

Correction

Suite numériques

TD

Suite réelles ou complexes

Exercice 1: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite.On définit une nouvelle suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

Suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge mq la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CV vers 0 $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n) = S \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$

$$\text{On a : } S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n$$

$$= S_{n-1} + u_n$$

$$\text{D'où } u_n = S_n - S_{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - S_{n-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1}$$

$$= S - S = 0.$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$\frac{1}{1} = 1$$

Exercice 2. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes.étude $\text{Re}(u_n) \wedge \text{Im}(u_n)$ $\text{Re} \rightarrow a$ $\text{Im} \rightarrow b$

$$u_n = \frac{n + i P_n(n)}{n+1} = \frac{n}{n+1} + \frac{i P_n(n)}{n+1}$$

étude de $|u_n|$

$$u_n \rightarrow z \Rightarrow |u_n| \rightarrow |z|$$

$$\text{Si } z = 0$$

$$u_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |u_n| \rightarrow 0$$

$$\text{Re}(u_n) = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Re}(u_n) = 1$$

$$\operatorname{Im}(u_m) = \frac{P_m(m)}{m+1} = \frac{m}{m+1} \cdot \frac{P_m(m)}{m}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(u_m) = 0$$

$$1 + 2 \times 2^{m+1} \cos m\theta$$

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} (u_m) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(u_m) + i \lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(u_m) \\ &= \underline{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{(1+i)^m}{2^m} \Rightarrow |u_m| = \frac{|(1+i)^m|}{|2|^m} \\ &= \frac{|1+i|^m}{|2|^m} = \frac{\sqrt{2}^m}{2^m} = 2^{-\frac{m}{2}} \end{aligned}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |u_m| = 0 \Rightarrow \underline{\lim_{m \rightarrow \infty} u_m = 0}$$

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{1}{1 + 2^m e^{im\theta}} \quad \cdot \quad |u_m| = \frac{1}{|1 + 2^m \cos m\theta + i 2^m \sin m\theta|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 + 2^m \cos(m\theta))^2 + (2^m \sin(m\theta))^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 2^{2m} + 2^{m+1} \cos(m\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{2^{2m} \left(1 + \frac{1}{2^{2m}} + 2^{-m+1} \cos m\theta \right)}} \end{aligned}$$

= Après étude des termes on a $|u_m| \rightarrow 0$
 $u_m \rightarrow 0$

$$u_m = m P_m \left(1 + \frac{1}{m} \right) e^{i \arctan(m)}$$

$$= m P_m \left(1 + \frac{1}{m} \right) \cos(\arctan(m)) + i m P_m \left(1 + \frac{1}{m} \right) \sin(\arctan(m)).$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{P_m(1+\frac{1}{m})}{\frac{1}{m}} = 1 = \frac{P_m(1+\frac{1}{m})}{\frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{m}$$

$$\text{d'où } \lim_{m \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(u_m) = \lim_{m \rightarrow +\infty} m P_m \left(1 + \frac{1}{m} \right) \cos(\arctan(m)) = \cos(\arctan(m))$$

$$\text{car } \arctan(m) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\text{d'où } \lim_{m \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(u_m) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\triangleq \text{ Ici on utilise } \lim_{m \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(u_m) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \cos(\arctan(m)) = \cos \lim_{m \rightarrow +\infty} \arctan(m)$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(u_m) = \lim_{m \rightarrow +\infty} m P_m \left(1 + \frac{1}{m} \right) \sin(\arctan(m))$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Donc } \underline{u_m = i}$$

$$u_m = \arctan(m) \cdot e^{i \cdot m \cdot \frac{\pi}{4}}$$

$$= \arctan(m) \cdot \cos(m \frac{\pi}{4}) + i \arctan(m) \cdot \sin(m \frac{\pi}{4})$$

$$\arctan(m) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\text{d'où } \lim_{m \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(u_m) = \frac{\pi}{2} \lim_{m \rightarrow +\infty} \cos(m \frac{\pi}{4})$$

$$\text{Si } m = 0 [8] \text{ alors } \frac{m\pi}{4} = 0 \cdot \frac{\pi}{4} [2\pi] = 0 [2\pi]$$

$$\text{donc } \cos(m \frac{\pi}{4}) = \cos(0) = 1.$$

$$\text{Si } m = 2 [8] \text{ alors } \frac{m\pi}{4} = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$$

Il n'y a pas de limite pour $\cos(m \frac{\pi}{4})$ car la suite prend indéfiniment.

Exercice 4:

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n} \cdot p_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \underbrace{p_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\textcircled{1}} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$$u_n \xrightarrow{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad p_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{+\infty} \frac{1}{n}$$

$$u_n = \frac{n + \sqrt{n}}{2n + p_n(n)} = \frac{n}{2n} \cdot \frac{1 + \frac{\sqrt{n}}{n}}{1 + \frac{p_n(n)}{2n}}$$

$$u_n \xrightarrow{+\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\sin(n) \cdot p_n \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \quad u_n \sim \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$$u_n = \frac{e^{-n} + \frac{1}{n}e}{p_n \left(1 + \frac{1}{n}e\right)} \Rightarrow u_n \xrightarrow{+\infty} = n^2 (e^{-n} + 1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n} + 1 \\ &= \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

Suff

Suites réelles

Exercice 1

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow$ à partir d'un rang n_i

$$u_{n_i} \leq u_{n_i+1} \leq u_{n_i+2}$$

• Pour $n \geq n_i$ $u_n \geq u_{n_i}$

• Si $0 \leq n \leq n_i - 1$

$E = \{u_0, u_1, \dots, u_{n_i}\}$ est un ensemble fini
il est minoré par son plus petit élément $\min(E)$
On en déduit que $u_n \geq \min(u_n)$

Exercice 2

1) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite $\mathbb{R} \rightarrow$ qui admet une suite extraite convergente

$$u_n \rightarrow u_n \text{ soit CV, DV}$$

$$u_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} l$$

• (u_{n_k}) est une suite extraite d'une suite croissante et donc elle est aussi croissante + majorée (CV).

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall k \geq 0 \quad u_{n_k} \leq M \quad u_{n_k} \leq M$$

D'où (u_n) est majorée comme elle est $\rightarrow$, elle CV vers la limite l de (u_{n_k})

$u_m \nearrow$ on extrait une suite (u_m) majorée

On a $u_{m_R} \leq u_{m_{R+1}}$ car $m_R \leq m_{R+1}$ et $(u_m) \nearrow$

donc (u_{m_R}) est une suite croissante et elle est majorée elle est donc convergente donc (u_m) cv.

Exercice 3

$$\begin{aligned} 1) \quad u_{2(m+1)} - u_{2m} &= \sum_{k=0}^{2m+1} \frac{(-1)^k x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2m} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \\ &= \frac{(-1)^{2m+1} x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \frac{(-1)^{2m+2} x^{2m+2}}{(2m+2)!} \\ &= \frac{-x^{2m+1} (2m+2) x^{2m+1}}{(2m+2)!} = \frac{x^{2m+1} (-(2m+2) + x)}{(2m+2)!} \end{aligned}$$

Étude du signe de $-(2m+2) + x$: x fixé dans $\mathbb{R}_+$

À partir d'un certain rang. $-(2m+2) + x < 0$

donc $u_{2(m+1)} - u_{2m} < 0$

La suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang.

De même on voit que (u_{2m+1}) est $\nearrow$ à partir d'un certain rang

$$\begin{aligned} u_{2m} - u_{2m+1} &= \sum_{k=0}^{2m} \frac{(-1)^k x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2m+1} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \\ &= - \frac{(-1)^{2m+1} x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \end{aligned}$$

$\rightarrow 0 \quad (x \in]0, 1])$
 $\rightarrow 0 \quad (x \in]1, +\infty[)$

(u_{2m}) et (u_{2m+1}) sont adjacentes.

