Mathématiques

# Calcul Différentiel Semestre 4

# Table des matières


I Fonction de plusieurs variables réelles 2

1 Notion de différentielle / dérivée 2

2 Applications partielles et dérivées partielles 4

3 Applications à valeurs dans un espace produit 5

4 Différentielles d'ordre supérieur 7

5 Difféomorphisme de classe $C^k$ 8

6 Extrema d'une application à valeur dans $\mathbb{R}$ 9

7 Courbes d'équations $f(x, y) = 0$ 11

8 Surface d'équation $z = f(x, y)$ 11

II Série de Fourier 13

9 Introduction 13

10 Série de Fourier d'une fonction $2\pi$-périodique 13

11 Séries de Fourier 15

12 Convergence en moyenne quadratique 15

13 Convergence ponctuelle 18

III Correction des Devoirs surveillés 1

1 Devoir surveillé 1

# Première partie

# Fonction de plusieurs variables réelles

## 1 Notion de différentielle / dérivée

### Définition

**Cas général.** Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normées. Soit $U$ un ouvert de $E$. On dit qu'une application $f$ de $U$ dans $F$ est différentiable en $x_0 \in U$ si il existe une application linéaire linéaire continue $L$ telle que $\forall h \in E$, vérifiant $x_0 + h \in U$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + ||h||_E \varepsilon(x_0, h)$$

avec $\lim\limits_{||h||_E \to 0} ||\varepsilon(x_0, h)||_F = 0$.
L'application $L$ est la différentielle de $f$ au point $x_0$ et elle est souvent notée $df(x_0), Df(x_0), d_{x_0}f$.

**Cas particulier $E = \mathbb{R}$.** On pose $h = x - x_0$. Soit $F$ un espace vectoriel normé. Soit $U$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On dit qu'une application $f$ de $U$ dans $F$ est différentiable en $x_0 \in U$ s'il existe une application linéaire continue tel que $\forall x \in U$

$$f(x) = f(x_0) + |x - x_0|\varepsilon(x, x_0)$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x, x_0) = 0_F$

**Si de plus $F = \mathbb{R}$.** L'application $L$ s'écrit $L(x - x_0) = \alpha(x - x_0)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. La constante $\alpha$ est notée $f'(x_0)$. La définition précédente peut se réecrire

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + |x - x_0|\varepsilon(x, x_0)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \varepsilon(x, x_0)$$

donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

**Remarque.** Si $F = \mathbb{R}^n$ alors $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$ et donc $\alpha \in \mathcal{M}_{n,p}$.
Si $h = x - x_0 > 0$ alors o parle de dérivée à droite, si $h < 0$ on parle alors de dérivée à gauche. Dans le cas réel, l'application $f$ est différentiable en $x_0$ si et seulement si $f$ est dérivable à droite et à gauche et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

**Définition.** U est un ouvert d'un evn $E$. L'application $f$ est dite différentiable sur $U$ si $f$ est différentiable en tout point de $U$.

**Définition.** L'application $f$ est dérivable dans la direction $v \in E$ en $x_0$ si la limite $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$ existe (peut dépendre de $v$ et $t \in \mathbb{R}^+$).

**Remarque.** Une application peut admettre des dérivées dans toutes les directions sans être différentiable en ce point.

*Exercice 1*

**Exemple.**

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{x^8 + (y - x^2)} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ \ (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{cases}$$

Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, la dérivée de $(u,v)$ en $(0,0)$ est

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{f(tu,tv) - f(0,0)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{t^6u^6}{t^8u^8 + (tv - t^2u^2)}\right) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t^4u^6}{t^7u^8 + (v - tu^2)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

dérivée dans toutes les directions en $(0,0)$. De plus $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x^2) = +\infty$ donc $f$ n'est pas continue en $(0,0)$ donc la fonction n'est pas différentiable en $(0,0)$.

## 1.1 Propriétés

**Théorème I.1.** Soit $U$ un ouvert de $E$, un espace vectoriel normé et $f$ une application de $E$ dans $F$ (un evn). Si l'application $f$ est différentiable en $x_0 \in U$ alors sa différentielle est unique.

**Théorème I.2.** (Application linéaire) Soient $E$ et $F$ deux e.v.n., $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$. Alors $f$ est différentiable sur $U$ et pour tout $x \in U$,

$$df(x) = f$$

**Théorème I.3.** Soient $E$ et $F$ deux e.v.n., soit $f$ une application de $E$ dans $F$. Si $f$ est différentiable en $x_0 \in U$ alors $f$ est continue en $x_0$.

**Théorème I.4.** (Forme bilinéaire) Une application bilinéaire continue est différentiable en tout point $(x_1,x_2) \in U \subset E_1 \times E_2$. $f : E_1 \times E_2 \to F$ et sa différentielle est l'application linéaire de $E_1 \times E_2$ dans $F$ est

$$(h_1,h_2) \to df(x_1,x_2)(h_1,h_2) = f(h_1,x_2) + f(x_1,h_2)$$

**Théorème I.5.** (Applications composées) Soient $E, F, G$, trois espaces vectoriels normés, $U$ un ouvert de $E$, $V$ un ouvert de $F$. Deux application $f : U \to F$ et $g : V \to G$. $a \in U$ tel que $f(a) \in V$. On suppose $f$ différentiable en $a$ et on suppose $g$ différentiable en $f(a)$. Alors $gof$ est différentiable en $a$ et a pour différentielle en ce point

$$d(gof)(a) = dg(f(a))odf(a)$$

**Théorème I.6.** (différentielle d'un produit) Soit $E$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, $U$ est un ouvert de $E$. Soit $f, g$ deux applications de $U$ dans $\mathbb{K}$, $x_0 \in U$. On pose $h = fg$. L'application $h$ est composée de

$(f,g) : \begin{cases} U \to \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\ x_0 \mapsto (f(x_0), g(x_0)) \end{cases}$ et de l'applcation bilinéaire continue $\phi : \begin{cases} \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ (y_1, y_2) \mapsto y_1.y_2 \end{cases}$.

Si $f$ et $g$ sont différentiables en $x_0$ alors $h = fg$ l'est aussi, et on a pour tout $k \in E$, la formule de Leibniz

$$dh(x_0)(k) = d_g(x_0)(k).f(x_0) + d_f(x_0)(k).g(x_0)$$

**Corollaire.** Si $f$ est différentiable sur $U$ et $g$ différentiable sur $V$ alors $gof$ est différentiable sur son domaine $U \cap f^{-1}(V)$.

