

Mécanique : Le pendule - limite du modèle harmonique

Introduction

Le but de ce TP est d'étudier le comportement d'un pendule. Dans un premier temps, nous étudierons le pendule dans l'approximation des petits angles et nous montrerons qu'il suit la loi harmonique. Nous allons ensuite mettre en évidence la mise en défaut de la loi harmonique lorsque le pendule est lâché à grand angle.

1 Rappels théorique utiles

Dans le référentiel Galiléen, nous choisissons le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les forces qui s'appliquent sur le pendule sont les poids \vec{P} et la résistance \vec{R} . Appliquons le principe fondamental de la dynamique au pendule

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{\gamma}$$

En projetant sur les axes nous avons
$$\begin{cases} -R\sin(\theta) = m\dot{x} \vec{i} \\ -mg + R\cos(\theta) = m\dot{y} \vec{j} \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} x = l\sin(\theta) \\ y = -l\cos(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = l\dot{\theta}\cos(\theta) \\ \dot{y} = l\dot{\theta}\sin(\theta) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x} = l\dot{\theta}\cos(\theta) - l\dot{\theta}^2\sin(\theta) \\ \dot{y} = l\dot{\theta}\sin(\theta) - l\dot{\theta}^2\cos(\theta) \end{cases} \quad \text{nous avons donc}$$

$$\begin{cases} -R\sin(\theta) = m(l\dot{\theta}\cos(\theta) - l\dot{\theta}^2\sin(\theta)) \vec{i} \\ -mg + R\cos(\theta) = m(l\dot{\theta}\sin(\theta) - l\dot{\theta}^2\cos(\theta)) \vec{j} \end{cases}$$

Multiplions la première ligne par $\cos(\theta)$ et la seconde par $\sin(\theta)$. Puis effectuons la somme membre à membre deux deux équations obtenues. Nous pouvons en déduire l'équation différentielle suivante

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

En utilisant l'approximation des petits angles, en effet si $\theta \ll 1 \text{ rad}$, nous pouvons écrire $\sin(\theta) \sim \theta$. L'équation devient alors

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Nous retrouvons ici l'équation d'un oscillateur harmonique en θ . La période d'un tel oscillateur est

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Dans le cas d'angles plus importants, nous effectuons un développement limité du $\sin(\theta)$. La période de cet oscillateur est alors

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \frac{9}{64}\sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \dots\right)$$

2 Vérification de la loi harmonique. Cadre des "petits angles".

Nous nous plaçons dans le cadre de l'approximation des petits angles. L'angle initial sera donc compris entre 0° et 20° avec une masse de 1kg.

2.1 Mesure de la période d'oscillation du pendule

a)

| | | | | | | | | | | |
|---------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| θ (en degré) | | | | | | | | | | |
| T (en secondes) | | | | | | | | | | |

b) voir annexe

c) Nous pouvons voir d'après le graphe ci dessus que le courbe $T = f(\theta)$ est assimilable à une courbe constante pour toutes les valeurs de θ . La période du pendule ne dépend donc pas de l'angle θ choisi. En effet d'après le modèle harmonique nous avons $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ avec $l = \text{cm}$. Nous constatons donc que $T_0 > T_{exp}$, cependant les valeurs expérimentale et théorique sont très proche nous pouvons donc conclure que la loi harmonique est vérifié dans le cadre des petits angles. L'écart relatif entre la moyenne des valeurs expérimentales et celle théorique est de %.

2.2 Influence de la masse du pendule dans le modèle théorique

Le modèle théorique ne prend pas en compte les forces de frottements du pendule (ce qui peut explique la différence entre la valeur théorique et expérimentale vue précédemment) et la période théorique d'oscillation est indépendante de la masse M . Nous allons donc mettre en évidence l'influence de la masse du pendule dans l'expérience.

2.3 Mise en évidence de l'influence de la masse du pendule dans l'expérience

a)

| | | | | |
|-------------------|--|--|--|--|
| M (en gramme) | | | | |
| T (en secondes) | | | | |

b) Voir annexe. Nous avons vu que depuis le modèle théorique, T est indépendant de la masse donc $T = f(m)$ est censée être représentée par une fonction constante mais d'après les résultats précédents et la courbe $T = f(M)$, nous remarquons que la courbe est _____ en effet la période _____ quand la masse M augmente donc T n'est pas indépendante de la masse.

c) Nous pouvons remarquer que le période T dans cette partie est égale à celle de la partie précédente lorsque la masse est égale à 1kg, lorsque la masse est inférieure la période est inférieure cela nous montre que les forces de frottements n'ont pas d'influence sur des masses importante mais qu'elles ont une influence sur les masses plus faibles (typiquement inférieur à 1kg). Cela explique pourquoi nous avons choisi une masse de 1kg pour vérifier la loi harmonique.

3 Limite de l'approximation aux "petits angles"

3.1 Mesure

a)

| | | | | | | | | |
|-----------------------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|
| θ (en degré) | | | | | | | | |
| T (en secondes) | | | | | | | | |
| écart relatif expérimental (en %) | | | | | | | | |
| écart relatif théorique (en %) | | | | | | | | |

b) voir annexe

3.2 Théorie

a) voir tableau précédent. Pour déterminer T de manière théorique nous utilisons la formule $T = \frac{2\pi}{\omega} = T_0 \times (1 + \frac{1}{4}\sin^2(\frac{\theta_0}{2}) + \frac{9}{64}\sin^4(\frac{\theta_0}{2}) + \dots)$ nous utilisons un tableur pour faire ces calculs.

b) voir annexe.

3.3 Limites d'un modèle

Nous remarquons que $T > T_0$ pour toutes les mesures. Ainsi $\frac{|T - T_0|}{T_0} = n\% \Leftrightarrow T = \frac{n\%}{100} \times T_0 + T_0$

Électromagnétisme : Vibrations transverses d'une corde

Objectif

Nous allons mettre en évidence l'existence d'ondes stationnaires de vibration transverse de la corde de longueur infinie L tendue et excitée par un vibreur électromagnétique. Nous allons vérifier la validité de la loi $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$, où c est la célérité des ondes transverses de la corde, T_0 la tension de la corde, μ sa masse linéique. Enfin, nous étudierons les résonances de ce système.

1 Description théorique

1.1 Distance entre deux ventres

Soit l'équation d'onde :

$$u(x, t) = a(x)e^{i\omega t}$$

avec $a(x) = A_1 e^{jk_0 x} + A_2 e^{-jk_0 x}$. La distance entre deux ventres est indépendante du temps puisque l'onde se propage. Afin de déterminer cette distance d , nous pouvons donc travailler uniquement sur $a(x)$. La position d'un ventre est un extremum, donc $\frac{d}{dx}a(x) = 0$.

De plus, la condition à la limite $x = 0$ impose $A_2 = -A_1$. Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(A_1 e^{jk_0 x} - A_1 e^{-jk_0 x}) = 0 &\Rightarrow A_1 j k_0 e^{jk_0 x} - A_1 (-j k_0) e^{-jk_0 x} = 0 \\ &\Rightarrow (A_1 j k_0)(e^{jk_0 x} + e^{-jk_0 x}) = 0 \\ &\Rightarrow e^{jk_0 x} + e^{-jk_0 x} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{e^{jk_0 x} + e^{-jk_0 x}}{2} = 0 \\ &\Rightarrow \cos(k_0 x) = 0 \\ &\Rightarrow k_0 x = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Soient x et x' les positions de deux ventres de vibration successifs, telles que

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2k_0} [2(n + 1) + 1] \\ x' = \frac{\pi}{2k_0} [2n + 1] \end{cases}$$

Désignons par d la plus petite distance séparant deux ventres de vibration. Donc

$$d = x - x' = \frac{\pi}{2k_0} [2n + 3 - 2n - 1] = \frac{2\pi}{2k_0}$$

$$d = \frac{\lambda_0}{2} \text{ où } \lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$$

1.2 Excitation à déplacement imposé

Soit l'équation d'onde

$$u(x, t) = \mathcal{R}(u(x, t)) = A \frac{\sin(k_0 x)}{\sin(k_0 L)} = A \frac{\sin(k_0 x)}{\sin(k_0 L)} \cos(\omega_0 t)$$

L'amplitude du déplacement de la corde est maximal si et seulement si $\sin(k_0 L)$ est nul. Donc $\sin(k_0 L) = 0 \Rightarrow k_0 L = n\pi$, or $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ et $\lambda_0 = \frac{c}{f_0}$. Donc $k_0 = \frac{2\pi f_0}{c}$. Nous avons donc

$$\frac{2\pi f_0 L}{c} = n\pi \Rightarrow f_0 = n \frac{c}{2L}$$

1.3 Excitation à force imposée

Soit l'équation d'onde

$$u(x, t) = \mathcal{R}(u(x, t)) = -\frac{F}{T_0} \frac{\sin(k_0 x)}{\cos(k_0 L)} \cos(\omega_0 t)$$

L'amplitude du déplacement à travers la corde est maximale si et seulement si $\cos(k_0 L)$ est nul. Donc $\cos(k_0 L) = 0 \Rightarrow k_0 L = (\frac{2n-1}{2})\pi, \forall n \geq 1$, or $k_0 = \frac{2\pi f_0}{c}$, d'après ce qui précède nous avons

$$\frac{2\pi f_0 L}{c} = (\frac{2n-1}{2})\pi \Rightarrow \frac{2f_0 L}{c} = n - \frac{1}{2} \Rightarrow f_0 = (n - \frac{1}{2}) \frac{c}{2L}$$

2 Expérience

2.1 Masse linéique de la corde

Nous avons mesuré la longueur l de la corde, sans l'étirer, ainsi que sa masse, puis nous en avons déduit sa masse linéique par la formule $\mu = \frac{m}{l}$. Nous avons relevé les résultats suivants : la longueur de la corde est $l = 1.65 \pm 10^{-2} m$. L'incertitude liée à la mesure de la longueur est de l'ordre du centimètre. En effet, bien que la règle soit graduée en millimètre, nous devons prendre en compte le fait que la corde est peut-être trop tendue, ou pas assez.

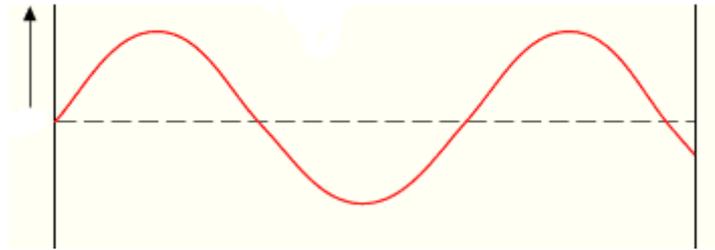
Nous avons relevé la masse de la corde $m = (8.9 \pm 10^{-1}) \times 10^{-3} kg$. L'incertitude liée à la pesée est de l'ordre du dixième de gramme car la balance n'affiche qu'une seule décimale.

L'incertitude sur la masse linéique découle de la formule

$$\Delta\mu = \left| \frac{\partial\mu}{\partial m} \right| \Delta m + \left| \frac{\partial\mu}{\partial l} \right| \Delta l$$

Après application numérique nous avons : $\mu = (5.4 \pm 0.06) \times 10^{-3} kg.m^{-1}$.

2.2 Caractère transverse des ondes



Nous pouvons remarquer que la déformation du milieu est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde. L'onde est donc transverse.