2) u_m est convergente

Exemple de suite numérique

Exercice 1

$$u_n = \frac{n+2}{2n+1} = \frac{n+2}{2(n+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} + \frac{3/2}{2n+1}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2} + \frac{3/2}{2n+3} - \frac{1}{2} - \frac{3/2}{2n+1} \\ &= \frac{3/2(2n+1) - 3/2(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{3/2(-2)}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{-3}{(2n+3)(2n+1)} < 0$$

$$(u_n) \searrow \quad \lim u_n = \lim \left(\frac{1}{2} + \frac{3/2}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$$

$$u_n = \operatorname{Arctan}(\sqrt{n})$$

$$x \mapsto \sqrt{x} \nearrow$$

$$x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) \nearrow$$

$$x \mapsto \operatorname{Arctan}(\sqrt{x}) \nearrow$$

$$\lim u_n = \pi/2$$

$$u_n = \sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\frac{\ln(n)}{n}} = e^{\frac{\ln(n)}{n}}$$

$$\frac{\ln(n)}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

on étudie $g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

$$g'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \exp \left(\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n)}{n} \right)$$

si $n > e$

$$1 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Rightarrow x = e$$

x	1	e	$+\infty$
g'	+	0	-
g		$\frac{1}{e}$	

$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ d'où la suite est décroissante à partir du rang $n=3$

Exercice 4

$$u_m = \int_m^{m+1} \frac{e^{t-m}}{t} dt \quad \text{on étudie } u_{m+1} - u_m :$$

$$= \int_{m+1}^{m+2} \frac{e^{x-(m+1)}}{x} dx - \int_m^{m+1} \frac{e^{t-m}}{t} dt$$

$$= \int_m^{m+1} \frac{e^{t-m}}{t+1} dt - \int_m^{m+1} \frac{e^{t-m}}{t} dt$$

$$= \int_m^{m+1} e^{t-m} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t} \right) dt$$

$$= -u_m$$

pour u_m :

$$m \leq t \leq m+1$$

$$0 \leq t-m \leq 1$$

$$1 \leq e^{t-m} \leq e$$

$$\frac{1}{t} \leq \frac{e^{t-m}}{t} \leq \frac{e}{t}$$

$$[P_m t]_m^{m+1} \leq u_m \leq e \cdot [P_m t]_m^{m+1}$$

$$P_m \left(\frac{m+1}{m} \right) \leq u_m \leq e \cdot P_m \left(\frac{m+1}{m} \right)$$

(u_m) est majorée + décroissante donc elle est CV vers 0.

Exercice 2: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

Point fixe : $f(x) = x$
 $x = -2$

$$\begin{aligned}
 v_m &= u_m + 2 \quad \wedge \quad u_m = v_m - 2 \\
 v_{m+1} &= u_{m+1} + 2 \\
 v_{m+1} &= \frac{1}{2}u_m + 1 \\
 &= \frac{1}{2}(v_m - 2) + 1 \\
 &= \frac{1}{2}v_m
 \end{aligned}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 \text{donc } v_m \text{ de raison } \frac{1}{2} \text{ et de} \\
 \text{premier terme } 3. \\
 \Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{2}^m = v_m \\
 u_m = v_m - 2 \\
 u_m = 3 \cdot \frac{1}{2}^m - 2
 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 u_{m+1} - u_m &= 3 \cdot \frac{1}{2}^{m+1} - 2 - (3 \cdot \frac{1}{2}^m - 2) \\
 &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}^m < 0 \quad \text{décroissante}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m = \underline{-2}$$

Exercice 1:

$$\begin{aligned}
 u_m &= \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \exp\left(m \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right) \\
 &= \exp\left(m \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right) \\
 &= \exp\left(m \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{\frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{m}\right)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m = e$$

$$u_m = \sqrt{m+1} - \sqrt{m} = \frac{m+1-m}{\sqrt{m+1} + \sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{m+1} + \sqrt{m}}$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m = 0$$

cartridge
chip

$$u_m = \sqrt{m^2 + 1} - m = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1} + m}$$

$$l'm = 0$$

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{-m + \sqrt{m^2 + 1}}{m\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{(-m + \sqrt{m^2 + 1})(-m + \sqrt{m^2 + 1})}{m\sqrt{m^2 + 1}} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{m^2 + 1}/m}{\sqrt{m^2 + 1}} \rightarrow 0 \quad m \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

$$u_m = \frac{m + 3im}{3m + \cos 2m} = \frac{m(1 + \frac{3im}{m})}{m(3 + \frac{\cos 2m}{m})} = \frac{1}{3}$$

$$u_m = \frac{2^m}{n!}, \quad u_{m+1} = \frac{2^{m+1}}{(m+1)!}$$

$$\frac{u_m}{u_{m+1}} = \frac{1}{2} (m+1)$$

$$\begin{aligned} m \geq 1 &\Rightarrow \frac{1}{2} (m+1) \geq 1 \\ \text{donc } \frac{u_m}{u_{m+1}} &\geq 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow u_m \geq u_{m+1}$ donc décroissante
minorée, elle CV vers 0

Correction Exemple de suite numérique
TD maths

Exercice 3: $u_0 = 0, u_1 = 1$
 $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$

Équation caractéristique: $R^2 - R - 1 = 0$
 $\Delta = 5$

$$R_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad R_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Donc $u_n = \alpha \cdot R_1^n + \beta \cdot R_2^n$
 $= \alpha \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$

D'après les conditions initiales :

$$u_0 = \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\beta$$

$$u_1 = \alpha \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) + \beta \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = 1$$

$$\Rightarrow -\beta \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) + \beta \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \beta \left(\frac{\sqrt{5} - 1 + 1 + \sqrt{5}}{2} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$u_n = -\frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$v_0 = 1, v_1 = 0$$

$$v_{n+1} = 2v_n - 2v_{n-1}$$

$$R^2 - 2R + 2 = 0$$

$$\Delta = -4$$

$$R_1 = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$$

$$R_2 = 1 + i$$

$$R_1 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

$$R_2 = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$$

donc $v_m = \alpha (\sqrt{2})^m e^{im\pi/4} + \beta (\sqrt{2})^m e^{-im\pi/4}$

on détermine α et β :

$$m=0$$

$$a+b = v_0 = 1$$

$$a = \frac{1+i}{2}$$

$$m=1$$

$$a(1+i) + b(1+i) = 0$$

$$b = \frac{1-i}{2}$$

$$v_m = \frac{(1+i)}{2} (1+i)^m + \frac{(1-i)}{2} (1-i)^m$$

$$w_0 = 1, w_1 = -3$$

$$w_{m+1} = 6w_m - 9w_{m-1}$$

$$w_m = \alpha \cdot 3^m + b.m. \cdot 3^m$$

$$w_m = 3^m - 2m \cdot 3^m$$

$$R^2 - 6R + 9 = 0$$

$$\Delta = 0$$

$$R = 3$$

$$\alpha = 1$$

$$\beta = -2$$

Méthode de calcul intégral.