**Théorème I.7.** (Linéarité) Soient $f, g$ deux applications différentiables de $U \subset E$ et $\alpha, \beta$ 2 scalaires

$$d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg$$

**Théorème I.8.** Toute application constante est différentiable et sa différentielle est l'application nulle

# 2 Applications partielles et dérivées partielles

## 2.1 Applications partielles

**Définition.** Soit $U$ un ouvert de $E_1 \times E_2 = E$ espace produit de deux espaces vectoriels normés, $E_1$ et $E_2$ et $f : \begin{cases} U \to F \\ (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) \end{cases}$. Soit $a = (a_1, a_2) \in U$. On appelle première application partielle associée à $f$ au point $a$ l'application $x_1 \mapsto f(x_1, a_2)$. Elle est définie sur l'ouvert de $E_1$. $U_1 = \{x_1 \in E_1, (x_1, a_2) \in U\}$. On appelle deuxième application partielle associée à $f$ au point $a$, l'application

$$x_2 \mapsto f(a_1, x_2)$$

Elle est définie sur l'ouvert de $E_2$

$$U_2 = \{x_2 \in E_2, (a_1, x_2) \in U\}$$

## 2.2 Différentielles partielles, dérivées partielles

**Définition.** Si la première application partielle associé à $f$ au point $a$ est différentiable au point $a \in U$, sa différentielle est appelée différentielle partielle de $f$ par rapport à sa première variable au point $a$ et notée $df_{x_1}(a)$ ou $dif(a)$. De même pour la seconde variable.

**Remarque.** Ces définitions s'étendent au cas $E_1 \times E_2 \times E_3 \times ... \times E_n$.

**Proposition.** Si l'application $f$ est différentiable au point $a = (a_1, a_2) \in U$ les deux applications partielles associées à $f$ au point $a$ sont différentiables, respectivement aux points $a_1 \in U_1$ et $a_2 \in U_2$ et on a la relation

$$df(a)(h) = df_{x_1}(a)(h_1) + df_{x_2}(a)(h_2)$$

$$h = (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$$

*Démonstration.* différentielle d'applications composées □

**Remarque.** Attention l'existence des différentielles partielles ne suffit pas à assurer la différentiabilité de $f$

**Théorème I.9.** Pour qu'une application $f$ définie sur $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ sont différentiable en $a$, il suffit que les $n$ différentielles partielles existent et soient continue en $a$.

**Théorème I.10.** Soient $E, F, G$, trois espace vectoriels normés où $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ un produit de $n$ e.v.n. $U \subset E$ un ouvert, $V \subset F$ un ouvert. $f$ est une application différentiable de $U$ dans $F$ et $g$ une application différentiable de $V$ dans $G$. Alors pour tout $a \in U$ tel que $f(a) \in V$

$$\partial_i(gof)(a) = d_g(f(a))o\partial_i f(a)$$

où $\partial_i$ désigne la différentielle partielle. $\partial_f(a) = df_{x_i}(a)$

**Remarque.** Si $E = \mathbb{R}^n$, les différentielle partielles s'écrivent.

$$\begin{aligned} df_{x_i}(a)(h_i) &= \partial_i f(a)(h_i) \\ &= \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} h_i \end{aligned}$$

où $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est la ième dérivée partielle.

*Exercice 2,3,4,5*

# 3 Applications à valeurs dans un espace produit

**Définition (Composantes d'une application).** Soient $U$ un ouvert d'un espace vectoriel normé, $E$ et $F = F_1 \times F_2$. Soient $\begin{cases} p_1 : F \to F_1 \\ p_2 : F \to F_2 \end{cases}$ et les projections (applications linéaires continues). Soit $f : U \to F$. Les applications $f_1 = p_1 of$ et $f_2 = p_2 of$ de $U$ dans les espaces $F_1$ et $F_2$sont appelées composantes de l'application.

**Proposition.** Une application $f$ de $U$ dans $F = F_1 \times F_2$ est différentiable en $a \in U$ si et seulement si $f_1 = p_1 of$ et $f_2 = p_2 of$ sont différentiables en $a \in U$. Lorsque c'est le cas, on a

$$df(a) = (df_1(a), df_2(a))$$

où $df_1(a) = d(p_1 of)(a) = dp_1(f(a))odf(a) = p_1 odf(a)$ et $df_2(p_2 of)(a) = dp_2(f(a))odf(a) = p_2 odf(a)$. De même, $f$ est différentiable sur $U$ si et seulement si $f_1$ et $f_2$ sont différentiables sur $U$.

*Démonstration.* Si $f$ est différentiable alors ... donc $f_1$ et $f_2$ sont différentiables

Passons à la réciproque. Supposons $f_1$ et $f_2$ différentiables. On munit $F_1 \times F_2$ de la norme $||(y_1, y_2)||_{x_0} =$

$\max\{||y_1||, ||y_2||\}$.

Soit $h \in E$ et $x_0 \in U \subset E$, on pose

$$L(h) = (df_1(x_0)(h), df_2(x_0)(h))$$

On a alors

$$\begin{aligned}
||f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)||_\infty &= \max_{i=1,2}\{||f_i(x_0+h) - f_i(x_0) - df_i(x_0)(h)||\} \\
&= \max_{i=1,2}\{||h||_E||\epsilon_i(x_0,h)||\} \\
&= ||h||_E||\epsilon(x_0,h)||_\infty
\end{aligned}$$

donc $f$ est différentiable et $df = (df_1, df_2)$ □

**Remarque.**

1. $f$ esst différentiable sur $U$ si et seulement si $f_1$ et $f_2$ le sont .
2. se généralise au cas où $F = F_1 \times F_2 \times ... \times F_n$

## 3.1 Applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Soient $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de $\mathbb{R}^n$, $(e'_j)_{j=1,\dots,p}$ une base de $\mathbb{R}^p$. $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable au point $a \in U$.

**Définition.** L'application linéaire $df(a)$ est déterminée par la donnée de sa matrice dans les bases $(e_i)_i$ et $(e'_j)_j$. Cette matrice est appelée **matrice jacobienne** de $f$ au point $a$ dans les bases $(e_i)_i$ et $(e'_j)_j$. Les vecteurs colonnes de cette matrice sont fermés avec les composantes des $n$ vecteurs $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ dans la base $(e'_j)$.

$$\mathcal{J}_{f(a)} = \begin{pmatrix}
\dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\
\dfrac{\partial f_2(a)}{\partial x_1} & \ddots & \cdots & \dfrac{\partial f_2(a)}{\partial x_1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\dfrac{\partial f_p(a)}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial f_p(a)}{\partial x_n}
\end{pmatrix}$$

Si $n = p$, le déterminant de la matrice jacobienne est appelé le jacobien de l'application $f$ au point $a$ dans les bases considérées.

*Exercice 6*

## 3.2 Divergence et rotationnel dans $\mathbb{R}^3$

**Définition.** Soit $f$ une application définie sur $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ ayant pour composantes $f_1, f_2, f_3$. On appelle divergence de $f$ l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\div(f) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \vec{\nabla}.\vec{f}$$

**Remarque.** Se généralise en dimension quelconque.

**Définition.** On appelle rotationnel de $f$ l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$rot(f) = \vec{\nabla} \wedge \vec{f}$$

### 3.3 Espaces $C^0(U, F)$ et $C^1(U, F)$

**Définiton.** L'ensemble des applications continues de $U$ dans $F$ est un espace vectoriel noté $C^0(U, F)$. Les applications différentiables sur $U$ dont la différentielle est contiue sur $U$ sont dites "continuement différentiable" ou de classe $C^1$ sur $U$. Cet ensemble est $C^1(U, F)$.