2.3 Ventres, noeuds et longueur d'onde

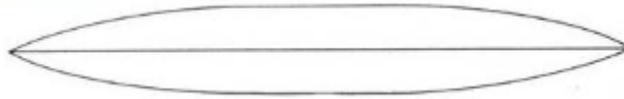


FIGURE 1 – 1 ventre à 90 cm, aucun noeud, $\lambda = 332\text{cm}$

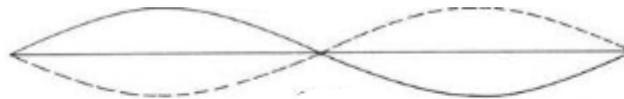


FIGURE 2 – 2 ventres à 43 cm et 130 cm, 1 noeud à 90 cm, $\lambda = 164\text{cm}$



FIGURE 3 – 3 ventres à 27 cm, 87 cm et 143 cm, 2 noeud à 59 cm et 116 cm, $\lambda = 107\text{cm}$

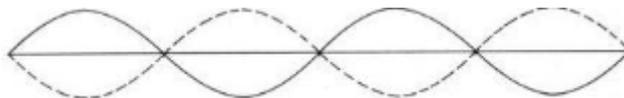


FIGURE 4 – 4 ventres à 20 cm, 68 cm, 109 cm et 149 cm, 3 noeud à 45 cm, 90 cm et 130 cm, $\lambda = 78\text{cm}$

2.4 Longueurs d'onde à la résonance

Avant nos manipulations, nous avons mesuré la longueur L de la corde tendue, soit la partie située entre le vibreur et la poulie, ainsi, nous trouvons $L = (1.70 \pm 10^{-3})\text{m}$.

Nous avons effectué un relevé de fréquence de résonance pour plusieurs nombre de ventres et en pendant à la corde différentes masses. Les mesures sont visibles en annexe.

Détermination de la célérité de l'onde D'une part, nous avons déduit de notre relevé de fréquence les périodes T associées par la relation $T = \frac{1}{f}$. D'autre part, nous avons déterminé les longueurs d'ondes associées avec la relation $\lambda_0 = \frac{2L}{n}$. Ainsi dans notre expérience, $\lambda_0 = \frac{3.4}{n}$.

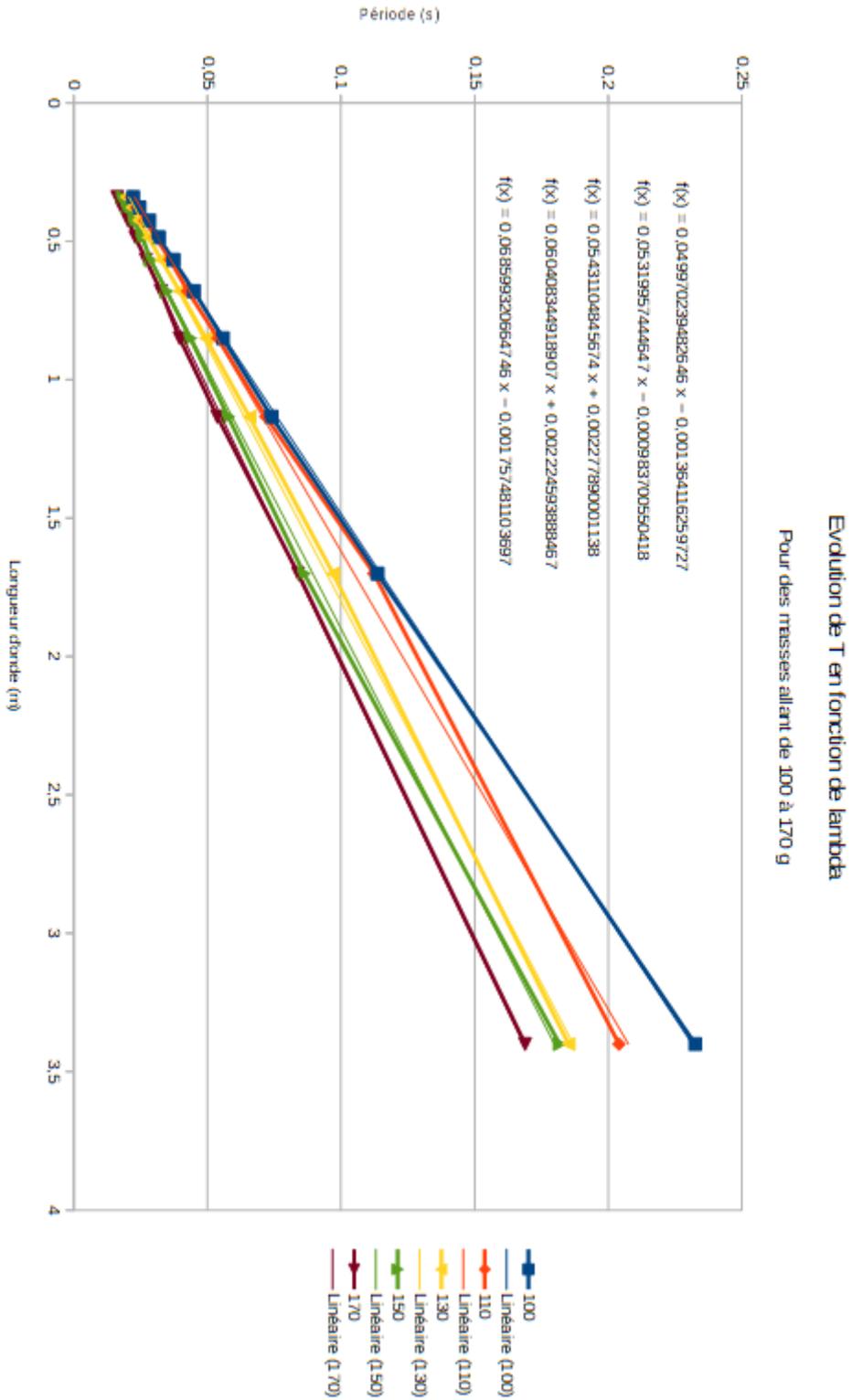
Nous avons tracé les courbes $T = g(\lambda)$ associées aux cinq masses considérées durant le TP et les avons faites figurer sur le même graphes. Les valeurs des couples (T, λ) sont en annexe.

Nous pouvons en déduire les valeurs de la célérité de l'onde en considérant les courbes comme étant des droites linéaires. Alors, nous avons la relation $T = a\lambda$, telle que $a = \frac{1}{c}$ où c est la célérité de l'onde en question.

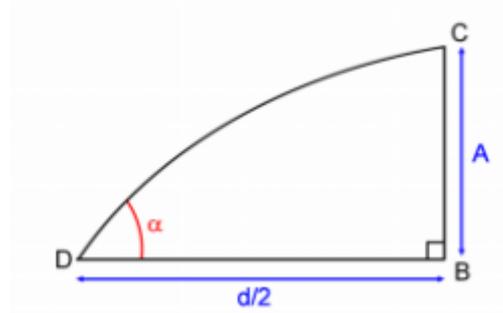
Pour déterminer la pente de a de chacune des droites obtenues, et ainsi accéder aux différentes célérités nous avons utilisé la formule suivante :

$$a = f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \text{ avec } f(x_i) = f(\lambda_i) = T_i$$

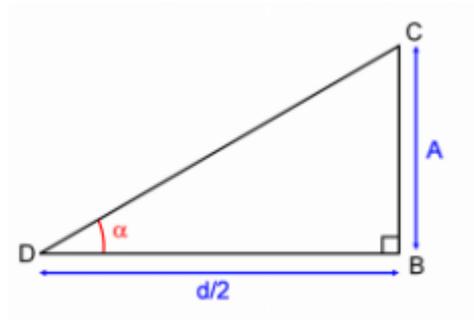
Nous avons ensuite pris la valeur moyenne des pentes, pour chacune des courbes, afin d'avoir une meilleure approximation du coefficient directeur et donc de la célérité. Nous pouvons comparer ces valeurs avec l'équation de la courbe de tendance et voir qu'elles sont cohérentes. Les couples masse célérités sont visibles en annexes.



Angle entre la corde et l'horizontale Si le nombre de ventres est proche ou égal à 1 alors l'angle entre la corde et l'horizontale est important. A contrario, plus le nombre de ventres est grand, plus cet angle est petit devant l'unité. Considérons un grossissement au niveau d'un noeud.



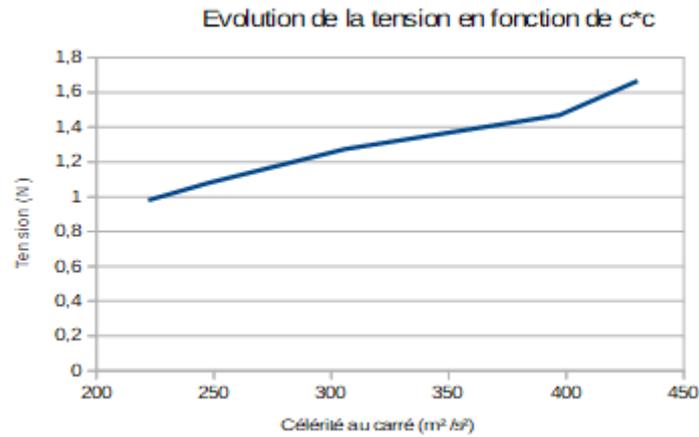
A la résonance, pour un nombre de ventres suffisamment important, nous pouvons considérer que l'angle α est petit devant l'unité. La courbe décrite par l'équation d'onde au voisinage d'un noeud peut alors être figurée de la manière suivante



Nous pouvons alors remarquer que $\alpha \sim \tan(\alpha) = A \frac{2}{d} = \frac{4A}{\lambda_n}$ où A désigne l'amplitude de l'onde et d la distance entre deux noeuds (ou ventre), qui vaut $\frac{\lambda_n}{2}$. Or l'approximation $\alpha \sim \tan(\alpha)$ n'est valable que si $\alpha \ll 1$, c'est à dire si $\tan(\alpha) \ll \tan(1) = 1.56$. Autrement dit, tant que $4A > \frac{3}{2}\lambda_n$, l'angle entre la corde et l'horizontale reste grand.

2.5 Vérification de la Loi $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$

Concernant les valeurs des tensions, nous devons les déduire des valeurs des masses. Or pour convertir une masse m , en kilogramme, en une tension T_0 en newton nous utilisons la relation $T_0 = mg$ avec $g = 9.8 \text{ N.kg}^{-1}$, plus précise que $g = m \times 10^{-1}$.



Nous pouvons assimiler l'évolution de la tension T_0 en fonction de c^2 à une droite linéaire.

Nous pouvons déduire la valeur de la masse linéique μ à partir de cette courbe puisqu'elle correspond au coefficient directeur de la droite. Nous déterminons la pente de manière analogue à la partie précédente nous avons donc

$$\mu = f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \text{ avec } f(x_i) = f(c_i^2) = T_0$$

Nous prenons la valeur moyenne des pentes, ce qui nous donne une approximation du coefficient directeur, nous arrivons à $\mu_2 = (3.09 \pm 0.05) \times 10^{-3} kg.m^{-1}$, la valeur théorique attendue est $\mu_1 = (4.00 \pm 0.08) \times 10^{-3} kg.m^{-1}$. Nous avons donc un écart relatif de 23 %, les deux valeurs ne sont pas trop éloignées puisqu'elles restent du même ordre de grandeur, le gramme par mètre. L'écart constaté peut s'expliquer par les interférences durant les manipulations et les erreurs humaines. Les écarts sont amplifiés par le fait que l'on procède par dérivée discrète pour parvenir à ce résultat. Nous pouvons donc admettre que la loi est valide.