- Trois méthodes pratiques de calcul d'intégrale
 - L'intégration directe

Formule

Exemple

$$1 \quad u' u^m \rightarrow \frac{1}{m+1} u^{m+1} + R$$

$$2 (2x)^2 \rightarrow \frac{1}{3} (2x)^3$$

$$2 \quad \frac{u'}{u^2} \rightarrow -\frac{1}{u} + R$$

$$\frac{2}{(2x)^2} \rightarrow -\frac{1}{2x}$$

$$3 \quad \frac{u'}{\sqrt{u}} \rightarrow 2\sqrt{u} + R$$

$$\frac{2}{\sqrt{2x}} \rightarrow 2\sqrt{2x}$$

$$4 \quad \frac{u'}{u} \rightarrow P_m |u| + R$$

$$\frac{2}{2x} \rightarrow P_m |2x|$$

$$5 \quad u' \sin u \rightarrow -\cos u + R$$

$$2 \sin 2x \rightarrow -\cos 2x$$

$$6 \quad u' \cos u \rightarrow \sin u + R$$

$$2 \cos 2x \rightarrow \sin 2x$$

$$7 \quad u' e^u \rightarrow e^u + R$$

$$2e^{2x} \rightarrow e^{2x}$$

$$8 \quad \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \rightarrow \text{Arcsin } u + R$$

$$\frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} \rightarrow \text{Arcsin } 2x$$

$$9 \quad \frac{u'}{1+u^2} \rightarrow \text{Arctan } u + R$$

$$\frac{2}{1+(2x)^2} \rightarrow \text{Arctan } 2x$$

$$10 \quad \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} \rightarrow P_m(x + \sqrt{a^2+x^2}) + R$$

$$11 \quad \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \rightarrow \text{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) + R$$

$$12 \quad \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} \rightarrow P_m(x + \sqrt{x^2-a^2}) + R$$

$$13 \quad \frac{1}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \cdot \text{Arctan} \left(\frac{x}{a} \right) + K$$

$$14 \quad \frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + K$$

• Le changement de variable.

On veut calculer $\int_a^b f(x) dx$

$$\exists \alpha \wedge \beta \wedge \varphi: U \rightarrow V$$

$$t \mapsto x = \varphi(t)$$

$$\varphi(U) \subset V, \varphi(\alpha) = a \wedge \varphi(\beta) = b$$

donc $\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$

on a fait $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t) dt$

• L'IPP

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{avec} \quad f(x) = u'v$$

$$\int_a^b u'v = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u \cdot v'$$

• Règle de Bôche

- $f(-x) = \pm f(x)$: $u = \cos x$
- $f(\pi - x) = \pm f(x)$: $u = \sin x$
- $f(\pi + x) = \pm f(x)$: $u = \tan x$
- Si $\sqrt{\alpha t + \beta}$ alors $u = \sqrt{\alpha t + \beta}$

- Si $e^{mt} \cdot \cos(\omega t)$ ou $e^{mt} \cdot \sin(\omega t)$ alors remplacer par $\text{Re}(e^{mt} \cdot e^{i\omega t})$ ou $\text{Im}(e^{mt} \cdot e^{i\omega t})$

1

Techniq de calcul des primitives. Exemples et compléments

Décomposition en éléments simples de fractions rationnelles

$F(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ est irréductible

• $N(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x) \rightarrow$ division euclidienne de $N(x)$ par $D(x)$ qd $d^{\circ}N \geq d^{\circ}D$

• $F(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{Q(x) \cdot D(x) + R(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$

$Q(x)$ est 1 produit $\Rightarrow$ s'intègre sans pb $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + k$

• $\frac{R(x)}{D(x)}$ avec $d^{\circ}R < d^{\circ}D \rightarrow$ décomposée en éléments

simples de 1st espèce $\left(\frac{\alpha}{x - a_i} \right)^m$ et esp^{ls} simples de 2nd espèce

$\left(\frac{\alpha x + \beta}{x^2 + bx + c} \right)^m$ avec $b^2 - 4ac < 0$

• Intégration de $\left(\frac{\alpha}{x - a_i} \right)^m$

• Si cas $\underline{m > 1}$: $\int \left(\frac{1}{x - a} \right)^m dx = -\frac{1}{m-1} \frac{1}{(x-a)^{m-1}} + k$

$\underline{m = 1}$: $\int \frac{dx}{(x-a_i)} = P_m |x - a_i| + k$

mettre $x^2 + bx + c$ sous forme canonique

Exemple 1: Intégrer $\frac{1}{x^2 + 4}$

on écrit $x^2 + 4 = 4 \left(\frac{x^2}{4} + 1 \right) = 4 \left(\left(\frac{x}{2} \right)^2 + 1 \right)$ et de

$$\int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \int \frac{1}{2(x^2 + 4)} \times 2 du = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} u + K$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} \frac{x}{2} + K = \int \frac{dx}{x^2 + 4}$$

Exemple 2: Intégrer $\frac{x+1}{x^2+4}$

$$\int \frac{x+1}{x^2+4} dx = \int \frac{x}{x^2+4} dx + \int \frac{1}{x^2+4} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln |x^2+4| + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} \frac{x}{2} + K$$

Exemple 3: Intégrer $\frac{x}{x^2+2x+5}$

on a $\frac{d}{dx} (x^2 + 2x + 5) = 2x + 2 = 2(x+1)$

$$\Rightarrow \frac{x}{x^2+2x+5} = \frac{x+1-1}{x^2+2x+5} = \frac{x+1}{x^2+2x+5} - \frac{1}{x^2+2x+5}$$

On travail sur: $\frac{1}{x^2+2x+5}$: On a $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$

$$= 4 \left(\frac{(x+1)^2}{4} + 1 \right) = 4 \left(\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{4 \left(\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1 \right)}$$

on a donc: $\int \frac{x}{x^2+2x+5} dx = \int \frac{x+1}{x^2+2x+5} dx - \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx$

$$= \int \frac{x+1}{x^2+2x+5} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln |x^2+2x+5| - \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1} dx$$

changement de variable $u = \frac{x+1}{2}$, $du = \frac{1}{2} dx$,
 $du = 2 du$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{x^2+2x+5} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2+2x+5| - \frac{2}{4} \int \frac{du}{u^2+4}$$

$$= \frac{1}{2} \ln |x^2+2x+5| - \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} u + K$$

$$= \frac{1}{2} \ln |x^2+2x+5| - \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} \left(\frac{x+1}{2} \right) + K$$

• Intégration de fonctions rationnelles en sin, cos et tan

$$f(x) = \frac{A(\sin, \cos, \tan)}{B(\sin, \cos, \tan)}$$

⇒ Règles de Bôche → 3 choses à tester

- $f(-x) = -f(x) \rightarrow$ chgt de var $u = \cos x$
- $f(\pi - x) = -f(x) \rightarrow$ chgt de var $u = \sin x$
- $f(\pi + x) = f(x) \rightarrow$ chgt de var $u = \tan x$

• Si f est quelconque (aucun des 3 cas précédents)
le changement de variable à privilégier.

$$u = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow du = \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) dx$$

$$= \frac{1}{2} (1 + u^2) dx$$

À savoir $\cos x = \frac{1-f^2}{1+f^2}$, $\sin x = \frac{2f}{1+f^2}$, $\tan x = \frac{2f}{1-f^2}$

Rappel: on a les relations suivantes

$\cos(-x) = \cos x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$
$\tan(-x) = -\tan x$	$\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\tan(\pi + x) = \tan x$

Exercice 1 $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{3 + \cos(2x)} dx$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{2 \sin x \cos x}{3 + \cos 2x} dx$$

on a $f(x) = \frac{2 \sin x \cos x}{3 + \cos 2x}$

$$\text{de } f(-x) = \frac{-2 \sin x \cdot \cos x}{3 + \cos x} = -f(x)$$

donc on va poser $u = \cos x$ $x \rightarrow 0, \pi/4 \Rightarrow u \rightarrow 1, \sqrt{2}/2$
 $\Rightarrow du = -\sin x dx$

$$\sin(x+x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) \\ = 2\cos(x)\sin(x)$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{-2u du}{3+u}$$

On doit intégrer la fraction rationnelle avec $d^0 N(x) > d^0 D(x) \Rightarrow$ division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l} -2u & u+3 \\ +2u+6 & -2 \\ \hline 6 & \end{array} \quad \text{on a } \frac{-2u}{u+3} = -2 + \frac{6}{u+3}$$

donc $\int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{-2u}{u+3} du = \int_1^{\sqrt{2}/2} -2 du + 6 \int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{u+3} du$

Exemple : $I = \int \frac{\cos x}{6 - 5\sin^2 x + \sin^4 x} dx$

① $f(x) = \frac{\cos x}{6 - 5\sin^2 x + \sin^4 x}$ on n'a pas $f(-x) = -f(x)$

② $f(\pi-x) = \frac{\cos(\pi-x)}{6 - \sin^2(\pi-x) + (\sin(\pi-x))^4}$
 $= \frac{-\cos x}{6 - \sin^2 x + \sin^4 x}$ on a $f(\pi-x) = -f(x)$