**Théorème I.11.** $C^1(U, F)$ est un sous espace vectoriel de $C^0(U, F)$

**Théorème I.12.** Soit $f$ une application définie sur un ouvert $U$ de $E = E_1 \times ... \times E_n$. Pour que $f$ soit de classe $C^1$ sur $U$, il faut et il suffit que chacun des différentielles partielles **existe** et soit **continue** sur $U$.

## 4 Différentielles d'ordre supérieur

**Définition.** Soient $k \in \mathbb{N}$, $f$ une application de $U$ ouvert de $E$ (e.v.n) dans $F$ (e.v.n) $f$ est dite

— de classe $C^0$ sur $U$ si elle est continue sur $U$

— de classe $C^{k+1}$ sur $U$ si elle est différentiable et si sa différentielle $df$ est de classe $C^k$ sur $U$.

— de classe $C^\infty$ sur $U$ si elle est de classe $C^k$ pour tout entier $k$.

**Remarque.** On note $C^k(U, F)$ l'espace des applications de classe $C^k$ de $U$ à valeurs dans $F$. La différentielle k-ième de $f$ est notée $d^k f$ et est définie par récurrence $d^0 f = f ... d^k f = d(d^{k-1} f)$.

**Théorème I.13.** La composée d'applications de classe $C^k$ est une application de classe $C^k$.

**Théorème I.14.** Soient $E$ et $F$ deux evn, $U$ un ouvert de $E$ et $f$ une application de $U$ dans $F$. Pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble des applications de $U$ dans $F$ $n$ fois différentiables en un point $a \in U$ est un point $a \in U$ est un espace vectoriel et l'application qui associe à une application élement de cet espace sa différentielle d'ordre $n$ au point $a$ est linéaire

$$f \mapsto d^n f(a)$$

$$\alpha f + \beta g \mapsto \alpha d^n f(a) + \beta d^n g(a)$$

*Démonstration.* par récurrence □

**Proposition.** (Symétrie des différentielles d'ordre supérieur) Soient $E$ et $F$ deux e.v.n, $U$ un ouvert de $E$ et $f$ une application de $U$ dans $F$. On suppose $f$ deux fois différentiable en un point $\alpha \in U$. Sa différentielle seconde $d^2 f(a =$ au point $a$ une application bilinéaire continue et symétrique de $E^2$ dans $F \forall (h, k) \in E^2$

$$d^2 f(a)(h, k) = d^2 f(a)(k, h)$$

**Théorème I.15.** Soient $E$ et $F$ deux e.v.n, $U$ un ouvert de $E$ et $f$ une application de $U$ dans $F$. On suppose $f$ $n$ fois différentiable en un point $a \in U$.
Sa différentielle d'ordre $n$ $d^n f(a)$ au point $a$ est une application multilinéaire continue et symétrique de $E^n$ dans $F$.

**Théorème I.16.** (Schwarz) Soit $f$ une application définie sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $F$ (e.v.n) telle que la différentielle d'ordre $p$ $d^p f(a)$ au point $a \in U$ existe. Alors la différentielle partielle $\dfrac{\partial^p f}{\partial x_i ... \partial x_j}$ est une application symétrique de $i, ...j$. (dans le cas de $\mathbb{R}^n$, la valeur d'une dérivée partielle d'ordre $p$ ne change pas l'orsqu'on change l'ordre de dérivation successive).

*Exercice 7,8*

**Définition.** Soit $f$ une application définie sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $F$. Or dit que $f$ est $C^k$ par sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $(a_0, ..., a_n)$ de $[a, b]$ telle que la restriction de $f$ à chacun des intervalles $]a_{i-1}, a_i[$ soit prolongeable en application de classe $C^k$ sur $[a_{i-1}, a_i]$.

**Théorème I.17.** Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ une application de $I$ dans $F$. Si $f$ est continue sur $I$ et de classe $C^1$ par morceaux sur cet intervalle alors $f$ est constante si et seulement si $df = 0$ ($\Leftrightarrow f' = 0$)

# 5 Difféomorphisme de classe $C^k$

**Définition.** Soient $E$ et $F$ deux e.v.n $U$ un ouvert de $E$ , de $f$ une application de $U$ dans $F$. On dit que $f$ est un difféomorphisme de $U$ sur un ouvert $V$ de $F$ si $f$ est différentiable sur $U$ et si elle est une bijection de $U$ sur $V$ et si l'application récirpoque $f^{-1} : V \to E$ est différentiable sur $V$. On dit que $f$ est un $C^k - diffomorphisme$ si $f$ est un difféomorphisme et $f$ et $f^{-1}$ sont de classe $C^k$.

**Théorème I.18.** (Inversion locale) Soit $U$ un ouvert d'un espace vectoriel normé complet $E$, et $f$ une application différentiable de classe $C^k$ de $U$ dans $F$ (evn complet un Banach). Soit $a$ un point de $U$ si $df(a)$ est un isomorphisme de $E$ dans $F$ alors $f$ est un $C^k$ difféomorphisme d'un voisinage ouvert de $a$ vers un voisinage ouvert de $f(a)$

**Théorème I.19.** (Inversion globale - Cas scalaire) Soit $U$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\phi$ une application de classe $C^k$ de $U$ dans $\mathbb{R}$. L'application $\phi$ sera un $C^k$ difféomorphisme de l'intervalle $U$ dans l'intervalle $\phi(U)$ si et seulement si

$$\forall x \in U, \phi'(x) \neq 0$$

*Démonstration.* $k = 1$ ($k$ quelconque par récurrence)

1. $\phi$ $C^1$ difféomorphisme de $U$ das $\phi(u) \Rightarrow \forall x \in U, \phi'(x) \neq 0$ donc $\phi$ et $\phi'$ sont $C_1$. De plus $\phi^{-1} o \phi = Id$. On dérive l'égalité $\forall x \in U$ on a $(\phi^{-1} o \phi)'(x) = (\phi^{-1})(\phi(x)) o \phi'(x) = 1$ (cas scalaire, $o$ équivaut à la multiplication) donc $\forall x \in U, \phi'(x) \neq 0$
2. $(\forall x \in U, \phi'(x) \neq 0) \Rightarrow \phi C^1$ difféomorphisme de $U$ dans $\phi(U)$. $\forall x \in U, \phi'(x) \neq 0$ donc $\phi$ ne change pas de signe donc $\phi$ est strictement monotone et continue donc $\phi$ est injective donc $\phi$ est bijective de $U$ dans $\phi(u)$ donc $\exists \phi^{-1}$ tel que $\phi^{-1} o \phi = Id$.

Montrons que $\phi^{-1}$ est différentiable soit $y_0 \in \phi(U)$ et $y \in \phi(U)$. Alors il existe $x_0 \in U$ tel que $y_0 = \phi(x_0)$ et il existe $x \in U$ tel que $y = \phi(x)$.
Quelle est la dérivée de $\phi^{-1}$ en $y_0$ ?

$$\lim_{y \to y_0} \frac{\phi^{-1}(y) - \phi^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{\phi(x) - \phi(x_0)} = (\phi'(x_0))^{-1}$$

Donc $\phi^{-1}$ est différentiable car $\phi'(x_0) \neq 0$. On déduit

$$(\phi^{-1})'(y_0) = (\phi' o \phi(y_0))^{-1}$$

Continue en tant que composée d'applications continues donc $\phi^{-1}$ est $C^1$ donc $\phi$ est $C^1$ difféomorphisme.