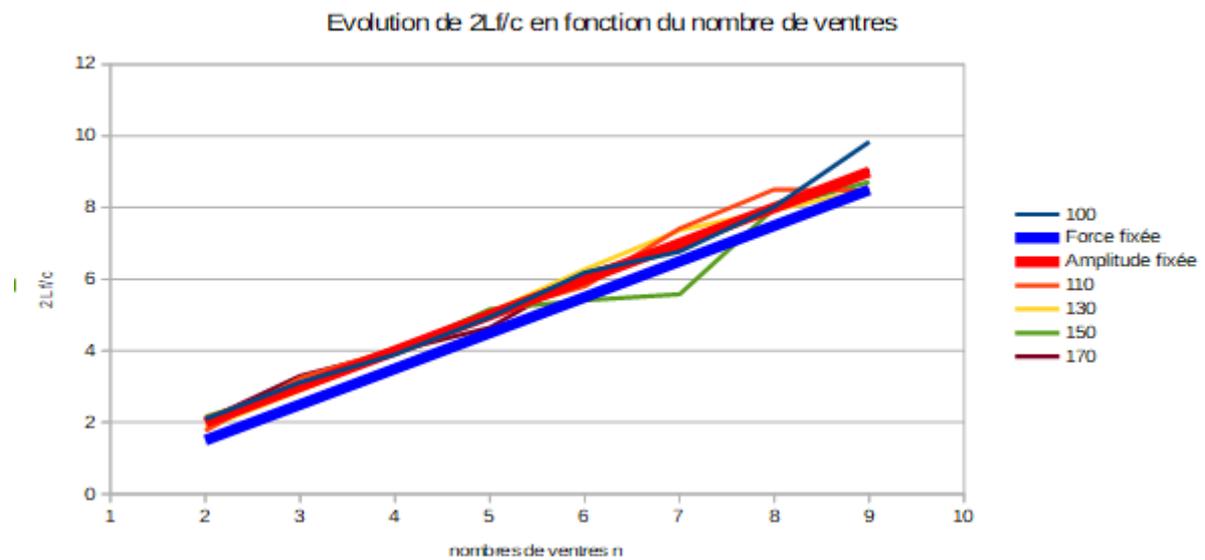
2.6 Résonance et type d'excitation

Pour déterminer le type d'excitation imposé par le vibreur, nous avons dû faire un comparatif des valeurs données par la formule

$$\frac{2Lf_n}{c}$$

En effet, si le type d'excitation est à déplacement imposé, alors $\frac{2Lf_n}{c} = n$. Si c'est une excitation à force imposée, alors $\frac{2Lf_n}{c} = n - \frac{1}{2}$.

Les valeurs permettant de tracer ce graphe sont dans l'annexe f_n est mesuré dans la recherche des résonances tout comme les valeurs de c .



Nous pouvons constater que toutes nos courbes expérimentales sont confondues avec notre courbe théorique d'Amplitude fixée (en rouge) hormis quelques valeurs. La courbe de force fixée est quand a elle plus basse que les autres courbes. Nous en déduisons donc que le vibreur impose à la corde une excitation à amplitude fixée.

| Étude de la résonance | | | | | | | | | | |
|---|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Longueur de la corde tendue $L : 170 \pm 1mm$ | | | | | | | | | | |
| Nombres de noeuds | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| Longueur d'onde (m) | 0,34 | 0,38 | 0,43 | 0,49 | 0,57 | 0,68 | 0,85 | 1,13 | 1,70 | 3,40 |
| Masse du pendule 100 g | | | | | | | | | | |
| Fréquence(Hz) | 44.9 | 40.6 | 35.3 | 31.4 | 26.8 | 22.2 | 17.9 | 13.5 | 8.8 | 4.4 |
| Période (s) | 0,022 | 0,024 | 0,028 | 0,032 | 0,037 | 0,045 | 0,056 | 0,074 | 0,114 | 0,233 |
| Pente $T = f(\lambda)$ | Moyenne : 0.067 | 0,07 | 0,07 | 0,06 | 0,07 | 0,07 | 0,06 | 0,07 | 0,07 | |
| Masse du pendule 110 g | | | | | | | | | | |
| Fréquence (Hz) | 46.3 | 42.4 | 37.6 | 32.5 | 27.7 | 23.3 | 18.5 | 13.9 | 8.9 | 4.9 |
| Période (s) | 0,022 | 0,024 | 0,027 | 0,031 | 0,036 | 0,043 | 0,054 | 0,072 | 0,112 | 0,204 |
| Pente $T = f(\lambda)$ | Moyenne : 0.064 | 0,06 | 0,07 | 0,07 | 0,06 | 0,06 | 0,06 | 0,07 | 0,06 | |
| Masse du pendule 130 g | | | | | | | | | | |
| Fréquence (Hz) | 51.1 | 45.8 | 41.3 | 35.8 | 30.5 | 25.2 | 20.2 | 15.2 | 10.3 | 5.4 |
| Période (s) | 0,020 | 0,022 | 0,024 | 0,028 | 0,033 | 0,040 | 0,050 | 0,066 | 0,097 | 0,185 |
| Pente $T = f(\lambda)$ | Moyenne : 0.057 | 0,05 | 0,06 | 0,06 | 0,06 | 0,06 | 0,06 | 0,06 | 0,05 | |
| Masse du pendule 150 g | | | | | | | | | | |
| Fréquence (Hz) | 54.5 | 50.0 | 44.0 | 38.7 | 34.8 | 28.8 | 22.9 | 17.3 | 11.6 | 5.5 |
| Période (s) | 0,018 | 0,020 | 0,023 | 0,026 | 0,029 | 0,035 | 0,044 | 0,058 | 0,086 | 0,182 |
| Pente $T = f(\lambda)$ | Moyenne : 0.050 | 0,05 | 0,05 | 0,04 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | |
| Masse du pendule 170 g | | | | | | | | | | |
| Fréquence (Hz) | 61.2 | 55.6 | 49.0 | 43.2 | 37.0 | 30.6 | 25.2 | 18.6 | 11.9 | 5.9 |
| Période (s) | 0,016 | 0,018 | 0,020 | 0,023 | 0,027 | 0,033 | 0,040 | 0,054 | 0,084 | 0,169 |
| Pente $T = f(\lambda)$ | Moyenne : 0.048 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,04 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | |

| | | | | | |
|--|-----------------|-------|-------|-------|-------|
| Masse (g) | 100 | 110 | 130 | 150 | 170 |
| Célérité ($m.s^{-1}$) | 14.9 | 15.8 | 17.5 | 19.9 | 20.7 |
| Tension (N) | 0.98 | 1.08 | 1.27 | 1.47 | 1.67 |
| Célérité au carré ($m^2.s^{-2}$) | 222.05 | 247.3 | 305.8 | 397.3 | 430.4 |
| Pente de $T = f(c^2)$ | Moyenne : 0.003 | 0.004 | 0.003 | 0.003 | |
| Masse linéique théorique ($kg.m^{-1}$) | Moyenne : 0.004 | 0.004 | 0.004 | 0.004 | 0.004 |

Électromagnétisme : Magnétostatique

1 Champ magnétique créé par une distribution de courant

1.1 Champ magnétique en un point de l'axe d'une spire circulaire

En appliquant la loi de Biot et Savart, l'expression du champ magnétique \vec{B} au point P d'abscisse x est dirigé suivant l'axe Ox et a pour valeur

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \beta$$

où μ_0 est la permittivité du vide, I l'intensité du courant dans la spire (en ampère) et R le rayon de la spire (en mètre). De plus β est l'angle sous lequel, du point P , on voit le rayon R de la spire. Ainsi en utilisant la trigonométrie

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

Si la bobine contient N spires, l'expression précédente est multipliée par N .

1.2 Champ magnétique créé en un point de son axe par un solénoïde de longueur L

Le champ magnétique \vec{B} orienté selon l'axe (Ox), défini par son abscisse x par les angles β_1 et β_2 a pour norme

$$B(M) = \mu_0 \frac{nI}{2} (\cos(\beta_1) - \cos(\beta_2))$$

avec n le nombre de spire par unité de longueur et I l'intensité du courant. Nous pouvons noter que si la longueur L du solénoïde est très supérieure à son diamètre et si le point M se trouve dans la région centrale on a

$$B \cong \mu_0 n I$$

Nous retrouvons le champ magnétique créé par un solénoïde de longueur infinie.

1.3 Théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère permet d'exprimer la circulation du vecteur \vec{B} sur un contour géométrique fermé sur lui-même et placé dans le champ magnétique. La circulation C sur un contour fermé Γ est définie par

$$C = \int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$C = \mu_0 \sum I = \mu_0 N I$$

2 Matériel - Mesure de champ magnétique

Pour mesurer nos champs magnétiques nous utilisons un teslamètre. Cet appareil est une sonde à effet hall, elle est composée d'un ruban métallique parcouru par un courant d'intensité I constante qui est placé dans le

champ \vec{B} à mesurer. Ce champ exerce une action électromagnétique sur des charges conductrices en mouvement. Leur trajectoire moyenne subit alors une inflexion dans le plan perpendiculaire à \vec{B} . Ainsi il en résulte une dissymétrie de répartition des charges dans le volume du ruban, ce qui va provoquer le champ de Hall. En régime permanent l'action du champ magnétique électrostatique \vec{E}_H sur les porteurs de charges compense celle du champ magnétique \vec{B} . L'existence de \vec{E}_H crée une différence de potentiel U_H .

Détaillons la mesure du champ électrique de Hall, définissons le vecteur densité de courant $\vec{j} = -ne\vec{v}$. Nous pouvons en déduire $\vec{v} = -\frac{\vec{j}}{ne}$.

Ainsi la force s'exerçant sur une particule chargée dans un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) , cette force est la force de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

ici il y a seulement la composante magnétique c'est donc la force de Laplace

$$\vec{F}_{Lap} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) = -e[-\frac{j\vec{e}_x}{ne} \wedge B\vec{e}_z] = -\frac{jB}{n}\vec{e}_y$$

Comme décrit précédemment, il y a création d'un champ électrique dit de Hall, \vec{E}_H , ainsi la force associée compense la force de Laplace. Nous avons donc en régime permanent $\vec{F}_H + \vec{F}_L = \vec{0}$ et de ce fait, les électrons se déplacent toujours parallèlement à Ox puisque \vec{j} est parallèle à \vec{e}_x . Ainsi

$$\vec{F}_H + \vec{F}_L = \vec{0} \Leftrightarrow q\vec{E}_H + q\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

$$\vec{E}_H = -\frac{jB}{ne}\vec{e}_y$$

Nous pouvons donc déterminer $U_H = V_N - V_M = \int_M^N dV$ or $\vec{E}_H = -\vec{grad}(V) = -\frac{dV}{dy}\vec{e}_y \Rightarrow dV = -\vec{E}_H dy\vec{e}_y$.

Nous avons donc $U_H = \frac{1}{neh}IB$, la mesure de U_H et I permet donc d'obtenir B .

3 Manipulation

3.1 Mise en fonctionnement du teslamètre

Pour réaliser les nombreuses mesures de ce TP nous mesurons à chaque fois la valeur à vide indiquée par le teslamètre, c'est à dire la valeur sans aucun champ magnétique. Cette valeur à vide est une erreur systématique du teslamètre, nous la retrancherons à nos mesures lorsque celle-ci sera supérieure à l'incertitude des mesures. Ainsi, nous allons déterminer l'incertitude ΔB du champ magnétique. Lors de ce TP nous avons uniquement utilisé le calibre $20mT$. L'incertitude de notre teslamètre est donc de 2% du champ magnétique. Nous devons rajouter à cette incertitude 3 unités de résolutions (c'est à dire $0.1mT$).

