Mathématiques

Calcul Différentiel Semestre 4

Table des matières

Première partie

Fonction de plusieurs variables réelles

1 Notion de différentielle / dérivée

Définition

Cas général. Soient E et F deux espaces vectoriels normées. Soit U un ouvert de E. On dit qu'une application f de U dans F est différentiable en $x_0 \in U$ si il existe une application linéaire linéaire continue L telle que $\forall h \in E$, vérifiant $x_0 + h \in U$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + ||h||_E \varepsilon(x_0, h)$$

avec $\lim\limits_{||h||_E \to 0} ||\varepsilon(x_0, h)||_F = 0$.
L'application L est la différentielle de f au point x_0 et elle est souvent notée $df(x_0), Df(x_0), d_{x_0}f$.

Cas particulier $E = \mathbb{R}$. On pose $h = x - x_0$. Soit F un espace vectoriel normé. Soit U un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On dit qu'une application f de U dans F est différentiable en $x_0 \in U$ s'il existe une application linéaire continue tel que $\forall x \in U$

$$f(x) = f(x_0) + |x - x_0|\varepsilon(x, x_0)$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x, x_0) = 0_F$

Si de plus $F = \mathbb{R}$. L'application L s'écrit $L(x - x_0) = \alpha(x - x_0)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. La constante α est notée $f'(x_0)$. La définition précédente peut se réecrire

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + |x - x_0|\varepsilon(x, x_0)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \varepsilon(x, x_0)$$

donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Remarque. Si $F = \mathbb{R}^n$ alors $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$ et donc $\alpha \in \mathcal{M}_{n,p}$.
Si $h = x - x_0 > 0$ alors o parle de dérivée à droite, si $h < 0$ on parle alors de dérivée à gauche. Dans le cas réel, l'application f est différentiable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Définition. U est un ouvert d'un evn E. L'application f est dite différentiable sur U si f est différentiable en tout point de U.

Définition. L'application f est dérivable dans la direction $v \in E$ en x_0 si la limite $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$ existe (peut dépendre de v et $t \in \mathbb{R}^+$).

Remarque. Une application peut admettre des dérivées dans toutes les directions sans être différentiable en ce point.

Exercice 1

Exemple. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{x^8 + (y - x^2)} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{cases}$ Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, la dérivée de (u,v) en $(0,0)$ est

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{f(tu,tv) - f(0,0)}{t} &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{t^6u^6}{t^8u^8 + (tv - t^2u^2)}\right) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{t^4u^6}{t^7u^8 + (v - tu^2)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

dérivée dans toutes les directions en $(0,0)$. De plus $\lim\limits_{x \to 0} f(x,x^2) = +\infty$ donc f n'est pas continue en $(0,0)$ donc la fonction n'est pas différentiable en $(0,0)$.

1.1 Propriétés

Théorème I.1. Soit U un ouvert de E, un espace vectoriel normé et f une application de E dans F (un evn). Si l'application f est différentiable en $x_0 \in U$ alors sa différentielle est unique.

Théorème I.2. (Application linéaire) Soient E et F deux e.v.n., f une application linéaire de E dans F. Alors f est différentiable sur U et pour tout $x \in U$,

$$df(x) = f$$

Théorème I.3. Soient E et F deux e.v.n., soit f une application de E dans F. Si f est différentiable en $x_0 \in U$ alors f est continue en x_0.

Théorème I.4. (Forme bilinéaire) Une application bilinéaire continue est différentiable en tout point $(x_1,x_2) \in U \subset E_1 \times E_2$. $f : E_1 \times E_2 \to F$ et sa différentielle est l'application linéaire de $E_1 \times E_2$ dans F est

$$(h_1,h_2) \to df(x_1,x_2)(h_1,h_2) = f(h_1,x_2) + f(x_1,h_2)$$

Théorème I.5. (Applications composées) Soient E, F, G, trois espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, V un ouvert de F. Deux application $f : U \to F$ et $g : V \to G$. $a \in U$ tel que $f(a) \in V$. On suppose f différentiable en a et on suppose g différentiable en $f(a)$. Alors gof est différentiable en a et a pour différentielle en ce point

$$d(gof)(a) = dg(f(a))odf(a)$$

Théorème I.6. (différentielle d'un produit) Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, U est un ouvert de E. Soit f, g deux applications de U dans $\mathbb{K}$, $x_0 \in U$. On pose $h = fg$. L'application h est composée de

$(f,g) : \begin{cases} U \to \mathbb{K}\times\mathbb{K} \\ x_0 \mapsto (f(x_0), g(x_0)) \end{cases}$ et de l'applcation bilinéaire continue $\phi : \begin{cases} \mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ (y_1, y_2) \mapsto y_1.y_2 \end{cases}$.

Si f et g sont différentiables en x_0 alors $h = fg$ l'est aussi, et on a pour tout $k \in E$, la formule de Leibniz

$$dh(x_0)(k) = d_g(x_0)(k).f(x_0) + d_f(x_0)(k).g(x_0)$$

Corollaire. Si f est différentiable sur U et g différentiable sur V alors gof est différentiable sur son domaine $U \cap f^{-1}(V)$.

Théorème I.7. (Linéarité) Soient f, g deux applications différentiables de $U \subset E$ et α, β 2 scalaires

$$d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg$$

Théorème I.8. Toute application constante est différentiable et sa différentielle est l'application nulle

2 Applications partielles et dérivées partielles

2.1 Applications partielles

Définition. Soit U un ouvert de $E_1 \times E_2 = E$ espace produit de deux espaces vectoriels normés, E_1 et E_2 et $f : \begin{cases} U \to F \\ (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) \end{cases}$. Soit $a = (a_1, a_2) \in U$. On appelle première application partielle associée à f au point a l'application $x_1 \mapsto f(x_1, a_2)$. Elle est définie sur l'ouvert de E_1. $U_1 = \{x_1 \in E_1, (x_1, a_2) \in U\}$. On appelle deuxième application partielle associée à f au point a, l'application

$$x_2 \mapsto f(a_1, x_2)$$

Elle est définie sur l'ouvert de E_2

$$U_2 = \{x_2 \in E_2, (a_1, x_2) \in U\}$$

2.2 Différentielles partielles, dérivées partielles

Définition. Si la première application partielle associé à f au point a est différentiable au point $a \in U$, sa différentielle est appelée différentielle partielle de f par rapport à sa première variable au point a et notée $df_{x_1}(a)$ ou $dif(a)$. De même pour la seconde variable.