□

**Théorème I.20.** (Inversion globale - Cas général) Soit $f$ une application de classe $C^1$ définie sur un ouvert $U$ de $E$ et à valeurs dans $F$ (où $E, F$ espace de Banach). Si $f$ **est injective** et si pour tout $x \in U, df(x)$ est un isomorphisme de $E$ sur $F$ alors $f(U)$ est un ouvert de $F$ et $f$ est un $C^1$ difféomorphisme de $U$ sur $f(U)$

**Remarque.** Si $f$ est un changement de variable dans $\mathbb{R}^n$, $f(x)$ difféomorphisme si et seulement si le Jacobien ne s'annule pas.

*Exercice 6 (question 3 et 4),9*

# 6 Extrema d'une application à valeur dans $\mathbb{R}$

## 6.1 Cas général

**Définition.** Soit $f$ une application définie sur une partie $U$ d'un espace vectoriel $E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que $f$ admet un minimum local en un point $a \in U$, s'il existe un voisinage $V$ de $a$ dans $E$ tel que, pour tout $x \in V \cap U f(x) \geq f(a)$. On dit que $f$ admet u maximum local en $a$ si $-f$ admet un minimum local en $a$. L'extremum sera dit stricte si $\forall x \in V \cap U, x \neq a$ l'inégalité est stricte.

**Théorème I.21.** Si l'application $f$ admet en un point $a$ intérieur à $U$ un extremum local, et si $f$ est différentiable en $a$, alors sa différentielle en ce point est nulle.

*Démonstration.* Supposons que $f$ admette un extremum en $a \in U$. Pour tout $h$ dans $E$, on pose

$$\Psi(t) = f(a + th) \;\; t \in \mathbb{R}$$

qui est définie sur un voisinage ouvert de 0 image réciproque de $U$ par l'application $t \mapsto a + th$. Le point $t = 0$ est alors un extremum pour $\Psi$ et on a $\Psi'(0) = df(a)(h) = 0 \; \forall h \in E$ donc $df(a) = 0$. □

**Proposition.** Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application de $U$ dans $\mathbb{R}$ de classe $C^1$. Si $f$ a un extremum en $a \in U$, alors pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$$

**Remarque.** Attention la réciproque est fausse. Pour que $f$ ait un extremum en $a$, il faut que $a$ soit un point critique ($df(a) = 0$)

## 6.2 Cas d'une application de 2 variables

**Proposition.** Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $C^2$, $a = (a_1, a_2) \in U$ et $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que le segment $[a, a+h] \subset U$. On écrit le développement de Taylor-Young de $f$ à l'ordre 2.

$$\begin{aligned} f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = f(a_1, a_2) & \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)(h_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)(h_2) \\ &+ \frac{1}{2} Q_{a_1,a_2}(h_1, h_2) + ||h||^2 \epsilon(h) \end{aligned}$$

avec $Q_{a_1,a_2}(h_1, h_2) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1, a_2)(h_1^2) + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2)(h_1, h_2) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1, a_2)(h_2^2)$.
Supposons que $a$ est un point critique alors :

- Si $Q_{a_1,a_2}(h_1, h_2) > 0$ quelque soit $h = (h_1, h_2) \neq (0, 0)$ alors $f$ a un minimum local en $a = (a_1, a_2)$.
- Si $Q_{a_1,a_2}(h_1, h_2) < 0$ quelque soit $h = (h_1, h_2) \neq (0, 0)$ alors $f$ a un maximum local en $a = (a_1, a_2)$.
- Si il existe $(h_1, h_2)$ tel que $Q_{a_1,a_2}(h_1, h_2) > 0$ et $(k_1, k_2)$ tel que $Q_{a_1,a_2}(k_1, k_2) < 0$ alors $f$ n'a ni maximum local ni minimum local en $a$.

**Étude pratique de $Q$.** On définit $Q(X, Y) = pX^2 + 2qXY + rY^2$ où

$$p = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1, a_2)$$

$$q = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1, a_2)$$

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1, a_2)$$

Supposons $p \neq 0$

$$Q(X, Y) = p(X^2 + 2\frac{q}{p}XY + \frac{r}{p}Y^2) = p((X + \frac{q}{p}Y)^2 + \frac{rp - q^2}{p^2}Y^2)$$

*Discussion.*

- Si $rp - q^2 > 0$ alors pour tout $(X, Y) \neq (0, 0)$ $Q(X, Y)$ a le signe de $p$ : $f$ **a un maximum ou minimum local en** $a$.
- Si $rp - q^2 < 0$ alors $Q(1, 0)$ a le signe de $p$ et $Q(-\frac{q}{p}, 1)$ a le signe de $-p$ : $f$ **n'a ni de maximum local ni de minimum local en** $a$.
- Si $rp - q^2 = 0$ alors $Q(X, Y)$ est nul ou a le signe de $p$ : la proposition ne s'applique pas, **on ne peut rien conclure**.

*Exercice 10,11,12.*

# 7 Courbes d'équations $f(x, y) = 0$

**Définition.** Soient $P$ une partie de $\mathbb{R}^2$ et $f : P \to \mathbb{R}$ une application si $a \in \mathbb{R}$ une application si $a \in \mathbb{R}$ ensemble.

$$L_a = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = a\right\}$$

s'appelle la ligne de niveau $a$ de $f$. Par définition, $L_a$ est l'image réciproque de $\{a\}$ par $f$.

**Proposition.** Les lignes de niveaux d'une application sont disjointes

$$a \neq b \Rightarrow L_a \cap L_b = \emptyset$$

**Remarque.** Tout point de $P$ se trouve sur une ligne de niveau.

**Proposition.** Soit $f$ une application de classe $C^1$. La courbe d'équation $f(x, y) = 0$ admet une tangente en tout point $(x_0, y_0)$ qui n'est pas un point critique de $f$ et l'équation de la tangente est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

**Proposition.** Soit $f$ une application $C^1$. Si $f(x_0, y_0) = 0$ et si $(x_0, y_0)$ n'est pas un point critique alors la tangente à la courbe $f(x, y) = 0$ en $(x_0, y_0)$ est orthogonale au gradient $\nabla f$ en $(x_0, y_0)$.

**Corollaire.** Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ si $p = (a, b)$n'est pas un point critique de $f$, alors la ligne de niveau de $f$ passant par $^p$ est "orthogonale" au vecteur $\nabla f(p)$. Le gradient point dans la direction des niveaux croissants.

