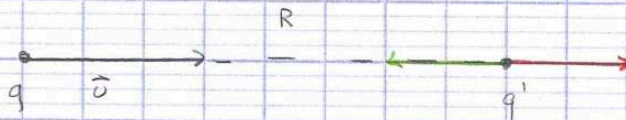


Électromagnétisme

TD 1: Charges, loi de Coulomb et courant

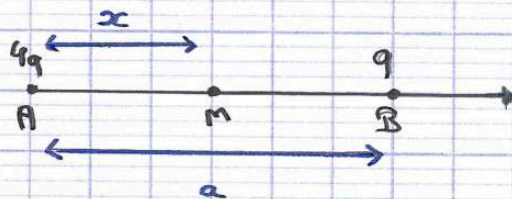
Rappel: $\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{R^2} \vec{u}$ force exercée par q sur q'



- $qq' > 0 \rightarrow$ répulsive
- $qq' < 0 \rightarrow$ attractive

Exercice 1

$q > 0$



Pour avoir un équilibre, la seule possibilité que la charge q_m en M soit entre A et B $x = AM$
 $a = AB$
avec $0 < x < a$

1) $\vec{f}_{Am} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_m}{x^2} \vec{e}_x$

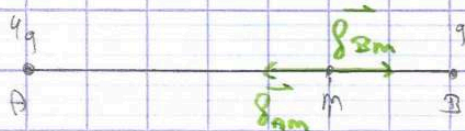
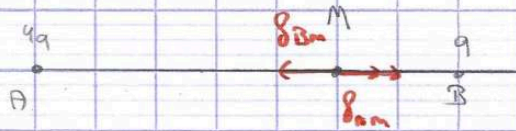
$\vec{f}_{Bm} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_m}{(a-x)^2} \vec{e}_x$

2) $\vec{F}_{tot} = \vec{f}_{Am} + \vec{f}_{Bm}$
 $= \frac{qq_m}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(a-x)^2} \right) \vec{e}_x$

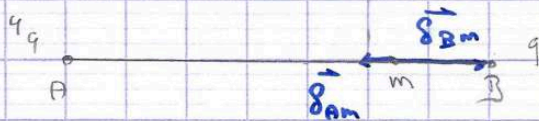
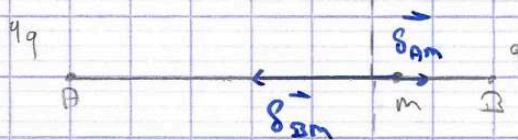
3) $\vec{F}_{tot} = 0$
 $4(a^2 - 2ax + x^2) - x^2 = 0$
 $4a^2 - 8ax + 3x^2 = 0$
 $\Delta = 16a^2$

$x_1 = \frac{2}{3}a$
 $x_2 = 2a$

- 4) $q_m > 0$
 $q_m < 0$



La particule est en équilibre stable si $q_m > 0$



La particule est en équilibre instable si $q_m < 0$

Exercice 2

$$n_{at} = n \cdot N_a$$

$$n = \frac{m}{\mu}$$

$$\mu = \frac{m}{n}$$

1) pour 1 m^3 : $m = \mu V$

$$m = 8,8 \cdot 10^6 \text{ g}$$

$$n = \frac{m}{\mu} = 1,38 \cdot 10^5 \text{ mol}$$

$$n_{at} = 8,34 \cdot 10^{28} \text{ atomes / m}^3$$

2) $n_{e^-} = 8,34 \cdot 10^{28} \text{ e}^- / \text{m}^3$

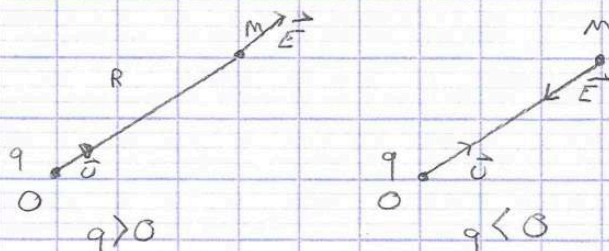
3) $\vec{j} = nq\vec{v}$
 $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \rightarrow I = j \cdot S$

$$I = n_e \cdot q v_D S \Leftrightarrow v_D = \frac{I}{n_e e S} = 7,52 \cdot 10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$$