Remarque. Ces définitions s'étendent au cas $E_1 \times E_2 \times E_3 \times ... \times E_n$.

Proposition. Si l'application f est différentiable au point $a = (a_1, a_2) \in U$ les deux applications partielles associées à f au point a sont différentiables, respectivement aux points $a_1 \in U_1$ et $a_2 \in U_2$ et on a la relation

$$df(a)(h) = df_{x_1}(a)(h_1) + df_{x_2}(a)(h_2)$$

$$h = (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$$

Démonstration. différentielle d'applications composées □

Remarque. Attention l'existence des différentielles partielles ne suffit pas à assurer la différentiabilité de f

Théorème I.9. Pour qu'une application f définie sur $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ sont différentiable en a, il suffit que les n différentielles partielles existent et soient continue en a.

Théorème I.10. Soient E, F, G, trois espace vectoriels normés où $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ un produit de n e.v.n. $U \subset E$ un ouvert, $V \subset F$ un ouvert. f est une application différentiable de U dans F et g une application différentiable de V dans G. Alors pour tout $a \in U$ tel que $f(a) \in V$

$$\partial_i(gof)(a) = d_g(f(a))o\partial_i f(a)$$

où ∂_i désigne la différentielle partielle. $\partial_f(a) = df_{x_i}(a)$

Remarque. Si $E = \mathbb{R}^n$, les différentielle partielles s'écrivent.

$$\begin{aligned} df_{x_i}(a)(h_i) &= \partial_i f(a)(h_i) \\ &= \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} h_i \end{aligned}$$

où $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est la ième dérivée partielle.

Exercice 2,3,4,5

3 Applications à valeurs dans un espace produit

Définition (Composantes d'une application). Soient U un ouvert d'un espace vectoriel normé, E et $F = F_1 \times F_2$. Soient $\begin{cases} p_1 : F \to F_1 \\ p_2 : F \to F_2 \end{cases}$ et les projections (applications linéaires continues). Soit $f : U \to F$. Les applications $f_1 = p_1 of$ et $f_2 = p_2 of$ de U dans les espaces F_1 et F_2sont appelées composantes de l'application.

Proposition. Une application f de U dans $F = F_1 \times F_2$ est différentiable en $a \in U$ si et seulement si $f_1 = p_1 of$ et $f_2 = p_2 of$ sont différentiables en $a \in U$. Lorsque c'est le cas, on a

$$df(a) = (df_1(a), df_2(a))$$

où $df_1(a) = d(p_1 of)(a) = dp_1(f(a))odf(a) = p_1 odf(a)$ et $df_2(p_2 of)(a) = dp_2(f(a))odf(a) = p_2 odf(a)$. De même, f est différentiable sur U si et seulement si f_1 et f_2 sont différentiables sur U.

Démonstration. Si f est différentiable alors ... donc f_1 et f_2 sont différentiables

Passons à la réciproque. Supposons f_1 et f_2 différentiables. On munit $F_1 \times F_2$ de la norme $||(y_1, y_2)||_{x_0} =$

$\max\{||y_1||, ||y_2||\}$.

Soit $h \in E$ et $x_0 \in U \subset E$, on pose

$$L(h) = (df_1(x_0)(h), df_2(x_0)(h))$$

On a alors

$$\begin{aligned}
||f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)||_\infty &= \max_{i=1,2}\{||f_i(x_0+h) - f_i(x_0) - df_i(x_0)(h)||\} \\
&= \max_{i=1,2}\{||h||_E||\epsilon_i(x_0,h)||\} \\
&= ||h||_E||\epsilon(x_0,h)||_\infty
\end{aligned}$$

donc f est différentiable et $df = (df_1, df_2)$ $\square$

Remarque.

1. f esst différentiable sur U si et seulement si f_1 et f_2 le sont .
2. se généralise au cas où $F = F_1 \times F_2 \times ... \times F_n$

3.1 Applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Soient $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ une base de $\mathbb{R}^n$, $(e'_j)_{j=1,\ldots,p}$ une base de $\mathbb{R}^p$. U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable au point $a \in U$.

Définition. L'application linéaire $df(a)$ est déterminée par la donnée de sa matrice dans les bases $(e_i)_i$ et $(e'_j)_j$. Cette matrice est appelée **matrice jacobienne** de f au point a dans les bases $(e_i)_i$ et $(e'_j)_j$. Les vecteurs colonnes de cette matrice sont fermés avec les composantes des n vecteurs $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ dans la base (e'_j).

$$\mathcal{J}_{f(a)} = \begin{pmatrix}
\dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\
\dfrac{\partial f_2(a)}{\partial x_1} & \ddots & \cdots & \dfrac{\partial f_2(a)}{\partial x_1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\dfrac{\partial f_p(a)}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial f_p(a)}{\partial x_n}
\end{pmatrix}$$

Si $n = p$, le déterminant de la matrice jacobienne est appelé le jacobien de l'application f au point a dans les bases considérées.

Exercice 6

3.2 Divergence et rotationnel dans $\mathbb{R}^3$

Définition. Soit f une application définie sur $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ ayant pour composantes f_1, f_2, f_3. On appelle divergence de f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\div(f) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \vec{\nabla}.\vec{f}$$

Remarque. Se généralise en dimension quelconque.

Définition. On appelle rotationnel de f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$rot(f) = \vec{\nabla} \wedge \vec{f}$$

3.3 Espaces $C^0(U,F)$ et $C^1(U,F)$

Définiton. L'ensemble des applications continues de U dans F est un espace vectoriel noté $C^0(U,F)$. Les applications différentiables sur U dont la différentielle est contiue sur U sont dites "continuement différentiable" ou de classe C^1 sur U. Cet ensemble est $C^1(U,F)$.

Théorème I.11. $C^1(U,F)$ est un sous espace vectoriel de $C^0(U,F)$

Théorème I.12. Soit f une application définie sur un ouvert U de $E = E_1 \times ... \times E_n$. Pour que f soit de classe C^1 sur U, il faut et il suffit que chacun des différentielles partielles **existe** et soit **continue** sur U.

4 Différentielles d'ordre supérieur

Définition. Soient $k \in \mathbb{N}$, f une application de U ouvert de E (e.v.n) dans F (e.v.n) f est dite

- de classe C^0 sur U si elle est continue sur U
- de classe C^{k+1} sur U si elle est différentiable et si sa différentielle df est de classe C^k sur U.
- de classe C^∞ sur U si elle est de classe C^k pour tout entier k.

