Mathématiques

Compléments de Mathématiques pour M.P.C

Semestre 1

Avant propos

Ce fascicule a été rédigé (très) rapidement, sa relecture a donc été superficielle. Ainsi certaines erreurs de frappe et coquilles mathématiques sont encore présente.

Ce fascicule est un support au cours de mathématiques spé, il suit plus ou moins le cours de Mr Charpentier (les chapitres n'étant pratiquement pas liés ils peuvent être traités dans n'importe quel ordre), ce support n'est donc pas une copie conforme du cours (contrairement aux autres fascicules) mais il traite exactement du même programme. C'est un mélange entre le cours (équation différentielle, suites) et le support de Mr Artigue (fonctions, divisibilité dans $\mathbb{Z}$).

Amusez vous bien.

Table des matières

Première partie

Compléments sur les équations différentielles linéaires.

1 Équations différentielles linéaires du premier ordre.

1.1 Un type d'équation différentielle se ramenant au cas linéaire : les équations de Bernoulli.

Équation différentielle de la forme

$$y' + a(x)y = b(x).y^m$$

où $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et où a et b sont deux fonction définies et continues sur un intervalle U de $\mathbb{R}$.
Valable sur tout sous intervalle V de U tel que $\forall x \in V, y^m(x) \neq 0$. Diviser les deux membres par y^m et faire le changement de fonction-inconnue $z = \dfrac{1}{y^{m-1}} = y^{1-m}$ en remarquant qu'alors $z' = (1-m).\dfrac{y'}{y^m}$.
L'équation différentielle en z alors obtenue est linéaire. Après résolution, ne pas oublier de calculer d'exprimer $y(x)$ et de ne pas s'arrêter à $z(x)$.

Exemple. $-8xy' - y = xy^3$ sur $\mathbb{R}^+$ on se ramène à une équation de la forme :

$$y' + \frac{1}{8x}y = -\frac{1}{8}y^3$$

On a donc $\dfrac{y'}{y^3} + \dfrac{1}{8x}\frac{1}{y^2} = -\frac{1}{8}$ (là où $y \neq 0$). On pose $z = \dfrac{1}{y^2}$ donc $z' = \dfrac{-2y}{y^3}$, ainsi $-\frac{1}{2}z' + \dfrac{1}{8x}z = \frac{1}{8}$. En réduisant les coefficients il vient $z' - \dfrac{1}{4x}z = \frac{1}{4}$.
La solution homogène est $z(x) = Cx^{\frac{1}{4}}$ et la solution particulière est $z(x) = \lambda x$, on cherche λ tel que $\lambda - \dfrac{1}{4x}\lambda x = \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$. Donc $z(x) = \frac{1}{3}x + C.x^{\frac{1}{4}}$, finalement

$$y(x) = \pm(\frac{1}{3}x + Cx^{\frac{1}{4}})^{-\frac{1}{2}} \text{ sur } \mathbb{R}^+$$

Il y a donc deux familles de solutions l'une positive et l'autre négative.

2 Équation de Riccati

Équation différentielle de la forme

$$y'(x) = a(x)y(x)^2 + b(x)y(x) + c(x)$$

(on nomme R cette équation) où a, b, c sont continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On cherche y dérivable (donc de classe C^1 puis qu'alors le membre de droite est continu).

Supposons qu'on ait trouvé une solution particulière y_0. Posons $y = y_0 + z$ alors l'équation R devient :

$$y' = y_0' + z' = a(y_0 + z)^2 + b(y_0 + z) + c = ay_0^2 + by_0 + c + (2ay_0 + b)z + az^2$$

D'où $z' - (2ay_0 + b)z = az^2$.

On résout et on trouve z, on obtient $y = y_0 + z$ qui est la solution générale de R.

Remarque. Les équations de Riccati se ramènent a des équations de Bernoulli (exemple en chimie cinétique).

3 Équations différentielles linéaires d'ordre 2.

Équation différentielle de la forme

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$$

que l'on note (E), où a, b sont des constantes et c une fonction continue.

Soit l'équation homogène (H) : $y'' + ay' + by = 0$ alors on associe son équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$. Donc $r = \dfrac{-a \pm \delta}{2}$ où δ est la racine carré de Δ le discriminant.

Si $r_- \neq r_+$. La solution de H est de la forme :

$$y_0(x) = C_- e^{r_- x} + C_+ e^{r_+ x}$$

Si $\Delta = 0$. Alors $r_+ = r_- = r$ la solution de H est de la forme :

$$y_0(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$$

On admet qu'on a là toutes les solutions mais vérifions que se sont bien des solutions :

Si $\Delta \neq 0$. Comme H est linéaire il suffit de vérifier que $e^{r_1 x}$ est solution. On a $(e^{r_\pm x})'' + a(e^{r_\pm x})' + b(e^{r_\pm x}) = (r_\pm^2 + ar_\pm + b)e^{r_\pm x} = 0$.

Si $\Delta = 0$. Alors e^{rx} est encore solution et $(xe^{rx})'' + a(xe^{rx})' + b(xe^{rx}) = (e^{rx} + xre^{rx})' + a(e^{rx} + xre^{rx}) + bxe^{rx} = ((r + r + xr^2) + a(1 + xr) + bx)e^{rx} = [x(r^2 + ar + b) + (2r + a)]e^{rx}$ et $2r + a$ est la valeur en $x = r$ de $2x + a = (x^2 + ax + b)'$.

Pour résoudre l'équation particulière on utilise la méthode de Lagrange par variation de la constante :

Notons $y_1(x) = e^{r_- x}, y_2(x) = e^{r_+ x}$ si $\Delta \neq 0$ et $y_2(x) = xe^{rx}$ si $\Delta = 0$.

Ainsi la solution de H est $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$. On cherche la solution générale de E on injecte alors H dans E :

$(C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + a(C_1 y_1 + C_2 y_2)' + b(C_1 y_1 + C_2 y_2) = c(x)$

$\Leftrightarrow (C_1'' y_1 + 2C_1' y_1' + C_1 y_1'' + C_2'' y_2 + 2C_2' y_2' + C_2 y_2'') + a(C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2') + b(C_1 y_1 + C_2 y_2) = c$

$\Leftrightarrow C_1'' y_1 + 2C_1' y_1' + C_2'' y_2 + 2C_2' y_2' + a(C_1' y_1 + C_2' y_2) = c$

On cherche donc C_1, C_2 tel que $C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0$. Du coup $(C_1' y_1 + C_2' y_2)' = 0 \Leftrightarrow C_1'' y_1 + C_2'' y_2 + C_1' y_1' + C_2' y_2' = 0$.

Donc $C_1''y_1 + C_1'y_1' + C_2''y_2 + C_2'y_2' = c$ et donc $C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$. On se ramène donc au système suivant

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = c \end{cases}$$

Pour les équations du premier ordre $y' + ay = c$ la variation de la constante C donnait la condition $C'y_0 = c$.

Formules de Cramer. Pour résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues du type : $\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases}$. On regarde le déterminant du système $ad - bc$. Si le déterminant est non nul alors le système a une unique solution (si il est nul alors il en a une infinité ou 0). L'unique solution est donnée par les formules de Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix}}{ad - bc}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix}}{ad - bc}$$

Revenons à notre système $\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = c \end{cases}$. Le déterminant est $(r_+ + r_-)e^{r_-x + r_+x} \neq 0$ si $\Delta \neq 0$ et $e^{2rx} \neq 0$ si $\Delta = 0$. Il y a donc une unique solution donnée par :$C_1' = \dfrac{-cy_2}{y_1y_2' - y_2y_1'}$ et $C_2' = \dfrac{cy_1}{y_1y_2' - y_2y_1'}$. Il n'y a plus qu'à intégrer pour trouver C_1 et C_2.

Exemple. Soit l'équation $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{e^x}{cos^2(x)} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Résolvons l'équation homogène : $y'' - 2y' + 2y = 0$, établissons l'équation caractéristique $r^2 - 2r + 2 = 0$ on a donc $\Delta = 4$ et donc $r_\pm = 1 \pm i$.
La solution est une combinaison linéaire de $e^{(1+i)x}$ et $e^{(1-i)x}$ c'est à dire
$y = \lambda_1 e^x e^{ix} + \lambda_2 e^x e^{-ix} = e^x(\lambda_1 e^{ix} + \lambda_2 e^{-ix})$
$= e^x(\lambda_1(cos(x) + isin(x)) + \lambda_2(cos(x) - isin(x))) = C_1e^x cos(x) + C_2e^x sin(x)$.
Avec C_1, C_2 quelconques car $\begin{cases} C_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ C_2 = i(\lambda_1 - \lambda_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}(C_1 - iC_2) \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(C_1 + iC_2) \end{cases}$.
La solution de H est donc

$$y_0 = C_1e^x cos(x) + C_2e^x sin(x)$$

Pour E on cherche

$$y(x) = C_1(x).e^x cos(x) + C_2(x)e^x sin(x)$$

On sait que C_1', C_2' sont données par $\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = \dfrac{e^x}{cos(x)^2} \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1'e^x cos(x) + C_2'e^x sin(x) = 0 \\ C_1'(e^x cos(x) - e^x sin(x)) + C_2'(e^x sin(x) + e^x cos(x)) = \dfrac{e^x}{cos(x)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1'cos(x) + C_2'sin(x) = 0 \\ -C_1'sin(x) + C_2'cos(x) = \dfrac{1}{cos(x)^2} \end{cases}$$

En utilisant les formules de Cramer on a $cos(x) \times cos(x) + sin(x) \times sin(x) = 1$ donc

$$C_1' = -\frac{sin(x)}{cos^2(x)} \Rightarrow C_1(x) = -\frac{1}{cos(x)}$$

$$C_2' = \frac{cos(x)}{cos(x)^2} \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{2}(ln(1 - sin(x)) - ln(1 + sin(x)))$$

Deuxième partie

Compléments sur les suites numériques.

1 Généralités sur les suites récurrentes

Pour $u_{n+1} = f(u_n)$. Déterminer le domaine de définition de $f : D_f \subset \mathbb{R}$.

Chercher un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ stable par f (c'est à dire $f(I) \subset I$). Si $u_0 \in I$, on aura donc $u_1 = f(u_0) \in I$ et par récurrence $u_n \in I\ \forall n$, la suite (u_n) est bien définie.

Étudier rapidement les variations de f dans I :

— Si f est croissante et $u_0 \leq u_1$, alors $f(u_0) \leq f(u_1)$ c'est à dire $u_1 \leq u_2$ et par récurrence $u_n \leq u_{n+1}$. La suite est donc croissante.

— Si f est croissante et $u_0 \geq u_1$, alors $f(u_0) \geq f(u_1)$ c'est à dire $u_1 \geq u_2$ et par récurrence $u_n \geq u_{n+1}$. La suite est donc décroissante.

— Si f est décroissante :

  — Si $u_0 \leq u_1$ alors $f(u_0) \geq f(u_1)$ c'est à dire $u_1 \geq u_2$ etc... $u_{2n} \leq u_{2n+1}$ et $u_{2n+1} \geq u_{2n+2}$. La suite est alternée, la suite (u_{2n}) est monotone car fof est croissante et la suite (u_{2n+1}) aussi.

  — Si $u_0 \geq u_1$, alors $f(u_0) \leq f(u_1)$ c'est à dire $u_1 \leq u_2$ d'où $u_{2n} \geq u2n+1$ et $u_{2n+1} \leq u_{2n+2}$. La suite est alternée, les sous suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones (car fof est croissante).

— Si u_0 est un point fixe de f (c'est à dire $f(u_0) = u_0$) alors la suite est constante :

  — Si f est continue et u_n converge : $u_n \to x$ alors $f(u_n) \to f(x)$ (continuité) ainsi $u_{n+1} \to x$ et donc $f(x) = x$, la limite fait partie des points fixes.

  — Si f est continue chercher les points fixes peut aider à déterminer l'éventuelle limite.

2 Exemple de suite récurrentes où on peut expliciter u_n en fonction de n

Suites arithmétiques. C'est une suite de terme récurrent : $u_{n+1} = u_n + r$ ainsi la suite converge si $r = 0$ et le terme général est

$$u_n = u_0 + nr$$

Suites géométriques. C'est une suite de terme récurrent :$u_{n+1} = qu_n$ ainsi la suite a pour terme général

$$u_n = q^n u_0$$

La suite converge si $|q| < 1$ et est constante si $q = 1$ ou $u_0 = 0$, elle diverge sinon.

Suites arithméticogéométriques. C'est une suite de terme récurrent : $u_{n+1} = au_n + b$ ainsi $\begin{cases} u_1 = au_0 + b \\ u_2 = a^2u_0 + (a+1)b \\ u_3 = a^3u_0 + (a^2+a+1)b \end{cases}$

Et donc par récurrence on a $u_n = a^nu_0 + (a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a + 1)b = a^nu_0 + \dfrac{a^n-1}{a-1}b = a^n(u_0 + \dfrac{b}{a-1}) - \dfrac{b}{a-1}$.
Cette suite converge si et seulement si $a^n(u_0 + \dfrac{b}{a-1})$ converge c'est à dire si $u_0 + \dfrac{b}{a-1} = 0$ ou si $|a| < 1$.

Suites récurrentes homographiques. C'est une suite de terme récurrent $u_{n+1} = \dfrac{au_n+b}{cu_n+d} = f(u_n)$ où $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $c \neq 0$ (sinon suite arithmético-géométrique). $y = f(x) \Leftrightarrow y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \Leftrightarrow ycx + dy = ax + b$
$\Leftrightarrow (a - cy)x = dy - b \Leftrightarrow x = \dfrac{dy-b}{-cy+a} = f^{-1}(y)$
$\Leftrightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} : cx + d \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$
$\Leftrightarrow D_f = \{y \in \mathbb{R} : -cy + a \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$. donc f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$.
La suite (u_n) est bien définie si $u_0 \in D_f$ et $\forall n fofo...of(u_0) \in D_f$.

On va expliciter u_n en fonction de n.

— Si $f(u_0) = u_0$, par récurrence $u_n = u_0$ la suite est donc une suite constante.

— Si $f(u_n) = u_n$ pour un certain $n \geq 1$, alors pour ce n, $f(u_{n-1}) = u_n = f(u_n) \Rightarrow u_n = u_{n-1}$ car f est injective. Donc $u_n = u_{n-1} = ... = u_0$. En effet : $u_n = f(u_{n-1})$ et $u_n = u_{n-1}$ donc $f(u_{n-1}) = u_{n-1}$.

  Donc $u_1 = u_0$ c'est à dire $f(u_0) = u_0$ et on est ramené au cas où $f(u_0) = u_0$ la suite est constante.

Conclusion si la suite passe bien par un point fixe de f alors elle est constante.
Si il n'y a pas de point fixe alors $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{ax+b}{cx+d} = x \Leftrightarrow cx^2 + (d-a)x - b = 0$.

— Si $\Delta > 0$, l'équation a deux racines réelles $l_1 \neq l_2$. Si on pose $v_n = \dfrac{u_n - l_1}{u_n - l_2}$ (qui est bien définie car par hypothèse u_n n'est jamais égal au point fixe l_2), alors la suite (v_n) est géométrique et $v_{n+1} = qV_n$.

  Démonstration. $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - l_1}{u_{n+1} - l_2} = \dfrac{\dfrac{au_n+b}{cu_n+d} - l_1}{\dfrac{au_n+b}{cu_n+d} - l_2} = \dfrac{(a - cl_1)u_n + b - dl_2}{(a - cl_2)u_n + b - dl_2}$. Mais $f(l_1) = l_1$ donc $l_1 = f^{-1}(l_1) = \dfrac{dl_1 - b}{cl_1 + a}$.