TD 2 : Champs électriques créés par des distributions de charge

Rappel

Champ $\vec{E}$ créé par une charge ponctuelle q



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \vec{u}$$

Champ créé par une distribution continue de charge.

densité linéique de charge $\lambda = \frac{dq}{dl}$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{R^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{R^2} \vec{u}$$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \vec{u}$$

densité surfacique de charge $\sigma = \frac{dq}{dS}$

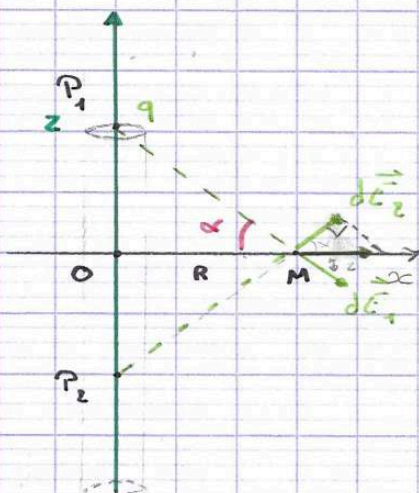
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma dS}{R^2} \vec{u}$$

densité volumique de charge $\rho = \frac{dq}{dV}$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho dV}{R^2} \vec{u}$$

$$\vec{E} = - \vec{\text{grad}} V$$

Exercice 2.1: Champ créé par une droite chargée



1) Par symétrie le champ $\vec{E}$ créé par la droite chargée est suivant l'axe Ox. Donc invariance selon z.

2) Le p.p est cylindrique et la distribution de charge est continue. Il y a donc une invariance par translation selon l'axe z donc $\vec{E}(R, \varphi, z)$ ne dépend pas de z. Une invariance par rotation selon l'axe z donc $\vec{E}(R) \vec{e}_R = \vec{E}$

3) L'élément dz porte la charge élémentaire

$$dq_1 = \lambda dz$$

$$\text{Ainsi } d\vec{E}_1(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_1}{r_1^2} \vec{u}_1$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{dz}{R^2 + z^2} dz$$

$$\tan(\alpha) = \frac{z}{R}$$

$$dz = R (1 + \tan^2(\alpha)) d\alpha$$

$$d\vec{E}_1(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R (1 + \tan^2(\alpha)) d\alpha}{R^2 (1 + \tan^2(\alpha))}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} d\alpha \vec{u}_R$$

$$4) \quad dq_2 = \lambda dz$$

$$d\vec{E}_2 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} d\alpha \vec{u}_2$$

5) Le champ élémentaire crée en M :

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} d\alpha (\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$$

$$\text{où } \begin{cases} \vec{u}_1 = \cos \alpha \vec{e}_x - \sin \alpha \vec{e}_y \\ \vec{u}_2 = \cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y \end{cases}$$

$$d\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} 2\cos \alpha d\alpha \vec{e}_x$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \cos \alpha d\alpha \vec{e}_x$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \int_0^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha \vec{e}_x$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \vec{e}_x$$

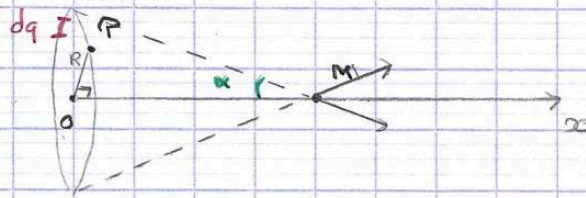
$$6) \quad \vec{E} = -\text{grad } V$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial R} \vec{e}_R - \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \vec{e}_R = -\frac{\partial V}{\partial R} \vec{e}_R$$

$$V = -\int \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln R + \text{cte}$$

