcal{P} = TN$.

(b) Il vient aisément $\mathcal{P} = T \times \frac{v}{2a}$

11. (a) On a Π la probabilité que la particule ait franchi le mur de potentiel au bout d'une durée τ. De plus on a $\mathcal{P}$ la probabilité de franchissement de la barrière par la particule par seconde. Ainsi on a Π qui est le produit entre τ et $\mathcal{P}$ donc $\Pi = \tau \times \mathcal{P}$.

(b) D'après l'énoncé la période $\tau_{1/2}$ est la durée au bout de laquelle cet élément a une probabilité Π égale à 1/2. On a donc $1/2 = \tau_{1/2} \times \mathcal{P}$ donc $\tau_{1/2} = \frac{1}{2\mathcal{P}} = \frac{2a}{2vT} = \frac{a}{vT}$. L'analyse dimensionnelle donne $[\tau_{1/2}] = \frac{m}{m.s^{-1}} = s$ ce qui est homogène à une période.

(c) $\tau_{1/2} = 1.45 \times 10^{17}s = 4.616 \times 10^9 ans$. Nous avons donc que l'uranium à 50% de chance d'être désintégré après 4.616 milliards d'années, cet élément est donc relativement stable. On comprend donc la nécessité d'utiliser de l'uranium 235 pour les centrales nucléaires (qui a une période de demi vie de 0.71 milliards d'années). On comprend aussi pourquoi la Terre produit de la chaleur depuis longtemps et pourquoi elle se refroidit lentement, effectivement la géothermie est produite par désintégration α de l'uranium 238 principalement.

FIN.