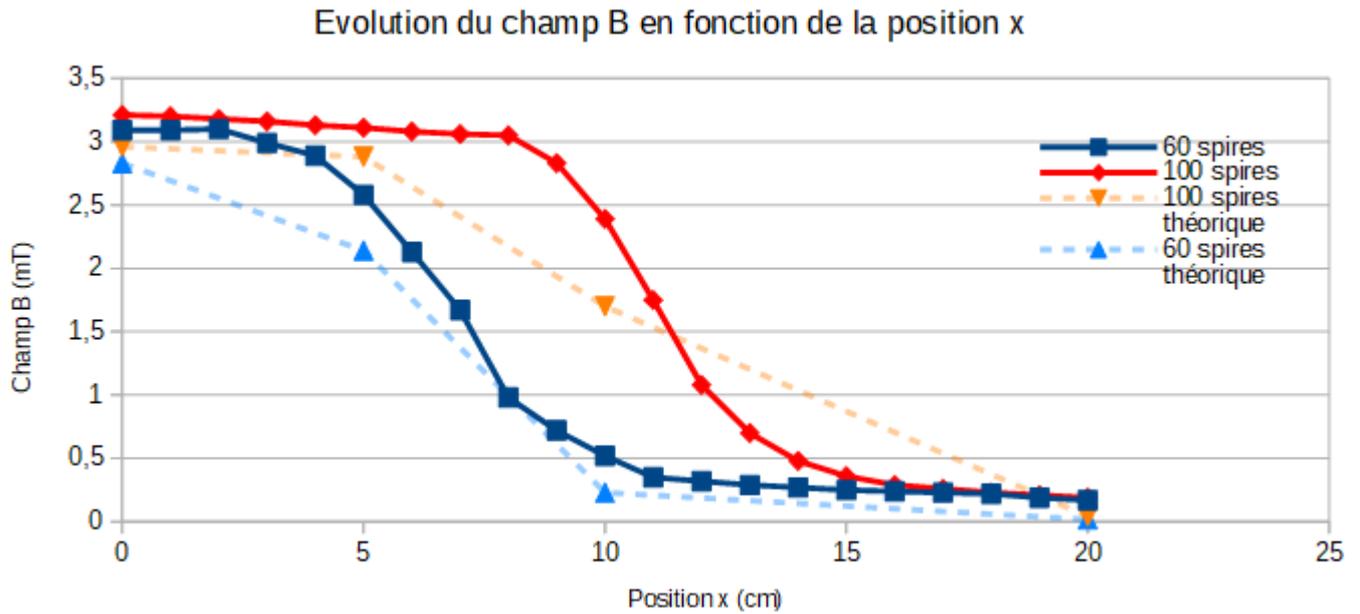
L'incertitude du champ magnétique ΔB est donc

$$\Delta B = 0.02B + 0.3 \text{ en } mT$$

3.2 Mesures

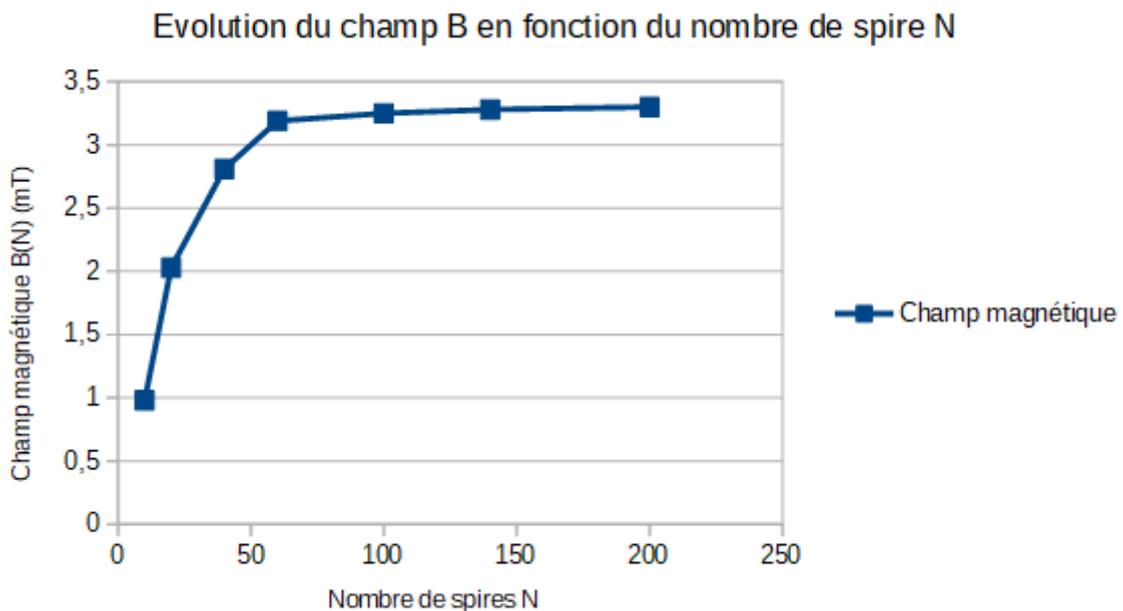
Nous nous plaçons dans le premier cas, la bobine est alimenté avec un courant de $5A$, nous nous plaçons successivement à $N = 60$ puis $N = 100$ puis nous faisons les mesures pour x allant de $0cm$ jusqu'à $20cm$.

Nous relevons les mesures visibles en annexe. Et nous traçons le graphique suivant :



Nous nous plaçons ensuite dans le deuxième cas, la bobine est alimenté avec un courant de $5A$, nous changeons désormais le nombre de spire variant de 10 à 200 spires.

Nous relevons les mesures visibles en annexe. Et nous traçons le graphique suivant :



3.3 Exploitation

Nous cherchons à exprimer théoriquement l'expression de la norme du champ magnétique \vec{B} suivant l'axe (Ox) au point M pour un enroulement de longueur L . Pour cela, nous nous aidons de la formule donnée dans le fascicule de TP

$$B(M) = \mu_0 \frac{nI}{2} (\cos(\beta_1) - \cos(\beta_2))$$

Chaque angle est repéré sur la figure 2 du fascicule de TP.

Nous pouvons ainsi déterminer l'expression des cosinus des deux angles β_1 et β_2 . On définit l'angle α , comme l'angle complémentaire de l'angle β_2 afin d'obtenir un angle égal à π rad sur l'axe (Ox).

Ainsi nous avons $\alpha = \pi - \beta_2$, nous obtenons

$$\cos(\beta_2) = \cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi)\cos(\alpha) + \sin(\pi)\sin(\alpha) = -\cos(\alpha)$$

En utilisant les formules de trigonométrie et le théorème de Pythagore nous pouvons exprimer $\cos(\alpha)$ en fonction de x et de L

$$\cos(\alpha) = \frac{\frac{L}{2} + x}{\sqrt{R^2 + (\frac{L}{2} + x)^2}}$$

Nous pouvons en déduire une expression de $\cos(\beta_2)$

$$\cos(\beta_2) = -\frac{\frac{L}{2} + x}{\sqrt{R^2 + (\frac{L}{2} + x)^2}}$$

Par un raisonnement analogue avec l'angle β_1 nous obtenons l'expression suivante

$$\cos(\beta_1) = \frac{\frac{L}{2} - x}{\sqrt{R^2 + (\frac{L}{2} - x)^2}}$$

Nous remplaçons dans l'expression du champ magnétique en fonction de β_1 et β_2 par les expressions que nous venons d'établir, nous obtenons alors

$$B(M) = \mu_0 \frac{nI}{2} \left(\frac{\frac{L}{2} - x}{\sqrt{R^2 + (\frac{L}{2} - x)^2}} + \frac{\frac{L}{2} + x}{\sqrt{R^2 + (\frac{L}{2} + x)^2}} \right)$$

Or nous savons que le nombre de spires noté n par unité de longueur se définit par le rapport du nombre de spires du solénoïde N sur sa longueur totale L ainsi $n = \frac{N}{L}$. Nous obtenons donc

$$B(M) = \mu_0 \frac{NI}{2L} \left(\frac{\frac{L}{2} - x}{\sqrt{R^2 + (\frac{L}{2} - x)^2}} + \frac{\frac{L}{2} + x}{\sqrt{R^2 + (\frac{L}{2} + x)^2}} \right)$$

Grâce à cette formule ci-dessus, nous pouvons calculer les différentes valeurs théoriques du champ magnétique B pour plusieurs positions x .

Nous déterminons L pour $N = 60$ spires et $N = 100$ spires, nous savons que pour $N = 200$ spires, nous avons $L = 412\text{mm}$ donc nous pouvons en déduire que pour 60 spires, $L = \frac{60 \times 412}{200} = 123,6\text{mm}$ donc $L = 0,124\text{m}$.

Pour $N = 100$ spires, $L = \frac{100 \times 412}{200} = 206\text{mm}$ donc $L = 0,206\text{m}$.

Ainsi, les valeurs théoriques pour certaines valeurs de x sont représentées dans les tableaux ci-dessous. Les valeurs théoriques sont également visibles sur le graphique. De plus, nous devons tenir compte de l'erreur systématique de mesure du teslamètre lorsque celle-ci est supérieure aux incertitudes sur B . En moyenne notre erreur systématique est de $0,18\text{mT}$ pour $N = 60$ spires et $0,12\text{mT}$ pour $N = 100$ spires.

Pour $N = 60$ spires.

| | | | | |
|------------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Position x (en cm) | 0 | 5 | 10 | 20 |
| B expérimental (en mT) | $3,09 \pm 0,36$ | $2,58 \pm 0,35$ | $0,52 \pm 0,31$ | $0,17 \pm 0,30$ |
| B théorique (en mT) | 2,83 | 2,14 | 0,23 | 0,0174 |

Pour $N = 100$ spires.

| | | | | |
|------------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Position x (en cm) | 0 | 5 | 10 | 20 |
| B expérimental (en mT) | $3,21 \pm 0,36$ | $3,11 \pm 0,36$ | $2,39 \pm 0,35$ | $0,19 \pm 0,30$ |
| B théorique (en mT) | 2,96 | 2,88 | 1,7 | 0,043 |

Nous remarquons que nos valeurs expérimentales comptées avec leurs incertitudes sont tout de même proches de nos valeurs théoriques calculées. Nous pouvons constater donc que le modèle expérimental utilisé lors de cette expérience semble relativement précis et juste. Cependant, dans la partie centrale des enroulements, des écarts plus importants entre les valeurs théoriques et les valeurs expérimentales sont remarquables. Elles sont dues à l'incertitude sur la position x causées par la précision du matériel et les erreurs humaines.

Grâce à l'expression du champ $B(x)$ établie plus et en considérant $x = 0$, nous recherchons une condition afin que le solénoïde puisse être considéré comme "infiniment long".

$$B(x = 0) = \mu_0 \frac{NI}{2L} \frac{L}{\sqrt{R^2 + (\frac{L}{2})^2}}$$

Le solénoïde est considéré comme infini si sa longueur L est très supérieure à son diamètre. La condition sur L et R recherchée pour que le solénoïde soit infini est donc $L \gg 2R$ donc $L + 2R \rightarrow L$. Nous obtenons donc l'expression suivante

$$B(x = 0) \cong \mu_0 \frac{NI}{L}$$

En utilisant le fait que $n = \frac{N}{L}$ nous obtenons $B \cong \mu_0 nI$, cette formule est bien identique à celle du fascicule de TP.

Nous constatons qu'avec les valeurs théoriques, le solénoïde utilisé à un rapport $\frac{N}{L}$ égal à 485,44 spires par mètre avec $N = 100$ spires et $L = 0,206\text{m}$. Ainsi le rapport théorique de $\frac{L}{R}$ vaut $\frac{L}{R} = \frac{0,206}{0,025} = 8,24$.

Grâce à la courbe $B = f(N)$: nous remarquons un palier à partir de $N = 100$, c'est à dire que le champ B se stabilise lorsque $N > 100$. Nous pouvons donc considérer le solénoïde comme infini pour $N = 100$ spires.

Nous avons donc $L = \frac{N}{n}$ avec $N = 100$, d'après la formule que nous avons montré précédemment nous avons $n = \frac{N}{L} = \frac{B}{I\mu_0} \cong 485,42 \pm 57.29$ spires par mètre.