Exercice 2.2: Champ créé par un cercle chargé



$$\begin{cases} \overline{OM} = x \\ \overline{PM} = R \end{cases}$$

$$\lambda > 0$$

$$(1) \quad \lambda = \frac{dq}{dP} \Rightarrow dq = \lambda dP$$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \vec{u} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{dP}{x^2 + R^2} \vec{u}$$

Par raison de symétrie, $\vec{E}$ sera suivant l'axe x
Partie utile de $d\vec{E}$ sont $dE_x = dE \cos \alpha$

$$\cos \alpha = \frac{x}{R} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dP$$

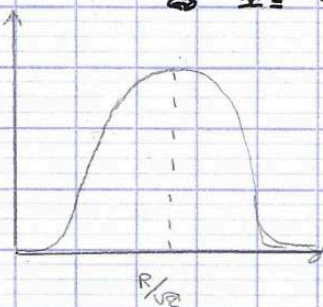
$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \int dP$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{u}_x$$

$$g'(x) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} = \frac{\cancel{x^2 + R^2} - 3x^2}{(x^2 + R^2)^{5/2}} \frac{\lambda R}{2\epsilon_0}$$

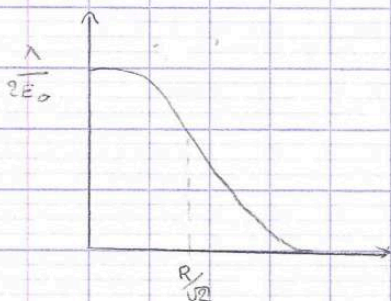
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cancel{x^2 + R^2} = 3x^2$$

$$\Leftrightarrow x = R/\sqrt{2}$$



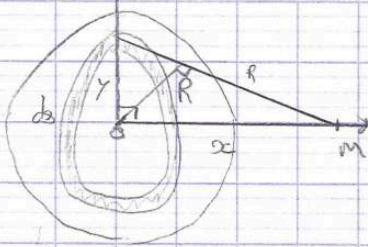
$$(2) \quad V(z) = - \int \vec{E}(M) dz$$

$$= \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$



Exercice 2.3 : Champ créé par un disque chargé

% à Rejane



$$ds = 2\pi y dy$$

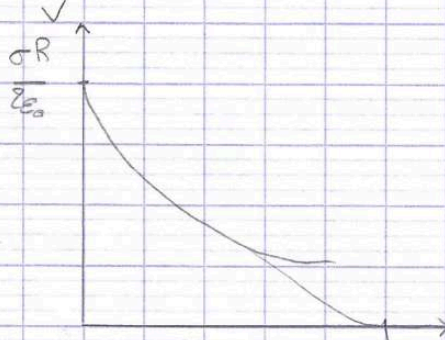
$$(1) \quad dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} \quad \text{avec} \quad dq = \sigma ds$$

$$\sigma > 0$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma ds}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + x^2} - x)$$



$$(2) \quad \vec{E} = - \text{grad } V$$

$$\vec{E}_x \vec{e}_x + \vec{E}_y \vec{e}_y + \vec{E}_z \vec{e}_z =$$

$$= - \frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\begin{cases} \vec{E}_x = \partial V / \partial x \\ \vec{E}_y = \partial V / \partial y \\ \vec{E}_z = \partial V / \partial z \end{cases}$$

$$\vec{E}_x = - \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \vec{e}_x$$

13) Le plan du diag est un plan de symétrie
Par symétrie, $\vec{E}$ sont suivant $\vec{e}_x$

$$\text{On a } \vec{E}(x=0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$$

III - Théorème de Gauss

• Le champ $\vec{E}$ est dans tout plan de symétrie

• Tout plan passant par 0 est plan de symétrie. L'intersection de ces plans fait que $\vec{E}$ est radial.