**Théorème I.22.** (des fonctions implicites) Soient

— $E_1, E_2$ et $F$ trois espaces vectoirels normés de dimensions finies tels que $dim(E_2) = dim(F)$

— $\Omega_1 \subset E_1$ et $\Omega_2 \subset E_2$ deux ouverts

— $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to F$ une application de classe $C^1$

— $(a_1, a_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ tel que $f(a_1, a_2) = 0$

Si $d_2 f(a_1, a_2)$ est un isomorphisme de $E_2$ dans $F$ alors

1. Il existe un unique ouvert $U_1 \subset E_1$ tel que $a_1 \in U_1$
2. Il existe un unique ouvert $U_2 \subset E_2$ tel que $a_2 \in U_2$
3. Il existe une unique application $\phi : U_1 \to U_2$ telle que $\forall (x_{1,2}) \in U_1 \times U_2, f(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 = \phi(x_1)$
4. L'application $\phi$ est de classe $C_1$ et $\forall x_1 \in U_1 d\phi(x_1) = -(df(x_1, \phi(x_1)))^{-1} od_2 f(x_1, \phi(x_1))$
5. Si $f$ est de classe $C^k$ alors $\phi$ sera $C^k$.

# 8 Surface d'équation $z = f(x, y)$

**Définition.** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$, et $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ d'ensemble des points $(x, y, z) \in U \in U \times \mathbb{R}$ tels que $z = f(x, y)$ s'appelle la surface d'équation $z = f(x, y)$. A chaque point $m = (x, y) \in U$ correspond un point $M = (x, y, f(x, y))$ appartenant à $S$. Le point $M$ se projette en $m$ sur le plan $xOy$. L'ensemble $S$ est par définition le graphe de $f$.

**Définition.** Soit $k$ un nombre réel et soit $L$ la ligne de niveau $k$ de $f$. On a donc

$$L = \{(x, y) \in U / f(x, y) = k\} \subset \mathbb{R}^2$$

Supposons que $L$ et non vide, et considérons l'ensemble $\Lambda$ des points $(x, y, z) \in S$ tels que $(x, y) \in L$. On a $(x, y, z) \in \Lambda$ si et seulement si $z = f(x, y)$ et $z = k$. L'ensemble $\Lambda$ est la ligne de niveau $k$ de la surface $S$.

**Définition.** Plan tangent. Soient $S$ une surface et $M_0$ un point de $S$. Tous les vecteurs tangents en $M_0$ aux courbes paramétrées tracées sur $S$ appartiennent à un même plan $P$ appelé plan tangent à la surface en $M_0$. L'équation du plan tangent $P$ en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ à la surface d'équation $z = f(x, y)$ s'écrit

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

**Proposition.** (Position de la surface par rapport au plan tangent).
La position de la surface par rapport au plan tangent en $M_0$ est donnée par le signe de

$$g(x, y) = \underbrace{f(x, y)}_{\text{hauteur de la surface}} - (z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0))$$

Le point $(x_0, y_0)$ est un point critique de $g(x, y)$

- Si l'application $g$ a un minimum local en $(x_0, y_0)$ alors la surface est au-dessus de so plan tangent en $M_0$.
- Si l'application $g$ a un maximum local en $(x_0, y_0)$ alors la surface est en-dessous de son plan tangent en $M_0$.
- Si l'application $g$ n'a ni maximum local ni minimum local, alors la surface présente un "col" en $M_0$.

*Exercice 13,14,15*

# Deuxième partie

# Série de Fourier

## 9 Introduction

blabla (vous moquez pas il a vraiment marqué ça)

**Vocabulaire.** Signal "monochromatique"

$$s(t) = \alpha\cos(\omega t + \phi)$$

avec $|\alpha| = \max|s(t)|$ amplitude, $\omega$ la pulsation, $a = \dfrac{2\pi}{\omega}$, $\lambda = \dfrac{1}{\lambda}$ et $\phi$ la phase.
Généralisation en écriture complexe

$$z(t) = \alpha e^{i(\omega t+\phi)} = \beta e^{2i\pi\lambda t}$$

## 10 Série de Fourier d'une fonction $2\pi$-périodique

**Notation.** On note $\mathcal{CM}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $2\pi$-périodiques.

### 10.1 Polynômes trigonométriques

**Définition.** On définit les suites de fonctions $(l_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (r_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par :

$$l_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{int} \end{cases}$$

$$r_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto cos(nt) \end{cases}$$

$$s_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto sin(nt) \end{cases}$$

On note $\mathcal{P}_n$ les sous espaces vectoriels de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ engendrés par $\{l_k, -n \leq k \leq k \leq n\}$

**Proposition.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

1. $\mathcal{P}_n = Vect\{r_0, r_1, ..., r_n, s_1, s_2, ..., s_n\}$
2. $dim\mathcal{P}_n = 2n + 1$

*Démonstration.* Pour la 2) on montre que la famille $\{l_k, -n \leq k \leq n\}$ est libre $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{k=-n}^{n} \lambda_k l_k(t) = 0 \Rightarrow \forall k = -n, ..., n, \lambda_k = 0$. $\square$

**Définition.** L'ensemble $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ est appelé ensemble des polynômes trigonométriques. Un polynôme trigonométrique $p$ peut s'écrire sous la forme :

$$P = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k l_k = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \alpha_{-k}) r_k + i(\alpha_k - \alpha_{-k}) s_k$$

## 10.2 Coefficients de Fourier d'une fonction $2\pi$-périodique

**Définition.** Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on pose

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{a}^{a+2\pi} f(t) e^{-int} dt \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Les coefficients $c_n(f)$ sont appelés coefficients de $f$. Le coefficient $c_0(f)$ représente la valeur moyenne de $f$ sur une période

**Remarque.** Si $f$ est un polynôme trigonométrique $\sum \alpha_k l_k$ alors $c_k = \alpha_k$

**Proposition.** Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. On a

1. $\forall n \in \mathcal{Z}, \overline{c_n(f)} = c_{-n}(\overline{f})$
2. Soit $g(t) = f(-t)$ alors $g \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et on a $c_n(g) = c_{-n}(f)$. Si $f$ est paire alors $c_n(f) = c_{-n}(f)$. Si $f$ est impaire alors $c_n(f) = -c_{-n}(f)$
3. La suite $|c_n(f)| \leq \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$

**Remarque.** Soit $f$ continue, $2\pi$-périodique et $C^k$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors

$$c_n(f') = i^k n^k c_n(f)$$

*Démonstration.* Intégration par parties □

## 10.3 Coefficients trigonométriques

**Définition.** Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. On appelle coefficiennts trigonométriques de $f$ les coefficients $\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) cos(nt) dt$
$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) sin(nt) dt.$

**Proposition.** $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$

1. $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$
2. $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$
3. si $f$ est impaire alors $a_n(f) = 0$
4. si $f$ est continue, $2\pi$-périodique $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n(f') = nb_n(f)$ et $b_n(f') = -na_n(f)$

*Exercice 1.*

# 11 Séries de Fourier

**Définition.** Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. On appelle série de Fourier de $f$ la série de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(f)l_n = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)r_n + b_n(f)s_n$$

Si on note $(s_p)_{p\in\mathbb{N}}$, la suite des sommes partielles de cette série de fonctions, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, s_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)e^{inx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{p}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$$

# 12 Convergence en moyenne quadratique

## 12.1 L'espace $\mathcal{C}_{2\pi}$

**Définition.** L'espace vectoriel des fonctions continues et $2\pi-$périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est noté $\mathcal{C}_{2\pi}$. C'est un sous espace vectoriel de $\mathcal{CM}_{2\pi}$.