  Donc $b - dl_1 = (cl_1 - a)l_1$ et $b - dl_2 = (cl_2 - a)l_2$. Donc $v_{n+1} = \dfrac{(a - cl_1)u_n - (a - cl_1)l_1}{(a - cl_2)u_n - (a - cl_2)l_2} = \dfrac{a - cl_1}{a - cl_2} . \dfrac{u_n - l_1}{u_n - l_2} = qv_n$ où $q = \dfrac{a - cl_1}{a - cl_2}$. C'est donc une suite géométrique et donc si u_n converge alors v_n converge et si v_n converge alors u_n converge. □

— Si $\Delta = 0$ c'est à dire $(d-a)^2 = -4bc$ et donc l'équation $cx^2 + (d-a)x - b = 0$ possède une racine réelle double $l = -\dfrac{d-a}{2c} = \dfrac{a-d}{2c}$. Si on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - l}$, la suite (v_n) est arithmétique : $v_{n+1} = v_n + r$ où $r = r(a, b, c)$.

  Démonstration. $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - l} = \dfrac{1}{\dfrac{au_n+b}{cu_n+d} - l} = \dfrac{cu_n + d}{au_n + b - clu_n - dl} = \dfrac{cu_n + d}{(a - cl)u_n + b - dl}$ mais $l = f(l) \Leftrightarrow f^{-1}(l) = l \Leftrightarrow \dfrac{dl - b}{a - cl} = l \Leftrightarrow b - dl = (cl - a)l$.

  Donc $v_{n+1} = \dfrac{cu_n + d}{(a - cl)(u_n - l)} = \dfrac{c(u_n - l) + cl + d}{(a - cl)(u_n - l)} = \dfrac{c}{a - cl} + \dfrac{cl + d}{a - cl}\dfrac{1}{u_n - l}$

Mais : $\dfrac{cl+d}{a-cl} = \dfrac{\dfrac{a-d}{2}+d}{a-\dfrac{a-d}{2}} = 1$ car $l = \dfrac{a-d}{2c}$.
On a donc
$$v_n = v_0 + nr = \frac{1}{u_0 - l} + nr$$
d'où $u_n = \dfrac{1}{v_n} + l = \dfrac{1}{\dfrac{1}{u_0-l}+nr} + l$ avec $r = \dfrac{2c}{c+d} \neq 0$ (puisque $c \neq 0$) donc $u_n \to l$. □

— Si $\Delta < 0$ c'est à dire qu'il y a deux racines complexes conjuguées $l_1, l_2 = \overline{l_1}$ comme dans le cas où $\Delta > 0$.

Démonstration. On voit que $v_n = \dfrac{u_n - l_1}{u_n - l_2}$ définit une suite géométrique (complexe) de raison $q = \dfrac{a-cl_1}{a-cl_2} = \dfrac{a-cl_1}{a-cl2}$ donc $|q| = \dfrac{|a-cl_1|}{|a-c\overline{l_1}|} = 1$.
On a donc (dans $\mathbb{C}$) : $v_n = q^n v_0, u_n = \dfrac{l_2 v_n - l_1}{v_n - 1} = \dfrac{\overline{l_1} q^n v_0 - l_1}{q^n v_0 - 1}$.
Si u_n convergeait, ce serait vers un $\mathbb{R}$ donc pas vers l_1 ou l_2 (non réels), donc $\dfrac{u_n - l_1}{u_n - l_2}$ converge vers $z = \dfrac{\lim u_n - l_1}{\lim u_n - l_2} \neq 0$, et donc $v_n = q^0 V_0$ converge vers une limite différente de 0. Donc on aurait $v_0 = 0$ et (q^n) converge mais si ... □

Donc (u_n) diverge.

Exercices.
$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}$$
Soit $f = \dfrac{x+2}{2x+1}$ sur son intervalle de définition $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$. On cherche les points fixes $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{2x+1} = x \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
Ainsi $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1} \Leftrightarrow v_{n+1} = \dfrac{\dfrac{u_n+2}{2u_n+1} - 1}{\dfrac{u_n+2}{2u_n+1} + 1} = -\frac{1}{3}\dfrac{u_n - 1}{u_n + 1} = q v_n$ où $q = -\frac{1}{3}$. Donc $v_n = (-\frac{1}{3})^n v_0 = (-\frac{1}{3})^n \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1}$.
On peut donc retrouver une expression explicite de u_n en fonction de n. Et on obtient $u_n \to 1$.

$$u_{n+1} = \frac{-1}{u_n + 2}$$
Soit $f = \dfrac{-1}{x+2}$, on cherche les points fixes $f(x) = x$ on obtient donc l'équation $x^2 + 2x + 1 = 0$ et donc $\Delta = 0$.
Posons $v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$ alors $v_{n+1} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{u_n+2}} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1} = 1 + \dfrac{1}{u_n + 1} = v_n + 1$.
D'où $v_n = v_0 + n$ et donc $u_n = \dfrac{1}{v_n} - 1 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{n+1} + n} - 1 \to -1 = \dfrac{1}{u_0 + 1} + n$.
$$u_{n+1} = -\frac{1}{u_n}$$
donc $f(x) = -\dfrac{1}{x}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. f n'est continue sur aucun intervalle stable de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ car si $u_0 > 0, f(u_0) < 0$ et si $u_0 < 0, f(u_0) > 0$.
Si $u_0 \in I, u_1 = f(u_0) \in I$, or u_0, u_1 sont de part et d'autre de 0. Donc $0 \in I$ est absurde puisque $0 \notin D_f$. Donc

a priori rien ne garantit que u_n converge vers un point fixe (si elle converge). D'ailleurs ici il n'y a pas de points fixes.

Ici $a = 0, b = -1, c = 1, d = 0$ donc $a + d = 0$ et $r = \dfrac{2c}{a+d}$ n'est pas définie. La recette "générale" ne s'applique pas $u_1 = -\dfrac{1}{u_0}$ et $u_2 = -\dfrac{1}{u_1} = u_0$ âr récurrence on a $u_{2n} = u_0, u_{2n+1} = u_1$ la suite ne converge pas.

Troisième partie

Fonctions numériques de variable réelle

1 Notions liées à l'ordre " $\leq$ "

1.1 $sup(f,g)$;$inf(f,g)$

Supérieur. f et g étant deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de même ensemble de définition D, $sup(f,g) : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto max(f(x), g(x)) \end{cases}$

Inférieur. f et g deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de même ensemble de définition D, $inf(f,g) : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto min(f(x), g(x)) \end{cases}$.

Exemple. $sup(sin, cos)$ et $inf(sin, cos)$ représentées sur $[-2\pi, 2\pi]$.

Valeur absolue. f étant une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f, $|f| : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |f|(x) = |f(x)| = max((x), -f(x)) \end{cases}$
ainsi, $|f| = sup(f, -f)$.

1.2 Fonctions Lipschitziennes

Fonction f Lipschitzienne de rapport k sur un intervalle U de $\mathbb{R}$. k étant un élément de $\mathbb{R}_+^*$, c'est toute fonction f définie sur U, à valeurs réelles, telles que $\forall (x, x') \in U^2, |f(x) - f(x')| \leq k.|x - x'|$.

Contraction sur U (ou application contractante sur U). Est une fonction Lipschitzienne sur U, de rapport $k \in]0,1[$. Elle est ainsi nommée parce que les images de $f(x)$ et $f(x')$ sont toujours plus proches que x et x'.

Quatre formules de trigonométrie utiles. $\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2$

$$cos(p) + cos(q) = 2cos(\frac{p+q}{2}).cos(\frac{p-q}{2}) \qquad sin(p) + sin(q) = 2sin(\frac{p+q}{2}).cos(\frac{p-q}{2})$$
$$cos(p) - cos(q) = -2sin(\frac{p+q}{2}).sin(\frac{p-q}{2}) \qquad sin(p) - sin(q) = 2cos(\frac{p+q}{2}).sin(\frac{p-q}{2})$$

Rappelons également que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|sin(x)| \leq |x|$.

Exemple. Sinus est $1 - Lipschitzienne$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ mais elle est contractante sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

— Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$: $\forall (x, x') \in [0, \frac{\pi}{2}]^2$, on a

$$|sin(x) - sin(x')| = |2sin(\frac{x-x'}{2}).cos(\frac{x+x'}{2})| = 2|sin(\frac{x-x'}{2})|.|cos(\frac{x+x'}{2})| \leq 2.|\frac{x-x'}{2}|.1 = 1.|x-x'|$$

— Sur $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$: $\forall(x,x')\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]^2$, on a

$$|sin(x)-sin(x')| = \text{ idem } = 2.|sin(\frac{x-x'}{2})|.|cos(\frac{x+x'}{2})| \leq 2.|\frac{x-x'}{2}|\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.|x-x'| \text{ où } \frac{\sqrt{2}}{2}\in]0,1[$$

1.3 Le sens de variation d'une fonction f sur un intervalle U inclus dans D_f

Fonction f croissante sur U. fonction f définie sur U, telle que $\forall(x,x')\in U^2, x<x' \Rightarrow f(x)\leq f(x')$.

Fonction f strictement croissante sur U. f définie sur U, telle que $\forall(x,x')\in U^2, x<x' \Rightarrow f(x)<f(x')$.

Fonction f décroissante sur U. fonction f définie sur U, telle que $\forall(x,x')\in U^2, x<x' \Rightarrow f(x)\geq f(x')$.

Fonction f strictement décroissante sur U. f définie sur U, telle que $\forall(x,x')\in U^2, x<x' \Rightarrow f(x)>f(x')$.

1.4 Les bornes de l'ensemble image

Dans ce qui suit, f est une fonction $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f ; U est une partie non vide de D_f.
$f(U)=\{y\in\mathbb{R}/\exists x\in U, y=f(x)\}=\{f(x)/x\in U\}$.
$sup(f)=sup(f(x))=sup(f(U))$, borne supérieure de l'ensemble $f(U)$.
$max(f)=max(f(x))=max(f(U))$, plus grand élément de l'ensemble $f(U)$.
$min(f)=min(f(x))=min(f(U))$, plus petit élément de l'ensemble $f(U)$.
$inf(f)=inf(f(x))=inf(f(U))$, borne inférieure de l'ensemble $f(U)$.

Exemples. Pour $f:x\to\frac{1}{x}$.

$U=$	$]0,1]$	$[1,2]$	$]2,+\infty[$
$sup(f)$	.	1	$\frac{1}{2}$
$max(f)$	.	1	.
$min(f)$	1	$\frac{1}{2}$	.
$inf(f)$	1	$\frac{1}{2}$	0

Maximum local de f. f présente en a un maximum local M signifie que :
— f est définie au moins sur un intervalle ouvert $U=]a-\eta,a+\eta[$ ($\eta>0$).
— $max(f)$ existe et c'est $M=f(a)$ (c'est à dire $\forall x\in]a-\eta,a+\eta[, f(x)\leq f(a)=M$).

Minimum local de f. f présente en a un minimum local m signife ique que :
— f est définie au moins sur un intervalle ouvert $U=]a-\eta,a+\eta[(\eta>0)$
— $min(f)$ existe et c'est $m=f(a)$ (c'est à dire $\forall x\in]a-\eta,a+\eta[, f(x)\geq f(a)=m$).

Extrema locaux de f. Ce sont les maxima et les minima locaux de f.

Maximum absolu de f. C'est, s'il existe, $max(f)$.

Minimum absolu de f. C'est, s'il existe, $min(f)$.

Exercice. Étudier l'existence d'extrema locaux ou absolus pour $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |1-x^2| \end{cases}$.

2 Limites

2.1 Limite d'une fonction f en un réel a ou en un infini

a est un réel de D_f ou une borne de D_f pouvant ne pas appartenir à D_f.
$l = \lim f = \lim f(x)$: signifie pour l'élément l de $\mathbb{R}$, qu'il est limite de f en a, c'est à dire que $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^*{}_+, d(f(x), l) < \epsilon$ dès que x est assez proche de a, disons dans un intervalle $]a-\eta, a+\eta[$. Plus correctement, ceci s'exprime par

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f, |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Critère de Cauchy. Soit une suite de réels (u_n) tel que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \text{ tel que }, u_{n+q} - u_n| < \epsilon$$

Alors (u_n) converge (et réciproquement si elle converge elle vérifie cette propriété).

Remarques.

— Il n'est pas indispensable que f soit définie en a pour qu'elle y admette une limite. Pour $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x}$, $D_f = \mathbb{R}^*$, $a = 0$ en est une borne et $0 \notin D_f$, mais facilement $\lim f = 0$.

— Si f est définie n a et admet une limite en a, nécessairement, $\lim f = f(a)$. Ceci parce que $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, quel que soit le choix de η, pour $x = a$, $|x-a| < \eta$ est vrai donc $|f(x)-l| < \epsilon$ aussi. Donc $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, |f(a)-l| < \epsilon$, c'est à dire $f(a) = l$.

— Il se peut que f soit définie en a sans admettre de limite en a. C'est le cas pour f définie par $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. Même si pour $l = 2, \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, pour $x > 0$, $|f(x) - l| = |1-1| = 0 < \epsilon$, lorsque $x = 0, |f(x) - l| = |f(0) - 1| = |0-1| = 1$ ne peut être rendu $< \epsilon$ si $\epsilon < 1$.

— Si f admet en a une limite l, cette limite (en a) est unique. Même type de raisonnement que pour la limite d'une suite.

— Toute fonction f définie au moins sur un intervalle ouvert U contenant a et continue en a vérifie $\lim\limits_a f = f(a)$.

$l = \lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$: signifie pour l'élément l de $\mathbb{R}$, qu'il est limite à gauche de f en a. Cela signifie que $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, d(f(x), l) < \epsilon$ dès que x est assez proche de a par valeurs inférieures, c'est à dire dans un intervalle $]a-\eta, a[$ dont a est exclu. On exprime correctement cette notion par

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f, 0 < a - x < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

$l = \lim\limits_{a^+} f = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$: signifie pour l'élément l de $\mathbb{R}$, qu'il est limite à droite de f en a. Cela signifie que $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, d(f(x), l) < \epsilon$ dès que x est assez proche de a par valeurs supérieures, c'est à dire dans un intervalle $]a, a + \eta[$ dont a est exclu. On exprime correctement cette notion par

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f, 0 < x - a < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Remarques.

— Il n'est pas indispensable que f soit définie en a pour qu'elle y admette une limite à gauche ou une limite à droite. Pour : $x \mapsto \dfrac{|x|}{x}, D_f = \mathbb{R}^*, a = 0$ en est une borne et $0 \notin D_f$; mais facilement, $\lim\limits_{0^-} f = -1$ puisque pour $x < 0, f(x) = \dfrac{-x}{x} = -1$ et $\lim\limits_{0^+} f = +1$ puisque pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$

— Si f est définie en a et admet en a une limite à gauche et une limite à droite, il se peut que ces limites soient différentes de $f(a)$. Pour f : $\dfrac{|x|}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0, D_f = \mathbb{R}, \lim\limits_{0^-} = -1, \lim\limits_{0^+} f = +1$ et $f(0) = 0$.

— Si f est définie au moins sur un intervalle ouvert $]a - \alpha, a + \alpha[, l$ étant un réel, on a l'équivalence : $[\lim\limits_{a} f = l] \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{a^-} f = l \\ \lim\limits_{a^+} f = l \\ f(a) = l \end{cases}$

— Si f n'est , au voisinage de a définie que sur une réunion $]a - \alpha, a[\cup]a, a + \alpha[$ et pas en a, l étant un réel, on a l'équivalence : $[\lim\limits_{a} f = l] \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{a^-} f = l \\ \lim\limits_{a^+} f = l \end{cases}$.

Limite l de f en un infini.

— f étant une fonction définie au moins sur un intervalle de la forme $]\alpha, +\infty[, l$ étant un réel, $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ signifie que

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{D}_f, x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

— f étant une fonction définie au moins sur un intervalle de la forme $]\alpha, +\infty[$, l étant un réel, $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ signifie que

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f, x < -A \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Exemples. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0, \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$

2.2 Limites et opérations sur les fonctions

8 propriétés à connaître. f et g étant deux fonctions définies au moins sur un intervalle ouvert U contenant a ou ayant a pour borne, l, l' et λ étant des éléments de $\mathbb{R}$.