$$\vec{E} = E_R \vec{e}_R$$

Invariances par rotation d'angles θ et ϕ

$$\rightarrow \text{Par symétrie } \vec{E} = E_R(R) \vec{e}_R$$

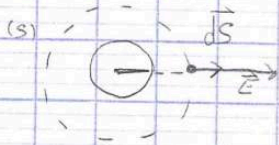
• Champ $\vec{E}$ à l'intersection

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R^2 \sin \theta d\phi d\theta$$

$$4\pi R^2$$

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

(S) = surface de Gauss



$$\begin{aligned} \vec{E} \text{ et } d\vec{S} \text{ sont colinéaires} & \begin{cases} \vec{E} = E_R \vec{e}_R \\ d\vec{S} = dS \vec{e}_R \end{cases} \\ E_R = cte \text{ sur } (S) & \end{aligned}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_R S = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E_R 4\pi R^2 = \frac{\sigma S_R}{4\pi \epsilon_0 R^2}$$

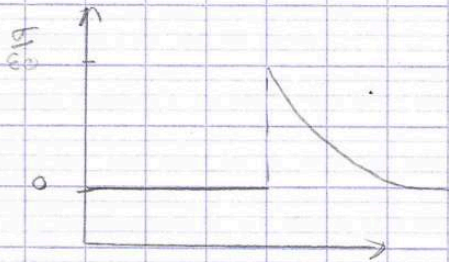
$$E_R = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{4\pi \epsilon_0 R^2}$$

$$= \frac{\sigma R^2}{R^2} \text{ avec } R > R$$

• Champ créé à l'intérieur ($R < R$)

Surface de Gauss (s): surface de centre O et de rayon $R < R$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_R 4\pi R^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{pas de charge dans } S. \Rightarrow E_R = 0$$



$$V_e = + \frac{Q R^2}{\epsilon_0 r} + cte$$

$$V_e = cte$$

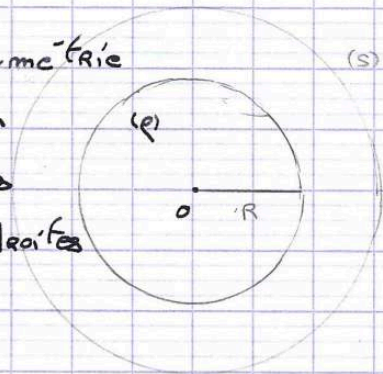
Il y a continuité du potentiel à la traversée d'une couche chargée

$$V_i(R=R) = V_e(R=R) = \frac{QR}{\epsilon_0}$$

L'exercice 3.5: La boule chargée

$\vec{E}$ est dans tout plan de symétrie

Tout plan passant par O est plan de symétrie. L'intersection des plans de symétrie définit des droites radiales:



$$\vec{E} = E_R \vec{e}_R$$

Invariance selon φ et $\theta \Rightarrow \vec{E} = E_R(r) \vec{e}_R$

On choisit (s) la surface de Gauss: sphère de rayon R et de centre O

• Si $R > R$:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$E_R S = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_R \cdot 4\pi R^2 = \frac{q R}{\epsilon_0}$$

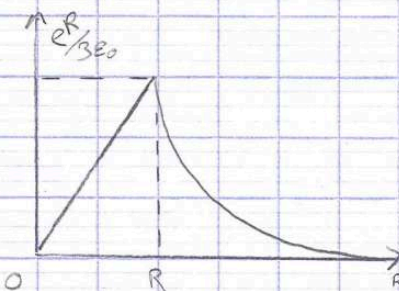
$$\Rightarrow \vec{E}_R = \frac{q R^2}{3\epsilon_0 R^2}$$

Le champ $\vec{E}$ est donc équivalent au champ créé par une charge ponctuelle placée au centre de la sphère avec la charge totale Q .