Remarque. On note $C^k(U,F)$ l'espace des applications de classe C^k de U à valeurs dans F. La différentielle k-ième de f est notée d^kf et est définie par récurrence $d^0f = f ... d^kf = d(d^{k-1}f)$.

Théorème I.13. La composée d'applications de classe C^k est une application de classe C^k.

Théorème I.14. Soient E et F deux evn, U un ouvert de E et f une application de U dans F. Pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble des applications de U dans F n fois différentiables en un point $a \in U$ est un point $a \in U$ est un espace vectoriel et l'application qui associe à une application élement de cet espace sa différentielle d'ordre n au point a est linéaire

$$f \mapsto d^n f(a)$$

$$\alpha f + \beta g \mapsto \alpha d^n f(a) + \beta d^n g(a)$$

Démonstration. par récurrence □

Proposition. (Symétrie des différentielles d'ordre supérieur) Soient E et F deux e.v.n, U un ouvert de E et f une application de U dans F. On suppose f deux fois différentiable en un point $\alpha \in U$. Sa différentielle seconde $d^2f(a =$ au point a une application bilinéaire continue et symétrique de E^2 dans $F \forall (h,k) \in E^2$

$$d^2f(a)(h,k) = d^2f(a)(k,h)$$

Théorème I.15. Soient E et F deux e.v.n, U un ouvert de E et f une application de U dans F. On suppose f n fois différentiable en un point $a \in U$.
Sa différentielle d'ordre n $d^n f(a)$ au point a est une application multilinéaire continue et symétrique de E^n dans F.

Théorème I.16. (Schwarz) Soit f une application définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans F (e.v.n) telle que la différentielle d'ordre p $d^p f(a)$ au point $a \in U$ existe. Alors la différentielle partielle $\dfrac{\partial^p f}{\partial x_i ... \partial x_j}$ est une application symétrique de $i, ...j$. (dans le cas de $\mathbb{R}^n$, la valeur d'une dérivée partielle d'ordre p ne change pas l'orsqu'on change l'ordre de dérivation successive).

Exercice 7,8

Définition. Soit f une application définie sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F. Or dit que f est C^k par sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $(a_0, ..., a_n)$ de $[a, b]$ telle que la restriction de f à chacun des intervalles $]a_{i-1}, a_i[$ soit prolongeable en application de classe C^k sur $[a_{i-1}, a_i]$.

Théorème I.17. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans F. Si f est continue sur I et de classe C^1 par morceaux sur cet intervalle alors f est constante si et seulement si $df = 0$ ($\Leftrightarrow f' = 0$)

5 Difféomorphisme de classe C^k

Définition. Soient E et F deux e.v.n U un ouvert de E , de f une application de U dans F. On dit que f est un difféomorphisme de U sur un ouvert V de F si f est différentiable sur U et si elle est une bijection de U sur V et si l'application récirpoque $f^{-1} : V \to E$ est différentiable sur V. On dit que f est un $C^k - diffomorphisme$ si f est un difféomorphisme et f et f^{-1} sont de classe C^k.

Théorème I.18. (Inversion locale) Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé complet E, et f une application différentiable de classe C^k de U dans F (evn complet un Banach). Soit a un point de U si $df(a)$ est un isomorphisme de E dans F alors f est un C^k difféomorphisme d'un voisinage ouvert de a vers un voisinage ouvert de $f(a)$

Théorème I.19. (Inversion globale - Cas scalaire) Soit U un intervalle de $\mathbb{R}$ et ϕ une application de classe C^k de U dans $\mathbb{R}$. L'application ϕ sera un C^k difféomorphisme de l'intervalle U dans l'intervalle $\phi(U)$ si et seulement si

$$\forall x \in U, \phi'(x) \neq 0$$

Démonstration. $k = 1$ (k quelconque par récurrence)

1. ϕ C^1 difféomorphisme de U das $\phi(u) \Rightarrow \forall x \in U, \phi'(x) \neq 0$ donc ϕ et ϕ' sont C_1. De plus $\phi^{-1} o \phi = Id$. On dérive l'égalité $\forall x \in U$ on a $(\phi^{-1} o \phi)'(x) = (\phi^{-1})(\phi(x)) o \phi'(x) = 1$ (cas scalaire, o équivaut à la multiplication) donc $\forall x \in U, \phi'(x) \neq 0$
2. $(\forall x \in U, \phi'(x) \neq 0) \Rightarrow \phi C^1$ difféomorphisme de U dans $\phi(U)$. $\forall x \in U, \phi'(x) \neq 0$ donc ϕ ne change pas de signe donc ϕ est strictement monotone et continue donc ϕ est injective donc ϕ est bijective de U dans $\phi(u)$ donc $\exists \phi^{-1}$ tel que $\phi^{-1} o \phi = Id$.

Montrons que ϕ^{-1} est différentiable soit $y_0 \in \phi(U)$ et $y \in \phi(U)$. Alors il existe $x_0 \in U$ tel que $y_0 = \phi(x_0)$ et il existe $x \in U$ tel que $y = \phi(x)$.
Quelle est la dérivée de ϕ^{-1} en y_0 ?

$$\lim_{y \to y_0} \frac{\phi^{-1}(y) - \phi^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{\phi(x) - \phi(x_0)} = (\phi'(x_0))^{-1}$$

Donc ϕ^{-1} est différentiable car $\phi'(x_0) \neq 0$. On déduit

$$(\phi^{-1})'(y_0) = (\phi' o \phi(y_0))^{-1}$$

Continue en tant que composée d'applications continues donc ϕ^{-1} est C^1 donc ϕ est C^1 difféomorphisme.

$\square$

Théorème I.20. (Inversion globale - Cas général) Soit f une application de classe C^1 définie sur un ouvert U de E et à valeurs dans F (où E, F espace de Banach). Si f **est injective** et si pour tout $x \in U, df(x)$ est un isomorphisme de E sur F alors $f(U)$ est un ouvert de F et f est un C^1 difféomorphisme de U sur $f(U)$

Remarque. Si f est un changement de variable dans $\mathbb{R}^n$, $f(x)$ difféomorphisme si et seulement si le Jacobien ne s'annule pas.