— $\lim\limits_{a} f = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{a} |f| = 0$

— $\lim\limits_{a} f = l \Leftrightarrow \lim\limits_{a} |f| = |l|$

— $\lim\limits_{a} f = l$ et $\lim\limits_{a} g = l' \Rightarrow \lim\limits_{a} f + g = l + l'$

— $\lim\limits_{a} f = l \Leftrightarrow \lim\limits_{a} \lambda f = \lambda l$ si $\lambda \neq 0$

— $\lim\limits_{a} f = 0$ et g est bornée sur $U \Rightarrow \lim\limits_{a} f \times g = 0$

— $\lim\limits_{a} f = l$ et $\lim\limits_{a} g = l' \Rightarrow \lim\limits_{a} f \times g = l \times l'$

— $\forall x \in U, g(x) \neq 0$ t $\lim\limits_{a} g = l'$ et $l' \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{a} \frac{1}{g} = \frac{1}{l'}$

— $\lim\limits_{a} f = l$ et $\forall x \in U, g(x) \neq 0$ et $\lim\limits_{a} g = l'$ et $l' \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{a} \frac{f}{g} = \frac{l}{l'}$

Remarque. Ces propriétés s'étendent au cas où a est un infini.

Le cas de la composée de deux applications. a et l étant des réels ou des infinis, si f définie au moins sur U, intervalle contenant a ou ayant a pour borne, admet en a une limite l, si g définie au moins sur V, intervalle contenant l ou ayant l pour borne et tel que $f(U) \subset V$, admet en l une limite L, alors $\lim\limits_{a} gof = \lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = L$.

2.3 Comparaison de deux fonctions au voisinage d'une réel a ou d'un infini

Les fonctions f ou g dont il est question ci-dessous sont des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ supposées définies au moins sur un même intervalle ouvert U contenant a ou ayant a pour borne, a est un réel ou un infini.

Fonctions f et g équivalentes au voisinage de a fonctions f et g pour lesquelles il existe une fonction β définie sur U, telle que $\forall x \in U, f(x) = g(x) \times \beta(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} \beta(x) = 1$.

Notation usuelle. $f \overset{a}{\sim} g$. On se permet également d'écrire $f(x) \overset{a}{\sim} g(x)$.

Exemples. $ln(1+x) \overset{0}{\sim} x$ car $ln(1+x) = x \times \beta(x)$ où $\beta(x) = \dfrac{ln(1+x)}{x}$ a pour limite 1 quand $x \to 0$.

Remarque. $\sim$ est une relation d'équivalence (R-S-T) dans l'ensemble des applications de U dans $\mathbb{R}$.

Équivalences usuelles.

— Lorsque $a_p \neq 0$ notant $P(x) = a_p X^p + a_{p-1} X^{p-1} + ... + a_1 x + a_0$, $P(x) \overset{+\infty}{\sim} a_p X^p$ et si la valuation de P est v alors $P(x) \overset{0}{\sim} a_v X^v$

— Lorsque $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$ notant $R(x) = \dfrac{a_p X^p + a_{p-1} X^{p-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_q X^q + b_{q-1} X^{q-1} + ... + b_1 x + b_0}$, $R(x) \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{a_p X^p}{b_q X^q}$ et si les valuations respectives des numérateurs et dénominateur sont v et w, $R(x) \overset{0}{\sim} \dfrac{a_v X^b}{b_w X^w}$.

— Lorsque $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0, sin(u(x)), tan(u(x)), ln(1 + u(x)), e^{u(x)} - 1$ sont équivalents à $u(x)$.

Équivalence et existence de limite. Pour toute fonction f définie sur U et tout élément l de $\mathbb{R}$.

— Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et si $l \neq 0$, alors $f(x) \overset{a}{\sim} l$ (fonction constante de valeur l).

— Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et si $l = 0$, il est faux que $f(x) \overset{a}{\sim} l$ sauf si f est localement nulle au près de a.

— Si f est telle que $f(x) \overset{a}{\sim} l$, alors $\lim\limits_{x \to a} = l$.

Intérêt de cette notion. Deux fonctions équivalentes au voisinage de a ont même comportement asymptotique en a et si l'une a une limite l en a, l'autre aussi et elle a la même limite l.

Fonction f dominée par une fonction g au voisinage de a. Fonction f et g pour lesquelles il existe une fonction γ définie sur U, telle que $\forall x \in U, f(x) = g(x) \times \gamma(x)$ et γ soit bornée sur U.

Notation usuelle. $f \overset{a}{=} O(g)$. On se permet également d'écrire $f(x) \overset{a}{=} O(g(x))$.

Exemple. $x.sin(x) \overset{0}{=} O(x)$ puisque $x.sin(x) = x \times \gamma(x)$ où $\gamma(x) = sin(x)$ vérifie $|sin(x)| \leq 1$ sur $]-2, 2[$.

Remarque. La relation de domination est transitive.

Intérêt de cette notion. Si une fonction f est dominée au voisinage de a, par une fonction g qui a une limite 0 en a, alors f admet également 0 pour limite en a.

Fonction f négligeable devant une fonction g au voisinage de a. Fonctions f et g pour lesquelles il existe une fonction ϵ définie sur U, telle que $\forall x \in U, f(x) = g(x) \times \epsilon(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} \epsilon(x) = 0$.

Notation usuelle. $f \overset{a}{=} o(g)$. On se permet également d'écrire $f(x) \overset{a}{=} o(g(x))$.

Exemple. $e^{-x} \overset{+\infty}{=} o(\frac{1}{x^2})$ puisque $e^{-x} = \frac{1}{x^2} \times \epsilon(x)$ où $\epsilon(x) = x^2 \times e^{-x}$ a pour limite 0 en $+\infty$.

Remarque. Malgré le mot négligeable, $f(x) = o(g(x))$ ne sous entend pas que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$. Par exemple $x^2 \overset{+\infty}{=} o(x^3)$ puisque $x^2 = x^2 \times x^{-1}$ où $\lim\limits_{x \to +\infty} = 0$. Pourtant $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.

Négligeabilités usuelles.
- Si $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p < q$ alors $x^p \overset{+\infty}{=} o(x^q)$ et $\frac{1}{x^q} \overset{+\infty}{=} o(\frac{1}{x^p})$ mais $x^q \overset{0}{=} o(x^p)$ et $\frac{1}{x^p} \overset{0}{=} o(\frac{1}{x^q})$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall a \in]1, +\infty[, ln(x) \overset{+\infty}{=} o(x^a)$ et $x^\alpha \overset{+\infty}{=} o(a^x)$.

Remarque. La relation de négligeabilité est transitive.

Intérêt de cette notion. Si une fonction f est négligeable au voisinage de a devant une fonction g bornée sur U, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Quelques propriétés pratiques. f, g et h étant trois fonctions définies sur U.
- Si $f \overset{a}{\sim} f'$ et $g \overset{a}{\sim} g'$ alors $f \times g \overset{a}{\sim} f' \times g'$ et si de plus $\forall x \in U, g(x) \times g'(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{g} \overset{a}{\sim} \frac{1}{g'}$ et $\frac{f}{g} \overset{a}{\sim} \frac{f'}{g'}$.
- Si $f \overset{a}{\sim} f'$ et $g \overset{a}{=} o(f)$ lors $f \pm g \overset{a}{\sim} f'$.
- Si $f \overset{a}{=} o(h)$ et $g \overset{a}{=} o(h)$ alors $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g \overset{a}{=} o(h)$.

2.4 Propriétés des limites liées à l'ordre $\leq$.

Limite $+\infty$ de f en un réel a. f étant une fonction définie au moins sur un intervalle U contenant a ou admettant a pour borne, $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ signifie que

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f, x \in]a - \eta, a + \eta[\Rightarrow f(x) > A$$

Limite $-\infty$ de f en un réel a. f étant une fonction définie au moins sur un intervalle U contenant a ou admettant a pour borne, $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ signifie que

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f, x \in]a-\eta, a+\eta[\Rightarrow f(x) < -A$$

Limite $+\infty$ de f en $+\infty$. f étant une fonction définie au moins sur un intervalle de la forme $]\alpha, +\infty[$, $\lim\limits_{+\infty} = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists B \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f, x > B \Rightarrow f(x) > A$$

Tableaux panoramiques relatifs aux limites de sommes, produits et inverse. a est un réel ou un infini, l et m sont deux réels. f et g sont deux fonctions à valeurs réelles définies au moins sur un intervalle U contenant a ou ayant a pour borne. Les limites envisagées sont supposées exister en a.

Somme $f+g$			
$\lim g$ \ $\lim f$	$-\infty$	l	$+\infty$
$+\infty$	Indet	$+\infty$	$+\infty$
m	$-\infty$	$l+m$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Indet

Produit $f \times g$				
$\lim g$ \ $\lim f$	$-\infty$	0	$l \neq 0$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Indet	$s(l)\infty$	$+\infty$
$m \neq 0$	$s(-m)\infty$	0	$l \times m$	$s(m)\infty$
0	Indet	0	0	Indet
$-\infty$	$+\infty$	Indet	$s(-l)\infty$	$-\infty$

Produit λf			
$\lim f$	$-\infty$	l	$+\infty$
$\lim \lambda f$	$s(-\lambda)\infty$	λl	$s(\lambda)\infty$

Inverse $1/g$						
$\lim g$	$-\infty$	0^-	0	0^+	$m \neq 0$	$+\infty$
$\lim 1/g$	0^-	$-\infty$	.	$+\infty$	$1/m$	0

Théorèmes de comparaison. a est un réel ou un infini, l est un réel. f, g, h sont trois fonctions à valeurs réelles définies au moins sur un intervalle U contenant a ou ayant a pour borne.

— S'il existe un réel α tel que $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap U, f(x) \leq g(x)$ alors $\lim\limits_{a} f = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{a} g = +\infty$ et $\lim\limits_{a} g = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{a} f = -\infty$.

— S'il existe un réel α tel que $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap U, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ alors $\lim\limits_{a} f = l$ et $\lim\limits_{a} h = l \Rightarrow \lim\limits_{a} g = l$.

Passage aux limites dans les relations de comparaison. a est un réel ou un infini ; $f$et g sont deux fonctions à valeurs réelles définies au moins sur un intervalle U contenant a ou ayant a pour borne et admettant chacune une limite en a.

— Il existe un réel α tel que $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap U, f(x) \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_a f \geq 0$
  Il existe un réel α tel que $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap U, f(x) > 0 \Rightarrow \lim\limits_a f \geq 0$
  Il existe un réel α tel que $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap U, f(x) \leq 0 \Rightarrow \lim\limits_a f \leq 0$
  Il existe un réel α tel que $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap U, f(x) < 0 \Rightarrow \lim\limits_a f \leq 0$.

— Il existe un réel α tel que $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap U, f(x) \geq g(x) \Rightarrow \lim\limits_a f \geq \lim\limits_a g$
  Il existe un réel α tel que $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap U, f(x) > g(x) \Rightarrow \lim\limits_a f \geq \lim\limits_a g$
  Il existe un réel α tel que $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap U, f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim\limits_a f \leq \lim\limits_a g$
  Il existe un réel α tel que $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap U, f(x) < g(x) \Rightarrow \lim\limits_a f \leq \lim\limits_a g$

Existence de limites pour des fonctions monotones. f est une fonction à valeurs réelles, définie et monotone sur un intervalle $]a, b[$ (a et b réels ou infinis).

— Si f est croissante et majorée sur $]a, b[$, alors si $b \in \mathbb{R}$, f admet une limite à gauche en b si b et $+\infty$, f admet une limite en $+\infty$.

— Si f est croissante et minorée sur $]a, b[$, alors si $a \in \mathbb{R}$, f admet une limite à droite en a si a est $-\infty$, f admet une limite en $-\infty$.

— Si f est décroissante et minorée sur $]a, b[$, alors si $b \in \mathbb{R}$, f admet une limite à gauche en b si b est $+\infty$, f admet une limite en $+\infty$.

— si f est décroissante et majorée sur $]a, b[$, alors si a est $-\infty$, f admet une limite en $-\infty$.

3 Continuité

3.1 Continuité d'une fonction en un point a ou sur un intervalle U.

Fonction f continue en un réel a de son ensemble de définition. Fonction f définie au moins sur un intervalle de la forme $]a-\alpha, a+\alpha[$ et admettant une limite en a. Notons que puisque $a \in D_f$ nécessairement $\lim\limits_a f = f(a)$.

Fonction f continue à gauche en un réel a de son ensemble de définition. Fonction f définie au moins sur un intervalle de la forme $]a-\alpha, a]$ et admettant en a, une limite à gauche obligatoirement égale à $f(a)$.
Notons que la condition $\lim\limits_{a^-} f = f(a)$ ne résulte ni de l'existence de $\lim\limits_{a^-} f$ ni du fait que $a \in D_f$ et qu'il est indispensable de la vérifier.

Fonction f continue à droite en un réel a de son ensemble de définition. Fonction f définie au moins sur un intervalle de la forme $[a, a+\alpha[$ et admettant en a une limite à droite obligatoirement égale à $f(a)$.
Notons que la condition $\lim\limits_{a^+} f = f(a)$ ne résulte ni de l'existence de $\lim\limits_{a^+} f$ ni du fait que $a \in D_f$ et qu'il est indispensable de la vérifier.

Équivalences fondamentales. Pour toute f définie au moins sur un intervalle de la forme $]a-\alpha, a+\alpha[(\alpha > 0)$, on a équivalence entre :

— f est continue en a.

— f est continue à gauche et à droite en a.

— $\lim\limits_{a^-} f$ et $\lim\limits_{a^+} f$ existent et sont toutes deux égales à $f(a)$.

Fonction f "continue sur un intervalle U". Fonction f définie sur U et qui est à la fois continue en tout réel a de l'intervalle ouvert formé de U privé de ses bornes et continue en toute borne de U qui appartient à U (si c'est le cas), du coté de l'intérieur de U.

Remarque. Graphiquement, la continuité sur U c'est pour la portion de représentation graphique de la fonction formée de ses points d'abscisses éléments de U, l'apparence d'un tracé continu.

Une caractérisation topologique de la continuité sur $\mathbb{R}$. Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, on a équivalence entre :

— f est continue sur $\mathbb{R}$.

— Pour tout ouvert U de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Prolongement par continuité d'une application. E est une partie de $\mathbb{R}$ constituée d'une réunion d'intervalles. f est une application de E dans $\mathbb{R}$ continue sur tout intervalle inclus dans E, a est un réel n'appartenant pas à E et borne d'un des intervalles constituant E.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, l étant un réel, on dit que f est "prolongeable par continuité à $E\cup\{a\}$". Le prolongement par continuité de f étant l'application $\tilde{f} : \begin{cases} E\cup\{0\} \to \mathbb{R} \\ x \to \begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \text{ si } x \in E \\ \tilde{f}(a) = l \end{cases} \end{cases}$.

3.2 Continuité et suites numériques

Image d'une suite convergente par une fonction continue en sa limite l. Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite convergente de limite l. Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle U contenant tous les u_n et l. Si f est continue en l alors la suite $(v_n)_{n\in I}$ de terme général $v_n = f(u_n)$ converge vers $f(l)$.

Les cas des fonctions Lipschitziennes.

— Toute fonction f définie et lipschitzienne sur un intervalle U est continue sur U.

— Toute fonction f définie et contractante sur un intervalle fermé $[a, b]$ qu'elle stabilise, admet dans $[a, b]$ un point fixe unique (réel x_0 tel que $f(x_0) = x_0$). Ce réel x_0 est limite de toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = \text{ un réel quelconque de } [a,b] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

3.3 Les théorèmes des valeurs intermédiaires et de la bijection

Théorème III.1. (TVI) Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Pour tout réel γ intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$, $\exists c \in [a, b]$ tel que $\gamma = f(c)$.

Image d'un intervalle par une fonction continue.

— Pour toute fonction f continue sur un intervalle U, $f(U)$ est un intervalle.

— Soit U un intervalle de bornes a et b et f une fonction continue sur $U \cup \{a, b\}$. Alors l'intervalle $f(U)$ est également borné.