Avec pour $N = 100$ spires, $I = 5A$ et $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$: $B = 3.05 \pm 0.36mT$

Ainsi, nous obtenons $L = 0.21m$ et donc la valeur expérimentale de $\frac{L}{R}$ est égale à

$$\frac{L}{R} = \frac{0.21}{0.025} = 8.40$$

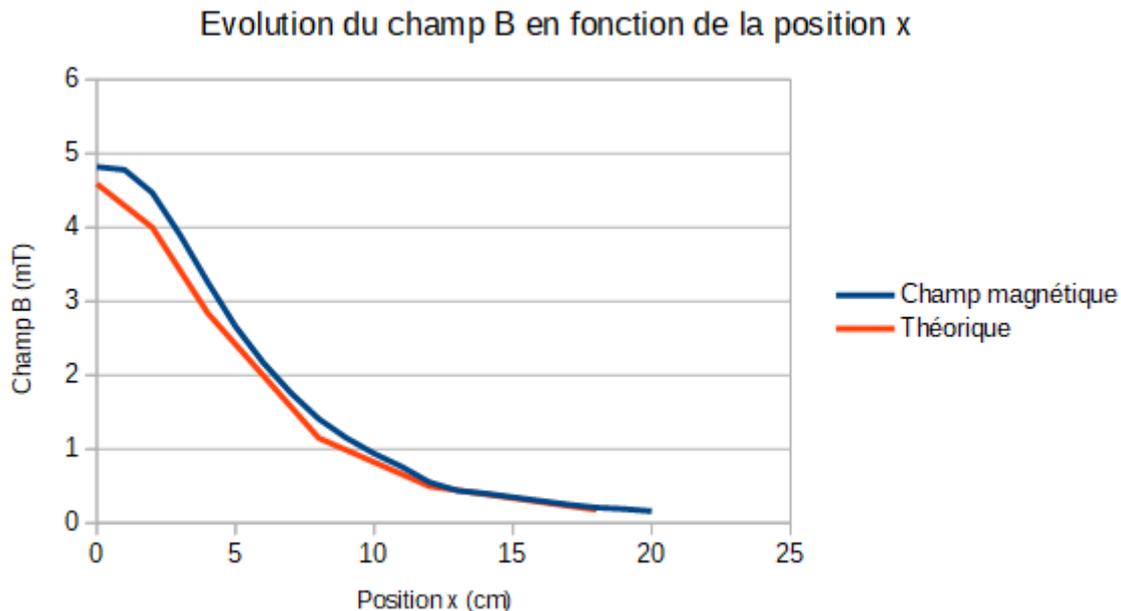
La valeur théorique du rapport $\frac{L}{R}$ est égale à 8,24 et la valeur expérimentale vaut 8.40 , ces deux valeurs sont relativement proches, compte tenu des incertitudes de mesure.

L'erreur relative correspondante est $\Delta \frac{L}{R} = \frac{8.40 - 8.24}{8.24} = 0.02$

Nous obtenons une erreur relative de 2% entre la condition expérimentale et la condition théorique, nous pouvons attribuer ce pourcentage d'erreur à la mesure approximative du champ B (matérielles et humaines).

3.4 Etude d'une bobine circulaire

Mesure.



Grâce à cette formule ci-dessous, nous pouvons calculer les différentes valeurs théoriques du champ magnétique B pour plusieurs positions x .

$$B(x) = N\mu_0 \frac{I}{2} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Pour chaque calcul, nous prenons comme valeurs : $N = 95$ spires avec $I = 5A$ et $R = 0,065m$

Ainsi, les valeurs théoriques pour certaines valeurs de x sont représentées dans le tableau ci-dessous. De plus nous devons tenir compte de l'erreur systématique de mesure du teslamètre lorsque celle-ci est supérieure aux incertitudes sur B . Pour la série de mesure à $N = 95$ spires.

| Position x (en cm) | 0 | 2 | 4 | 8 | 12 | 18 |
|-----------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| B expérimental (en mT) | 4.82 ± 0.41 | 4.47 ± 0.40 | 3.26 ± 0.38 | 1.41 ± 0.34 | 0.55 ± 0.32 | 0.21 ± 0.31 |
| B théorique (en mT) | 4,59 | 4,00 | 2,84 | 1,15 | 0,496 | 0,179 |

Nous pouvons remarquer que les valeurs théoriques sont assez proches des valeurs expérimentales, en étant tout de même plus élevées. Ce léger écart est maximal lorsque les x sont très faibles, alors qu'ils sont presque égaux pour les x allant de 8 à 18 cm.

L'extremum est situé en $x = 0$, avec une valeur de $B = 4,59mT$ en théorie et de $B = 4.82 \pm 0.41$ en valeur expérimentale.

Les légères incertitudes sur les mesures peuvent être la cause de ce léger écart.

Nous pouvons conclure que cette estimation théorique des champs n'est possible que lorsque les x sont suffisamment élevés.

4 Théorème d'Ampère

a)

$$C_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{B} d\vec{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0 NI}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

Nous effectuons le changement de variable $x = \frac{R}{\tan(\beta)}$ donc $dx = \frac{-R}{\sin^2(\beta)} d\beta$. De plus lorsque $x \rightarrow +\infty$, $\frac{R}{\tan(\beta)} \rightarrow +\infty$, ainsi $\tan(\beta) = 0^+$ donc $\beta = 0$.

De manière analogue $x \rightarrow -\infty$, $\frac{R}{\tan(\beta)} \rightarrow -\infty$, ainsi $\tan(\beta) = 0^-$ donc $\beta = \pi$.

Nous allons désormais changer la fonction d'intégration :

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0 NI}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} &= -\frac{\mu_0 NI}{2} \frac{R^2}{\left(R^2 + \frac{R^2}{\tan^2(\beta)}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{R}{\sin^2(\beta)} d\beta \\ &= -\frac{\mu_0 NI}{2} \frac{R^2}{R^3 \left(1 + \frac{1}{\tan^2(\beta)}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{R}{\sin^2(\beta)} d\beta \\ &= -\frac{\mu_0 NI}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\tan^2(\beta)}\right)^{\frac{3}{2}}} d\beta \\ &= -\frac{\mu_0 NI}{2} \frac{\tan^3(\beta)}{(\tan^2(\beta) + 1)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sin^2(\beta)} d\beta \\ &= -\frac{\mu_0 NI}{2} \frac{\sin(\beta)}{(\tan^2(\beta) + 1)^{\frac{3}{2}} \cos^3(\beta)} d\beta \\ &= -\frac{\mu_0 NI \sin(\beta)}{2} d\beta \end{aligned}$$

Au final nous avons donc

$$C_1 = \int_{\pi}^0 -\frac{\mu_0 NI \sin(\beta)}{2} d\beta = \mu_0 NI \frac{1}{2} [\cos(\beta)]_{\pi}^0 = \mu_0 NI$$

L'application numérique donne $C_1 = 5.969 \times 10^{-4} T.m$.

b) $C_2 = \sum_{x=-18}^{x=18} \vec{B}(x)\Delta x = 2 \sum_{x=0}^{x=18} \vec{B}(x)\Delta x$ car le champ $B(x)$ est symétrique par rapport au centre ($x = 0$). Nous obtenons donc $C_2 = (6.916 \pm 1.325) \times 10^{-4} T.m$, les deux valeurs sont relativement proches, l'écart relatif est de 16%, nous en déduisons donc que les mesures expérimentales sont en accord avec les valeurs théoriques (compte tenu des incertitudes et des erreurs humaines et matérielles).

$$C_3 = \int_{-\infty}^{-18} B(x)dx + \int_{18}^{+\infty} B(x)dx = 2 \int_{18}^{\infty} B(x)dx \text{ (par symétrie par rapport au centre } x = 0)$$

$$C_3 = \frac{\mu_0 NI}{2} \int_{18}^{\infty} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx. \text{ Nous posons } x = \frac{R}{\tan(\beta)} \text{ de manière analogue à la question a) nous avons}$$

$$C_3 = \mu_0 NI [\cos(\beta)]^0 \Big|_{\arctan(\frac{6,5}{18})}$$

L'application numérique nous donne $C_3 = 3,55 \times 10^{-5} T.m$.

En théorie, nous devrions obtenir $C_1 = C_2 + C_3$, or nous avons $C_2 + C_3 = 7.271 \times 10^{-4} T.m$ et $C_1 = 5,969 \times 10^{-4} T.m$.

Ainsi, nous constatons d'après les résultats précédents que la somme ($C_2 + C_3$) est à supérieur C_1 . De plus les valeurs de C_2 et C_1 sont relativement proches en tenant compte des incertitudes sur les mesures. Également, la valeur de C_3 est négligeable devant celles de C_2 et de C_1 , en effet $C_3 \ll C_2$ et $C_3 \ll C_1$. Nous pouvons donc logiquement négliger cette dernière partie puisqu'elle est bien inférieure à la précédente. Ainsi, pour calculer la circulation de B le long de la bobine, il suffit d'additionner les valeurs expérimentales, en négligeant les valeurs en dehors de la bobine.

5 Bobine de Helmholtz

5.1 Théorie

Une bobine de Helmholtz est une association de deux bobines parcouru par un courant I , de même rayon R et séparées d'une distance R . Par la loi de Biot et Savart chaque bobine crée un champ magnétique.

Pour la bobine centré en $x = +R/2$.

$$B_1(x) = \frac{\mu_0 NI_1 R^2}{2(R^2 + (x - R/2)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Pour la bobine centré en $x = -R/2$.

$$B_2(x) = \frac{\mu_0 NI_2 R^2}{2(R^2 + (x + R/2)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Par le théorème de superposition nous avons

$$B_{tot}(x) = B_1(x) + B_2(x)$$

Nous allons regarder les champs quand $x = 0cm$.

Si les deux courants sont dans même sens nous avons $I_1 = I_2$

$$B_{tot}(x=0) = B_1(x=0) + B_2(x=0) = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mu_0 N I}{R}$$

Nous avons donc présence d'un maximum le champ magnétique quand $x = 0$. Dans notre cas en prenant $N = 95$ spires, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} SI$, $I = 5A$ et $R = 6.5cm$, on trouve $B_{max}(x=0) = 6.57mT$.

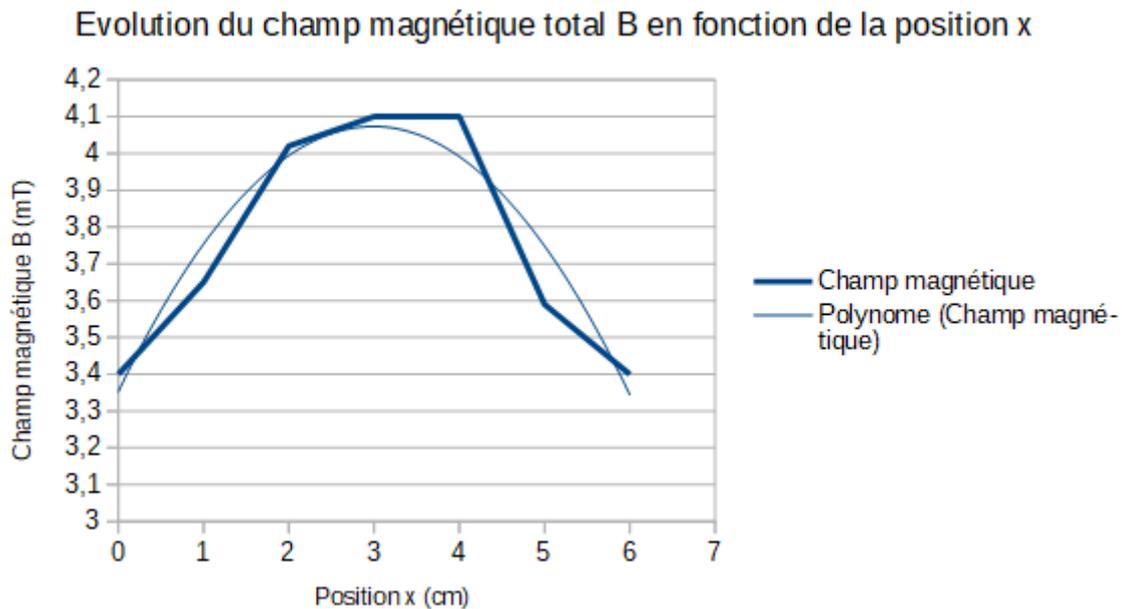
Si les deux courants sont dans le sens opposé nous avons $I_1 = -I_2$ donc

$$B_{tot}(x=0) = \frac{\mu_0 N I}{2} R^2 \left(\frac{1}{(R^2 + \frac{R^2}{4})^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(R^2 + \frac{R^2}{4})^{\frac{3}{2}}} \right) = 0$$

Nous avons donc le champ nul quand $x = 0cm$.