Si $R < R$

$$\Rightarrow \vec{E}_R \cdot 4\pi R^2 = -q \frac{4\pi R^3}{3\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_R = -q \frac{R}{3\epsilon_0}$$



$$\vec{E} = -\text{grad}(\vec{V})$$

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{R}$$

$$V_e = \frac{q R^3}{3\epsilon_0 R}$$

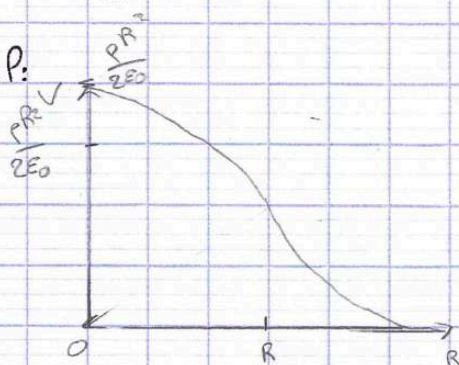
$$V_i = \frac{q R^2}{6\epsilon_0} + cte$$

Continuité du potentiel:

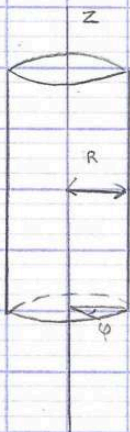
$$V_e(R=R) = V_i(R=R)$$

$$\frac{q R^2}{3\epsilon_0} = \frac{q R^2}{6\epsilon_0} + cte$$

$$cte = \frac{q R^2}{2\epsilon_0}$$



Exercice 3.6 : Champ créé par un cylindre (plein) uniformément chargé



$\vec{E}$ est dans tout plan de symétrie. Tout plan passant par l'axe z ou perpendiculaire à l'axe z sont des plans de symétrie donc immer $\vec{E} = E_R \vec{e}_R$

Invariance par rotation ϕ et translation z donc $\vec{E} = E_R(R) (\vec{e}_R)$

Surface de Gauss (S) : un cylindre creux fermé de rayon R et de hauteur h.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S_1)} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{(S_2)} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{(S_3)} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= \iint_{(S_1)} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (\text{car } \vec{E} \perp d\vec{S})$$

$$= E_R \cdot 2\pi R h = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Extérieur

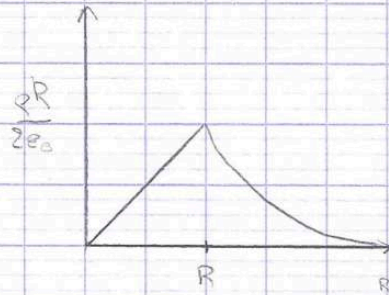
$$\Rightarrow E_R \cdot 2\pi R h = \frac{\rho \pi R^2 h}{\epsilon_0}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

$$\Rightarrow \vec{E}_R = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \vec{e}_R$$

Intérieur $\Rightarrow E_R \cdot 2\pi R h = \frac{\rho \pi R^2 h}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow \vec{E}_R = \frac{\rho R}{2\epsilon_0}$$



$$V_i = - \int \vec{E}_i \cdot d\vec{R}$$

$$= - \int \frac{\rho R}{2\epsilon_0} dR = - \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} + cte$$

$$V_i(R=0) = 0 \rightarrow cte = 0$$

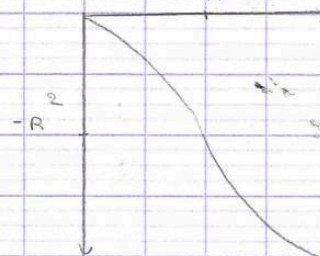
$$V_i = - \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0}$$

$$V_e = - \int \vec{E}_e \cdot d\vec{R}$$

$$= - \int \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 R} dR = - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln(R) + cte$$

$$V_e(R=R) = V_i(R=R) \Rightarrow K = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \left(\ln R - \frac{1}{2} \right)$$

$$V_e = - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \left(\ln(R/R) + \frac{1}{2} \right)$$



Surfaces équipotentielle $V = cte \rightarrow R = cte$ (cercle de centre z)
 Ligne de champ toujours perpendiculaire aux surfaces équipotentielles
 (demi droite d'origine z)