Exercice 6 (question 3 et 4),9

6 Extrema d'une application à valeur dans $\mathbb{R}$

6.1 Cas général

Définition. Soit f une application définie sur une partie U d'un espace vectoriel E à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f admet un minimum local en un point $a \in U$, s'il existe un voisinage V de a dans E tel que, pour tout $x \in V \cap U f(x) \geq f(a)$. On dit que f admet u maximum local en a si $-f$ admet un minimum local en a. L'extremum sera dit stricte si $\forall x \in V \cap U, x \neq a$ l'inégalité est stricte.

Théorème I.21. Si l'application f admet en un point a intérieur à U un extremum local, et si f est différentiable en a, alors sa différentielle en ce point est nulle.

Démonstration. Supposons que f admette un extremum en $a \in U$. Pour tout h dans E, on pose

$$\Psi(t) = f(a + th) \quad t \in \mathbb{R}$$

qui est définie sur un voisinage ouvert de 0 image réciproque de U par l'application $t \mapsto a + th$. Le point $t = 0$ est alors un extremum pour Ψ et on a $\Psi'(0) = df(a)(h) = 0 \; \forall h \in E$ donc $df(a) = 0$. $\square$

Proposition. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. Si f a un extremum en $a \in U$, alors pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$$

Remarque. Attention la réciproque est fausse. Pour que f ait un extremum en a, il faut que a soit un point critique ($df(a) = 0$)

6.2 Cas d'une application de 2 variables

Proposition. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2, $a = (a_1, a_2) \in U$ et $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que le segment $[a, a+h] \subset U$. On écrit le développement de Taylor-Young de f à l'ordre 2.

$$\begin{aligned} f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = f(a_1, a_2) & \\ & + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)(h_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)(h_2) \\ & + \frac{1}{2} Q_{a_1,a_2}(h_1, h_2) + ||h||^2 \epsilon(h) \end{aligned}$$

avec $Q_{a_1,a_2}(h_1, h_2) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1, a_2)(h_1^2) + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2)(h_1, h_2) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1, a_2)(h_2^2)$.
Supposons que a est un point critique alors :

— Si $Q_{a_1,a_2}(h_1, h_2) > 0$ quelque soit $h = (h_1, h_2) \neq (0, 0)$ alors f a un minimum local en $a = (a_1, a_2)$.

— Si $Q_{a_1,a_2}(h_1, h_2) < 0$ quelque soit $h = (h_1, h_2) \neq (0, 0)$ alors f a un maximum local en $a = (a_1, a_2)$.

— Si il existe (h_1, h_2) tel que $Q_{a_1,a_2}(h_1, h_2) > 0$ et (k_1, k_2) tel que $Q_{a_1,a_2}(k_1, k_2) < 0$ alors f n'a ni maximum local ni minimum local en a.

Étude pratique de Q. On définit $Q(X, Y) = pX^2 + 2qXY + rY^2$ où

$$p = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1, a_2)$$

$$q = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1, a_2)$$

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1, a_2)$$

Supposons $p \neq 0$

$$Q(X, Y) = p(X^2 + 2\frac{q}{p}XY + \frac{r}{p}Y^2) = p((X + \frac{q}{p}Y)^2 + \frac{rp - q^2}{p^2}Y^2)$$

Discussion.

— Si $rp - q^2 > 0$ alors pour tout $(X, Y) \neq (0, 0)$ $Q(X, Y)$ a le signe de p : f **a un maximum ou minimum local en** a.

— Si $rp - q^2 < 0$ alors $Q(1, 0)$ a le signe de p et $Q(-\frac{q}{p}, 1)$ a le signe de $-p$: f **n'a ni de maximum local ni de minimum local en** a.

— Si $rp - q^2 = 0$ alors $Q(X, Y)$ est nul ou a le signe de p : la proposition ne s'applique pas, **on ne peut rien conclure**.

Exercice 10,11,12.

7 Courbes d'équations $f(x, y) = 0$

Définition. Soient P une partie de $\mathbb{R}^2$ et $f : P \to \mathbb{R}$ une application si $a \in \mathbb{R}$ une application si $a \in \mathbb{R}$ ensemble.

$$L_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = a\}$$

s'appelle la ligne de niveau a de f. Par définition, L_a est l'image réciproque de $\{a\}$ par f.

Proposition. Les lignes de niveaux d'une application sont disjointes

$$a \neq b \Rightarrow L_a \cap L_b = \emptyset$$

Remarque. Tout point de P se trouve sur une ligne de niveau.

Proposition. Soit f une application de classe C^1. La courbe d'équation $f(x, y) = 0$ admet une tangente en tout point (x_0, y_0) qui n'est pas un point critique de f et l'équation de la tangente est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

Proposition. Soit f une application C^1. Si $f(x_0, y_0) = 0$ et si (x_0, y_0) n'est pas un point critique alors la tangente à la courbe $f(x, y) = 0$ en (x_0, y_0) est orthogonale au gradient ∇f en (x_0, y_0).

Corollaire. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 si $p = (a, b)$n'est pas un point critique de f, alors la ligne de niveau de f passant par ^{p} est "orthogonale" au vecteur $\nabla f(p)$. Le gradient point dans la direction des niveaux croissants.

Théorème I.22. (des fonctions implicites) Soient

— E_1, E_2 et F trois espaces vectoirels normés de dimensions finies tels que $dim(E_2) = dim(F)$

— $\Omega_1 \subset E_1$ et $\Omega_2 \subset E_2$ deux ouverts

— $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to F$ une application de classe C^1

— $(a_1, a_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ tel que $f(a_1, a_2) = 0$

Si $d_2 f(a_1, a_2)$ est un isomorphisme de E_2 dans F alors

1. Il existe un unique ouvert $U_1 \subset E_1$ tel que $a_1 \in U_1$
2. Il existe un unique ouvert $U_2 \subset E_2$ tel que $a_2 \in U_2$
3. Il existe une unique application $\phi : U_1 \to U_2$ telle que $\forall (x_{1,2}\ ) \in U_1 \times U_2, f(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 = \phi(x_1)$
4. L'application ϕ est de classe C_1 et $\forall x_1 \in U_1 d\phi(x_1) = -(df(x_1, \phi(x_1)))^{-1} o d_2 f(x_1, \phi(x_1))$
5. Si f est de classe C^k alors ϕ sera C^k.