$\Rightarrow$ changement de variable $u = \sin x$
 $= \cos(x) \frac{du}{dx} = \cos(x) \frac{du}{\sin x} = \frac{\cos(x)}{\sin x} du$
 $= \cot(x) du$ $x \rightarrow 0, \pi/2 \Rightarrow u \rightarrow \begin{cases} \sin 0, \sin \pi/2 \\ 0, 1 \end{cases}$

$$F(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{1}{u^2 - 5u + 6} = \frac{1}{(u-3)(u-2)}$$

$$= \frac{a}{u-3} + \frac{b}{u-2}$$

• déterminer les coeffs a et b

* a : $x(u-3) \quad u \rightarrow 3$

$a = 1$

* b : $x(u-2), \quad u \rightarrow 2(u-2) + b(u-3)$

$b = -1 \quad (u-3)(u-2)$

$\Rightarrow I = \int_0^1 \left(\frac{1}{u-3} + \frac{1}{u-2} \right) du$

$P_m 2 - P_m 3$

$= \int_0^1 \frac{1}{u-3} du + \int_0^1 \frac{1}{u-2} du$

$= [P_m(u-3)]_0^1 - [P_m(u-2)]_0^1 = P_m 2 - P_m 3 - P_m 1 + P_m 2$
 $= \underline{2 P_m 2 - P_m 3}$

• $I = \int_0^{\pi/6} \frac{\tan^2 x + 1}{\tan^3 x - 1} dx$

$g(x) = \frac{\tan^2 x + 1}{\tan^3 x - 1}$

$g(-x) \neq -g(x)$

$g(\pi - x) \neq -g(x)$

$g(\pi + x) = g(x)$

$\Rightarrow$ changement de variable

$u = \tan x$

$du = (1 + \tan^2 x) dx$

$x \rightarrow 0, \pi/6 \rightarrow u \rightarrow 0, \sqrt{3}$

détermination de a, b et c

* $a \rightarrow x(u-1) \quad \text{et} \quad u \rightarrow 1$

$a = 1/3$

* $c \rightarrow u \rightarrow 0$

$-1 = -a + c \rightarrow c = -1 + a = -2/3$

* $b \rightarrow xu \quad \text{et} \quad u \rightarrow +\infty$

$0 = a + b \Rightarrow b = -a \Rightarrow b = -1/3$

$F(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{u-1} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{u+2}{u^2+u+1} \right)$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3} \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{1}{u+1} du - \frac{1}{3} \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{u^2}{u^2+u+1} du$$

on regarde $J = \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{u^2}{u^2+u+1} du = \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{u^2+u+1}{u^2+u+1} du - \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{u+1}{u^2+u+1} du$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln(u^2+u+1) \right]_0^{\sqrt{3}/3} + \frac{3}{2} \left[\frac{(u+\frac{1}{2})^2}{u^2+u+1} - 1 \right]_0^{\sqrt{3}/3} + \frac{3}{2} \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{1}{u^2+1} du$$

on pose $X = \frac{2(u+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} \Rightarrow dX = \frac{2}{\sqrt{3}} du$

$$\frac{1}{u^2+1} = \frac{1}{\frac{X^2}{4} + 1} = \frac{4}{X^2+4}$$

$$J = \left[\frac{1}{2} \ln(u^2+u+1) \right]_0^{\sqrt{3}/3} + 2 \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{1}{u^2+1} du = \frac{2}{4} + \frac{4}{4}$$

$u \rightarrow 0, \sqrt{3}/3 \quad X = \sqrt{3}/3 \rightarrow \frac{2\sqrt{3}/3+1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow J = \frac{1}{2} \ln(u^2+u+1) + \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{\sqrt{3}/3}^{\frac{2\sqrt{3}/3+1}{\sqrt{3}}} \frac{dX}{X^2+4}$$

$$+ \frac{4}{\sqrt{3}} [\text{Arctan } X]_{\sqrt{3}/3}^{\frac{2\sqrt{3}/3+1}{\sqrt{3}}}$$

$I = \dots + \frac{1}{3} J$

Exemple : $I = \int \frac{1}{2+\cos x} dx$

$f(-x) \neq -f(x)$

$f(\pi-x) \neq -f(x)$

$f(\pi+x) \neq f(x)$

$\Rightarrow$ on pose $u = \tan(x/2)$

$du = \frac{1}{2} (1 + \tan^2(x/2)) dx$

$= \frac{1}{2} (1+u^2) dx$

$\Rightarrow dx = \frac{2}{1+u^2} du$

$$I = \int \frac{2}{(1+u^2)} \times \frac{1}{2 + \frac{1-u^2}{1+u^2}} du$$

$$= \int \frac{2}{2+2u^2+1-u^2} du = \int \frac{2}{3+u^2} du$$

donc $I = 2 \int \frac{1}{2+\cos x} dx = 2 \int \frac{du}{u^2+3}$ avec $u = \tan(x/2)$

$= 2 \int \frac{du}{3((u/\sqrt{3})^2+1)}$ *limite!*

$= 2 \left[\frac{\arctan(u/\sqrt{3})}{\sqrt{3}} \right]$

$= 2 \left[\frac{\arctan(\frac{\tan x}{\sqrt{3}})}{\sqrt{3}} \right]$

Correction

Prépa

TD maths

Méthode de calcul intégral

Exercice 1 $\int_{-3/2}^{-1} \sqrt{2t+3} dt$

Changement de variable:

$$u = \sqrt{2t+3}$$

$$t = \frac{u^2 - 3}{2}$$

• bornes $u(-3/2) = 0$

$u(-1) = 1$

• fonction $\sqrt{2t+3} = \sqrt{2\left(\frac{u^2-3}{2}\right)+3} = \sqrt{u^2} = u$

• élément différentiel: $dt = d\left(\frac{u^2-3}{2}\right) = u du$

$$\Rightarrow \int_{-3/2}^{-1} \sqrt{2t+3} dt = \int_0^1 u^2 du = \left[\frac{1}{3} u^3\right]_0^1 = \left[\frac{1}{3}\right]$$

$\int_{-1}^{1/3} \sqrt{1-3t} dt$

Changement de variable:

$$u = \sqrt{1-3t}$$

$$t = \frac{1-u^2}{3}$$

• bornes $u(-1) = 2$

$u(1/3) = 0$

• fonction: $\sqrt{1-3t} = \sqrt{1-3\left(\frac{1-u^2}{3}\right)} = u$

• élément différentiel: $dt = d\left(\frac{1-u^2}{3}\right) = -\frac{2}{3} u du$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1/3} \sqrt{1-3t} dt = \int_2^0 -\frac{2}{3} u^2 du = \left[-\frac{2}{9} u^3\right]_2^0 = \left[\frac{16}{9}\right]$$

Exercice 2: $\int_0^1 u'v = [uv] - \int uv'$

$\int_0^1 (t^2 - 3t + 1) \cdot e^{2t} dt$

$u' = e^{2t}$

$u = \frac{1}{2} e^{2t}$

$v' = 2t - 3$

$v = (t^2 - 3t + 1)$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{2t} \cdot (t^2 - 3t + 1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} e^{2t} \cdot (2t - 3)$$

$$= -\frac{1}{2} (e^2 + 1) - \int_0^1 \frac{1}{2} e^{2t} \cdot (2t - 3)$$

$u' = \frac{1}{2} e^{2t}$

$u = \frac{1}{4} e^{2t}$

$v' = 2$

$v = 2t - 3$

$$\int_0^1 \frac{1}{4} e^{2t} \cdot (2t - 3) = \left[\frac{1}{4} e^{2t} \cdot (2t - 3) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{4} e^{2t} \cdot 2$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} e^2 - \left(\frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4} \right) = 1 - \frac{1}{2} e^2$$

$$= -\frac{1}{2} (e^2 + 1) - \left(1 - \frac{1}{2} e^2\right) = \left[-\frac{3}{2} \right]$$

$$\int_0^1 (t^2 - t + 1) e^{-t} dt$$

On cherche une primitive de la forme :

$$g(t) = (at^2 + bt + c) \cdot e^{-t}$$

$$g'(t) = (2at + b - at^2 - bt - c) \cdot e^{-t}$$

$$= (-at^2 + (2a - b)t + b - c) e^{-t}$$

$$g(t) = (-t^2 - t) \cdot e^{-t}$$

$$I = \left[(-t^2 - t) e^{-t} \right]_0^1 = -\frac{2}{e}$$

Exercice 3:

Rappel:

$$\cos(\omega t) = \operatorname{Re}(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$

$$= \operatorname{Re}(e^{i\omega t})$$

$$I = \int_a^b e^{mt} \operatorname{Re}(e^{i\omega t}) dt$$

$$= \operatorname{Re} \int_a^b e^{mt} e^{i\omega t} dt$$

$$= \operatorname{Re} \int_a^b e^{(m+i\omega)t} dt$$

Une primitive de $e^{(m+i\omega)t}$ est $\frac{1}{m+i\omega} e^{(m+i\omega)t}$

$$I = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{m+i\omega} e^{m+i\omega} \right]_a^b$$

$$\int_0^{\pi/4} e^t \cos(4t) dt = \operatorname{Re} \int_0^{\pi/4} e^{(1+i4)t} dt$$

$$= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1+i4} e^{(1+i4)t} \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{19} (-e^{\pi/4} - 1)$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{-t} \sin(2t) dt = \operatorname{Im} \int_0^{\pi/2} e^{(-1+2i)t} dt$$

$$= \operatorname{Im} \left[\frac{1}{-1+2i} e^{(-1+2i)t} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{5} (e^{-\pi/2} + 1)$$

Correction

TD maths

$$u = \sin 2t$$

$$u' = 2 \cos 2t$$

$$v' = e^{-t}$$

$$v = -e^{-t}$$

$$I = \left[-e^{-t} \sin(2t) \right]_0^{\pi/2} + 2 \int_0^{\pi/2} \cos(2t) e^{-t} dt$$

$$u = \cos 2t$$

$$v = -e^{-t}$$

$$u' = -2 \sin 2t$$

$$v' = e^{-t}$$

$$J = \left[-e^{-t} \cos(2t) \right]_0^{\pi/2} - 2 \int_0^{\pi/2} \sin(2t) e^{-t} dt$$

$$I = \left[e^{-t} \sin 2t \right]_0^{\pi/2} + 2 \left[-e^{-t} \cos 2t \right]_0^{\pi/2} - 4I$$

$$\text{D'où } I = \frac{2}{5} (e^{-\pi/2} + 1)$$

Exercice 4 $\int_0^1 \frac{1}{t^2 - t - 2} dt$

$$d^0(1) = 1 \quad d^0(t^2 - t - 2) = 2$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$t_1 = 2$$

$$\Delta = 9$$

$$t_2 = -1$$

$$\begin{array}{l} t^2 - t - 2 = (t-2)(t+1) \\ \frac{1}{t^2 - t - 2} = \frac{\alpha}{t-2} + \frac{\beta}{t+1} \end{array}$$

Identification : $\frac{1}{t^2 - t - 2} = \frac{\alpha(t+1) + \beta(t-2)}{t^2 - t - 2}$

Donc $1 = \alpha t + \alpha + \beta t - 2\beta$

$$= (\alpha + \beta)t + \alpha - 2\beta$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - 2\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1/3 \\ \beta = -1/3 \end{cases}$$

ou alors on a $\frac{1}{t^2 - t - 2} = \frac{\alpha}{t-2} + \frac{\beta}{t+1}$ en multipliant

par $t-2$ $\frac{1}{t+1} = \alpha + \frac{\beta(t-2)}{(t+1)}$ pour $t=2$ $\alpha = 1/3$
 $\beta = -1/3$

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2 - t - 2} dt = \int_0^1 \frac{1/3}{t-2} dt + \int_0^1 \frac{-1/3}{t+1} dt$$

$$= -\frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{2-t} dt - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt$$

$$= -\frac{1}{3} [-\ln(2-t)]_0^1 - \frac{1}{3} [\ln(1+t)]_0^1$$

$$[-\ln(2-t)]_0^1 = \frac{1}{2-t}$$

$$[\ln(1+t)]_0^1 = \frac{1}{1+t}$$

$$= \frac{1}{3} (\ln(2)) - \frac{1}{3} \ln(2) = 0$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2} dt$$

Simplification de la fraction

$$\begin{array}{r|l} -t^3 + 3t & -3t^2 + 1 \\ -(-t^3 + \frac{1}{3}t) & \frac{1}{3}t \\ \hline \frac{8}{3}t & \end{array}$$

$$-t^3 + 3t = (-3t^2 + 1) \frac{1}{3}t + \frac{8}{3}t$$

$$\frac{-t^3 + 3t}{-3t^2 + 1} = \frac{1}{3}t + \frac{\frac{8}{3}t}{-3t^2 + 1}$$

$$\text{donc } I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{3}t dt + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\frac{8}{3}t}{-3t^2 + 1} dt$$

$$\begin{array}{r} \frac{8/3 t}{-3t^2 + 1} = \frac{8/3 t}{-3(t - \frac{1}{\sqrt{3}})(t + \frac{1}{\sqrt{3}})} \end{array}$$

En multipliant par $t - \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$a = \frac{4}{3}$$

$$b = \frac{4}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{a}{t - \frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{b}{t + \frac{1}{\sqrt{3}}} \right)$$

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{3}t dt + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{-\frac{4}{3}}{t - \frac{1}{\sqrt{3}}} dt + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{-\frac{4}{3}}{t + \frac{1}{\sqrt{3}}} dt$$

$$g'(g(x))$$

3) a) (u_{2m+1})

$$u_2 = g(u_1) = gg(u_1)$$

$$u_3 = g(u_2) = gg(u_2)$$

$$u_{2m+2} = g(u_{2m+1}) = gg(u_{2m+1})$$

$$u_1 \in [0, \sqrt{3}]$$

$$u_1 \wedge u_2 = g(g(u_1))$$

$$u_{2m+1} \wedge g(g(u_{2m+1}))$$

$$u_{2m+1} = gg(u_{2m+1})$$

Il faut étudier le signe $x - g(g(x))$

On étudie:

$$g'(x) = 1 - \frac{g'(g(x)) \times g'(x)}{1}$$

$$= 1 - \frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{3-x}}} \times \frac{1}{2\sqrt{3-x}}$$

$$g'(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\sqrt{3-\sqrt{3-x_0}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3-x_0}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3-\sqrt{3-x_0}}}{x} \cdot \sqrt{3-x_0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \sqrt{3-x} \cdot x$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 = (3-x)x^2 = 3x^2 - x^3$$

$$1 = 0,4218$$

Exercice 5 $\int_0^{\pi/2} \sin^5(t) dt$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^5 = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^2}{-4} \cdot \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^2}{-4} \cdot \frac{(e^{ix} - e^{-ix})}{2i} \\
 & = \frac{(e^{ix} - 2 + e^{-ix})(e^{ix} - 2 + e^{-ix})(e^{ix} - e^{-ix})}{32i} \\
 & = \frac{(e^{4ix} - 2e^{2ix} + 1 - 2e^{-2ix} + 4 - 2e^{-4ix} + 1 - 2e^{-ix} + e^{-ix})}{32i} \\
 & = \frac{(e^{4ix} - 4e^{2ix} - 4e^{-2ix} + e^{-4ix} + 6)(e^{ix} - e^{-ix})}{32i} \\
 & = \frac{(e^{5ix} - e^{3ix} - 4e^{ix} + 4e^{-ix} - 4e^{-3ix} + e^{-5ix} + 6e^{ix} - 6e^{-ix})}{32i} \\
 & = \frac{1}{16} \left[\frac{(e^{5ix} - e^{-5ix})}{2i} - \frac{(e^{3ix} - e^{-3ix})}{2i} - \frac{(4e^{ix} - 4e^{-ix})}{2i} \right] \\
 & = \frac{1}{16} \left(\sin(5x) - \sin(3x) - 4\sin(x) + 10\sin(x) \right) \\
 & = \frac{1}{16} \left(\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x) \right) \\
 & = \frac{1}{16} \left(\int_0^{\pi/2} \sin(5x) - 5 \int_0^{\pi/2} \sin(3x) + 10 \int_0^{\pi/2} \sin(x) \right) \\
 & = \frac{1}{16} \left([5\cos(5x)]_0^{\pi/2} - 5[3\cos(3x)]_0^{\pi/2} + 10[\cos(x)]_0^{\pi/2} \right) \\
 & = \frac{1}{16} (-5 + 15 - 10) = 0
 \end{aligned}$$