$R \rightarrow 0 \Rightarrow p.p$ infini

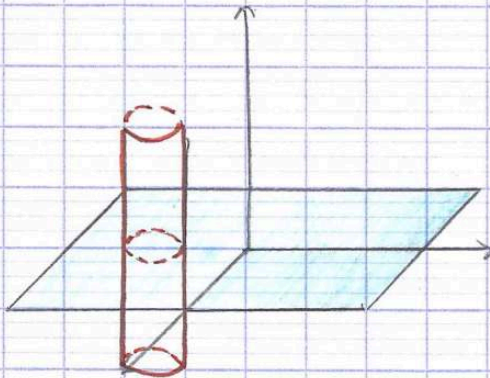
$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \quad x: \text{distance au p.p}$$

$$q = \lambda R^2 h = \lambda h$$

$$q = \lambda R^2$$

$$\vec{E} = \frac{q R^2}{2\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

Exercice 3.1



Donc $\vec{E} \perp$ au plan chargé

$$\vec{E} = E \vec{e}_x$$

Invariance par translation suivant

l'axe y et z donc

$$\vec{E} = E(x) \vec{e}_x$$

$\vec{E}$ est dans tout plan de symétrie.

Tout plan $\perp$ au plan chargé est un plan de symétrie.

Par exemple les plans (xoz) et (xoy) passant par M sont des plans de symétrie. L'intersection de ces plans fait que $\vec{E}$ est

suitant ox

Surface de Gauss (S)

- cylindre de section S (de longueur 2π)
- disques de surface S de manière à fermer la surface de Gauss

$$\iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

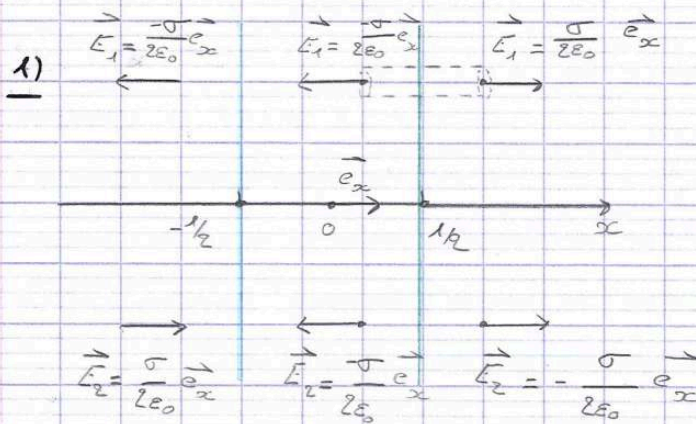
$$\iint_{(B)} \vec{E} \cdot d\vec{S} + 2 \iint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$2 \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2 \cdot \vec{E} \cdot S = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\sigma S}{\epsilon_0} = 2ES$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Exercice 3.2: Champ créé par deux plans infinis



Si $x < -1/2$:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0}$$

Si $x > 1/2$:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0}$$

Si $-1/2 < x < 1/2$:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$$

⇒ Condensateur plan.

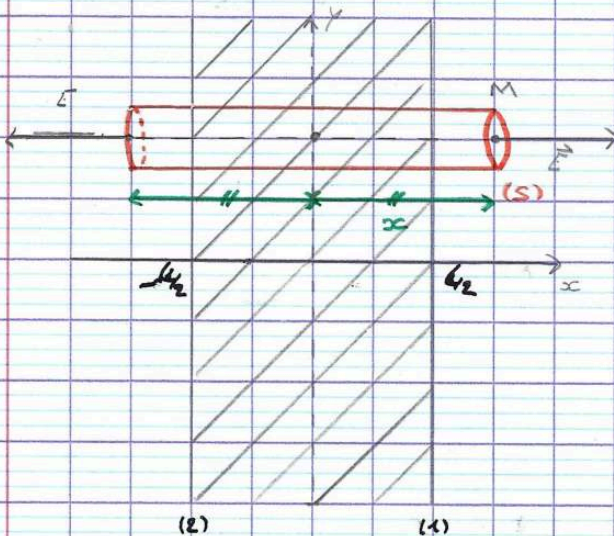
Dans le cas concret de plans infinis on peut

utiliser ce résultat si

l'écart entre les plans est

faible devant leurs dimensions

Exercice 3.3 Champ créé par un volume chargé entre deux plans.