8 Surface d'équation $z = f(x, y)$

Définition. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1, et U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ d'ensemble des points $(x, y, z) \in U \in U \times \mathbb{R}$ tels que $z = f(x, y)$ s'appelle la surface d'équation $z = f(x, y)$. A chaque point $m = (x, y) \in U$ correspond un point $M = (x, y, f(x, y))$ appartenant à S. Le point M se projette en m sur le plan xOy. L'ensemble S est par définition le graphe de f.

Définition. Soit k un nombre réel et soit L la ligne de niveau k de f. On a donc

$$L = \{(x, y) \in U / f(x, y) = k\} \subset \mathbb{R}^2$$

Supposons que L et non vide, et considérons l'ensemble Λ des points $(x, y, z) \in S$ tels que $(x, y) \in L$. On a $(x, y, z) \in \Lambda$ si et seulement si $z = f(x, y)$ et $z = k$. L'ensemble Λ est la ligne de niveau k de la surface S.

Définition. Plan tangent. Soient S une surface et M_0 un point de S. Tous les vecteurs tangents en M_0 aux courbes paramétrées tracées sur S appartiennent à un même plan P appelé plan tangent à la surface en M_0. L'équation du plan tangent P en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ à la surface d'équation $z = f(x, y)$ s'écrit

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Proposition. (Position de la surface par rapport au plan tangent).
La position de la surface par rapport au plan tangent en M_0 est donnée par le signe de

$$g(x, y) = \underbrace{f(x, y)}_{\text{hauteur de la surface}} - (z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0))$$

Le point (x_0, y_0) est un point critique de $g(x, y)$

- Si l'application g a un minimum local en (x_0, y_0) alors la surface est au-dessus de so plan tangent en M_0.
- Si l'application g a un maximum local en (x_0, y_0) alors la surface est en-dessous de son plan tangent en M_0.
- Si l'application g n'a ni maximum local ni minimum local, alors la surface présente un "col" en M_0.

Exercice 13,14,15

Deuxième partie

Série de Fourier

9 Introduction

blabla (vous moquez pas il a vraiment marqué ça)

Vocabulaire. Signal "monochromatique"

$$s(t) = \alpha \cos(\omega t + \phi)$$

avec $|\alpha| = \max |s(t)|$ amplitude, ω la pulsation, $a = \dfrac{2\pi}{\omega}$, $\lambda = \dfrac{1}{\lambda}$ et ϕ la phase.
Généralisation en écriture complexe

$$z(t) = \alpha e^{i(\omega t + \phi)} = \beta e^{2i\pi\lambda t}$$

10 Série de Fourier d'une fonction 2π-périodique

Notation. On note $\mathcal{CM}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodiques.

10.1 Polynômes trigonométriques

Définition. On définit les suites de fonctions $(l_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (r_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par :

$$l_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{int} \end{cases}$$

$$r_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto cos(nt) \end{cases}$$

$$s_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto sin(nt) \end{cases}$$

On note $\mathcal{P}_n$ les sous espaces vectoriels de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ engendrés par $\{l_k, -n \leq k \leq k \leq n\}$

Proposition. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

1. $\mathcal{P}_n = Vect\{r_0, r_1, ..., r_n, s_1, s_2, ..., s_n\}$
2. $dim\mathcal{P}_n = 2n + 1$

Démonstration. Pour la 2) on montre que la famille $\{l_k, -n \leq k \leq n\}$ est libre $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{k=-n}^{n} \lambda_k l_k(t) = 0 \Rightarrow \forall k = -n, ..., n, \lambda_k = 0$. $\square$

Définition. L'ensemble $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ est appelé ensemble des polynômes trigonométriques. Un polynôme trigonométrique p peut s'écrire sous la forme :

$$P = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k l_k = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \alpha_{-k}) r_k + i(\alpha_k - \alpha_{-k}) s_k$$

10.2 Coefficients de Fourier d'une fonction 2π-périodique

Définition. Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on pose

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{a}^{a+2\pi} f(t) e^{-int} dt \forall a \in \mathbb{R}$$

Les coefficients $c_n(f)$ sont appelés coefficients de f. Le coefficient $c_0(f)$ représente la valeur moyenne de f sur une période

Remarque. Si f est un polynôme trigonométrique $\sum \alpha_k l_k$ alors $c_k = \alpha_k$

Proposition. Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. On a

1. $\forall n \in \mathcal{Z}, \overline{c_n(f)} = c_{-n}(\overline{f})$
2. Soit $g(t) = f(-t)$ alors $g \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et on a $c_n(g) = c_{-n}(f)$. Si f est paire alors $c_n(f) = c_{-n}(f)$. Si f est impaire alors $c_n(f) = -c_{-n}(f)$
3. La suite $|c_n(f)| \leq \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$

Remarque. Soit f continue, 2π-périodique et C^k par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors

$$c_n(f') = i^k n^k c_n(f)$$

Démonstration. Intégration par parties □

10.3 Coefficients trigonométriques

Définition. Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. On appelle coefficiennts trigonométriques de f les coefficients $\forall n ß \mathbb{N}, a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) cos(nt) dt$
$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) sin(nt) dt.$

Proposition. $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$

1. $a_n(f) = a_n(f) + c_{-n}(f)$
2. $b_n(f) = i(a_n(f) - c_{-n}(f))$
3. si f est impaire alors $a_n(f) = 0$
4. si f est continue, 2π-périodique C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n(f') = nb_n(f)$ et $b_n(f') = -na_n(f)$

Exercice 1.

11 Séries de Fourier

Définition. Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. On appelle série de Fourier de f la série de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(f)l_n = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)r_n + b_n(f)s_n$$

Si on note $(s_p)_{p\in\mathbb{N}}$, la suite des sommes partielles de cette série de fonctions, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, s_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)e^{inx} = \frac{x_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{p}(x_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$$

12 Convergence en moyenne quadratique

12.1 L'espace $\mathcal{C}_{2\pi}$

Définition. L'espace vectoriel des fonctions continues et $2\pi-$périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est noté $\mathcal{C}_{2\pi}$. C'est un sous espace vectoriel de $\mathcal{CM}_{2\pi}$.

Définition. Pour tous f et g dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, on définit

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}g(t)dt$$

c'est un produit scalaire de $\mathcal{C}_{2\pi} \times \mathcal{C}_{2\pi}$ dans $\mathcal{C}$. La norme associée est notée $||.||_2$.

$$\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}, ||f||_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

Proposition. La famille $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de $\mathcal{C}_{2\pi}$. Pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on a

$$c_n(f) = (e_n|f)\forall n \in \mathbb{Z}$$

12.2 Convergence dans $\mathcal{C}_{2\pi}$

Définition. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{P}_p$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}_{2\pi}$ engendré par $(e_n)_{-p\leq n\leq p}$.