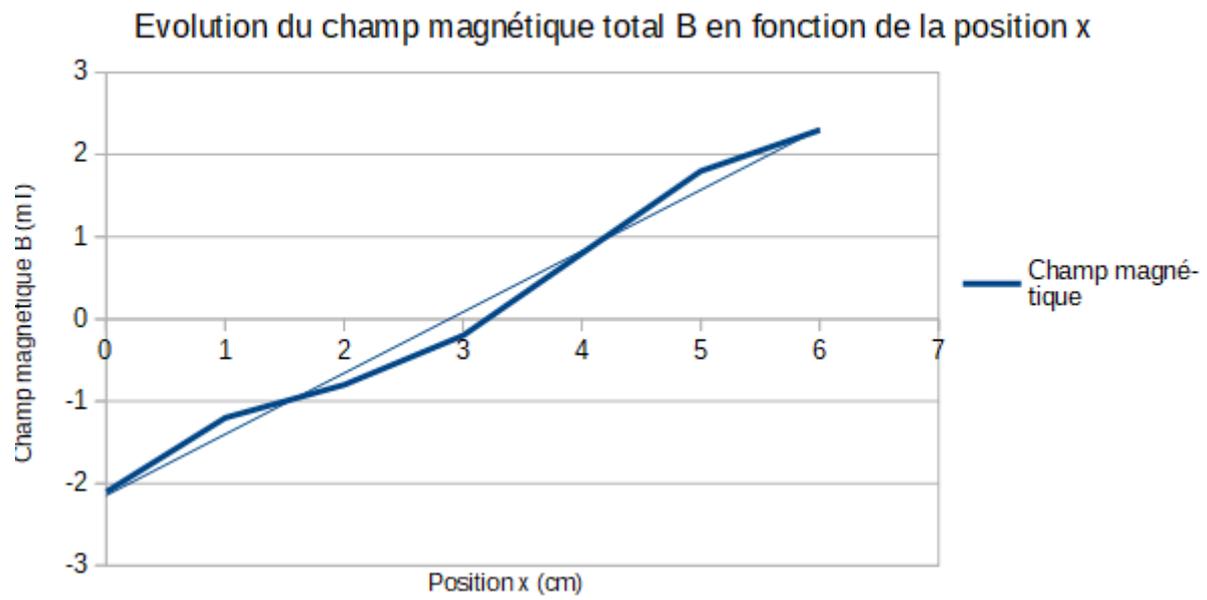
5.2 Mesure

Configuration Helmholtz.



Nous pouvons remarquer que notre maximum est atteint entre $x = 3cm$ et $x = 4cm$ sachant que la bobine a un rayon de $6.5cm$, c'est cohérent avec la théorie de plus ce maximum vaut $4.1 \pm 0.38mT$ nous avons donc une erreur relative de 37% cette erreur est du au fait que nous ne connaissons pas la valeur précise du maximum (elle est entre 3 cm et 4 cm mais nous ne connaissons pas sa valeur, nous aurions dû faire des mesures tous les 0.5 cm au lieu de tout les 1 cm). Le comportement est cependant cohérent avec la théorie.

Configuration anti-Helmholtz.



Nous pouvons remarquer que la courbe passe en 0 entre 3 et 4 cm, ce qui est cohérent avec la théorie.

| Mesure du champ magnétique pour $N = 60$ spires | | |
|---|-----------------------|------------------|
| Position (cm) | Champ magnétique (mT) | Incertitude (mT) |
| 0 | 3.09 | 0.36 |
| 1 | 3.09 | 0.36 |
| 2 | 3.1 | 0.36 |
| 3 | 2.99 | 0.36 |
| 4 | 2.89 | 0.36 |
| 5 | 2.58 | 0.35 |
| 6 | 2.13 | 0.34 |
| 7 | 1.67 | 0.33 |
| 8 | 0.98 | 0.32 |
| 9 | 0.72 | 0.31 |
| 10 | 0.52 | 0.31 |
| 11 | 0.35 | 0.31 |
| 12 | 0.32 | 0.31 |
| 13 | 0.29 | 0.31 |
| 14 | 0.27 | 0.31 |
| 15 | 0.25 | 0.31 |
| 16 | 0.24 | 0.30 |
| 17 | 0.23 | 0.30 |
| 18 | 0.22 | 0.30 |
| 19 | 0.19 | 0.30 |
| 20 | 0.17 | 0.30 |

| Mesure du champ magnétique pour $N = 100$ spires | | |
|--|-----------------------|------------------|
| Position (cm) | Champ magnétique (mT) | Incertitude (mT) |
| 0 | 3.21 | 0.36 |
| 1 | 3.20 | 0.36 |
| 2 | 3.18 | 0.36 |
| 3 | 3.16 | 0.36 |
| 4 | 3.13 | 0.36 |
| 5 | 3.11 | 0.36 |
| 6 | 3.08 | 0.36 |
| 7 | 3.06 | 0.36 |
| 8 | 3.05 | 0.36 |
| 9 | 2.83 | 0.36 |
| 10 | 2.39 | 0.35 |
| 11 | 1.75 | 0.33 |
| 12 | 1.08 | 0.32 |
| 13 | 0.7 | 0.31 |
| 14 | 0.48 | 0.31 |
| 15 | 0.36 | 0.31 |
| 16 | 0.29 | 0.31 |
| 17 | 0.26 | 0.31 |
| 18 | 0.23 | 0.30 |
| 19 | 0.21 | 0.30 |
| 20 | 0.19 | 0.30 |

| Mesure du champ magnétique pour N allant de 10 à 200 spires | | |
|---|-----------------------|------------------|
| Position (cm) | Champ magnétique (mT) | Incertitude (mT) |
| 10 | 0.98 | 0.32 |
| 20 | 2.03 | 0.34 |
| 40 | 2.81 | 0.36 |
| 60 | 3.19 | 0.36 |
| 100 | 3.25 | 0.36 |
| 140 | 3.28 | 0.37 |
| 200 | 3.3 | 0.36 |

| Mesure du champ magnétique pour $N = 60$ spires | | |
|---|-----------------------|------------------|
| La valeur moyenne à vide est de $0.68mT$ elle a donc été retranchée | | |
| Position (cm) | Champ magnétique (mT) | Incertitude (mT) |
| 0 | 4.82 | 0.41 |
| 1 | 4.78 | 0.41 |
| 2 | 4.47 | 0.40 |
| 3 | 3.9 | 0.39 |
| 4 | 3.26 | 0.38 |
| 5 | 2.66 | 0.37 |
| 6 | 2.17 | 0.36 |
| 7 | 1.76 | 0.35 |
| 8 | 1.41 | 0.34 |
| 9 | 1.15 | 0.34 |
| 10 | 0.94 | 0.33 |
| 11 | 0.76 | 0.33 |
| 12 | 0.55 | 0.32 |
| 13 | 0.44 | 0.32 |
| 14 | 0.40 | 0.32 |
| 15 | 0.35 | 0.32 |
| 16 | 0.30 | 0.31 |
| 17 | 0.25 | 0.31 |
| 18 | 0.21 | 0.31 |
| 19 | 0.19 | 0.31 |
| 20 | 0.16 | 0.31 |

| Mesure du champ magnétique en configuration Helmholtz. | | |
|--|-----------------------|------------------|
| Position (cm) | Champ magnétique (mT) | Incertitude (mT) |
| 0 | 3.4 | 0.37 |
| 1 | 3.65 | 0.37 |
| 2 | 4.02 | 0.38 |
| 3 | 4.1 | 0.38 |
| 4 | 4.1 | 0.38 |
| 5 | 3.59 | 0.37 |
| 6 | 3.4 | 0.37 |

| Mesure du champ magnétique en configuration anti-Helmholtz. | | |
|---|-----------------------|------------------|
| Position (cm) | Champ magnétique (mT) | Incertitude (mT) |
| 0 | -2.1 | 0.26 |
| 1 | -1.2 | 0.28 |
| 2 | -0.8 | 0.28 |
| 3 | -0.2 | 0.30 |
| 4 | 0.8 | 0.32 |
| 5 | 1.80 | 0.34 |
| 6 | 2.30 | 0.35 |

Thermodynamique : Pompe à chaleur et Calorimétrie

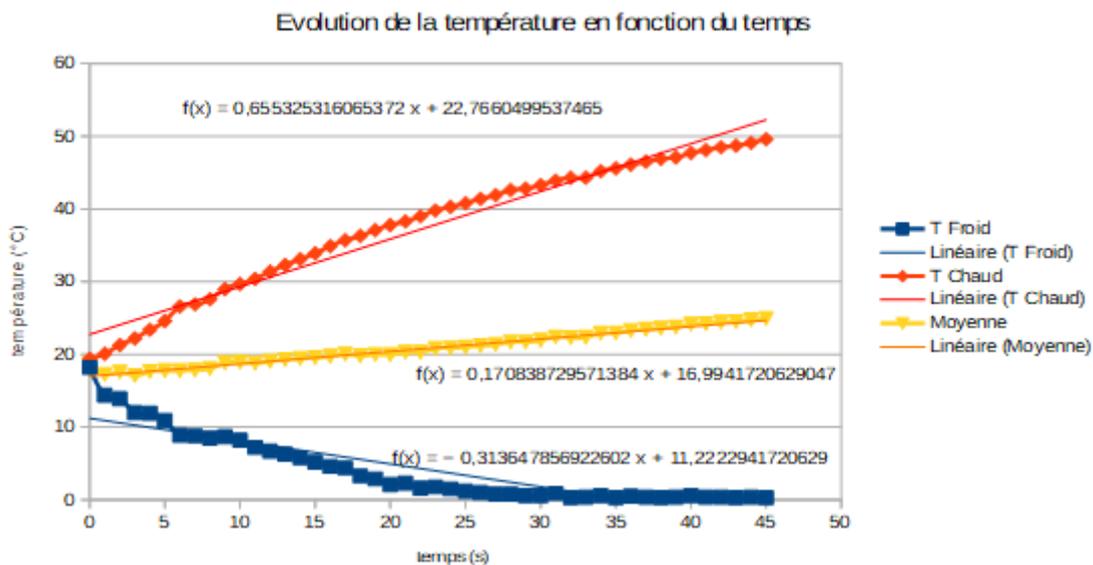
6 Pompe à chaleur

6.1 Introduction

L'intérêt de ce TP est de comprendre le fonctionnement d'une pompe à chaleur et de calculer son efficacité. L'étude se divise en deux parties, tout d'abord une analyse du régime transitoire puis une analyse du régime permanent. Pour commencer l'expérience nous remplissons les deux réservoirs d'eau de 4 litres ce qui permet à l'évaporateur et au condenseur d'être immergés. Nous commençons l'expérience lorsque les 2 réservoirs ont une température approximativement égale.

6.2 Régime transitoire.

Nous allons désormais observer les variations de températures de la source chaude et de la source froide. Nous mesurons toutes les minutes jusqu'à stabilisation (45 minutes).



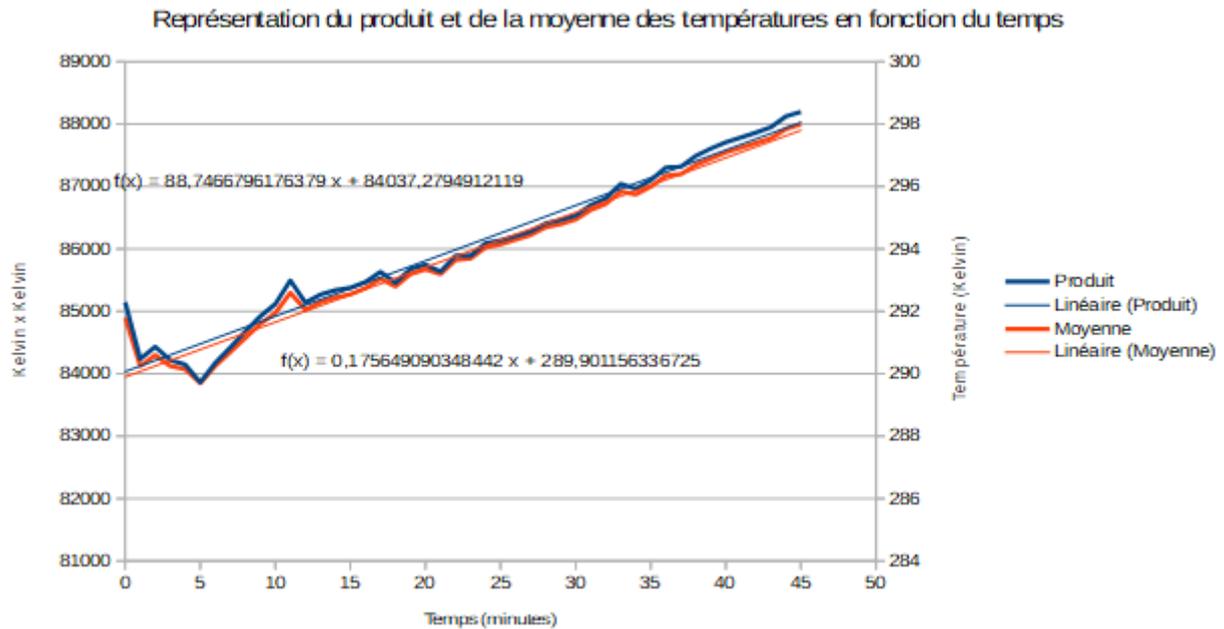
Nous pouvons assimiler les courbes T_C et T_F à deux fonctions affines, T_C est croissante et T_F est décroissante. De plus lorsque T_F diminue on voit que T_C augmente de manière symétrique, les coefficients directeurs sont de même ordre de grandeur. Nous pouvons donc conclure que la température de la source chaude augmente au cours du temps et que celle de la source froide diminue.