**Définition.** Pour tous $f$ et $g$ dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, on définit

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}g(t)dt$$

c'est un produit scalaire de $\mathcal{C}_{2\pi} \times \mathcal{C}_{2\pi}$ dans $\mathcal{C}$. La norme associée est notée $||.||_2$.

$$\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}, ||f||_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

**Proposition.** La famille $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de $\mathcal{C}_{2\pi}$. Pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on a

$$c_n(f) = (e_n|f)\forall n \in \mathbb{Z}$$

## 12.2 Convergence dans $\mathcal{C}_{2\pi}$

**Définition.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{P}_p$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}_{2\pi}$ engendré par $(e_n)_{-p\leq n\leq p}$.

**Proposition.** Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ sort $(s_p(f))_{p\in\mathcal{N}}$ la suite des sommes partielles de la série de Fourier de $f$. Pour tout $p \in \mathcal{N}^*$, $S_p(f)$ est la projection de $f$ sur $\mathcal{P}_p$. E particulier, on a :

$$||f||_2^2 = ||S_p(f)||_2^2 + ||f - S_p(f)||_2^2 \tag{1}$$

*Démonstration.* $\mathcal{P}_p$ est une sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{C}_{2\pi}$. O note $q(f)$ la projection de $f$ sur

$\mathcal{P}_q$, $(e_n)_{-p\leq n\leq p}$ famille orthonormale, génératrice libre. C'est une base orthonormale de $\mathcal{P}_q$

$$\begin{aligned} q(t) &= \sum_{n=-p}^{p} (e_n|f)e_n \\ &= \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)e_n \\ &= s_p(f) \end{aligned}$$

□

**Théorème II.1.** (Convergence en moyenne quadratique) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Alors la suite $(S_p(f))_p$ converge vers $f$ dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}_{2\pi}, ||.||_2)$

$$\lim_{p\to+\infty} ||f - S_p(f)||_2 = 0$$

**Théorème II.2.** (Formule de Parseval) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$

$$||f||_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = |\frac{a_0(f)}{2}|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2$$

où $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(p)|^2 = \lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2$.

*Démonstration.* Calculons

$$\begin{aligned} ||s_p(f)||_2^2 &= ||\sum_{n=-p}^{p} (e_n|f)e_n||_2^2 \\ &= \sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2 \\ &= |\frac{a_0(f)}{2}| + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \end{aligned}$$

On applique (1), on déduit que $||S_p(f)||_2^2 \leq ||f||_2^2 \forall p \in \mathbb{N}$.
Donc les suites $(\sum\limits_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2)_p$, $(\sum\limits_{n=1}^{p} |a_n(f)|^2)_p$ et $(\sum\limits_{n=1}^{p} |b_n(f)|^2)_p$ sont majorées. Alors elles sont croissantes. Elles sont donc convergentes On passe à la limite dans (1) quand $p \to +\infty$ comme $\lim\limits_{p\to+\infty} ||f - S_p(f)||_2^2 = 0$ on obtient le résultat. □

**Théorème II.3.** (Inégalités de Bessel)

$$\sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2 \leq ||f||_2^2$$

$$|\frac{a_0(f)}{2}|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \leq ||f||_2^2$$

**Corollaire.** L'application

$$\mathcal{C}_{2\pi} \to \{u : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}\}$$

$$f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$$

est injective.

*Démonstration.* Soient $f$ et $g$ dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ telles que $(c_n(f))_n = (c_n(g))_n$.
$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = c_n(g), \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f-g) = 0$.
Donc

$$||f-g||_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f-g)|^2 = 0$$

donc $f - g = 0$. □

**Corollaire.** Soient $f$ et $g$ dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ le produit scalaire de $f$ et $g$ peut s'exprimer à l'aide de leurs coefficients de Fourier

$$(f|g) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n(f)}c_n(g)$$

*Exercice 2.*

## 12.3 Extension à $\mathcal{CM}_{2\pi}$

**Définition.** Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. On définit la fonction régularisée de $f$ notée $f_r \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, par $\forall x \in \mathbb{R}, f_r(x) = \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ où $f(x^+)$ et $f(x^-)$ sont respectivement les limites à droite et à gauche de $f$ en $x$. En particulier, si $f$ est continue en $x$, $f(x) = f_r(x)$.

**Remarque.** Le nombre de points où $f$ et $f_r$ sont différent est fini. Donc

$$||f_r||_2 = ||f||_2$$

**Définition.** On introduit le sous espace vectoriel $\mathcal{CM}_{2\pi}$ constitué des fonctions $f$ vérifiant $f = f_r$.

**Proposition.** L'application

$$\mathcal{D}_{2\pi} \times \mathcal{D}_{2\pi} \to \mathbb{C}$$

$$(f,g) \mapsto (f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}g(t)dt$$

est un produit scalire sur $\mathcal{D}_{2\pi}$. La norme associée est encore notée $||.||_2$.

$$||f||_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = (f|f)$$

Le théorème de convergence en moyenne quadratique est exact dans $\mathcal{D}_{2\pi}$. Donc pour $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$

$$\lim_{p\to+\infty} ||f_r - S - p(f_r)||_2 = 0$$

$$\lim_{p\to+\infty} ||S_p(f_r)||_2^2 = ||f_r||_2^2 = ||f||_2^2$$

**Théorème II.4.** (Parseval)

$$\begin{aligned}
||f_r||_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_r(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f_r)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \\
&= |\frac{a_0(f_r)}{2}|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f_r)|^2 + |b_n(f_r)|^2 \\
&= |\frac{a_0(f)}{2}|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2
\end{aligned}$$

# 13 Convergence ponctuelle

## 13.1 Convergence normale de la série de Fourier

**Théorème II.5.** Soit $f$ une fonction $2\pi$-périodique continue et $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors la série de fonction (série de Fourier de $f$) $c_0(f) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n}$ converge normalement vers $f$ sur $\mathbb{R}$.