Proposition. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ sort $(s_p(f))_{p\in\mathcal{N}}$ la suite des sommes partielles de la série de Fourier de f. Pour tout $p \in \mathcal{N}^*$, $S_p(f)$ est la projection de f sur $\mathcal{P}_p$. E particulier, on a :

$$||f||_2^2 = ||S_p(f)||_2^2 + ||f - S_p(f)||_2^2 \tag{1}$$

Démonstration. $\mathcal{P}_p$ est une sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{C}_{2\pi}$. O note $q(f)$ la projection de f sur

$\mathcal{P}_q$, $(e_n)_{-p\leq n\leq p}$ famille orthonormale, génératrice libre. C'est une base orthonormale de $\mathcal{P}_q$

$$\begin{aligned} q(t) &= \sum_{n=-p}^{p} (e_n|f)e_n \\ &= \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)e_n \\ &= s_p(f) \end{aligned}$$

$\square$

Théorème II.1. (Convergence en moyenne quadratique) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Alors la suite $(S_p(f))_p$ converge vers f dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}_{2\pi}, ||.||_2)$

$$\lim_{p\to+\infty} ||f - S_p(f)||_2 = 0$$

Théorème II.2. (Formule de Parseval) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$

$$||f||_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = |\frac{a_0(f)}{2}|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2$$

où $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(p)|^2 = \lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2$.

Démonstration. Calculons

$$\begin{aligned} ||s_p(f)||_2^2 &= ||\sum_{n=-p}^{p} (e_n|f)e_n||_2^2 \\ &= \sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2 \\ &= |\frac{a_0(f)}{2}| + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \end{aligned}$$

On applique (1), on déduit que $||S_p(f)||_2^2 \leq ||f||_2^2 \forall p \in \mathbb{N}$.
Donc les suites $(\sum\limits_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2)_p$, $(\sum\limits_{n=1}^{p} |a_n(f)|^2)_p$ et $(\sum\limits_{n=1}^{p} |b_n(f)|^2)_p$ sont majorées. Alors elles sont croissantes. Elles sont donc convergentes On passe à la limite dans (1) quand $p \to +\infty$ comme $\lim\limits_{p\to+\infty} ||f - S_p(f)||_2^2 = 0$ on obtient le résultat. $\square$

Théorème II.3. (Inégalités de Bessel)

$$\sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2 \leq ||f||_2^2$$

$$|\frac{a_0(f)}{2}|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \leq ||f||_2^2$$

Corollaire. L'application

$$\mathcal{C}_{2\pi} \to \{u : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}\}$$

$$f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$$

est injective.

Démonstration. Soient f et g dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ telles que $(c_n(f))_n = (c_n(g))_n$.
$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = c_n(g), \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f-g) = 0$.
Donc

$$||f-g||_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f-g)|^2 = 0$$

donc $f - g = 0$. □

Corollaire. Soient f et g dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ le produit scalaire de f et g peut s'exprimer à l'aide de leurs coefficients de Fourier

$$(f|g) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n(f)}c_n(g)$$

Exercice 2.

12.3 Extension à $\mathcal{CM}_{2\pi}$

Définition. Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. On définit la fonction régularisée de f notée $f_r \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, par $\forall x \in \mathbb{R}, f_r(x) = \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ où $f(x^+)$ et $f(x^-)$ sont respectivement les limites à droite et à gauche de f en x. En particulier, si f est continue en x, $f(x) = f_r(x)$.

Remarque. Le nombre de points où f et f_r sont différent est fini. Donc

$$||f_r||_2 = ||f||_2$$

Définition. On introduit le sous espace vectoriel $\mathcal{CM}_{2\pi}$ constitué des fonctions f vérifiant $f = f_r$.

Proposition. L'application

$$\mathcal{D}_{2\pi} \times \mathcal{D}_{2\pi} \to \mathbb{C}$$

$$(f,g) \mapsto (f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}g(t)dt$$

est un produit scalire sur $\mathcal{D}_{2\pi}$. La norme associée est encore notée $||.||_2$.

$$||f||_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = (f|f)$$

Le théorème de convergence en moyenne quadratique est exact dans $\mathcal{D}_{2\pi}$. Donc pour $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$

$$\lim_{p\to+\infty} ||f_r - S - p(f_r)||_2 = 0$$

$$\lim_{p\to+\infty} ||S_p(f_r)||_2^2 = ||f_r||_2^2 = ||f||_2^2$$

Théorème II.4. (Parseval)

$$\begin{aligned}||f_r||_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_r(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f_r)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2 \\ &= |\frac{a_0(f_r)}{2}|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n(f_r)|^2 + |b_n(f_r)|^2 \\ &= |\frac{a_0(f)}{2}|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\end{aligned}$$

13 Convergence ponctuelle

13.1 Convergence normale de la série de Fourier

Théorème II.5. Soit f une fonction 2π-périodique continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors la série de fonction (série de Fourier de f) $c_0(f) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n}$ converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. (Convergence normale sur $\mathbb{R}$) Etudions $||c_n(f)e_n + c_{-n} + \underline{e_n}||_\infty$

$$||c_n(f)e_n + c_{-n}e_{-n}||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}|c_n(f)e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}| \leq |c_n(f)| + |c_{-n}|$$

$\forall x \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$c_n(f') = inc_n(f)$$

donc $|c_n(f)| = |\frac{c_n(f')}{n}| \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{n^2} + |c_n(f)|^2)$.
D'où

$$||c_n(f)e_n + c_{-n}e_{-n}||_\infty \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}(|c_n(f')|^2 + |\underline{c}_n(f')|^2)$$

Comme $f' \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, les série numériques $\sum |c_n(f)|^2$ et $\sum |\underline{c}_n(f')|^2$ convergent. $\sum \frac{1}{n^2}$ converge aussi donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(f)e_n + c_{-n}e_{-n}$ converge normallement sur $\mathbb{R}$. □

Démonstration. (La limite est f). Il faut montrer que la limite est f. Soit S cette limite

$$S(t) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)e_n(t) + c_{-n}e_{-n}(t)$$