Remarque. La moyenne de nos deux températures augmente lors de l'expérience, cela s'explique par le fait que la salle était plus chaude que l'eau à la sortie des tuyaux (l'eau était à 18°C et la salle à 23°C), ainsi notre moyenne est légèrement affine au lieu d'être constante et la symétrie entre T_C et T_F est moins flagrante.

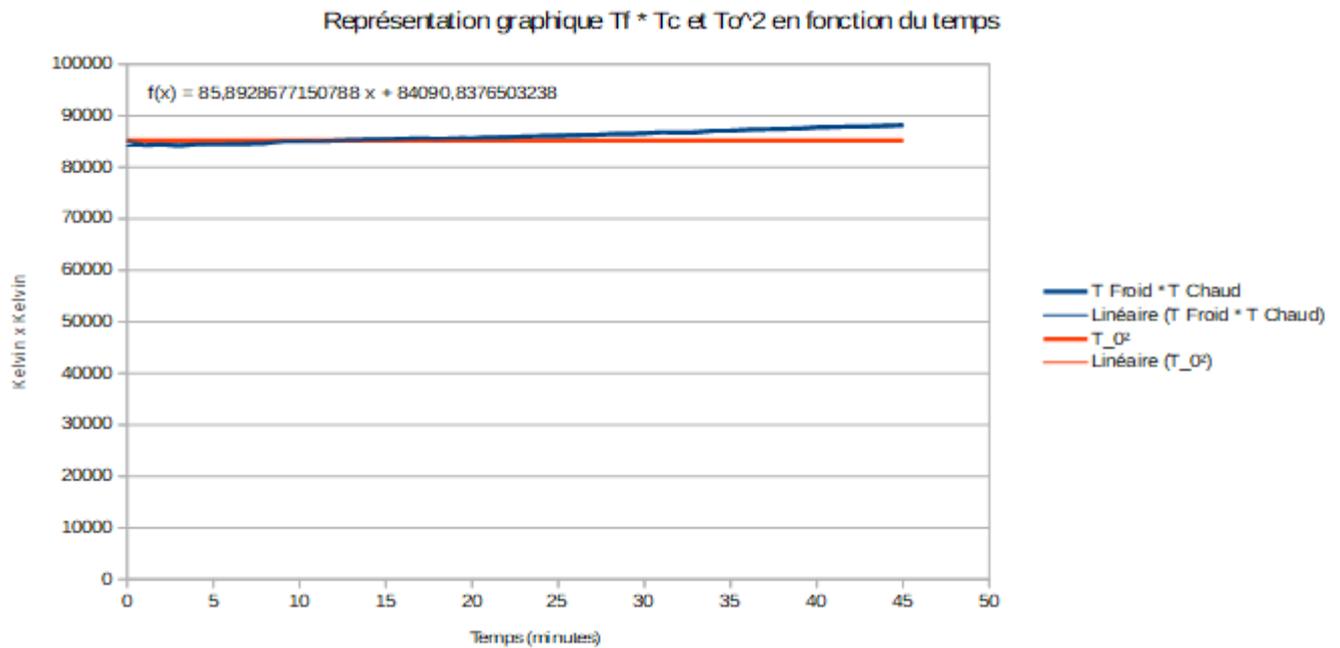
Nous pouvons remarquer un plateau de changement d'état sur la courbe de T_F à partir de la minute 30 avec

une température proche de 0°C, c'est là où l'eau se solidifie.

Lorsque l'on trace la moyenne et le produit de ces températures, nous pouvons remarquer que ces deux courbes sont similaires.



Si la machine thermique est idéale et que les deux sources ont la même capacité calorifique alors il n'y a aucune perte de chaleur donc l'augmentation de la température de la source froide et la température de la source chaude croissent et décroissent parfaitement symétriquement et donc $\frac{T_F + T_C}{2} = T_0$. Ainsi $T_F \times T_C$ et T_0^2 sont égales théoriquement.



Nous remarquons sur notre graphique que le produit des température n'est pas confondu avec T_0^2 , ce qui est normal puisque notre machine n'est pas idéale. Notre machine n'est pas idéale à cause des échanges thermiques avec l'extérieur, par exemple le fait que la salle soit plus chaude que nos réservoirs au début de l'expérience.

6.3 Régime permanent

Nous relevons les températures suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 P_E = 2.1 \text{ bars} & T_4 = 38.0^\circ C \\
 P_C = 15.0 \text{ bars} & T_5 = -0.4^\circ C \\
 T_1 = 12.4^\circ C & T_C = 53.0^\circ C \\
 T_2 = 66.4^\circ C & T_F = -1.0^\circ C
 \end{array}$$

Point 1. Nous plaçons sur le diagramme, le point 1 correspondant à la pression P_E et à la température T_1 , nous relevons :

$$h_1 = 410 \text{ kJ/kg}$$

Point 2. A l'intersection de la droite horizontale $P_C = 15.0 \text{ bars}$ et de la courbe $s = cte$ passant par le point 1 nous plaçons le point 1, nous relevons $T_2' = 77^\circ C$ et nous lisons l'enthalpie massique suivante :

$$h_2 = 455 \text{ kJ/kg}$$

Cependant pendant la manipulation nous relevons $T_2 = 52.4^\circ C$, nous remarquons que $T_2' > T_2$, cela vient du fait que la transformation n'est pas isentropique, c'est une approximation. Et donc sur le graphique lorsque nous suivons l'isentropique passant par 1 nous avons une erreur par rapport à la manipulation réelle.

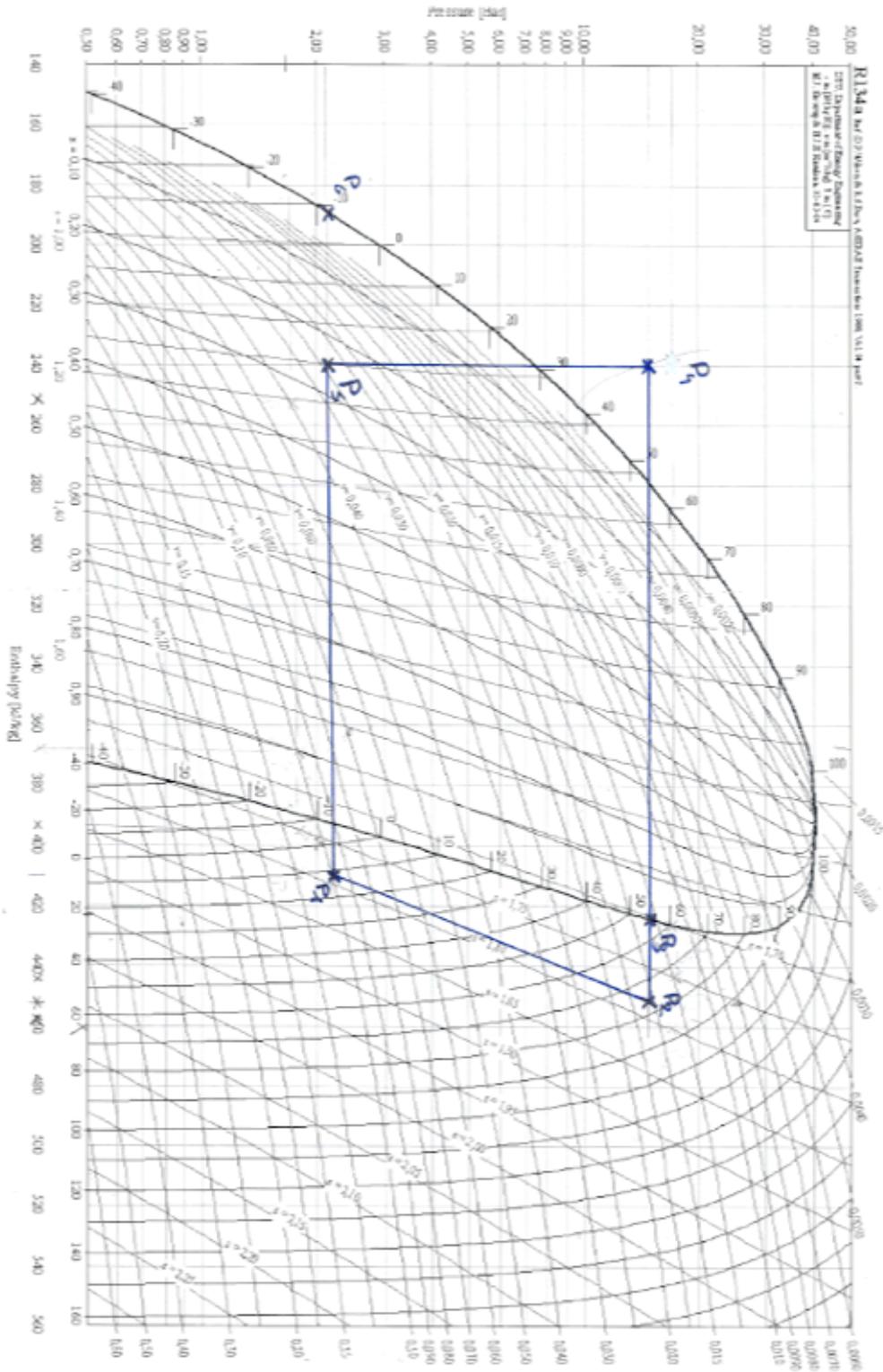
Point 3. Dans le condenseur, la température de la liquéfaction du gaz se lit sur le graphique en suivant l'isobare du point 2 jusqu'à la frontière du domaine liquide plus solide (trait en gras sur le graphique), nous pouvons donc relever la température de liquéfaction $T_3' = 55^\circ C$. Durant la manipulation nous avons relevé $T_3 = 55.0^\circ C$.

Point 4. A l'intersection de la droite isobare P_C et de la courbe isotherme $T_4 = 38.0^\circ C$, nous plaçons le point 4 et nous relevons l'enthalpie massique :

$$h_4 = 240 \text{ kJ/kg}$$

Point 5. A l'intersection entre la droite verticale $h_4 = cte$ et la droite horizontale $P_E = cte$, nous plaçons le point 5. Nous avons une détente de Joule Thomson c'est à dire un isenthalpique, nous relevons $x = 0.40$ et $T_5' = -8^\circ C$. Nous sommes face au même problème que dans le point 2, idéalement la détente de Joule Thomson est un isenthalpique cependant réellement nous avons des échanges thermiques avec la salle, ainsi $T_5' < T_5$. -

Point 6. C'est au point 6 que la vaporisation se termine sous la pression P_E , nous relevons $T_6 = -8^\circ C$.



La variation d'enthalpie est la suivante

$$h_s - h_e = w' + q$$

(où q est la quantité de chaleur massique apporté au système, et w' le travail mécanique massique apporté au système).