*Démonstration.* (Convergence normale sur $\mathbb{R}$) Etudions $||c_n(f)e_n + c_{-n} + \underline{e_n}||_\infty$

$$||c_n(f)e_n + c_{-n}e_{-n}||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |c_n(f)e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}| \leq |c_n(f)| + |c_{-n}|$$

$\forall x \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$c_n(f') = inc_n(f)$$

donc $|c_n(f)| = |\frac{c_n(f')}{n}| \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{n^2} + |c_n(f)|^2)$.
D'où

$$||c_n(f)e_n + c_{-n}e_{-n}||_\infty \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}(|c_n(f')|^2 + |\underline{c}_n(f')|^2)$$

Comme $f' \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, les série numériques $\sum |c_n(f)|^2$ et $\sum |\underline{c}_n(f')|^2$ convergent. $\sum \frac{1}{n^2}$ converge aussi donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(f)e_n + c_{-n}e_{-n}$ converge normallement sur $\mathbb{R}$. □

*Démonstration.* (La limite est $f$). Il faut montrer que la limite est $f$. Soit $S$ cette limite

$$S(t) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)e_n(t) + c_{-n}e_{-n}(t)$$

Montrons que $S = f$. Comme on a la convergence normale et comme $c_n(f)e_n + c_{-n}e_{-n}$ est continue on en déduit que $S$ est continue. Par construction, $S$ est $2\pi$-périodique doc $S \in \mathcal{C}_{2\pi}$. On peut calculer ses coefficients de Fourier

$$\begin{aligned}
c_k(S) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(t)e^{-ikt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{pi} [c_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)e_n - t) + c_{-n}(f)e_{-n}(t)]e^{-ikt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}c_0(f)\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}dt + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t}dt + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(f)\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n+k)t}dt
\end{aligned}$$

On trouve donc $c_k(S) = c_k(f)\forall k \in \mathbb{Z}$. Donc $S$ et $f$ sont deux application de $\mathcal{C}_{2\pi}$ ayant les mêmes coefficients de Fourier donc $S = f$. $\square$

## 13.2 Convergence de la série de Fourier

**Théorème II.6.** (Dirichlet) Soit $f$ une fonction $2\pi$-périodique et $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier de $f$, $c_0(f) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est égale à la fonction régularisée $f_r$ de $f$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f_r(x) &= \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \\
&= c_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx} \\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)
\end{aligned}$$

En particulier, si $f$ est continue en $x$ alors

$$\begin{aligned}
f(x) &= c_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx} \\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)
\end{aligned}$$

On trouve donc $c_k(S) = c_k(f)\forall k \in \mathbb{Z}$. Donc $S$ et $f$ sont deux applications de $\mathcal{C}_{2\pi}$ ayant les mêmes coefficients de Fourier, donc $S = f$.

**Remarque.** Cas de fonctions $T$-périodiques : $\forall n \in \mathbb{Z}$ on a

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{a}^{a+T} f(t)e^{-\frac{2i\pi}{T}nt}dt$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{a}^{a+T} f(t)\cos(\frac{2\pi}{T}nt)dt$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{a}^{a+T} f(t)\sin(\frac{2\pi}{T}nt)dt$$

# Travaux dirigés

**Exercice 1.** Calculer les différentielles des fonctions suivantes :

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$
2. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy^2 \end{cases}$
3. $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x] \\ ax^2 + bx + c \mapsto 3ax^2 + c \end{cases}$
4. $f : \begin{cases} \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}) \\ (A, B) \mapsto A^2B \end{cases}$
5. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (u(x)|x) \end{cases}$
6. Soit $E, F$ deux espace vectoriels normés de dimension finie $f : \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) \times E \to F \\ (l, x) \mapsto l(x) \end{cases}$
7. Soit $E$ et $F$ deux espace vectoriels normés de dimension finie, soit $g$ une application différentiable de $E$ dans $\mathcal{L}(E, F)$. $f : \begin{cases} E \to F \\ x \mapsto g(x)(x) \end{cases}$

**Exercice 2.** Calculer les différentielles de $g$ et $h$ e fonction de celle de $f$.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est différentiable.

1. $g : \begin{cases} ]0, +\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto f(\dfrac{y}{x}) \end{cases}$
2. $h : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto f(zsin(x)) \end{cases}$

**Exercice 3.**

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y} \text{ si } x^2 + y \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Montrer que $f$ admet en $(0, 0)$ des dérivées directionnelles dans toutes les directions mais que $f$ n'est pas différentiable en ce point.

**Exercice 4.**

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} sin(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles
3. Montrer que $f$ n'est pas différentiable.

**Exercice 5.** Déterminer si les fonctions suivantes sont de classe $C^1$.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^{\nvDash} \to \mathbb{R} \\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{cases}$$

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xsin(y)}{y} \text{ si } y \neq 0 \\ x \text{ si } y = 0 \end{cases} \end{cases}$$

**Exercice 6.**

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x^3+x, y-x^2) \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est continue
2. Montrer que $f$ est différentiable et calculer sa matrice jacobienne
3. Montrer que $f$ est bijective
4. Montrer que $f^{-1}$ est $C^1$

**Exercice 7.** Calculer la différentielle seconde de :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto x^3yz - 2y^2z^2 \end{cases}$$

$$g : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A,B) \mapsto A^2B \end{cases}$$

**Exercice 8.** Soit $\mathcal{M}_n$ une matrice de taille $n \times n$ et $GL_n(\mathbb{R})$ l'ouvert des matrices inversibles

$$f : \begin{cases} GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) \\ A \mapsto A^{-1} \end{cases}$$

1. Calculer la différentielle de $f$.
2. Montrer que $df(A)$ est continue en $A$ $\forall A \in GL_{(}\mathbb{R})$.

**Exercice 9.** Est ce que les fonctions suivantes sont des $C^1$ difféomorphisme ?

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \mapsto (x + e^x cos(\dfrac{1}{1+x^2y^2}), y, x^2+y^2) \end{cases}$$

$$h : \begin{cases} ]-\pi/2, \pi/2[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto tan(x) \end{cases}$$

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{cases}$$

$$k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$$

**Exercice 10.** Étudier les extremas de :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \end{cases}$$

**Exercice 11.** Déterminer la plus grande valeur et la plus petite de la fonction

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

dans le domaine $\mathcal{D} = \{(x, y) \text{ tel que } x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}$.

**Exercice 12.** Chaque jour 10 000 voyageurs doivent se déplacer. Le trajet est de 40 minutes en tram. Si $x$ milliers de personnes utilisent la voiture alors le trajet e voiture est de $(20 + 5x)$ minutes.

1. Montrer que si les personnes sont libres de choisir alors 4 000 personnes prennent la voiture.
2. Montrer que la durée moyenne de trajet serait minimisée si 2000 personnes prennent la voiture.

**Exercice 13.**

1. Montrer que la relation
$$x^3 + y^3 - 2xy = 0 \tag{2}$$
définit implicitement au voisinage de $(1, 1)$ une unique fonction $\phi$ vérifiant
$$x^3 + \phi(x)^3 - 2x\phi(x) = 0$$
2. Calculer $\phi'(1)$
3. Montrer que si $P \neq (0, 0)$ alors au voisinage de $P$ l'équation se résout en $x$ ou en $y$.
4. L'équation (1) définit une courbe $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathcal{C}$ à une tangente en tout point $P \neq (0, 0)$.
5. En quel point la tangente va être verticale ? horizontale ?

**Exercice 14.**

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ B - \dfrac{I_n - X + Y^2}{2} \end{cases}$$

où $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constante et $I \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ identité.

1. Calculer $d_2 f(X,Y)$
2. Montrer que au voisinage de $I_n$ il existe une fonction $\phi$ tel que $\phi(x)^2 = X$
3. La fonction $\phi$ est-elle unique ?