Montrons que $S = f$. Comme on a la convergence normale et comme $c_n(f)e_n + c_{-n}e_{-n}$ est continue on en déduit que S est continue. Par construction, S est 2π-périodique doc $S \in \mathcal{C}_{2\pi}$. On peut calculer ses coefficients de Fourier

$$\begin{aligned}
c_k(S) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(t)e^{-ikt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{pi} [c_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)e_n - t) + c_{-n}(f)e_{-n}(t)]e^{-ikt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}c_0(f)\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}dt + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t}dt + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(f)\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n+k)t}dt
\end{aligned}$$

On trouve donc $c_k(S) = c_k(f)\forall k \in \mathbb{Z}$. Donc S et f sont deux application de $\mathcal{C}_{2\pi}$ ayant les mêmes coefficients de Fourier donc $S = f$. $\square$

13.2 Convergence de la série de Fourier

Théorème II.6. (Dirichlet) Soit f une fonction 2π-périodique et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier de f, $c_0(f) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est égale à la fonction régularisée f_r de f, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f_r(x) &= \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \\
&= c_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx} \\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)
\end{aligned}$$

En particulier, si f est continue en x alors

$$\begin{aligned}
f(x) &= c_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx} \\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)
\end{aligned}$$

On trouve donc $c_k(S) = c_k(f)\forall k \in \mathbb{Z}$. Donc S et f sont deux applications de $\mathcal{C}_{2\pi}$ ayant les mêmes coefficients de Fourier, donc $S = f$.

Remarque. Cas de fonctions T-périodiques : $\forall n \in \mathbb{Z}$ on a

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{a}^{a+T} f(t)e^{-\frac{2i\pi}{T}nt}dt$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{a}^{a+T} f(t)\cos(\frac{2\pi}{T}nt)dt$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{a}^{a+T} f(t)\sin(\frac{2\pi}{T}nt)dt$$

Travaux dirigés

Exercice 1. Calculer les différentielles des fonctions suivantes :

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$
2. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy^2 \end{cases}$
3. $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x] \\ ax^2 + bx + c \mapsto 3ax^2 + c \end{cases}$
4. $f : \begin{cases} \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}) \\ (A, B) \mapsto A^2B \end{cases}$
5. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (u(x)|x) \end{cases}$
6. Soit E, F deux espace vectoriels normés de dimension finie $f : \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) \times E \to F \\ (l, x) \mapsto l(x) \end{cases}$
7. Soit E et F deux espace vectoriels normés de dimension finie, soit g une application différentiable de E dans $\mathcal{L}(E, F)$. $f : \begin{cases} E \to F \\ x \mapsto g(x)(x) \end{cases}$

Exercice 2. Calculer les différentielles de g et h e fonction de celle de f.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est différentiable.

1. $g : \begin{cases}]0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto f(\frac{y}{x}) \end{cases}$
2. $h : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto f(zsin(x)) \end{cases}$

Exercice 3.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y} \text{ si } x^2 + y \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Montrer que f admet en $(0, 0)$ des dérivées directionnelles dans toutes les directions mais que f n'est pas différentiable en ce point.

Exercice 4.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} sin(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}) \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles
3. Montrer que f n'est pas différentiable.

Exercice 5. Déterminer si les fonctions suivantes sont de classe C^1.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^{\nvDash} \to \mathbb{R} \\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{cases}$$

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xsin(y)}{y} \text{ si } y \neq 0 \\ x \text{ si } y = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Exercice 6.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x^3+x, y-x^2) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue
2. Montrer que f est différentiable et calculer sa matrice jacobienne
3. Montrer que f est bijective
4. Montrer que f^{-1} est C^1

Exercice 7. Calculer la différentielle seconde de :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto x^3yz - 2y^2z^2 \end{cases}$$

$$g : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A,B) \mapsto A^2B \end{cases}$$

Exercice 8. Soit $\mathcal{M}_n$ une matrice de taille $n \times n$ et $GL_n(\mathbb{R})$ l'ouvert des matrices inversibles

$$f : \begin{cases} GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) \\ A \mapsto A^{-1} \end{cases}$$

1. Calculer la différentielle de f.
2. Montrer que $df(A)$ est continue en A $\forall A \in GL_(\mathbb{R})$.

Exercice 9. Est ce que les fonctions suivantes sont des C^1 difféomorphisme ?

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \mapsto (x + e^x cos(\dfrac{1}{1+x^2y^2}), y, x^2+y^2) \end{cases}$$

$$h : \begin{cases}]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto tan(x) \end{cases}$$

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{cases}$$

$$k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$$

Exercice 10. Étudier les extremas de :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \end{cases}$$

Exercice 11. Déterminer la plus grande valeur et la plus petite de la fonction

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

dans le domaine $\mathcal{D} = \{(x, y) \text{ tel que } x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}$.

Exercice 12. Chaque jour 10 000 voyageurs doivent se déplacer. Le trajet est de 40 minutes en tram. Si x milliers de personnes utilisent la voiture alors le trajet e voiture est de $(20 + 5x)$ minutes.

1. Montrer que si les personnes sont libres de choisir alors 4 000 personnes prennent la voiture.
2. Montrer que la durée moyenne de trajet serait minimisée si 2000 personnes prennent la voiture.

Exercice 13.

1. Montrer que la relation
$$x^3 + y^3 - 2xy = 0 \tag{2}$$
définit implicitement au voisinage de $(1, 1)$ une unique fonction ϕ vérifiant
$$x^3 + \phi(x)^3 - 2x\phi(x) = 0$$
2. Calculer $\phi'(1)$
3. Montrer que si $P \neq (0, 0)$ alors au voisinage de P l'équation se résout en x ou en y.
4. L'équation (1) définit une courbe $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathcal{C}$ à une tangente en tout point $P \neq (0, 0)$.
5. En quel point la tangente va être verticale ? horizontale ?

Exercice 14.

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ B - \dfrac{I_n - X + Y^2}{2} \end{cases}$$

où $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constante et $I \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ identité.

1. Calculer $d_2 f(X,Y)$
2. Montrer que au voisinage de I_n il existe une fonction ϕ tel que $\phi(x)^2 = X$
3. La fonction ϕ est-elle unique ?

Exercice 15. Soit la surface S d'équation

$$z = x - 2(x^2 + y^2)^2$$

. Soit $(a, b, c) \in S$

1. Écrire l'équation du plan tangent à S au point (a, b, c). En quel point le plan tangent est horizontal ?
2. Montrer que au point $(0, 0, 0)$ la surface est en-dessous du plan tangent.
3. Montrer que en tous points de S la surface est en dessous de son plan tangent.