  Si f est monotone sur $U \cup \{a, b\}$ alors les bornes de $f(U)$ sont $f(a)$ et $f(b)$; sinon elles ne sont pas nécessairement $f(a)$ et $f(b)$.

— Pour tout intervalle U et toute fonction f continue sur U, il n'est pas obligatoire que l'intervalle $f(U)$ soit de même nature (ouvert ou fermé) que U toutefois deux cas particuliers sont à connaître

  — si U est un intervalle fermé, alors $f(U)$ est un intervalle fermé.

  — si U est un intervalle ouvert et si f est strictement monotone sur U alors $f(U)$ est un intervalle ouvert.

Théorème III.2. (de la Bijection.) Soit U un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton, notons a et b ses bornes dans l'ordre croissant. Toute application f définie, continue et strictement monotone sur U définit une bijection $g : x \mapsto f(x)$, de U sur $f(U)$, intervalle dont les bornes sont $\lim\limits_{a^+} f$ et $\lim\limits_{b^-} f$.

Sens de variation et continuité de la bijection réciproque g^{-1}. Sous les hypothèses du théorème de la bijection, g^{-1} est continue sur $f(U)$, à valeurs dans U et strictement monotone de même sens que g, c'est à dire que f sur U.

3.4 Fonctions obtenues par opérations sur des fonctions continues

Quelques théorèmes généraux relatifs aux opérations sur les fonctions continues.

Propriété 1. f et g sont deux fonctions simultanément continues sur un même intervalle U.

— $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda f + \mu g$ est continue sur U (donc en particulier $f + g, f - g, -f, ...$).

— $f \times g$ est continue sur U et $\forall n \in \mathbb{N}, f^n = f \times f \times f \times ... \times f$ est continue sur U.

— Si $0 \notin g(U)$ alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur U et $\forall n \in \mathbb{Z}$, g^n est continue sur U.

Propriété 2.

— Si f est continue sur un intervalle U, si g est continue sur un intervalle V contenant $f(U)$ alors gof est continue sur U.

— Si f est continue sur un intervalle U tel que $f(U) \subset U$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, f^n = fofofo...of$ est continue sur U.

4 Dérivabilité

Toutes les fonctions considérés ici sont des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

4.1 La dérivabilité en un point.

Fonction f dérivable en x_0 élément de D_f. Fonction f définie au moins sur un intervalle U contenant x_0, et vérifiant pour tout réel h tel que $x_0+h \in U$, l'existence dans $\mathbb{R}$ de la limite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a_{x_0} = f'(x_0)$ (limite notée a_{x_0} et appelée nombre dérivé de f en x_0).

Exemple. $f : x \to x^2$ en un quelconque x_0 réel. $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \dfrac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \dfrac{2x_0h+h^2}{h} = 2x_0 + h$ a pour limite $2x_0$ quand $h \to 0$. Donc f est dérivable en tout x_0 réel de nombre dérivé $a_{x_0} = 2x_0$.

Fonction f dérivable à gauche en x_0 élément de D_f. Fonction f définie au moins sur un intervalle $U =]x_0-\alpha, x_0]$ et vérifiant pour tout réel h tel que $x_0 - \alpha < x_0 + h \leq x_0$ l'existence dans $\mathbb{R}$ de la limite

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Fonction f dérivable à droite en x_0 élément de D_f. Fonction f définie au moins sur un intervalle $U = [x_0, x_0+\alpha[$ et vérifiant pour tout réel h tel que $x_0 \leq x_0 + h < x_0 + \alpha$, l'existence dans $\mathbb{R}$ de la limite

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Équivalence fondamentale. Pour toute fonction f définie u moins sur un intervalle $U =]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ on a l'équivalence : f est dérivable en x_0 de nombre dérivé $a_{x_0} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche en } x_0 \\ f \text{ est dérivable à droite en } x_0 \\ f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = f'(x_0) \end{cases}$.

La non dérivabilité en x_0. pour f définie au moins sur un intervalle $U =]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ résulte donc

- Soit de inexistence de l'une des limites unilatérales du taux de variation en x_0.
- Soit du fait que l'une des limites unilatérales du taux de variation en x_0 est un infini.
- Soit du fait que bien qu'existants les nombres dérivés de f à gauche et à droite sont distincts

Équation de la tangente à C_f au point $M_0(x_0, f(x_0))$. Lorsque f es dérivable en x_0 de nombre dérivé a_{x_0}, l'équation de la tangente à sa courbe représentative C_f au point $M_0(x_0, f(x_0))$ est

$$y = a_{x_0}.x - a_{x_0}.x_0 + f(x_0)$$

Équations des demi tangentes. Lorsque la dérivabilité du côté considéré est avérée, la demi tangente correspondante a pour équation $y = a_{x_0g}.x - a_{x_0g}.x_0 + f(x_0)$ ou $y = a_{x_0d}.x - a_{x_0d}x_0 + f(x_0)$ selon le cas.

Lien avec la continuité. f est dérivable en x_0 (respectivement à gauche ou à droite) ce qui implique f est continue en x_0 (respectivement à gauche ou à droite).

Démonstration. Supposant f dérivable en x_0, notant $\epsilon(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - a_{x_0}$, $\lim\limits_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$ et comme $f(x_0+h) = f(x_0) + h.a_{x_0} + h.\epsilon(h)$, $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$, preuve de la continuité de f en x_0. □

La différentiabilité en x_0. Une fonction f définie sur un intervalle $U =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[(\alpha > 0)$ est dite différentiable en x_0 lorsqu'il existe une fonction linéaire $df_{x_0} : h \to a.h$ et une fonction ϵ définie sur U telle que $\lim\limits_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$, vérifiant : $\forall h \in]-\alpha, \alpha[$, la différence $\Delta f_{x_0}(h) = f(x_0+h) - f(x_0) = a.h + h.\epsilon(h) = df_{x_0}(h) + h.\epsilon(h)$. Autrement dit, la fonction-différence Δf_{x_0} est approchée par la fonction linéaire plus simple df_{x_0}. df_{x_0} est appelée différentielle de f en x_0.

Exemple. $f : x \to x^2$ en un quelconque x_0 réel.
$\Delta f_{x_0}(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) = (x_0 + h)^2 - x_0^2 = 2x_0 h + h^2 = a.h + h.\epsilon(h)$ où $a = 2x_0$ et $\epsilon(h) = h$. Donc en x_0 réel, $df_{x_0} : h \to 2x_0 h$ où l'on peut remarque que $2x_0$ est le nombre dérivé de f en x_0.

Équivalence "dérivabilité" et "différentiabilité" en un x_0. Pour toute fonction f définie au moins sur un intervalle $U =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[(\alpha > 0)$ on a l'équivalence : f est dérivable en x_0 de nombre dérivé $a_{x_0} \Leftrightarrow f$ est différentiable en x_0 de différentielle $df_{x_0} : h \to a_{x_0}.h$.

4.2 La dérivabilité sur un intervalle

Fonction dérivable sur un intervalle U. Fonction f définie sur U qui est

— dérivable en tout réel x de U autre qu'une borne de U

— dérivable du côté de l'intérieur de U en toute borne de U qui appartient à U.

Exemples et contre exemples. $x \to x^2$ est dérivable sur tout intervalle de $\mathbb{R}$, $x \to \sqrt{x}$ est dérivable sur tout intervalle de $\mathbb{R}_+^*$. $x \to \sqrt{x}$ n'est pas dérivable sur $[0, +\infty[$. $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = +\infty$ demi-tangente verticale.

Fonction dérivée de f. Si f est dérivable sur un intervalle U, sa dérivée est la fonction f' définie sur U par :$\forall x \in U, f'(x) = a_x =$ nombre dérivé de f en x. L'équation de la tangente à C_f au point $M(x_0, f(x_0))$ s'écrit alors : $y = f'(x_0).x - f'(x_0).x_0 + f(x_0)$.
L'expression de la différentiabilité en x_0 s'écrit alors $\Delta f_{x_0}(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0).h + h.\epsilon(h) = df_{x_0}(h) + h.\epsilon(h)$ où $df_{x_0} : h \to f'(x_0).h$.
On appelle développement limité d'ordre 1 en x_0 l'égalité $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0).h + h.\epsilon(h)$. Dans laquelle on peut remarquer que $h.\epsilon(h) = o(h)$ puisque $\lim\limits_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$.

Nombre dérivé à gauche ou à droite, nouvelle notation. On note $f'_g(x)$ et $f'_d(x)$ les nombres dérivées à droite et à gauche.

Recherche des extremas locaux de f sur un intervalle $]a, b[$. Si f est dérivable sur un intervalle $]a, b[$, alors les éventuels extrema locaux de f sur $]a, b[$ sont atteints en des réels de $]a, b[$, solutions de l'équation $f'(x) = 0$.

Exemple. Recherche des extrema locaux de $f : x^4 - 2x^2$ sur $] - 1/2, 2[$. $f'(x) = 4x^3 - 4x, f'(x) = 0$ a pour solution dans $\mathbb{R}$ les réels $-1, 0$ et 1. Seuls parmi eux, 0 et 1 sont éléments de $] - 1/2, 2[$ c'est donc en ces deux seuls réels qu'il est utile d'examiner le problème et le variations de f atour de ces réels nous donnent la réponse.

Théorème III.3. (de Rolle.) f est une fonction définie au moins sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$ alors $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$.

Théorème III.4. (des accroissements finis.) f est définie au moins sur $[a, b]$. Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors, $\exists c \in]a, b[, f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (on peut remarquer que c'est le théorème de Rolle étendu).

Égalité et inégalité des accroissements finis. f est définie au moins sur un intervalle $[a, b]$. Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$

- $\exists c \in]a, b[, f(b) - f(a) = f'(c).(b - a)$ égalité des accroissements finis (c'est le TAF)
- si de plus $\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq M$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M.|b - a|$ inégalité des accroissement finis et $\forall (x, x') \in]a, b[^2, |f(x') - f(x)| \leq M.|x' - x|$ f est $M-$*lipschitzienne* sur $]a, b[$.

Le sens de variation déduit du signe de la dérivée. f est définie au moins sur un intervalle $[a, b]$. Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors

- si $\forall c \in]a, b[, f'(c) \geq 0, f$ est croissante sur $[a, b]$
- si $\forall c \in]a, b[, f'(c) \leq 0, f$ est décroissante sur $[a, b]$
- si $\forall c \in]a, b[, f'(c) = 0, f$ est constante sur $[a, b]$

Le théorème de dérivabilité aux bornes (dit parfois du prolongement dérivable). α désigne un réel positif.

- Soit f une fonction dérivable sur $]x_0 - \alpha, x_0[$ continue sur $]x_0 - \alpha, x_0]$ et telle que $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) = l$ alors f est dérivable à gauche en x_0 et $f'_g(x_0) = l$.
- Soit f une fonction dérivable sur $]x_0, x_0 + \alpha[$, continue sur $[x_0, x_0 + \alpha[$ et telle que $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x) = l$ alors f est dérivable à droite en x_0 et $f'_d(x_0) = l$.
- E est une partie de $\mathbb{R}$ constituée d'une réunion d'intervalles. f est une application de E dans $\mathbb{R}$ dérivable (donc continue) sur tout intervalle inclus dans E, a est un réel n'appartenant pas à E et borne d'un des intervalles constituant E. Si f est prolongeable par continuité à $E \cup \{a\}$, dérivable sur le (ou les) intervalles ouverts inclus dans E, dont a est borne et telle que $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = l$, l étant un réel, alors le prolongement continu $\tilde{f}$ de f à $E \cup \{a\}$ est dérivable en a et $\tilde{f}'(a) = l$.

4.3 Fonctions obtenues par opérations sur des fonctions dérivables

Théorèmes généraux relatifs aux opérations sur les fonctions dérivables.

Propriété 1. f et g sont deux fonctions simultanément dérivables sur un même intervalle U.

- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda f + \mu g$ est dérivable sur U et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.
- $f \times g$ est dérivable sur U, $(f \times g) = f' \times g + f \times g'$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f^n = f \times f \times f \times ... \times f$ est dérivable sur U de dérivée $(f^n)' = n.f^{n-1}.f'$.
- Si $0 \notin g(U)$ alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables sur U, $(\dfrac{1}{g})' = -\dfrac{g'}{g^2}, (\dfrac{f}{g})' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}, g^n = g \times g \times ... \times g$ est dérivable sur U de dérivée $(g^n)' = n.g^{n-1}.g'$

Propriété 2.

— Si f est une fonction dérivable sur un intervalle U, si g est une fonction dérivable sur un intervalle V contenant $f(U)$, alors gof est dérivable sur U et $(gof)' = g'of \times f'$.

— Si f est une fonction dérivable sur un intervalle U tel que $f(U) \subset U$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = fofofo...of$ est dérivable sur U et $(f^n)' = \prod_{k=0}^{n-1} f'of^k$

— Pour toute bijection $f : U \to f(U)$ (U intervalle de $\mathbb{R}$), dérivable sur U, telle que $\forall x \in U, f'(x) \neq 0$, f^{-1} est dérivable sur $f(U)$ et $\forall x \in f(U)$, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

4.4 Dérivations successives.

Dérivée n-ième d'une fonction sur un intervalle U. f est une fonction supposée définie sur un intervalle U de $\mathbb{R}$. $f^{(0)} = f$ par convention. Si f est dérivable sur U, sa dérivée f' peut se noter $f^{(1)}$ ... si pour un entier naturel $n \geq 1$, f est dérivable sur U jusqu'à l'ordre $n-1$, et si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur U on note $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ la dérivée d'ordre n de f sur U.

Exemple. Pour $f : x \to x^{12}$, ses dérivées successives sur $U = \mathbb{R}$ sont , au delà de $f^{(0)} = f$, définies par les expressions $f^{(1)}(x) = 12.x^{11}$ ... $f^{(n)}(x) = \dfrac{12!}{(12-n)!}x^{12-n}$ si $n \in [0, 12]$ et $f^{(n)}(x) = 0$ si $n \geq 13$.

Dérivées d'ordre n de fonctions obtenues par opérations sur des fonctions dérivables. f et g sont des fonctions supposées m fois dérivables sur un intervalle U.

— $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda f + \mu g$ est m fois dérivable sur U et $\forall n \in [0, m], (\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.

— $f \times g$ est m fois dérivable sur U et $\forall n \in [0, m], (f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$ c'est la formule de Leibniz.

Exemples.

— $\phi : x \to 2.sin(3x) - 3.cos(2x)$, on cherche $\phi^{(9)}(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = 2.f(x) - 3g(x)$ où $f(x) = sin(3x)$ et $g(x) = cos(2x)$. Chaque dérivation de f provoque l'apparition d'un facteur 3. toutes les 4 dérivations de sin, on réobtient sin. On a 9 dérivations successives donc à la huitième, on réobtient sin et à la neuvième on obtient cos.

Chaque dérivation de g provoque l'apparition d'un facteur 2. toutes les 4 dérivations de cos on réobtient cos. On a 9 dérivations successives donc à la huitième, on réobtient cos et à la neuvième $-sin$.

Ainsi $\phi^{(9)}(x) = 2.f^{(9)}(x) - 3g^{(9)}(x) = 2.3^9.cos(3x) + 3.2^9 sin(2x)$.