L'efficacité de notre pompe à chaleur se trouve à l'aide de la formule

$$e = \frac{q_{42}}{w_{12}} = \frac{h_4 - h_2}{h_1 - h_2} = 4.78$$

Calculons l'efficacité théorique idéale, c'est à dire à l'efficacité de Carnot :

$$e_C = \frac{T_C}{T_C - T_F} = \frac{53.0 + 273}{(53.0 + 273) - (-1.0 + 273)} = 6.0$$

On remarque que $e_c > e$, ainsi notre pompe à chaleur n'est pas idéale, il y a effectivement perte de chaleur et de travail dans notre système.

7 Calorimétrie

7.1 Mise en évidence du phénomène de fusion

Manipulation. Dans cette partie nous disposons d'un récipient métallique isolé avec une couche de feutre, de gros sel, de la glace pilée, un tube à essai et un thermomètre.

Nous plaçons la glace pillée dans le récipient métallique mélangé avec du gros sel. Nous versons ensuite 2.5 mL d'eau dans un tube à essai et nous plaçons la sonde de température à l'intérieur. Nous insérons ensuite le tube dans le récipient rempli de glace.

Nous attendons que l'eau se change en glace dans le tube puis nous le laissons se réchauffer à air ambiant. Nous mesurons la température toutes les 30 secondes et nous observons l'état physique du système.

Analyse.

1. $\rho_{liquide}^{eau} = 1000 \text{ kg/m}^3$ et $\rho_{solide}^{eau} = 917 \text{ kg/m}^3$. Ainsi $\rho_{solide}^{eau} < \rho_{liquide}^{eau}$. Cette différence provient du fait que sous forme liquide, les molécules d'eau sont désordonnées et toutes en contact les unes avec les autres, le volume occupé est minimal (si l'on prend en compte que l'eau liquide est incompressible). Ainsi pour une masse m fixée, $\rho = \frac{m}{V}$ est maximale quand V est minimal.

Cependant quand l'eau se solidifie, les molécules s'organisent en mailles moléculaires et forment une structure hexagonale. De plus une fois rangée il reste du vide entre les molécules. Ainsi pour une masse fixé, le volume est plus grand sous forme solide. Nous pouvons donc conclure que ρ est plus petit sous forme solide.

2.

Evolution de la température de l'eau en fonction du temps

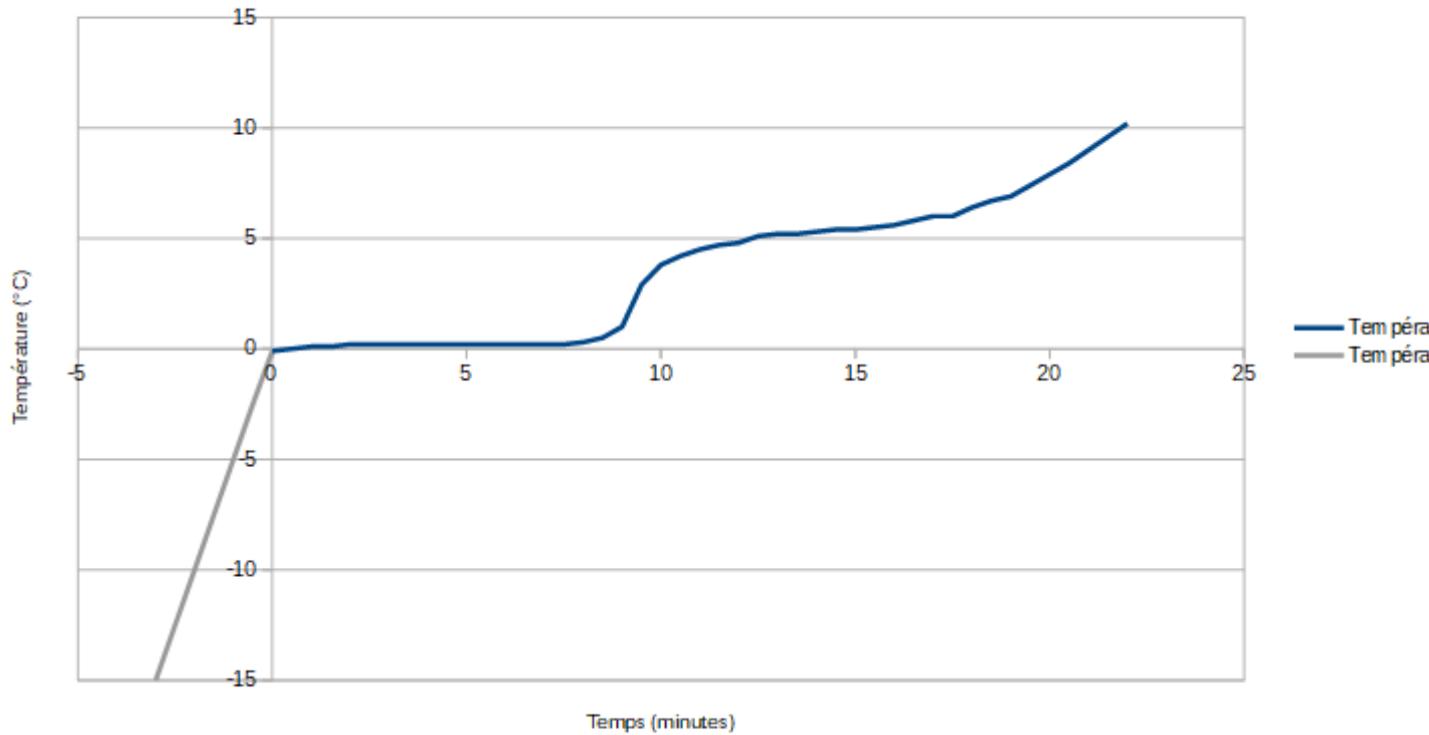


FIGURE 5 – La partie en gris est une partie fictive, voir explications dans l'analyse de la courbe.

On distingue 3 périodes sur ce graphique : lors du TP nous n'avons pas mis assez de glace pilée dans notre récipient isolé ainsi même si l'eau contenue dans le tube a essayé de geler elle n'a pas atteint des températures négatives importantes, ainsi la première phase que l'on aurait pu obtenir dans notre graphique n'est pas présente.

- Pour des raisons évoquées ci-dessus, la première période n'est pas observable sur notre graphique. Cette partie correspond à une forte augmentation de la température de températures négatives jusqu'à 0°C . Durant cette période, les premières gouttes de liquides apparaissent suite à un transfert de chaleur effectué avec l'air ambiant vers la glace. Cependant l'eau reste sous forme solide il n'y a qu'une phase présente.
- Nous observons ensuite un plateau aux alentours de 0°C de 0 à 8 minutes, il s'agit d'un plateau de changement d'état, c'est durant cette période que la fusion va s'opérer. Nous pouvons assimiler cette courbe à une constante, il y a donc deux phases en présence, liquide et solide.
- Enfin, de 8 minutes à 22 minutes la température va augmenter en suivant une fonction affine, cette augmentation est due aux échanges thermiques avec l'air. Il n'y a que la phase liquide en présence.

3. La variance v décrit le nombre de paramètres intensifs et indépendants qui caractérisent un état d'équilibre. Les calculs de variance s'effectuent avec la formule

$$v = (c + 2 - \phi)$$

le système n'est composé que d'eau donc $c = 1$ et ϕ correspond au nombre de phases en présence. Ainsi $v_1(\phi = 1) = 2$, $v_2(\phi = 2) = 1$ et $v_3(\phi = 1) = 2$.

Le phénomène de fusion est donc mis en évidence, il est à pression constante, le changement d'état se produit bien autour de 0°C .

7.2 Détermination de la chaleur latente de fusion de la glace

Manipulation. Dans cette partie, nous disposons d'un calorimètre, nous introduisons 200 mL d'eau liquide dans le calorimètre et nous attendons l'équilibre thermique. Nous mettons ensuite un morceau cylindre de glace dans ce calorimètre. Nous relevons les différentes températures à l'aide du thermomètre jusqu'à la fonte totale du glaçon.

Analyse.

1. On décompose le système en 3 sous systèmes distinct, le calorimètre, l'eau initialement contenue dans le calorimètre (200 mL) que nous notons V_1 et l'eau initialement sous forme de glace dans le tube (10 mL) que nous notons V_2 . Ce tube subit un changement d'état : la fusion. Nous relevons les températures initiales et finales de chacun des sous système.

| Sous système | T_i | T_f |
|---------------|-------------------------------|-------------------------------|
| Calorimètre | $T_{1i} = 19.5^\circ\text{C}$ | $T_{if} = 15.5^\circ\text{C}$ |
| Eau (V_1) | $T_{1i} = 19.5^\circ\text{C}$ | $T_{if} = 15.5^\circ\text{C}$ |
| Eau (V_2) | $T_{2i} = 0^\circ\text{C}$ | $T_{2f} = 15.5^\circ\text{C}$ |

- 2.

$$\Delta H = \sum_i C_{p,i}(T_{f,i} - T_{0,i}) = C(T_f - T_1) + C_{p,eau}(T_f - T_1) + C_{p,eau}(T_f - T_2)$$

$$C = -\frac{m_1 C_{p,eau}^{m_1}(T_f - T_1) + m_2 C_{p,eau}^{m_2}(T_f - T_2)}{(T_f - T_1)}$$

Nous obtenons une capacité thermique C du calorimètre en fonction de $C_{p,eau}, T_f, T_2, T_1, m_1, m_2$.

La méthode expérimentale pour mesurer la capacité thermique C du calorimètre consiste à mettre une masse d'eau m_1 dans le calorimètre (le tout à température ambiante T_1). Puis nous ajoutons une masse m_2 d'eau à température T_2 inférieure à T_1 . Nous pouvons mesurer T_f et en connaissant la capacité calorifique de l'eau nous pouvons en déduire la valeur de la capacité thermique grâce au calcul précédent.

3. Le système englobant tous les sous-systèmes énoncés plus haut est isolé on a donc

$$\Delta H = \sum_i C_{p,i}(T_{f,i} - T_{0,i}) + L = 0$$

Alors :

$$L_f = -[C_{p,eau_1}(T_f - T_{i,eau_1}) + C_{p,eau_2}(T_f - T_{i,eau_2}) + C(T_f - T_{i,calorimetre})]$$

On introduit les capacités calorifiques massiques et la masse volumique de l'eau. De plus $T_{i,eau_1} = T_{0,eau}, T_{i,eau_2} = T_{0,glace}$ et $T_{i,calorimetre} = T_{0,calorimetre}$. Ainsi

$$L_f = -[\rho_{eau} V_{eau} c'_{p,eau}(T_f - T_{0,eau}) + m_{glace} c'_{p,eau}(T_f - T_{0,glace}) + C(T_f - T_{0,calorimetre})]$$

Étant donné que $T_{0,eau} = T_{0,calorimetre} = T_{1i}$ et $T_{0,glace} = T_{2i}$ on retrouve :

$$L_f = -[\rho_{eau}V_{eau}c'_{p,eau}(T_f - T_{1i}) + m_{glace}c'_{p,eau}(T_f - T_{2i}) + C(T_f - T_{1i})]$$

De plus $L'_f = \frac{L_f}{m_{glace}}$ on retrouve

$$L'_f = -\frac{c'_{p,eau}\rho_{eau}V_{eau}(T_f - T_{1i}) + m_g c'_{p,eau}(T_f - T_{2i}) + C(T_f - T_{1i})}{m_g}$$

En calculant L'_f avec la formule donnée dans le fascicule on obtient $L'_f = 298 \text{ kJ/kg}$. La valeur tabulée est égale à $L'_f = 333 \text{ kJ/kg}$.

Nous avons donc une erreur relative de $\Delta = 12\%$. Cette différence est obtenue à cause des erreurs de manipulation (erreur de dosage) et des erreurs de mesure (incertitude du matériel).

4. Si le glaçon était à -10°C au lieu de 0°C , la valeur de la chaleur latente massique serait donc plus grande, cela s'explique en partie par la nécessité d'un apport plus conséquent d'énergie au sous système dont la glace est à -10°C afin d'atteindre le changement d'état qu'à ce sous système à 0°C .