Correction

Exercice 6

TD maths

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t+i}{1+t^2} dt$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t}{1+t^2} dt + i \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} [P_m(4) - P_m(2)]_1^{\sqrt{3}} + i (\arctan \sqrt{3} - \arctan 1) \\ &= \left[\frac{1}{2} P_m(2) + i \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \int_{-a}^a e^{-2i\pi tx} dt \quad a > 0 \\ &= \int_{-a}^a \cos(-2\pi tx) + i \sin(-2\pi tx) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ J &= \int_{-a}^a e^0 dt = 2a \end{aligned}$$

$$\underline{x \neq 0, \quad -2i\pi x \neq 0}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-a}^a \frac{1}{-2i\pi x} e^{-2i\pi tx} dt \\ &= \left[\frac{1}{-2i\pi x} e^{-2i\pi tx} \right]_{-a}^a \\ &= \int_{-a}^a \cos(-2\pi tx) dt + i \int_{-a}^a \sin(-2\pi tx) dt \end{aligned}$$

Exercice 2 p 24

$$u_0 = 1$$

$$u_{m+1} = \sqrt{3 - u_m}$$

On a $u_{m+1} = f(u_m)$
avec $f(x) = \sqrt{3-x}$

Étude de f

• Domaine de def:

$$D_f =]-\infty, 3]$$

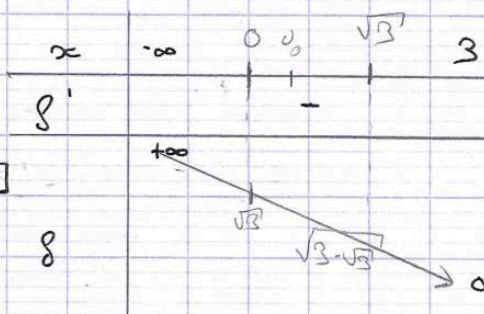
• f est continue par
continuité de $x \mapsto 3-x$
et $x \mapsto \sqrt{x}$

• Dérivabilité: $\mathbb{R}_+^+$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{3-x}} < 0$$

donc f est décroissante

On a $f([0, \sqrt{3}]) = [\sqrt{3-\sqrt{3}}, \sqrt{3}]$
 $\subset [0, \sqrt{3}]$



Réurrence:

• $u_0 = 1$ existe et appartient à $[0, \sqrt{3}]$

• On suppose que u_m existe et appartient à $[0, \sqrt{3}]$
pour un certain $m \geq 0$

On ~~suppose~~ ^{montre} que c'est vrai à $m+1$. Comme $u_m \in [0, \sqrt{3}]$,
 $u_{m+1} = f(u_m)$ existe de plus $u_{m+1} = f(u_m) \in [\sqrt{3-\sqrt{3}}, \sqrt{3}] \subset [0, \sqrt{3}]$
c'est $\forall m \in \mathbb{N} \wedge u_m \in [0, \sqrt{3}]$

• Équations différentielles

$$y' - \frac{1}{4x} y = \frac{1}{4}$$

• Ordre 1:

• Équation du type : $y' + a(x).y = g(x)$

où $a(x) \wedge g(x)$, 2 fonctions variables.

• Résoudre l'équation homogène:

$$y' + a(x).y = 0$$

$$\rightarrow y_H(x) = C \cdot e^{\int -a(x) dx}$$

Exemple: On doit résoudre: $y' - \frac{1}{4x} y = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_H(x) &= C \cdot e^{\int \frac{1}{4x} dx} = C \cdot e^{\ln(x) \cdot \frac{1}{4}} = C \cdot e^{\ln(x)^{1/4}} \\ &= C \cdot x^{1/4} \end{aligned}$$

• Résoudre l'équation particulière:

$$y' + a(x).y = g(x)$$

→ méthode de Lagrange (variation de la cte)

• on détermine: $y_0(x) = e^{\int -a(x) dx}$

• puis: $C'(x) = \frac{g(x)}{y_0(x)}$

$$\Rightarrow y_P(x) = C(x) \cdot y_0(x)$$

$$\begin{aligned} \text{Exemple: } y_0 &= x^{1/4} \Rightarrow C'(x) = \frac{1}{4^{3/4}} \cdot x^{-1/4} \\ C(x) &= \frac{1}{3} x^{3/4} \\ y_P(x) &= \frac{x}{3} \end{aligned}$$

• Solution complète: $y = y_H(x) + y_P(x)$

$$\text{Exemple: } y(x) = C \cdot x^{1/4} + \frac{x}{3}$$

• Ordre 2 :

• Équation du type

$$y'' + a.y' + b.y = g(x)$$

• Résoudre l'équation homogène : $y'' + a.y' + b.y = 0$

• On résout l'équation caractéristique :

$$R^2 + aR + b = 0$$

- Si $\Delta > 0$: $y_h(x) = C_1 \cdot e^{R_1 x} + C_2 \cdot e^{R_2 x}$
- Si $\Delta = 0$: $y_h(x) = C_1 \cdot e^{R_0 x} + C_2 \cdot x \cdot e^{R_0 x}$
- Si $\Delta < 0$: $y_h(x) = C_1 \cdot e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 \cdot e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

• Résoudre l'équation particulière : $y'' + a(x).y' + b(x).y = g(x)$

- Si $g(x) = P(x)$: $y_p(x) = x^m \cdot Q(x)$
- Si $g(x) = e^{\alpha x} \cdot P(x)$: $y_p(x) = e^{\alpha x} \cdot x^m \cdot Q(x)$
- Si $g(x) = e^{\alpha x} \cdot (P \cos(\beta x) + m \sin(\beta x))$:
 - Si $\alpha + i\beta$ pas solution : $y_p(x) = e^{\alpha x} \cdot (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))$
 - Si $\alpha + i\beta$ solution : $y_p(x) = e^{\alpha x} \cdot (\lambda x^m \cos(\beta x) + \mu x^m \sin(\beta x))$
- Si $g(x) = P \cos(\beta x) + m \sin(\beta x)$:
 - Si $i\beta$ pas solution : $y_p(x) = \lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)$
 - Si $i\beta$ est solution : $y_p(x) = \lambda x^m \cos(\beta x) + \mu x^m \sin(\beta x)$