— $\phi : x \to x^3 e^{ax}$ où $a \neq 0$. Calculons $\phi^{(3)}(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = f(x) \times g(x)$ où $f(x) = x^3$ de dérivées successives $3x^2, 6x, 6$ puis 0 à partir de l'ordre 4 et où $g(x) = e^{ax}$ de dérivées successives $a.e^{ax}, a^2.e^{ax}, ...a^n e^{ax}$. Appliquons la formulation de Leibniz pour $n = 3$:

$(\phi)^{(3)}(x) = (f \times g)^{(3)}(x) = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} f^{(k)} \times g^{(3-k)}$

$= \binom{3}{0} f^{(0)}(x) \times g^{(3)}(x) + \binom{3}{1} f^{(1)}(x) \times g^{(2)}(x) + \binom{3}{2} f^{(2)}(x) \times g^{(1)}(x) + \binom{3}{3} f^{(3)}(x) \times g^{(0)}(x)$

$= 1.f(x) \times g^{(3)}(x) + 3.f'(x) \times g''(x) + 3.f''(x) \times g'(x) + 1.f^{(3)}(x) \times g(x)$

$1.x^3 \times a^3.e^{ax} + 3.3.x^2 \times a^2.a^{ax} + 3.6x \times a.e^{ax} + 1.6 \times e^{ax}$

$= (a^3.x^3 + 9a^2x^2 + 18ax + 6) \times e^{ax}$

Classe $C^k(U)$ où U est un intervalle de $\mathbb{R}$. C'est l'ensemble des fonctions définies sur U, à valeurs réelles qui sont k fois dérivables sur U et telles que leur dérivée d'ordre k, $f^{(k)}$ soit continue sur U.

Parce que dérivables sur U, toutes les dérivées de f d'ordre inférieurs à k sont continues sur U.

Classe $C^\infty(U)$ où U est un intervalle de $\mathbb{R}$. C'est l'ensemble des fonctions définies sur U, à valeurs réelles qui sont dérivables sur U, à valeurs réelles qui sont dérivables sur U à tout ordre.

5 Développements limités

Toutes les fonctions considérées ici sont des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

5.1 Exemples et condition nécessaire

Exemple 1. $\forall x \in]-1,1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - x^{n+1} = 1^{n+1} - x^{n+1} = (1-x)\sum\limits_{k=0}^{n} x^k$ par l'identité remarquable bien connue donc après division par $1 - x1$, $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x^{n+1}}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.

Ainsi $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + x^n.\dfrac{x}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + x^n.\epsilon(x)$ en notant $\epsilon(x) = \dfrac{x}{1-x}$ dont la limite en 0 est 0.

Notant f la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, on a donc $\forall x \in]-1,1[, f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$.

Au voisinage de 0 (le voisinage étant ici $]-1,1[$), on a $f(x) =$ polynôme de degré $\leq n + o(x^n)$. Ici, le $o(x^n)$ est exactement $x^n\epsilon(x) = x^n.\dfrac{x}{1-x}$.

Exemple 2. Considérons la même fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ mais cette fois au voisinage de 3 par exemple sur l'intervalle $]2,4[$.

$\forall x \in]2,4[, x = 3 + (x-3) = 3 + h$ en notant $h = x - 3$. On observe que $h \in]2-3, 4-3[=]-1,1[$, $f(x) = f(3+h) = \dfrac{1}{1-(3+h)} = \dfrac{1}{-2-h} = \dfrac{-1}{2}\dfrac{1}{1+h/2} = \dfrac{-1}{2}\dfrac{1}{1}1 - (-h/2)$ où $-h/2 \in]-1/2, 1/2[\subset]-1,1[$.

On peut donc réutiliser le développement de l'exemple précédent en remplaçant x par $-h/2$: $f(x) = f(3+h) = \dfrac{-1}{2}\dfrac{1}{1-(-h/2)} = \dfrac{1}{2}[\sum\limits_{k=0}^{n}(-h/2)^k + o((-h/2)^n)] = \dfrac{-1}{2}[\sum k = 0^n \dfrac{(-1)^k h^k}{2^k} + (-h/2)^n.\dfrac{-h/2}{1-(-h/2)}$
$= \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}h^k}{2^{k+1}} + h^n\dfrac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}}.\dfrac{h}{2+h} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}h^k}{2^{k+1}} + o(h^n)$ car $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}\dfrac{h}{2+h} = 0$

Remplaçant h par $x-3$, on a alors $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}}(x-3)^k + o((x-3)^n)$

Ainsi au voisinage de 3, on a $f(x) =$ polynôme en $(x-3)$, de degré $\leq n + o((x-3)^n)$

On vient d'écrire le développement limité d'ordre n de f au voisinage de 3 et dans l'exemple 1 on avait écrit le développement limité d'ordre n de f au voisinage de 0.

Fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage d'un réel x_0. (où $n \in \mathbb{N}$)

Fonction f définie au moins sur un intervalles U de l'une des formes $]x_0 - \epsilon, x_0[$ ou $]x_0, x_0 + \epsilon[$ $(\epsilon > 0)$ (elle peut l'être sur $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ ou même uniquement sur $]x_0 - \epsilon, x_0[\cup]x_0, x_0 + \epsilon[$) telle qu'il existe une fonction polynôme $P_n : x \to \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ de degré $\leq n$ et une fonction $\epsilon : x \to \epsilon(x)$ de limite 0 en 0 permettant d'exprimer

$\forall x \in U, f(x) = P_n(x-x_0) + (x-x_0)^n.\epsilon(x-x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$ =polynôme en $(x-x_0)$ de degré $\leq n + o((x-x_0)^n)$.

Cette décomposition est appelée développement limité d'ordre n de f au voisinage de x_0 en abrégé $DL_n(x_0)$ de f.

L'expression polynomiale $P_n((x-x_0)) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$ est la partie régulière du $DL_n(x_0)$. L'expression $o((x-x_0)^n) = (x-x_0)^n\epsilon(x)$ est le reste d'ordre n du $DL_n(x_0)$.

A la différence des exemples simples qu'on vient d'analyser, obtenir explicitement $\epsilon(x)$ en fonction de x ne sera pas toujours possible.

Il faudra disposer d'hypothèses supplémentaires pour y parvenir (voir au semestre suivant le reste intégral ou le reste de Lagrange).

L'ambiguïté résultant de l'écriture de $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_kx^k + ... + a_nx^n$ sous la forme $\sum\limits_{k=0}^{n} a_kx^k$. La première expression de $P(x)$ donne $P(0) = a_0$, la seconde donne littéralement $P(0) = a_0 0^0$. Mais l'écriture 0^0 n'a aucune signification.

Conscient de l'ambiguïté, on considère par convention que malgré l'écriture $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_kx^k, , P(0) = a_0$.

Intérêt de l'existence d'un développement limité. Pour x voisin de x_0, $f(x)$ est approché par une expression polynomiale (donc simple) de degré $\leq n$. Le degré n'est pas obligatoirement n car le coefficient a_n peut être nul.

Remarque. Toute fonction polynôme offre son développement limité en 0 sur $\mathbb{R}$, à tout ordre. En effet notant $f : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{d} a_kx^k$ où d est sont degré parce que $a_d \neq 0$.

— si $n \leq d-1, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_kx^k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_kx^k + \sum\limits_{k=n+1}^{d} a_kx^k = \sum k = 0^n a_kx^k + x^n \sum\limits_{k=n+1}^{d} a_kx^{k-n}$
$= \sum\limits_{k=0}^{n} a_kx^k + o(x^n)$ car $\epsilon(x) = 0$ a évidemment pour limite 0 en 0.

— si $n = d, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_kx^k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_kx^k + x_n.0$ où $\epsilon(x) = 0$ a évidemment pour limite 0 en 0.

— si $n > d, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_kx^k = \sum k = 0^n a_kx^k + x^n.0$ où $\epsilon(x) = 0$ a évidemment pour limite 0 en 0 ceci en définissant $a_{d+1} = \alpha_{d+2} = ... = \alpha_n = 0$.

Par exemple $f : x \mapsto 5x^3 - 7x^2 + 6x - 2$ a pour $DL_2(0), f(x) = -2 + 6x - 7x^2 + o(x^2)$ où $o(x^2) = 5x^3$.

Elle a pour $DL_3(0), f(x) = -2 + 6x - 7x^2 + 5x^3 + o(x^3)$ où $o(x^3) = 0$.

Elle a pour $DL_4(0), f(x) = -2 + 6x - 7x^2 + 5x^3 + 0x^4 + o(x^4)$ où $o(x^4) = 0$.

Conditions nécessaires pour qu'une fonction f définie en x_0 admette un $DL_n(x_0)$. Si une fonction f admet un $DL_n(x_0)$, elle est rappelons le définie au moins sur un intervalle de la forme $U =]x_0 - \epsilon, x_0[$ ou $U =]x_0, x_0 + \epsilon[$ $(\epsilon > 0)$ et $\forall x \in U, f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$

— $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a_0$.

— Si de plus f admet ce développement limité sur au moins un intervalle de l'une des deux formes $V =]x_0 - \epsilon, x_0]$ ou $V = [x_0, x_0 + \epsilon[$ $(\epsilon > 0)$, alors $f(x_0) = a_0$ et f est dérivable en x_0 et vérifie $f'(x_0) = a_1$.

— Sans connaître explicitement le $o((x-x_0)^n)$, on ne peut rien dire pour des ordres de dérivation ≥ 2.

Démonstration.

— $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$
$= \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x_0-x_0)^k + o((x_0-x_0)^n) = a_0 + o(0) = a_0 + 0 \times \epsilon(0) = a_0$.

— On a directement $f(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x_0-x_0)^k + o((x_0-x_0)^n) = a_0$
Pour h assez proche de 0 pour que x_0+h reste à l'intérieur de l'intervalle V,
$\frac{1}{h}[f(x_0+h) - f(x_0)] = \frac{1}{h}.[\sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x_0+h-x_0)^k + o((x_0+h-x_0)^n) - a_0] = \frac{1}{h}[\sum\limits_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n) - a_0]$
$= \frac{1}{h}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k h^k + \frac{1}{h}o(h^n) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k h^{k-1} + o(h^{n-1})$
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}[f(x_0+h) - f(x_0)] = \lim\limits_{h\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k h^{k-1} + o(h^{n-1}) = a_1 + 0 = a_1$. Donc $f'(x_0) = a_1$.

— Sans hypothèses supplémentaires, on ne sait rien de la dérivabilité éventuelle du reste d'ordre n. On n'a donc pas les moyens de savoir si $f'(x_0+h)$ existe.
On ne peut donc étudier la limite $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}[f'(x_0+h) - f'(x_0)]$ qui conduirait à $f''(x_0)$.

□

5.2 Les propriétés des développements limités

Troncature d'un développement limité. x_0 est un réel quelconque, n un élément de $\mathbb{N}^*$. Si f définie sur un intervalle U contenant x_0 ou ayant x_0 pour borne, admet un $DL_n(x_0)$ sur U, exprimant cela par $\forall x \in U, f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$, alors $\forall p \in [0, n-1]$, si $k \in [p+1, n]$, $a_k(x-x_0)^k = a_k(x-x_0)^{(k-p)} \times (x-x_0)^p$ est un $o((x-x_0)^p)$, ainsi $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k(x-x_0)^k + \sum\limits_{k=p+1}^{n} a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k(x-x_0)^k + \sum\limits_{k=p+1}^{n} o((x-x_0)^p) + o((x-x_0)^p) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^p)$, ce qui est un développement limité d'ordre p. Ce $DL_p(x_0)$ de f est la troncature à l'ordre p du $DL_n(x_0)$ de f.

Exemple. Supposons $n = 10$. On a vu en introduction que le $DL_{10}(0)$ de $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{10} x^k + o(x^{10})$. Sa troncature à l'ordre 4 est le $DL_4(0)$: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{4} x^k + o(x^4) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$.

Unicité du développement limité pour un ordre donné. x_0 est un réel quelconque, n un élément de $\mathbb{N}^*$. Si une fonction f définie sur un intervalle U contenant x_0 ou ayant x_0 pour borne, admet un $DL_n(x_0)$ sur U, lors celui-ci est unique, à cet ordre n.

Démonstration. Par l'absurde, supposons l'existence de deux développements limités distincts s'exprimant par $\forall x \in U, f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o_1((x-x_0)^n)$ et

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k + o_2((x-x_0)^n)$$

Les deux suites de coefficients $(a_k)_{k\in[0,n]}$ et $(b_k)_{k\in[0,n]}$ diffèrent par au moins l'un de leurs termes. Soit n_1 la plus petite valeur de l'indice n telle que $a_n \neq b_n$.
$\forall x \in U, 0 = f(x) - f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o_1((x-x_0)^n) - \sum\limits_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k + o_2((x-x_0)^n)$
$= \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k - b_k)(x-x_0)^k + o_1((x-x_0)^n) - o_2((x-x_0)^n)$

$= \sum\limits_{k=0}^{n_1-1} 0.(x-x_0)^k + \sum\limits_{k=n_1}^{n} (a_k - b_k)(x-x_0)^k + o_3((x-x_0)^n)$.

Donc $-\sum\limits_{k=n_1}^{n} (a_k - b_k)(x-x_0)^k = o_3((x-x_0)^n)(x-x_0)^n.\epsilon(x-x_0)$ puis en notant $u = x - x_0$, $-\sum\limits_{k=n_1}^{n} (a_k - b_k)u^k = o_3(u^n) = u^n.\epsilon(u)$.

Divisant alors par u^n non nul tant que $x \neq x_0$, $\dfrac{-\sum\limits_{k=n_1}^{n} (a_k - b_k)u^k}{u^n} = \epsilon(u)$.

Lorsque $u \to 0$, cette fraction rationnelle en u est équivalente au quotient de ses termes de plus bas degré, soit $-\dfrac{a_{n_1} - b_{n_1}}{u^{n-n_1}}$ et étant égale à $\epsilon(u)$, sa limite est nécessairement 0. Or le dénominateur ayant une limite finie et le numérateur étant différent de 0, c'est impossible dans $\forall k \in [0, n], a_k = b_k$ donc les parties régulières des deux $DL_n(x_0)$ de f sont égales et par différences avec $f(x)$, les restes d'ordre n sont égaux. □

$DL_n(0)$ **d'une fonction paire ou impaire définie au moins sur un intervalle** $]-\epsilon, 0[\cup]0, \epsilon[$ **où** $\epsilon > 0$**.**
Si f est impaire, dans la partie régulière du $DL_n(0)$, parce que les coefficients des puissances paires de x sont tous nuls, on ne lit que des puissances impaires de x.
Si f est paire, dans la partie régulière du $DL_n(0)$, parce que les coefficients des puissances impaires de x sont tous nuls, on ne lit que des puissances paires de x.

Exemples. Pour $x \in]-1, 1[$, à partir e $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$, on peut écrire

- en substituant x^2 à x, $f(x^2) = \dfrac{1}{1-x^2} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^{2k} + o(x^{2n})$, alors que $x \to \dfrac{1}{1-x^2}$ est paire sur $]-1, 1[$
- en multipliant par x ces dernières expressions , $x \times f(x^2) = \dfrac{1}{1-x^2} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$, alors que $x \to \dfrac{x}{1-x^2}$ est impaire sur $]-1, 1[$.

Démonstration. On suppose que $\forall x \in]-\epsilon, 0[\cup]0, \epsilon[$ on peut écrire $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + o_1(x^n)$. Comme $-x \in]-\epsilon, 0[\cup]0, \epsilon[$, $f(-x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(-x)^k + o_1((-x)^n) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(-1)^k x^k + o_2(x^n)$.

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{1}{2}[\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o_1(x^n) + \sum_{k=0}^{n} a_k(-1)^k x^k + o_2(x^n)] = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1 + (-1)^k}{2}.x^k + o_3(x^n)$$

$$\frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{1}{2}[\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o_1(x^n) - \sum_{k=0}^{n} a_k(-1)^k x^k - o_2(x^n)] = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1 - (-1)^k}{2} x^k + o_4(x^n)$$

Si f est impaire, $f(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ qui a un développement dans lequel les coefficients $a_k \dfrac{1 - (-1)^k}{2}$ sont nuls lorsque l'entier k est pair.
Si f est paire, $f(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ qui a un développement dans lequel les coefficients $a_k.\dfrac{1 + (-1)^k}{2}$ sont nuls lorsque l'entier k est impair. □

Développements de combinaisons linéaires et de composées.