**Exercice 15.** Soit la surface $S$ d'équation

$$z = x - 2(x^2 + y^2)^2$$

. Soit $(a,b,c) \in S$

1. Écrire l'équation du plan tangent à $S$ au point $(a,b,c)$. En quel point le plan tangent est horizontal ?
2. Montrer que au point $(0,0,0)$ la surface est en-dessous du plan tangent.
3. Montrer que en tous points de $S$ la surface est en dessous de son plan tangent.

**Exercice 1.** Calculer les coefficients de Fourier de $f$, $a \in \mathbb{C}$, $f$, $2\pi$-périodique sur $\mathbb{R}$, définie sur $]-\pi,\pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \exp(ax) \text{ si } x \in ]-\pi,\pi[ \\ ch(a\pi) \text{ si } x = \pi \end{cases}$$

**Exercice 2.** Déterminer les coefficients trigonométriques de la fonction $f$, $2\pi$-périodique sur $\mathbb{R}$, définie sur $]-\pi,\pi]$ par $f(x) = ch(ax)$ dans les deux cas suivants :

1. $a \in i\mathbb{Z}$
2. $a \in \mathbb{R}^{+*}$

**Exercice 3.**

1. Peut on appliquer la formule de Parseval aux fonctions $f$ des exercices 1 et 2 ?
2. Pour chacune de ces fonctions quelles égalités obtient-on ?
3. Quelles égalités remarquables peut-on déduire ?

**Exercice 4**

1. Peut-on appliquer le théorème de convergence normale aux fonctions $f$ ?
2. Peut-on appliquer le théorème de convergence simple aux fonctions $f$ ?
3. Pour chacune de ces fonctions quelles égalités obtient-on ?
4. Quelles égalités remarquables peut-on déduire ?

**Exercice 5.**

1. Déterminer les coefficients trigonométriques de la fonction $T-$ périodique $f$ définie par

$$f(x) = |\sin(\frac{\pi}{T}x)|$$

2. Quels théorèmes de convergence peut-on appliquer à la série de Fourier de $f$ ?

**Exercice 6.** Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ définie par $\forall x \in ]-\pi,\pi], f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$

1. Calculer les coefficients de Fourier de $f$
2. Calculer les coefficients trigonométriques de $f$
3. On note $(S_p)_{p\in\mathcal{N}}$ la suite des ommes partielles de la série de Fourier de $f$. Calculer $S_p(f)(\pi)$. Est ce que $S_p(f)(\pi) \to f(\pi)$ lorsque $p \to +\infty$ ? Pourquoi ?
4. Calculer la valeur de la série numérique $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ à partir de $S_p(f)$
5. En appliquant la formule de Parseval, en déduire la valeur de la série numérique $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$

**Exercice 7.** $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x - E(x)$$

1. Déterminer la plus petite période de $f(x)$
2. Calculer les coefficients de Fourier et les coefficients trigonométriques de $f$
3. Quels théorèmes de convergence peut-on appliquer ?

# Troisième partie

# Correction du Devoir surveillé

## 1 Devoir surveillé

### 1.1 Exercice

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{1}$$

1. $\partial_1 f(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$ et $\partial_2 f(0,0) = 0$
   La dérivée directionnelle en (1,1) est $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^3}{2h^3} = \dfrac{1}{2}$
2. Les dérivées partielles sont nulles en $(0,0)$ donc si $f$ est différentiable en $(0,0)$ on doit aussi avoir $df(0,0) = 0$ or la dérivée directionnelle selon $(1,1)$ en $(0,0)$ est non nule donc $f$ n'est pas différentiable en $(0,0)$. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f$ est la composée d'applications différentiable et $(x^2+y^2 \neq 0)$.

### 1.2 Exercice

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 6(x^2+y^2) \tag{2}$$

1. $\begin{cases} \partial_1 f(x,y) = 3x^2 - 12x = 0 \\ \partial_2 f(x,y) = 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$. On trouve donc $x = 0, x = 4, y = 0, y = -4$ et donc on a 4 points critiques $(0,0), (0,-4), (4,0), (4,-4)$.
2. $f(t,0) = t^3 - 6t^2 = t^2(t-6)$ et $f(0,t) = t^3 + 6t^2 = t^2(t+6)$. On remarque donc que si $t \in Vois(0)$ alors $f(t,0) < 0$ et $f(0,t) > 0$ ce ne peut donc ni être un maximum local ni un minimum local.
3. On calcule la matrice Hessienne $H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-12 & 0 \\ 0 & 6y-12 \end{pmatrix}$. On regarde ensuite le déterminant de $H(x,y)$ on a donc :
   (a) $det(H(4,0)) = 144 > 0$ et $p = 12 > 0$ donc un minimum local
   (b) $det(H(0,-4)) = 144 > 0$ et $p = -12 < 0$ donc un maximum local
   (c) $det(H(4,-4)) = -144 < 0$ ce n'est donc ni un maximum ni un minimum local

### 1.3 Exercice

$$\phi(x,y) = (sin(y/2) - x, sin(x/2) - y) \tag{3}$$

1. Chacune des composantes $\phi_1$ et $\phi_2$ est la composée d'applications $C^1$ de $\mathbb{R}^2$.

2. $d\phi(x,y)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui peut être définit par sa matrice Jacobienne

$$\mathcal{J}\phi(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 1/2cos(y/2) \\ 1/2cos(x/2) & -1 \end{pmatrix}$$

Soit $h = (h_1, h_2)$ alors $d\phi(x,y)(h_1,h_2) = \begin{pmatrix} d\phi_1(x,y)(h_1,h_2) \\ d\phi_2(x,y)(h_1,h_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1\phi_1(x,y)h_1 + \partial_2\phi_1(x,y)h_2 \\ \partial_1\phi_2(x,y)h_2 + \partial_2\phi_2(x,y)h_2 \end{pmatrix}$

3. On va utiliser le théorème d'inversion globale.
   (a) On a déjà montré que $\phi$ est $C^1$.
   (b) Montrons que $d\phi$ est un isomorphisme. $det(\mathcal{J}\phi(x,y)) = 1 - \frac{1}{4}\cos(x/2)\sin(y/2) > 0$ donc $d\phi(x,y)$ est un isomorphisme.
   (c) Montrons que $\phi$ est injective. Soient $(x,y)$ et $(x',y')$ tel que

$$\phi(x,y) = \phi(x',y') \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(y/2) - x = \sin(y'/2) - x' \\ \sin(x/2) - y = \sin(x'/2) - y' \end{cases} \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(y/2) - \sin(y'/2) = x - x' \\ \sin(x/2) - \sin(x'/2) = y - y' \end{cases} \tag{6}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x - x'| \leq \frac{1}{2}|y - y'| \\ |y - y'| \leq \frac{1}{2}|x - x'| \end{cases} \tag{7}$$

   Entre (6) et (7) on utilise le Théorème des acroissements finis. On a donc $x = x'$ et $y = y'$ et donc la fonction est injective.

D'après le théorème d'inversion globale $\phi$ est un $C^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\phi(\mathbb{R}^2)$.

FIN.