• Solution complète : $y = y_h(x) + y_p(x)$

Factoriser $X^4 + 1$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}$

$$X^4 + 1 = (X^2 + 1)^2 - 2X^2 \quad a^2 - b^2$$

$$= (X^2 + 1 + \sqrt{2}X)(X^2 + 1 - \sqrt{2}X)$$

Factoriser $X^6 + 1$

$$X^6 + 1 = (X^3 + 1)(X^3 - 1)$$

$$X^6 + 2X^3 + 1 = (X^3 + 1)^2 - 3X^3 = (X^3 + 1)^2 - (\sqrt{3}X)^2$$

$$= (X^3 + 1 + \sqrt{3}X)(X^3 + 1 - \sqrt{3}X)$$

$$= (X^2 + 1)(X^4 + 2X^2 + 1 - 3X^3) = (X^2 + 1)((X^2 + 1)^2 - (\sqrt{3}X)^2)$$

$$= (X^2 + 1)[(X^2 + 1 - \sqrt{3}X)(X^2 + 1 + \sqrt{3}X)] + 1X^2 + X^2 = 0$$

Équations différentielles :

Exercice 1:

1) $2y' = x^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} x^2 \quad (E)$

$$\Rightarrow y(x) = \int \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{1}{6} x^3 + C$$

2) $y' - 2y = 2x - 3 \quad (E)$

On résout $P'(E)H$ $y' - 2y = 0$

$$y_H(x) = C e^{\int 2x dx} = C e^{x^2} = y_H(x) \quad y = y'$$

On cherche 1 solution particulière de $y' - 2y = 2x - 3$
variation de la constante (Lagrange)

$$y_P(x) = G(x) \cdot y_0(x) = C(x) \cdot e^{x^2}$$

on a donc à résoudre

$$C'(x) = \frac{g(x)}{y_0(x)} = \frac{2x - 3}{e^{x^2}} = (2x - 3)e^{-x^2}$$

on aura $C(x) = \int (2x - 3)e^{-x^2} dx$

$$y' - 2y = 2x - 3$$

1) Solution de l'équation homogène associée:

$$y_H = C e^{2x}$$

2) Solution particulière de l'équation complète

variation de la cte $y_p(x) = C(x) \cdot y_0(x)$

$$\text{où } y_0(x) = e^{2x}$$

on sait que $C(x)$ est solf^e de $C'(x) = \frac{2x-3}{e^{2x}}$

$$\text{donc } C(x) = \int C'(x) dx$$

$$= \int (2x-3) \cdot e^{-2x} dx$$

$$\text{donc } \int (2x-3) \cdot e^{-2x} dx \quad \text{IPP: } u'(x) = e^{-2x}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2x} (2x-3) - \int -\frac{1}{2} e^{-2x} \times 2 dx \quad u(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$\Rightarrow \int C'(x) dx = -\frac{1}{2} (2x-3) e^{-2x} + \int e^{-2x} dx \quad v(x) = 2x-3$$

$$= [-x+1] e^{-2x} \quad v'(x) = 2$$

$$= -x+1 = y_p(x)$$

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x) = C \cdot e^{2x} - x + 1$$

$$\text{donc ici } y(0) = C e^0 + 1$$

$$= C + 1 = 1 \Rightarrow C = 0$$

$$y' - 2y = \frac{1}{2} e^{mx} \quad m \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = 1$$

$$1) y_H(x) = C e^{2x}$$

2) Solution particulière de l'équation complète variation de la cte.

$$y_p(x) = C(x) y_0(x) = C(x) e^{2x}$$

$$C \text{ vérifie } C'(x) = \frac{1}{2} \frac{e^{mx}}{e^{2x}} = \frac{1}{2} e^{(m-2)x}$$

$$\Rightarrow C(x) = \int \frac{1}{2} e^{(m-2)x} dx$$

$$\Rightarrow C(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(m-2)} e^{(m-2)x} & \text{si } m \neq 2 \\ \frac{1}{2} x e^x & \text{si } m = 2 \end{cases}$$

Solution générale de l'équation complète

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$y(x) = \begin{cases} C e^{2x} + \frac{1}{2(m-2)} e^{mx} & \text{si } m \neq 2 \\ C e^{2x} + \frac{x}{2} e^{2x} & \text{si } m = 2 \end{cases}$$

On cherche la cte / $y(0) = 1$

$$m \neq 2, y(0) = 1 \Rightarrow C = \frac{2m-5}{2m-4}$$

$$m = 2, y(0) = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$\bullet y' - 2y = \cosh x = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x}$$

$$1) y_h(x) = C e^{2x}$$

2) solution particulière de: $y' - 2y = \cosh x$
variation de la cte

$$y_p(x) = C(x) \times e^{2x}$$

$$\text{et } C \text{ solution } C'(x) = \frac{\cosh x}{e^{2x}} = \cosh x e^{-2x}$$

$$\Rightarrow C(x) = \int \cosh(x) e^{-2x} dx = \frac{1}{2} \int (e^x + e^{-x}) e^{-2x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int e^x \cdot e^{-2x} dx + \frac{1}{2} \int e^{-x} \cdot e^{-2x} dx$$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{1}{2} \int e^{-x} dx + \frac{1}{2} \int e^{-3x} dx$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-x} - \frac{1}{6} e^{-3x}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = -\frac{1}{2} e^{-x} \times e^{2x} - \frac{1}{6} e^{-3x} e^{2x}$$

$$= -\frac{1}{2} e^x - \frac{1}{6} e^{-x}$$

$$3) C = \frac{5}{3}$$

$$y' - 2y = x \cdot e^x$$

$$1) y_H(x) = C e^{2x}$$

2) Sol particulière

→ variation de la cte : $y_p(x) = \ell(x) y_0(x) = C(x) \cdot e^{2x}$

$$\Rightarrow \int x \cdot e^{-x} dx \Rightarrow -x e^{-x} - e^{-x}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = (-x e^{-x} - e^{-x}) e^{2x}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = -x e^x - e^x = (-x - 1) e^x$$

$$3) \Rightarrow y(x) = C e^{2x} + (-x - 1) e^x$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = C \cdot 1 \Rightarrow C = 1$$

$$y' - 2y = \cos x - \sin x$$

$$1) y_H(x) = C e^{2x}$$

2) Sol particulière de l'eq complète

→ Méthode de superposition

$$\begin{cases} y' - 2y = \cos x \rightarrow y_{p1} \\ y' - 2y = -\sin x \rightarrow y_{p2} \end{cases} \quad y_p = y_{p1} + y_{p2}$$

→ variation de la cte

$$C'(x) = \frac{g(x)}{y_0(x)}$$

$$y_{p1}(x) = C(x) \cdot e^{2x} \quad y_p(x) = C(x) \cdot e^{2x}$$

$$C'(x) = \cos x \cdot e^{-2x} \quad \text{de solution } C'(x) = \cos x \cdot e^{-2x}$$

$$\int \cos(x) \cdot e^{-2x} \quad C(x) = \int \cos(x) \cdot e^{-2x}$$

$$\text{IPP: } u' = e^{-2x}, \quad u = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$v = \cos x, \quad v' = -\sin x$$

$$C(x) = -\frac{1}{2} \cos x e^{-2x} - \int -\frac{1}{2} e^{-2x} \times -\sin x dx$$

$$= -\frac{1}{2} \cos x e^{-2x} - \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} e^{-2x} \cdot \sin x$$

$$\text{IPP } u' = e^{-2x}, \quad u = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$v = \sin x; \quad v' = \cos x$$

$$\Rightarrow C(x) = -\frac{1}{2} \cos x e^{-2x} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \sin x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} \cos x \right)$$

$$\Rightarrow I + \frac{1}{4} I = -\frac{1}{2} \cos x e^{-2x} + \frac{1}{4} \sin x e^{-2x}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4} I = -\frac{1}{2} \cos x e^{-2x} + \frac{1}{4} \sin x e^{-2x}$$

$$\Rightarrow I = -\frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \cos x e^{-2x} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} \sin x e^{-2x}$$

$$C(x) = -\frac{2}{5} \cos x e^{-2x} + \frac{1}{5} \sin x e^{-2x}$$

$$\Rightarrow y_{p_1}(x) = -\frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x$$