— Si f et g sont deux fonctions simultanément définies sur un même intervalle U contenant x_0 ou ayant x_0 pour borne, qui admettent chacune un $DL_n(x_0)$ sur U, $\forall x \in U, f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + o_1((x - x_0)^n)$ et $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x - x_0)^k + o_2((x - x_0)^n)$. Alors $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda f + \mu g$ admet un $DL_n(x_0)$ sur U qui s'exprime par $\forall x \in U, (\lambda f + \mu g)(x) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k)(x - x_0)^k + o_3((x - x_0)^n)$.

— Si f est une fonction définie sur un intervalle U contenant x_0, qui admet un $DL_n(x_0)$ sur U et si g est définie sur un intervalle V contenant $f(x_0)$ qui admet un $DL_n(f(x_0))$ sur V et si $f(U) \subset V$, alors gof admet un $DL_n(x_0)$ sur U obtenu en remplaçant x dans le $DL_n(f(x_0))$ de g, par la partie régulière du $DL_n(x_0)$ de f puis en ne conservant que les puissances de $(x - x_0)$ qui sont inférieures à n.

Démonstration. admise. □

Exemples.

— Pour $x_0 = 0, f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ a un $DL_3(0)$ définie par : $\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{3} x^k + o_1(x^3) = 1 + x + x^2 + x^3 + o_1(x^3)$ la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ a un $DL_3(0)$ défini par : $\forall x \in]-1, 1[, g(x) = \dfrac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{1} x^{2k} + o_2(x^3) = 1 + x^2 + o_2(x^3)$ car il ne faut pas de x^p tels que $p > 3$ donc la fonction $h = \pi.f - \sqrt{2}g$ a un $DL_3(0)$ défini par : $\forall x \in]-1, 1[, (\pi.f - \sqrt{2}g)(x) = \dfrac{\pi}{1-x} - \dfrac{\sqrt{2}}{1-x^2} = \pi(1+x+x^2+x^3) - \sqrt{2}(1+x^2) + o_3(x^3) = (\pi - \sqrt{2}) + \pi x + (\pi - \sqrt{2}).x^2 + \pi x^3 + o_3(x^3)$.

— Pour $x_0 = 0, f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ de $DL_3(0)$ connu, vérifie $f(x_0) = f(0) = 1$ et $f(]-1, 1[) =]1/2, +\infty[$. La fonction $exp : x \mapsto e^x$ a pour $DL_3(1)$ sur $]1/2, +\infty[, exp(x) = \sum_{k=0}^{3} \dfrac{e}{k!}(x - 1)^k + o_4((x - 1)^3)$. Ainsi $\forall x \in]1/2, +\infty[, e^x = e + e.(x - 1) + e/(x - 1)^2 + e/6(x - 1)^3 + o_4((x - 1)^3)$.

$expof$ admet donc un $DL_3(0)$ dont la partie régulière est obtenue par substitution puis écrêtage : c'est

$e + e.([1 + x + x^2 + x^3] - 1) + e/2([1 + x + x^2 + x^3] - 1)^2 + e/6([1 + x + x^2 + x^3] - 1)^3$

$= e + e(x + x^2 + x^3) + e/2(x + x^2 + x^3)^2 + e/6(x + x^2 + x^3)^3$

$e + e(x + x^2 + x^3) + e/2(x^2 + 2xx^2) + e/6(x^3)$ en n'écrivant pas les x^k où $k > 3$

$= e + ex + \dfrac{3e}{2}x^2 + \dfrac{13e}{6}x^3.$

Ainsi le $DL_3(0)$ de $expof$ sur $]-1, 1[$ s'exprime par : $\forall x \in]-1, 1[, (expof)(x) = e + ex + \dfrac{3e}{2}x^2 + \dfrac{13e}{6}x^3 + o(x^3)$.

5.3 La construction du $DL_n(x_0)$ d'une fonction de classe C^n sur un voisinage de x_0

La formule de Taylor avec reste de Young. x_0 est un réel quelconque, n un élément de $\mathbb{N}^*$. f est une fonction supposée de classe C^{n-1} sur un voisinage U de x_0 et telle que $f^{(n)}(x_0)$ existe. Alors f admet un

$DL_n(x_0)$ sur U, qui s'exprime pas $\forall x \in U$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

L'exemple du $DL_n(0)$ de la fonction exponentielle à tout ordre n de $\mathbb{N}^*$. Ici $x_0 = 0$, $f = exp$ est de classe C^{n-1} sur $U = \mathbb{R}$ (en fait C^∞) et $exp^n(0) = e^0 = 1$ existe.
$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, exp^{(k)}(x) = e^x$ et par suite, $\dfrac{exp^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{1}{k!}$.
La formule de Taylor-Young donne alors le $DL_n(0)$ de exp : $\forall x \in \mathbb{R}, exp(x) = e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}x^k + o(x^n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + o(x^n)$. Ainsi par exemple à l'ordre 3, $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$.

Démonstration. (en 5 étapes.) $\forall x \in U \setminus \{x_0\}$, notons respectivement I_x et $\dot{I}_x$ les intervalles fermé et ouvert de bornes x_0 et x.

Examen du polynôme constitué des n premiers nômes de la partie régulière. Notons $P_{n-1}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0).(x-x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \dfrac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)}$. D'une part $P_{n-1}(x_0) = f(x_0)$, d'autre part les dérivées successives de P_{n-1} se définissent par $P'_{n-1}(x) = f'(x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0) + ... + \dfrac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{(n-2)} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}$ et à tout ordre I entre 1 et $n-1$,
$P^{(i)}_{n-1}(x) = f^{(i)}(x_0) + \dfrac{f^{(i+1)(x_0)}}{1!}(x-x_0) + ... + \dfrac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-i-1)!}(x-x_0)^{(n-i-1)} = \sum\limits_{k=i}^{n-1} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{(k-i)!}(x-x_0)^{k-i}$ donc $P^{(i)}_{n-1}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$ et continuant à dériiant à dirver jusqu'à l'ordre $n-1$, $P^{(n-1)}_{n-1}(x) = f^{(n-1)}(x_0) = \sum\limits_{k=n-1}^{n-1} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{(k-n+1)!}(x-x_0)^{k-n+1}$ réduite au seul terme pour lequel $k = n-1$.

Dérivée d'ordre $n-1$ d'une fonction ϕ_x de variable t. On construit la fonction ϕ_x de variable t, définie sur I_x par :
$\phi_x(t) = f(t) - P_{n-1}(t) + \lambda_x(t-x_0)^n$ où λ_x est me réel choisi pour que $\phi_x(x) = 0(\lambda_x = \dfrac{P_{n-1}(x) - f(x)}{(x-x_0)^n})$.
ϕ_x est dérivable (par rapport à t) à tout ordre i de $[0, n-1]$ et $\phi^{(i)}_x(t) = f^{(i)}(t) - P^{(i)}_{n-1}(t) + \lambda_x.n(n-1)(n-2)...(n-i+1)(t-x_0)^{n-i}$ de sorte que $\phi_x(i)(x_0) = f^{(i)}(x_0) - P^{(i)}_{n-1}(x_0) + \lambda_x(x_0 - x_0)^n = f^{(i)}(x_0) - f^{(i)}(x_0) + \lambda x 0^n = 0$.

$n-1$ applications successives du théorème de Rolle à partir de ϕ_x. 1. ϕ_x est continue sur I_x et dérivable sur $\dot{I}_x$ (de bornes x_0 et x) et $\phi_x(x_0) = 0 = \phi_x(x)$ donc d'après le théorème de Rolle, $\exists c_1 \in \dot{I}_x, \phi'_x(c_1) = 0$.

2. ϕ'_x est continue sur I_{c_1} et dérivable sur $\dot{I}_{c_1}$ (de bornes x_0 et c_1) et $\phi'_x(x_0) = 0 = \phi'_x(c_1)$ donc d'après le théorème de Rolle, $\exists c_2 \in \dot{I}_x, \phi'_x(c_2) = 0$.

On ière le procédé, après $n-3$ dérivations on obtient c_{n-2} et on achève par $n-1$: $\phi^{(n-2)}_x$ est continue sur $I_{c_{n-2}}$ et dérivable sur $\dot{I}_{C_{n-2}}$ (bornes x_0 et c_{n-2}) et $\phi^{(n-2)}_x(x_0) = 0 = \phi^{(n-2)}_x(c_{n_2})$ donc d'après le théorème de Rolle, $\exists c_{n-1} \in \dot{I}_{c_{n-2}}, \phi^{(n-1)}_x(c_{n-1}) = 0$.

Vers une expression de $-\lambda_x$ en fonction de $f^{(n)}(x_0)$. On a vu que $\forall i \in [0, n-1], \phi^{(i)}_x(t) = f^{(i)}(t) - P^{(i)}_{n-1}(t) = f^{(i)}(t) + \lambda_x.n(n-1)(n-2)...(n-i+1)(t-x_0)^{n-i}$ donc en particulier pour $i = n-1, \phi^{(n-1)}_x(t) = f^{(n-1)}(t) - P^{(n-1)}_{n-1}(t) + \lambda_x n(n-1)(n-2)...(2)(t-x_0)^1$ ce qui en $t = c_{n-1}$ s'écrit $0 = \phi^{(n-1)}_x(c_{n-1}) = f^{(n-1)}(c_{n-1}) - P^{(n-1)}_{n-1} + \lambda_x n!(c_{n-1} - x_0)$, or , $P^{(n-1)}_{n-1}$ est constant de valeur $f^{(n-1)}(x_0)$ donc

$0 = f^{(n-1)}(c_{n-1}) - f^{(n-1)}(x_0) + \lambda_x n!(c_{n-1} - x_0)$. On alors facilement $\lambda_x = -\dfrac{1}{n!}\dfrac{f^{(n-1)(c_{n-1})-f^{(n-1)}(x_0)}}{c_{n-1} - x_0}$.
Mais $f^{(n-1)}$ est dérivable en x_0 car $f^{(n)}(x_0)$ existe et lorsque $x \to x_0$, $c_{n-1} \to x_0$ car il est dans I_x.
Donc $\lim\limits_{x\to x_0} \lambda_x = -\dfrac{1}{n!} \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f^{(n-1)}(c_{n-1}) - f^{(n-1)}(x_0)}{c_{n-1} - x_0} = -\dfrac{1}{n!}.f^{(n)}(x_0)$.
Posons alors $\epsilon(x-x_0) = -\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0) - \lambda_x$. On a $\lim\limits_{x\to x_0} \epsilon(x-x_0) = -\dfrac{1}{n!}.f^{(n)}(x_0) + \dfrac{1}{n!}.f^{(n)}(x_0) = 0$. Donc $-\lambda_x = \dfrac{1}{n!}.f^{(n)}(x_0) + \epsilon(x-x_0)$ où $\lim\limits_{x\to x_0} \epsilon(x-x_0) = 0$.

L'obtention du développement de Taylor avec reste de Young. On se souvient de la fonction ϕ_x définie par $\phi_x(t) = f(t) - P_{n-1}(t) + \lambda_x(t-x_0)^n$.
On sait que $\phi_x(x) = 0$ donc $0 = f(x) - P_{n-1}(x) + \lambda_x(x-x_0)^n$ et enfin $f(x) = P_{n-1}(x) - \lambda_x(x-x_0)^n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + [\dfrac{1}{n!}.f^{(n)}(x_0) + \epsilon(x-x_0)].(x-x_0)^n$
$= \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}x_0}{k!}(x-x_0)^k + (x-x_0)^n.\epsilon(x-x_0)$ où $\lim\limits_{x\to x_0} \epsilon(x-x_0) = 0$. $(x-x_0)^n.\epsilon(x-x_0)$ qui est un $o((x-x_0)^n)$ est le reste de Young.

□

5.4 Les développements limités des fonctions usuelles au voisinage de 0

Primitivation d'un développement limité au voisinage de 0. Soient n un entier naturel, U un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et f une fonction continue sur U qui admet un $DL_n(0)$ sur U : $\forall x \in U, f(x) = P_n(x) + x^n\epsilon(x)$ où $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$ et $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$. Toute primitive F de f sur u, admet un $DL_{n+1}(0)$ sur U qui est $\forall x \in U, F(x) = F(0) + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{k+1}x^{k+1} + x^{n+1}.\sigma(x)$ où $\lim\limits_{x\to 0} \sigma(x) = 0$.

Exemple. On sait que pour $U =]-1, 1[$, $\forall x \in U$, $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$ donc aussi $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1-(-x)} = \sum\limits_{k=0}^{n}(-x)^k + o((-x)^n)$ c'est à dire $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k.x^k + o(x^n)$.
L'intégration de ce DL de 0 à x donne alors (en observant que $x \in]-1,1[\Rightarrow 1+x > 0$).
$ln(1+x) = ln(1+0) + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1} + o(x^{n+1})$ qui après décalage de l'indice de sommation s'écrit $ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}.x^k + o(x^{n+1})$.

Démonstration.

— La fonction $t \to t^n\epsilon(t)$ est continue sur U puisque $t^n\epsilon(t) = f(t) - P_n(t)$ où f et P_n sont continues sur I. $\forall x \in U$, cette fonction peut donc être intégrée sur l'intervalle fermé de bornes 0 et x qu'on peut noter I_x.
Nous allons montrer que $\int_0^x t^n\epsilon(t)dt$ est un $o(x^{n+1})$ et pour cela, que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^{n+1}}.\int_0^x t^n\epsilon(t)dt = 0$. Parce que $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0, \forall\alpha \in \mathbb{R}_+^*, \exists\eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in U, |t| \le \eta \Rightarrow |\epsilon(t)| \le \alpha$.
Donc $\forall x \in U, |x| \le \eta \Rightarrow \forall t \in I_x, |t| \le \eta \Rightarrow \forall t \in I_x, |\epsilon(t)| \le \alpha$.
Supposons donc que $|x| \le \eta$.
$|\dfrac{1}{x^{n+1}}.\int_0^x t^n\epsilon(t)dt| = \dfrac{1}{|x|^{n+1}}.|\int_0^x t^n\epsilon(t)dt| \le \dfrac{1}{|x|^{n+1}}.\int_0^x |t|^n.|\epsilon(t)|dt \le \dfrac{1}{|x|^{n+1}}\int_0^x |t|^n.\alpha dt$ or $\dfrac{1}{|x|^{n+1}}\int_0^x |t|^n\alpha dt = \dfrac{\alpha}{|x|^{n+1}}|\int_0^x t^n dt| = \dfrac{\alpha}{|x|^{n+1}}|[\dfrac{t^{n+1}}{n+1}]_0^x| = \dfrac{\alpha}{|x|^{n+1}}.|\dfrac{x^{n+1}}{n+1}| = \dfrac{\alpha}{n+1} \le \alpha$.

En conclusion, $\forall\alpha\in\mathbb{R}_+^*, \exists\eta\in\mathbb{R}_+^*, \forall x\in U, |x|\leq\eta\Rightarrow |\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x t^n\epsilon(t)dt|\leq\alpha$. Ceci prouve que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{n+1}}\int_0^x t^n\epsilon(t)dt=0$.

— $\forall x\in U$, en intégrant les deux membre de l'égalité $f(t)=P_n(t)+t^n.\epsilon(t)$ sur I_x de bornes 0 et x, $\int_0^x f(t)dt=\int_0^x P_n(t)dt+\int_0^x t^n\epsilon(t)dt$ s'écrit $[F(t)]_0^x=\int_0^x\sum\limits_{k=0}^n a_kt^kdt+o(x^{n+1})$ d'où $F(x)-F(0)=\sum\limits_{k=0}^n\dfrac{a_k}{k+1}.x^{k+1}+o(x^{n+1})$ et enfin $F(x)=F(0)+\sum\limits_{k=0}^n\dfrac{a_k}{k+1}x^{k+1}+o(x^{n+1})$ d'où $F(x)-F(0)=\sum\limits_{k=0}^n\dfrac{a_k}{k+1}x^{k+1}+o(x^{n+1})$ et enfin $F(x)=F(0)+\sum\limits_{k=0}^n\dfrac{a_k}{k+1}x^{k+1}+o(x^{n+1})$.