Exercice 1. Calculer les coefficients de Fourier de f, $a \in \mathbb{C}$, f, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, définie sur $]-\pi,\pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \exp(ax) \text{ si } x \in]-\pi,\pi[\\ ch(a\pi) \text{ si } x = \pi \end{cases}$$

Exercice 2. Déterminer les coefficients trigonométriques de la fonction f, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, définie sur $]-\pi,\pi]$ par $f(x) = ch(ax)$ dans les deux cas suivants :

1. $a \in i\mathbb{Z}$
2. $a \in \mathbb{R}^{+*}$

Exercice 3.

1. Peut on appliquer la formule de Parseval aux fonctions f des exercices 1 et 2 ?
2. Pour chacune de ces fonctions quelles égalités obtient-on ?
3. Quelles égalités remarquables peut-on déduire ?

Exercice 4

1. Peut-on appliquer le théorème de convergence normale aux fonctions f ?
2. Peut-on appliquer le théorème de convergence simple aux fonctions f ?
3. Pour chacune de ces fonctions quelles égalités obtient-on ?
4. Quelles égalités remarquables peut-on déduire ?

Exercice 5.

1. Déterminer les coefficients trigonométriques de la fonction $T-$ périodique f définie par

$$f(x) = |\sin(\frac{\pi}{T}x)|$$

2. Quels théorèmes de convergence peut-on appliquer à la série de Fourier de f ?

Exercice 6. Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ définie par $\forall x \in]-\pi,\pi], f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$

1. Calculer les coefficients de Fourier de f
2. Calculer les coefficients trigonométriques de f
3. On note $(S_p)_{p\in\mathcal{N}}$ la suite des ommes partielles de la série de Fourier de f. Calculer $S_p(f)(\pi)$. Est ce que $S_p(f)(\pi) \to f(\pi)$ lorsque $p \to +\infty$? Pourquoi ?
4. Calculer la valeur de la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ à partir de $S_p(f)$
5. En appliquant la formule de Parseval, en déduire la valeur de la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$

Exercice 7. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x - E(x)$$

1. Déterminer la plus petite période de $f(x)$
2. Calculer les coefficients de Fourier et les coefficients trigonométriques de f
3. Quels théorèmes de convergence peut-on appliquer ?

Troisième partie

Correction des Devoirs surveillés

1 Devoir surveillé

1.1 Exercice

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{1}$$

1. $\partial_1 f(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$ et $\partial_2 f(0,0) = 0$
   La dérivée directionnelle en (1,1) est $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^3}{2h^3} = \dfrac{1}{2}$
2. Les dérivées partielles sont nulles en $(0,0)$ donc si f est différentiable en $(0,0)$ on doit aussi avoir $df(0,0) = 0$ or la dérivée directionnelle selon $(1,1)$ en $(0,0)$ est non nule donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f est la composée d'applications différentiable et $(x^2+y^2 \neq 0)$.

1.2 Exercice

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 6(x^2+y^2) \tag{2}$$

1. $\begin{cases} \partial_1 f(x,y) = 3x^2 - 12x = 0 \\ \partial_2 f(x,y) = 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$. On trouve donc $x = 0, x = 4, y = 0, y = -4$ et donc on a 4 points critiques $(0,0), (0,-4), (4,0), (4,-4)$.
2. $f(t,0) = t^3 - 6t^2 = t^2(t-6)$ et $f(0,t) = t^3 + 6t^2 = t^2(t+6)$. On remarque donc que si $t \in Vois(0)$ alors $f(t,0) < 0$ et $f(0,t) > 0$ ce ne peut donc ni être un maximum local ni un minimum local.
3. On calcule la matrice Hessienne $H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-12 & 0 \\ 0 & 6y-12 \end{pmatrix}$. On regarde ensuite le déterminant de $H(x,y)$ on a donc :
   (a) $det(H(4,0)) = 144 > 0$ et $p = 12 > 0$ donc un minimum local
   (b) $det(H(0,-4)) = 144 > 0$ et $p = -12 < 0$ donc un maximum local
   (c) $det(H(4,-4)) = -144 < 0$ ce n'est donc ni un maximum ni un minimum local

1.3 Exercice

$$\phi(x,y) = (sin(y/2) - x, sin(x/2) - y) \tag{3}$$

1. Chacune des composantes ϕ_1 et ϕ_2 est la composée d'applications C^1 de $\mathbb{R}^2$.

2. $d\phi(x,y)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui peut être définit par sa matrice Jacobienne

$$\mathcal{J}\phi(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 1/2cos(y/2) \\ 1/2cos(x/2) & -1 \end{pmatrix}$$

Soit $h = (h_1, h_2)$ alors $d\phi(x,y)(h_1,h_2) = \begin{pmatrix} d\phi_1(x,y)(h_1,h_2) \\ d\phi_2(x,y)(h_1,h_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1\phi_1(x,y)h_1 + \partial_2\phi_1(x,y)h_2 \\ \partial_1\phi_2(x,y)h_2 + \partial_2\phi_2(x,y)h_2 \end{pmatrix}$

3. On va utiliser le théorème d'inversion globale.
   (a) On a déjà montré que ϕ est C^1.
   (b) Montrons que $d\phi$ est un isomorphisme. $det(\mathcal{J}\phi(x,y)) = 1 - \frac{1}{4}\cos(x/2)\sin(y/2) > 0$ donc $d\phi(x,y)$ est un isomorphisme.
   (c) Montrons que ϕ est injective. Soient (x,y) et (x',y') tel que

$$\phi(x,y) = \phi(x',y') \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(y/2) - x = \sin(y'/2) - x' \\ \sin(x/2) - y = \sin(x'/2) - y' \end{cases} \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(y/2) - \sin(y'/2) = x - x' \\ \sin(x/2) - \sin(x'/2) = y - y' \end{cases} \tag{6}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x - x'| \leq \frac{1}{2}|y - y'| \\ |y - y'| \leq \frac{1}{2}|x - x'| \end{cases} \tag{7}$$

Entre (6) et (7) on utilise le Théorème des acroissements finis. On a donc $x = x'$ et $y = y'$ et donc la fonction est injective.

D'après le théorème d'inversion globale ϕ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\phi(\mathbb{R}^2)$.

FIN.