$$C \text{ sol de } C'(x) = \frac{\sin x}{e^{2x}} = \sin x \cdot e^{-2x}$$

$$C(x) = \int C'(x) dx = \int -\sin x \cdot e^{-2x} dx$$

IPP: $u' = e^{-2x}$, $u = -\frac{1}{2} e^{-2x}$

$v = -\sin x$, $v' = \cos x$

$$I = Ch(x) = \frac{1}{2} \sin x e^{-2x} - \int \frac{1}{2} e^{-2x} \times -\cos x dx$$

$$= \frac{1}{2} \sin x e^{-2x} - \frac{1}{2} \int e^{-2x} \times \cos x dx$$

$$\text{IPP: } u' = e^{-2x}, u = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$\Rightarrow \int -e^{-2x} \sin x dx = \frac{1}{2} \sin x e^{-2x} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \cos x e^{-2x} +$$

$$\frac{1}{2} \int -e^{-2x} \sin x dx \}$$

on a donc $I = \frac{1}{2} \sin x e^{-2x} + \frac{1}{4} \cos x e^{-2x} - \frac{1}{4} I$

$$\Rightarrow I = \frac{2}{5} \sin x e^{-2x} + \frac{1}{5} \cos x e^{-2x}$$

$$\Rightarrow C(x) = y_{p_2}(x) = \frac{2}{5} \sin x + \frac{1}{5} \cos x$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \sin x + \frac{1}{5} \cos x$$

$$y' + 2xy = 4x$$

$$y' + 2xy = 0$$

$$y_h(x) = C \cdot e^{-2x}$$

$$\text{Solution particulière: } y = 2$$

$$\text{Solution générale}$$

$$y(x) = C \cdot e^{-2x} + 2$$

$$(x+1)y' + xy = 1$$

$$y' + \frac{x}{x+1}y = \frac{1}{x+1}$$

Gm Résout équa homogène :

$$y_h(x) = C \cdot e^{\int \frac{x}{x+1} dx}$$

$$\int \frac{x}{x+1} dx = \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int dx - \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= x - \ln(1+x) + C$$

$$\Rightarrow y_h(x) = C \cdot e^x \cdot e^{-\ln(1+x)}$$

$$= C \cdot \frac{e^x}{x+1}$$

⇒ Solution particulière: variation de la cte : on pose

$$y_p(x) = C(x) \cdot y_0(x) \text{ avec } y_0(x) = \frac{e^x}{x+1}$$

$$C'(x) = e^{-x}$$

$$C(x) = e^{-x}$$

$$y_p(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$y(x) = C \cdot \frac{e^x}{x+1} - \frac{1}{x+1}$$

$$xy' + y = \operatorname{Arctan} x \quad U = \mathbb{R}_+^*$$

$$\Rightarrow y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x} \operatorname{Arctan} x$$

$$y_H(x) = C \cdot e^{\int -\frac{1}{x} dx} = C \cdot \frac{1}{x}$$

$$y_0 = \frac{1}{x} \quad \cdot \quad C'(x) = \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^2}$$

$$E(x) = \int \operatorname{Arctan} x \, dx$$

$$\text{IPP} : \quad u' = 1, \quad u = x$$

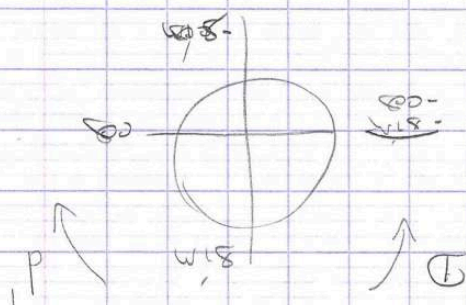
$$v = \operatorname{Arctan} x, \quad v' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow K(x) = x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2} P_m(1+x^2)$$

$$\Rightarrow \underline{y_p(x) = \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2x} P_m(1+x^2)}$$

$$y(x) = C \cdot \frac{1}{x} + \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2x} P_m(1+x^2)$$

108



- $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 2x - 3$

- équation homogène

- équation caractéristique

$$R^2 + R + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \times \frac{1}{4} = 0$$

une racine double $R = -\frac{1}{2}$

- $y_h = C_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x}$

- équations particulière de l'équation:

$\Rightarrow$ 2nd membre polynôme de $d^0 = 1 \Rightarrow$ solution de la forme $ax + b$

- on pose $y_p(x) = ax + b \rightarrow$ on dérive 2 fois y_p
 $y_p'(x) = a$, $y_p''(x) = 0$

- On reprend dans l'équation complète

$$a + \frac{1}{4}(ax + b) = 2x - 3$$

$$\frac{1}{4}ax + (a + \frac{1}{4}b) = 2x - 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}a = 2 \Rightarrow a = 8 \\ a + \frac{1}{4}b = -3, \frac{1}{4}b = -3 - 8 \Rightarrow b = -44 \end{cases}$$

$$y_p(x) = 8x - 44$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x} + 8x - 44$$

- $y'' - 2y' + 2y = \cos x$

- homogène:

- équation homogène

$$R^2 - 2R + 2 = 0$$

$$R_1 = 1 + 2i/2 = \underline{1 + i}$$

$$\Delta = -4 < 0$$

$$R_2 = \underline{1 - i}$$

$$y_h(x) = C_1 e^{R_1 x} + C_2 e^{R_2 x} = C_1$$

$$y_h(x) = (C_1 + C_2) e^x \cos x + i(C_1 - C_2) e^x \sin x$$

• particulière

y_p sous la forme d'une combinaison linéaire de $\sin$ et $\cos$.

$$y_p(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$$

$$y_p' = -\alpha \sin x + \beta \cos x$$

$$y_p'' = -\alpha \cos x - \beta \sin x$$

On reporte dans E

$$: \cos x (-\alpha - 2\beta + 2\alpha) + \sin x (-\beta + 2\alpha + 2\beta) = \cos x$$

$$\text{on a résoudre } \begin{cases} \alpha - 2\beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

$$\beta = -2/5$$

$$\alpha = 1/5$$

$$y_p = \frac{1}{5} \cos x - \frac{2}{5} \sin x$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$y'' + 5y' + 4y = 3 - 2x$$

• équa homogène

• caract

$$r^2 + 5r + 4 = 0$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9$$

$$r_1 = -1$$

$$r_2 = -4$$

$$y_h(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}$$

$y_p(x)$ est sous la forme

$$ax + b, \quad y_p'(x) = a$$

$$y_p''(x) = 0$$

$$5a + 4(ax + b) = 3 - 2x$$

$$5a + 4ax + 4b = 3 - 2x$$

$$\begin{cases} 4a = -2 \\ 5a + 4b = 3 \end{cases}$$

$$a = -1/2$$

$$b = 11/8$$

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{8}$$

$$\begin{aligned} 3 + \frac{5}{2} &= \frac{11}{2} \\ \frac{6}{2} + \frac{5}{2} &= \frac{11}{2} \end{aligned}$$

$$y'' + 5y' + 4y = xe^{-x}$$

• homogène

• caract

$$R^2 + 5R + 4 = 0$$

$$\Delta = 9$$

$$R_1 = -1, R_2 = -4$$

$$C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-4x}$$

• particulières

$$y'' + 5y' + 4y = xe^{-x}$$

on a (-1) qui est racine simple de l'équation caractéristique

donc on va chercher 1 sol particulière de

$$\text{la forme } y_p(x) = x \times (ax + b) \cdot e^{-x} = (ax^2 + bx) e^{-x}$$

$uv + uv'$

$$y_p'(x) = (2ax + b) \cdot e^{-x} - (ax^2 + bx) e^{-x}$$

$$y_p'(x) = e^{-x} (2ax + b - ax^2 - bx)$$

$$y_p''(x) = (-2ax + 2a - b) e^{-x} - (-ax^2 + 2ax - bx + b) e^{-x}$$

$$= (-2ax + 2a - b + ax^2 - 2ax + bx - b) e^{-x}$$

$$= (-4ax - 2b + ax^2 + 2a + bx) e^{-x}$$

$$= (x(ax - 4a + b) - 2b + 2a) e^{-x}$$