□

Dérivation d'un développement limité au voisinage de 0. Attention, on ne dit pas que si une fonction f admet un $DL_n(0)$ sur U alors elle est dérivable sur U et f' admet un $DL_{n-1}(0)$ qui s'obtient en dérivant les termes du $DL_n(0)$ de f.

Le véritable énoncé est $\forall n\in\mathbb{N}$, si f de classe C^1 sur U, admet sur U, un $DL_2(0)$: $f(x)=P_n(x)+o(x^n)$, si on sait que f' admet un $DL_{n-1}(0)$ sur U, alors f étant un primitive de f', le $DL_n(0)$ de f sur U se déduisant de celui de f' par le résultat précédent, le $DL_{n-1}(0)$ de f' est $f'(x)=P'_n(x)+o(x^{n-1})$.

Exemple. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, le $DL_{2n+1}(0)$ sur $\mathbb{R}$ de la fonction exponentielle s'écrit : $\forall x\in\mathbb{R}, e^x=\sum\limits_{k=0}^{2n+1}\dfrac{1}{k!}x^k+o(x^{2n+1})$.
On en déduit $e^{-x}=\sum\limits_{k=0}^{2n+1}\dfrac{1}{k!}(-x)^k+o(x^{2n+1})=\sum\limits_{k=0}^{2n+1}\dfrac{(-1)^k}{k!}x^k+o(x^{2n+1})$ puis $sh(x)=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}=\sum\limits_{k=0}^{2n+1}\dfrac{1-(-1)^k}{2k!}x^k+o(x^{2n+1})$
Et comme il est claire que $1-(-1)^k$ est 0 lorsque k est pair et 2 lorsque k est impair seuls le termes de degré impair subsistent de sorte que $sh(x)=\sum\limits_{k=0}^n\dfrac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}+o(x^{2n+1})$. sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée ch et ch de classe C^{2n-1} sur $\mathbb{R}$ est telle que $ch^{(2n)}(0)$ existe, donc son $DL_{2n}(0)$ existe.

Le $DL_{2n}(0)$ de ch est donc obtenu par dérivation terme à terme du $DL_{2n+1}(0)$ de sh :

$$\forall x\in\mathbb{R}, ch(x)=\sum_{k=0}^n\frac{(2k+1)}{(2k+1)!}x^{2k}+o(x^{2n})=\sum_{k=0}^n\frac{1}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n})$$

Les $DL_n(0)$ à connaître.

— $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+o(x^n)$
— $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2+...+(-1)^nx^n+o(x^n)$ (on remplace x par $-x$ dans le précédent)
— $ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$ (primitive du précédent)
— $\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-...+(-1)^nx^{2n}+o(x^{2n})$ (on remplace x par x^2 dans $1/1+x$)
— $Arctan(x)=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-...+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1})$ (primitive du précédent)
— $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$
— $ch(x)=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+...+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$ (partie paire)
— $sh(x)=x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+...+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$ (partie impaire)
— $cos(x)=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$ $(ch(ix))$
— $sin(x)=x-\dfrac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$ $(sh(ix))$

Le $DL_n(0)$ de $x \to (1+x)^\alpha$. $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \forall x \in]-1,1[, (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{\alpha} x^k + o(x^n)$ aux abus d'écriture près $\binom{0}{\alpha} = 1$ et si $k \geq 1, \binom{k}{\alpha} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1)}{k!}$ (c'est un abus car α n'est pas un entier). Ce $DL_n(0)$ permet entre autres de développer $\sqrt{1+x}, \sqrt{1-x}, \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}, \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. Si $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et si $n \geq \alpha+1$, lorsque $k \geq \alpha+1$, $\binom{k}{\alpha} = 0$ car le facteur $(\alpha - \alpha)$ est présent au numérateur. Le dernier terme non nul est alors celui dont le numérateur comporte comme dernier facteur $(\alpha - \alpha + 1) = 1$. Le développement de $(1+x)^\alpha$ est alors exactement celui du binôme de Newton.

Ce n'est pas surprenant puisque $(1+x)^\alpha$ est dans ce cas particulier, une expression polynomiale.

5.5 Exemples d'applications des développements limités.

L'obtention d'un équivalent. Cherchons un équivalent de $Arctan(x) - sin(x)$ au voisinage de 0. Avant de connaître les DL, on savait seulement que chaque terme était équivalent à x mais ne pouvant soustraire des équivalents, cela ne permettait pas de répondre à la question.

Les $DL_3(0)$ des deux termes sont $Arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$.

Donc $Arctan(x) - sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3} - x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3) = -\dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ d'où $Arctan(x) - sin(x) \overset{0}{\sim} -\dfrac{x^3}{6}$.

En effet de façon générale si $f(x) = \sum_{k=0}^{n} akx^k + o(x^n)$, alors $f(x) = [\sum_{k=0}^{n} a_k x^k] \times (1 + \dfrac{x^n \epsilon(x)}{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k})$.

Mais le polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est équivalent à son terme de plus bas degré, notons le $a_p x^p$ où $p \leq n$.

Donc le quotient $\dfrac{x^n \epsilon(x)}{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}$ est équivalent à $\dfrac{x^n.\epsilon(x)}{a_p.x^p} = \dfrac{1}{a_p} x^{n-p} \epsilon(x)$ de limite 0 en 0. Donc $f(x) \overset{0}{\sim} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Exemple d'un calcul de limite. Étudions la limite en 0 du quotient $\dfrac{Arctan(x) - sin(x)}{ln(1+x) + e^{-x} - 1}$. Le $DL_3(0)$ du dénominateur est $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + 1 - x + \dfrac{(-x)^2}{2!} + \dfrac{(-x)^3}{3!} - 1 + o(x^3) = \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

Le dénominateur est équivalent à $\dfrac{x^3}{6}$ quand le numérateur l'est à $-\dfrac{x^3}{6}$.

Le quotient est donc équivalent à $\dfrac{-x^3/6}{x^3/6} = -1$. Le quotient a donc pour limite -1 en 0.

Quatrième partie

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

1 Une construction de $\mathbb{Z}$ ensemble des entiers relatifs

Si $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $n + x = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$. On est donc conduit à construire un ensemble de nombres plus vaste que $\mathbb{N}$ pour y trouver une solution .

Par ailleurs, l'échange commercial primitif "je reçois n et je donne m" peut se modéliser sous la forme du couple (n, m), éléments de $\mathbb{N}^2$, au format (quantité reçue, quantité donnée). L'échange (n, m) a le même bilan (profit ou perte) que l'échange (n', m') lorsque pour un même individu, la succession des échanges (n, m) puis (m', n') a un bilan nul. C'est à dire lorsque la quantité $n + m”'$ reçue est égale à la quantité $m + n'$ donnée.

Dans $\mathbb{N}^2$, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$\forall((n,m),(n',m')) \in (\mathbb{N}^2)^2, (n,m)\mathcal{R}(n',m') \Leftrightarrow n + m' = m + n'$$

On montre que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence (R-S-T) dans $\mathbb{N}^2$.

Pour tout couple (n, m) de $\mathbb{N}^2$, sa classe d'équivalence est $\overline{n,m} = \big\{(n', m') \in \mathbb{N}^2/(n', m')\mathcal{R}(n, m)\big\}$.

L'ensemble de ces classes d'équivalence, dit ensemble quotient $\mathbb{N}^2/\mathcal{R}$ est noté $\mathbb{Z}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, nous noterons $\overline{n,0}$ par $+n$ et $\overline{0,n}$ par $-n$, $\overline{0,0}$ est notée 0.

2 Les opérations

Addition. $\forall(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, notant $p = \overline{(n,m)}$ et $q = \overline{(n',m')}$, pour tous représentants respectifs (n_1, m_1) et (n'_1, m'_1) de ces classes, on montre que les couples $(n_1 + n'_1, m_1 + m'_1)$ sont éléments de la même classe $\overline{(n + n', m + m')}$. On pose alors par définition $p + q = \overline{(n,m)} + \overline{(n',m)} = \overline{n + n', m + m'}$.

Multiplication. $\forall(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, notant $p = \overline{n,m}$ et $q = \overline{n',m'}$, pour tous représentants respectifs (n_1, m_1) et (n'_1, m'_1) de ces classes, on montre que les couples $(n_1.n'_1 + m_1.m'_1, n_1m'_1 + m_1n'_1)$ sont éléments de la même classe $(\overline{n.n' + m.m', n.m' + m.n'})$. On pose alors par définition

$$p \times q = \overline{n,m)} \times (\overline{n'.m'}) = (\overline{n.n' + m.m', n.m'm.n'})$$

Les propriétés de ces opérations.

— $+$ est loi de composition interne dans $\mathbb{Z}$

— $+$ est commutative

— $+$ est associative

— $\mathbb{Z}$ possède $(\overline{0,0})$ notée 0 comme élément neutre pour $+$.

— Tout élément de $\mathbb{Z}$ admet un symétrique pour $+$ (opposé)

— $\times$ est loi de composition interne dans $\mathbb{Z}$

— $\times$ est commutative

— $\times$ est associative

— $\mathbb{Z}$ possède $(\overline{1,0})$ notée 1 comme élément neutre pour $\times$

— Les seuls éléments de $\mathbb{Z}$ qui admettent un symétrique dans $\mathbb{Z}$ pour $\times$ ("inverse") sont $(\overline{1,0}) = +1$ et $(\overline{0,1}) = -1$, chacun étant son propre inverse .

— $\times$ est distributive par rapport à $+$.

$(\mathbb{Z}, +)$ est un anneau unitaire commutatif dont les seuls éléments inversibles sont -1 et 1.

La règle des signes. $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$:

$(+n) \times (+m) = (\overline{n,0}) \times (\overline{m,0}) = (\overline{n \times m + 0 \times 0, n \times 0 + 0 \times m}) = (\overline{n.m,0}) = +n.m$

$(+n) \times (-m) = (\overline{n,0}) \times (\overline{0,m}) = (\overline{n \times 0 + 0 \times m, n \times m + 0 \times 0}) = (\overline{0,n.m}) = -n.m$

$(-n) \times (+m) = (\overline{0,n}) \times (\overline{m,0}) = (\overline{0 \times m + n \times 0, 0 \times 0 + n \times m}) = (\overline{0,n.m}) = -n.m$

$(-n) \times (-m) = (\overline{0,n}) \times (\overline{0,m}) = (\overline{0 \times 0 + n \times m, 0 \times m + n \times 0}) = (\overline{n.m,0}) = +n.m$

La soustraction. $\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2, p - q = p + (-q)$ (on ajoute l'opposé de q).

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Par abus d'écriture, on confond tout entier naturel n avec l'entier relatif $+n = (\overline{n,0})$. Ceci parce que l'application $\phi : n \to (\overline{n,0})$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur la partie $\mathbb{Z}_+$ de $\mathbb{Z}$ constituée des seules classes de la forme $(\overline{k,0})$ où $k \in \mathbb{N}$ et que cette bijection vérifie la propriété :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \phi(n + m) = (\overline{n + m, 0}) = (\overline{n,0}) + (\overline{m,0}) = \phi(n) + \phi(m)$$

3 La relation d'ordre $\leq$

$\leq$.

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2, p \leq q \Leftrightarrow q - p \in \mathbb{N} \text{ et } q \geq p \Leftrightarrow p \leq q$$

Entiers positifs, entiers négatifs. De cette définition, il ressort que $\forall q \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \Leftrightarrow q - 0 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 0 \leq q$. Les éléments de $\mathbb{N}$ (les entiers positifs) sont caractérisés par $q \geq 0$; $q \leq 0$ caractérisant leurs opposés, les entiers négatifs de "$-\mathbb{N}$".

Propriétés.

— La relation " $\leq$ " ainsi définie est une relation d'ordre total dans $\mathbb{Z}$ qui prolonge celle de $\mathbb{N}$.

— Elle est compatible avec l'addition : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3, a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ et compatible avec la multiplication par un entier positif. $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \forall c \in \mathbb{N} a \leq b \Rightarrow a \times c \leq b \times c$

— $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \forall c \in -\mathbb{N} a \leq b \Rightarrow a \times c \geq b \times c$.

— Toute partie A non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.

— Toute partie A non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.

Valeur absolue. $\forall p \in \mathbb{Z}, |p| = max\,\{-p, p\}$, plus grand élément e cet ensemble (max de maximum).

Propriétés de la valeur absolue.

- $\forall p \in \mathbb{Z}, |p| = 0 \Leftrightarrow p = 0$
- $\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2, |p \times q| = |p| \times |q|$
- $\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2, |p + q| \leq |p| + |q|$

4 La divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$. $\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \exists! (q,r) \in \mathbb{Z}^2, a = b \times q + r$ et $0 \leq r < |b|$. q est appelé le quotient et r le reste dans la division euclidienne de a par b.

Démonstration.

Existence. L'ensemble $B = \{bk/k \in \mathbb{Z}\ \text{et} bk \leq a\}$ est non vide (contient ba ou $-ba$) et majoré par a. Étant partie de $\mathbb{Z}$, il admet donc un plus grand élément bq. On a alors $bq \leq a \leq bq + |b|$ donc $0 \leq a - bq \leq |b|$. Notant $r = a - bq$, on a $0 \leq r \leq |b|$ et $a = bq + (a - bq) = bq + r$.

Unicité. Si $a = bq + r = bq' + r'$ avec $0 \leq r < |b|$ et $0 \leq r' < b'$ alors $0 = bq + r - bq' - r'$ donc $b(q - q') = r' - r$ terme de $] - |b|, |b|[$. Donc $|b|.|q - q'| < |b|$ donc $|q - q'| < 1$ donc (dans $\mathbb{Z}$) $q - q' = 0$ ainsi $q = q'$ et $r = r'$.

□

a est multiple (entier) de b et b est diviseur (entier) de a. Lorsque la division euclidienne de a par b, $a = bq + r$ admet un reste nul. On note $b|a$ pour b divise a.

Remarques. Si $b|a$ et $a \neq 0$, alors $|b| \leq |a|$. (puisque $|a| = |b|.|q| \geq |b|$ vu $|q| \geq 1$.

Entier premier. Il est clair que tout entier n possède au moins les diviseurs $n, -n, 1$ et -1 car $n = 1 \times n = (-1) \times (-n)$. Si $n = 0$, ils sont trois : 0,1 et -1. Si $n = 1$, ils sont deux 1 et -1. Tout entier n qui n'a comme diviseurs que les nombres $n, -n, 1$ et -1 lorsqu'ils sont quatre et aucun autre est dit premier, sinon il est dit non premier.

Décomposition en produit de facteurs premiers.

- Tout entier de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ possède au moins un diviseur premier.
- Tout entier de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ se décompose de façon unique en produit de facteurs premiers.
- Tout entier relatif se décompose de façon unique sous une forme : $(\pm 1) p_1^{n_1}.p_2^{n_2}...p_k^{n_k}$ où les entiers p_i sont positifs et premiers.

Démonstration.

- $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, P = \{p \in \mathbb{Z}/p > 2 \text{ et } p|n\} \neq \emptyset$ (car $n \in P$) et est minoré par 1. Il a donc un plus petit élément p_0. Si p_0 admet un diviseur en dehors de $\{-1, 1, -p_0, p_0\}, \exists (p_1, q_1) \in (\mathbb{N}^* \setminus \{1\})^2, p_0 = p_1 q_1$. Ainsi $p_1 q_1 | n$ donc $p_1 | n$ mais comme $1 < p_1 < p_0$ n'est pas le plus petit élément de P. conclusion les seuls diviseurs de p_0 sous les éléments de $\{-1, 1, -p_0, p_0\}$ donc p_0 est premier.

— **Existence.** (par récurrence "forte", c'est à dire avec hypothèse de récurrence maximale.)

Initialisation. pour $n = 2$, la seule décomposition possible est $2 = 2$.

Hérédité. Supposons que pour un entier n de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, la propriété de décomposition soit vraie ainsi que pour tous les entiers de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ strictement inférieurs à n.

Considérons $n + 1$. Vu la démonstration précédente, il possède au moins un diviseur premier p et $n + 1 = p.q$ où $q \in \mathbb{N}$

— si $q = 1, n + 1 = p$ décomposition en un seul facteur premier.

— si $q \geq 2, p$ étant premier, $p > 1$ et par suite $q \leq n$ car $q = 1.q < p.q = n + 1$.

L'hypothèse de récurrence fait écrire $q = p_1^{n_1}.p_2^{n_2}.p_s^{n_s}$ et $n + 1 = p.q = p.p_1^{n_1}.p_2^{n_2}.p_s^{n_s}$ est produit de facteurs premiers.

Unicité. Supposons qu'un entier nature n ait deux décompositions en produit de facteurs premiers. quitte à mettre en place des exposants nuls, écrivons les deux décompositions selon l'ensemble des facteurs premiers rencontrés.

$n = p_1^{n_1}.p_2^{n_2}.p_s^{n_s} = p_1^{m_1}.p_2^{m_2}.p_s^{m_s}$ et isolons un quelconque facteur premier p_i.

On peut écrire $n = p_i^{n_i}.a = p_i^{m_i}.b$ où p_i ne divise ni a et ni b.

Si $n_i \neq m_i$ (on peut supposer par exemple $n_i > m_i$), $n = p_i^{n_i}.a = p_i^{n_i - m_i}.p_i^{m_i}.a = p_i^{m_i}.b$. Donc $p_i^{n_i - m_i}.a = b$, donc $p_i | b$, ce qui est faux. Il y a contradiction donc $n_i = m_i$.

— Évident puisque $n = \pm 1.|n|$ et que l'on peut appliquer à $|n|$ ce qui précède.

□

Méthode pratique pour déterminer si un entier relatif n est premier. Si aucun entier naturel premier p tel que $p^2 \leq |n|$ ne divise n, alors n est premier.

Exemple. 173 est premier car il n'est divisible par aucun des entiers premiers 2,3,5,7,11,13 l'entier premier suivant qui est 17 a son carré supérieur à 173.

Démonstration. Si n n'est pas premier, il admet au moins un diviseur p n'appartenant pas à $\{-n, -1, 1, n\}$. On peut donc écrire $n = pq$ où également $q \in \mathbb{Z} \setminus \{-n, -1, 1, n\}$.

$min(\{|p|, |q|\})$ qui est $|p|$ ou $|q|$ est élément de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$: il a au moins un diviseur premier p_0 dans $\mathbb{N}$.

$p_0 \leq min(\{|p|, |q|\})$ donc $p_0^2 \leq [min(\{|p|, |q|\})]^2 \leq |p|, |q| = |n|$.

p_0 divise $min(\{|p|, |q|\})$ donc divise $|p|, |q| = |n|$ donc divise n. On vient d'établir la contraposée du résultat demandé. □

L'ensemble des entiers naturels premiers n'est pas majoré.

Démonstration. S'il était majoré, il admettrait un plus grand élément p_s et s'écrirait $\{p_1, p_2, ..., p_s\}$ où $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_s$ (avec $p_1 = 2, p_2 = 3...$)

L'entier $p = p_1 \times p2 \times ... \times p_s + 1$ égal à leur produit majoré de 1

— est strictement supérieur à p_s car comme les p_i sont supérieurs à 1, $p_1 \times p_2 \times ... \times p_s + 1 > p_2 + 1 > p_s$.

— n'est divisible par aucun entier premier $p_1, p_2, ..., p_s$.

En effet, s'il l'était $1 = p - p_1 \times p_2 \times ... \times p_s$ serait divisible par cet entier premier donc supérieur à lui. Or c'est impossible.

Donc p est un entier premier. Mais il est supérieur au plus grand entier premier. Il y a contradiction. □

Ensemble $\mathcal{D}(a)$ des diviseurs d'un entier a. $\mathcal{D}(a) = \{b \in \mathbb{Z} / \exists q \in \mathbb{Z}, a = b.q\}$.

Remarques. $\mathcal{D}(0) = \mathbb{Z}$ puisque $\forall p \in \mathbb{Z}, 0 = p.0$. Bien sur $a \in \mathcal{D}(a)$ puisque $a = a.1$ et si $b \in \mathcal{D}(a), b|a$ donc $|b| \leq |a|$.

$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, [\mathcal{D}(a) = \mathcal{D}(b)] \Leftrightarrow [|a| = |b|]$ et $\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, [\mathcal{D}(a) = \mathcal{D}(b)] \Leftrightarrow [a = b]$.

Plus Grand Commun Diviseur de deux entiers non nuls a et b. (noté $pgcd(a,b)$ ou parfois $a \wedge b$). L'ensemble $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$ des diviseurs communs de a et de b est l'ensemble des diviseurs d'un unique entier positif d, lui même diviseur commun de a et b et le plus grand d'entre eux. Ainsi $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(d)$ où d est le plus grand commun diviseur de a et b.

Démonstration. Clairement l'ensemble $\mathcal{D}(a)$ des diviseurs de a est le même que $\mathcal{D}(-a)$, ensemble des diviseurs de $-a$, seuls les quotients changeant de signe. On peut donc se ramener au cas où a et b sont positifs. De plus on pourra supposer $a \geq b$, le cas $a < b$ pouvant se traiter de la même manière en échangeant les rôles de a et b.

Si $b = 0$. L'ensemble $\mathcal{D}(b)$ des diviseurs de b est $\mathcal{Z}$ donc $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(a) \cap \mathbb{Z} = \mathcal{D}(a)$. Dans ce cas $d = a$.

Si $b > 0$. La division euclidienne de a par b s'écrit $a = bq_1 + r_1$ où $0 \leq r_1 < b$. Tout diviseur commun de b et r_1 divise a et b et comme $r_1 = a - bq_1$, tout diviseur comme de a et b divise b et r_1. On a donc $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(r_1)$.

Si $r_1 = 0$. $\mathcal{D}(r_1) = \mathbb{Z}$ donc $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(b)$ et $d = b$.

Si $r_1 \neq 0$. La division euclidienne de b par r_1 s'écrit $b = r_1 q_2 + r_2$ où $0 \leq r_2 < r_1$. Le même raisonnement que ci-dessus conduit à $\mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(r_1) = \mathcal{D}(r_1) \cap \mathcal{D}(r_2)$.

Si $r_2 = 0$. $\mathcal{D}(r_2) = \mathbb{Z}$ donc $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(r_1) = \mathcal{D}(r_1)$ et $d = r_1$.

Si $r_2 \neq 0$. La division euclidienne de r_1 par r_2 s'écrit $r_1 = r_2.q_3 + r_3$ où $0 \leq r_3 < r_2$. Le même raisonnement que ci dessus conduit à $\mathcal{D}(r_1) \cap \mathcal{D}(r_2) = \mathcal{D}(r_2) \cap \mathcal{D}(r_3)$.

La suite des restes r_k est une suite strictement décroissante d'entiers positifs. Au bout d'un nombre fini n de divisions euclidiennes, la valeur 0 sera atteinte et on aura $r_n = 0$. Les deux dernières divisions euclidiennes auront donc la forme

$$r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-1} + r_{n-1} \text{ où } 0 \leq r_{n-1} < r_{n-2} \text{ et } r_{n-1} \neq 0 \text{ et } r_{n-2} = r_{n-1} q_n + 0$$

Elles assurent respectivement le fait que $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}' r_1) = ... = \mathcal{D} = (r_{n-2}) \cap \mathcal{D}(r_{n-1})$ et $\mathcal{D}(r_{n-2}) \cap \mathcal{D}(r_{n-1}) = \mathcal{D}(r_{n-1})$. Ainsi $d = r_{n-1}$ dernier reste non nul.

□

Méthode de calcul du $pgcd(a,b)$**.** On effectue la succession de divisions euclidienne, par exemple on calcul le $pgcd(456,252)$:

$456 = 252 \times 1 + 204$

$252 = 204 \times 1 + 48$

$204 = 48 \times 4 + 12$

$48 = 12 \times 4 + 0$ Le dernier reste non nul est 12 donc $pgcd(456,252) = 12$. Cette méthode à été justifié pendant la preuve de l'existence du $pgcd$.

Associativité de l'opération $pgcd$**.** $\forall(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3, pgcd[pgcd(a,b),c] = pgcd[a,pgcd(b,c)]$. L'entier ainsi obtenu est appelé $pgcd(a,b,c)$.

Remarque. Lorsque $d = pgcd(a,b)$ on peut écrire $a = d \times a'$ et $b = d \times b'$. On a alors $pgcd(a',b') = 1$.

Démonstration. Si a' et b' ont un diviseur commun positif d' strictement supérieur à 1, on peut écrire $a' = d' \times a''$ et $b' = d' \times b''$ de sorte que $a = d \times d' \times a''$ et $b = d \times d' \times b''$ et $d \times d'$ est un diviseur commun de a et b strictement supérieur à leur $pgcdd$. C'est impossible donc un tel d' n'existe pas. □

Entiers a **et** b **"premiers entre eux" ou "étrangers".** Entiers a et b tels que $pgcd(a,b) = 1$.

$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$**.** $\forall(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, notant $d = pgcd(a,b)$ et $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \left\{au + bv/(u,v) \in \mathbb{Z}^2\right\}$, on a l'égalité : $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d.\mathbb{Z}$ où $d.\mathbb{Z} = \{d.k/k \in \mathbb{Z}\}$

Démonstration. $\subset$. soit $a.u + b.v$ un élément de $a.\mathbb{Z} + b.\mathbb{Z}$. On a d le $pgcd(a,b)$, il divise a et b. Donc $\exists(a',b') \in \mathbb{Z}^2, a = d.a'$ et $b = d.b'$. Ainsi $au + bv = d.a'.u + d.b'.v = d(a'.u + b'.v)$ donc $a.u + b.v \in d.\mathbb{Z}$.

$\supset$. Dans la suite des divisions permettant de calculer le $pgcd(a,b)$, d est le dernier reste non nul r_{n-1}. $r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1}$ donc $d = r_{n-1} = r_{n-3} - r_{n-2}.q_{n-1} \in r_{n-3}\mathbb{Z} + r_{n-2}\mathbb{Z}$. Mais $r_{n-4} = r_{n-3}q_{n-2} + r_{n-2}$ donc $r_{n-2} = r_{n-4} - r_{n-3}q_{n-2} \in r_{n-4}\mathbb{Z} + r_{n-3}\mathbb{Z}$ donc $d \in r_{n-4}\mathbb{Z} + r_{n-3}\mathbb{Z}$. En remontant ainsi la succession de divisions euclidienne, on achève par $d \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$. Donc $d\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$.

□

Conséquence. $\forall(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, notant $d = pgcd(a,b), \exists(u,v) \in \mathbb{Z}^2, d = a.u + b.v$. Attention ! Il n'y a pas unicité du couple (u,v).

Démonstration. $d = d.1 \in d\mathbb{Z}(= a.\mathbb{Z} + b.\mathbb{Z})$ d'où l'existence du couple d'entiers (u,v) tel que $d = a.u + b.v$. Dans le cas particulier de $(a,b) = (456,252)$, on sait que $d = pgcd(a,b) = 12$. On peut observer que $12 = 456u + 252v$ pour $(u,v) = (5,-9)$ mais aussi (-16,29),(26,47),... □

Remarque. L'existence d'une telle relation $d = a.u + b.v$ n'entraîne pas que $d = pgcd(a,b)$ sauf dans le cas où $d = 1$ comme on va le voir ci dessous.

Théorème IV.1. (De Bézout.)

$$\forall(a,b) \in \mathbb{Z}^2, [pgcd(a,b) = 1] \Leftrightarrow [\exists(u,v) \in \mathbb{Z}^2, a.u + b.v = 1]$$

Démonstration. $\Rightarrow$. Implication déjà établie dans le cas général d'un $pgcd(a, b) = d$ quelconque.

$\Leftarrow$. Si $\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2, a.u + b.v = 1$, tout diviseur commun à a et b, divise 1. Donc le plus grand d'entre eux $pgcd(a, b)$ divise 1. Or les seuls diviseurs de 1 sont $+1$ et -1 Étant par définition positif, $pgcd(a, b) = +1$.

□

Une première conséquence. $\forall(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, notant $d = pgcd(a, b)$, on sait que $\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2, d = a.u + b.v$. On peut ajouter que dans une telle décomposition $pgcd(u, v) = 1$.

Démonstration. d divisant a et b, il existe deux entiers a' et b' tels que $a = d.a'$ et $b = .b'$. $d = a.u + b.v$ s'écrit $d = d.a'.u + d.b'.v$ donc $1 = a'.u + b'.v = u.a' + v.b'$ ce qui d'après le théorème de Bézout entraîne que $pgcd(a', b') = 1 = pgcd(u, v)$. □

Théorème IV.2. (De Gauss) $\forall(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, si $a|b, c$ et $pgcd(a, b) = 1$, alors $a|c$.

Démonstration. Puisque $pgcd(a, b) = 1, \exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2 a.u + b.v = 1$ donc $a.c.u + b.c.v = c$.
$a|a.c.u$ de façon évidente de $a|b.c$ ar hypothèse donc $a|b.c.v$. Ainsi $a|c$ puisque $c = a.c.u + b.c.v$. □

Un exemple d'équation Diophantienne. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation d'inconnue (u, v) :

$$456.u + 252.v = 12$$

Ayant déjà calculé $pgcd(456, 252) = 12$ nous savons que cette équation admet au moins une solution puisqu'il existe au moins un couple (u, v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que $12(= d) = 456.u + 252.v$
Nous allons cherche un couple solution particulier. Si on n'a pas l'idée de $(5, -9)$, la remontée des divisions euclidiennes nous permet d'aboutir à coup sur :
$456 = 252 \times 1 + 204$ donc $204 = 456 - 252 \times 1$
$252 = 204 \times 1 + 48$ donc $48 = 252 - 204 \times 1 = 252 - (456 - 252 \times 1) \times 1 = -456 + 252\times$
$204 = 48 \times 4 + 12$ donc $12 = 204 - 48 \times 4 = (456 - 252 \times 1) - (-456 + 252 \times 2) \times 4$
Ainsi $12 = 456 \times 5 - 252 \times 9 = 456 \times 5 + 252 \times (-9)$.

Résolution de l'équation. $\forall(u, v) \in \mathbb{Z}^2$
$12 = 456.u + 252.v \Leftrightarrow \begin{cases} 12 = 456.u + 252.v \\ 12 = 456.5 + 252.(-9) \end{cases}$
$\Leftrightarrow= 456(u - 5) + 252(v + 9) \Leftrightarrow 0 = 38(u - 5) + 21(v + 9) \Leftrightarrow 21(v + 9) = 38(5 - u)$.
$21|38(5-u)$ et $pgcd(21, 38) = 1$ donc par théorème de Gauss $21|5-u$ donc $\exists k \in \mathbb{Z}, 5-u = 21.k$ et $u = -21k+5$.
Remplaçant dans l'équation $21(v+9) = 38(5-u)$, $(5-u)$ par $21.k$, il vient $21(v+9) = 38.21.k$ donc $v+9 = 38.k$ et $v = 38.k - 9$.
Il est aisé réciproquement de vérifier que $\forall k \in \mathbb{Z}, 456(-21k + 5) + 252(38k - 9) = 12$.
L'ensemble de solution est $S = \{(-21.k + 5, 38k - 9)/k \in \mathbb{Z}\}$.

Remarques. Pour prolonger cette étude, notons que :

— l'équation $456.u + 252.v = 1$ ne peut avoir de solution dans $\mathbb{Z}^2$ car si cela était, d'après le théorème de Bézout, 456 et 252 seraient premiers entre eux, ce qui est faux.

— l'équation $456.u + 252.v = 24$ n' pas comme ensemble-solution dans $\mathbb{Z}^2$, comme on pourrait le penser par une réflexion trop rapide $S' = \{(2 \times (-21.k + 5), 2 \times (38k - 9))/k \in \mathbb{Z}\}$.
  S' n'est qu'une partie de l'ensemble de ses solutions. Il faut refaire le raisonnement à partir de la solution $(2 \times 5, 2 \times (-9))$.