Le champ $\vec{E}$ est dans tout plan de symétrie. Tout plan $\perp$ aux plans qui délimitent le volume est plan de symétrie $\vec{E}$ suivant $\vec{e}_x$.

Invariance par translation suivant y et z

$$\vec{E} = E(x) \vec{e}_x$$

$$E(x=0) = 0 \text{ par symétrie}$$

Le plan passant par $x=0$ est plan de symétrie

$$\|\vec{E}(-x)\| = \|\vec{E}(x)\|$$

Soit (s) la surface de Gauss constituée d'un cylindre Σ , de deux disques S fermant la surface. On a Σ de longueur x .

$$\begin{aligned} \oint_{(s)} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} + 2 \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= 2ES \end{aligned}$$

D'après le théorème de Gauss $\oint_{(s)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$
où $Q_{\text{int}} = \rho SL$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2ES &= \rho SL / \epsilon_0 \\ E &= \frac{\rho L}{2\epsilon_0} \quad \text{si } 2x > L \end{aligned}$$

$$\text{où } Q_{\text{int}} = \rho S 2x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2ES &= \rho S 2x / \epsilon_0 \\ E &= \frac{\rho x}{\epsilon_0} \quad \text{si } 2x < L \end{aligned}$$

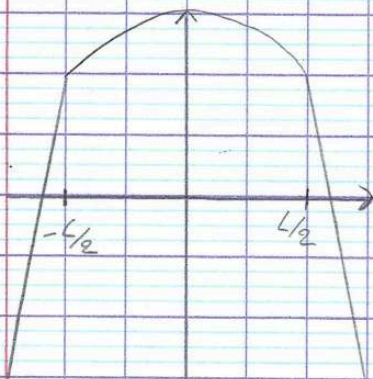
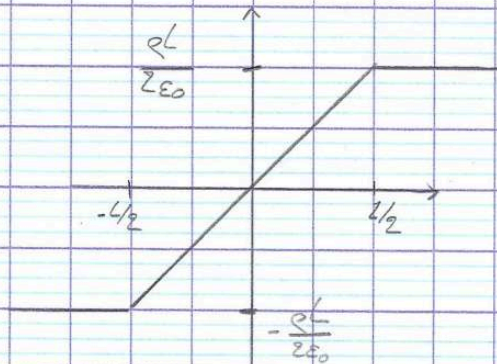
$$\underline{3)} \quad V_i = -\int E_i dx = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0} + C_i$$

$$V_e = -\int E_e dx = -\frac{\rho Lx}{2\epsilon_0} + C_e$$

$$-\frac{\rho L^2}{8\epsilon_0} + C_i = -\frac{\rho L^2}{4\epsilon_0} + C_e = V_0$$

$$C_i = V_0 + \frac{\rho L^2}{8\epsilon_0}$$

$$C_e = V_0 + \frac{\rho L^2}{4\epsilon_0}$$



TD 4 - Condensateur

$$dq = \sigma \, dS$$

$$\sigma = \frac{dq}{dS} = \frac{Q}{S}$$

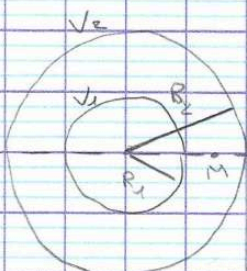
Procédure

- 1- Champ entre les armatures (théorème de Gauss)
- 2- Calcul de la circulation du champ lorsqu'on se déplace de l'armature interne vers l'externe.

$$\int_{\text{interne}}^{\text{externe}} \vec{E} \cdot d\vec{P} = V(\text{interne}) - V(\text{externe})$$

- 3- Utilisation de la définition de la capacité
- $$C = \frac{\text{charge armature interne}}{V(\text{interne}) - V(\text{externe})}$$

Exercice 4.1 : Capacité d'un condensateur sphérique



$$\sigma_1 = \frac{-q}{4\pi R_1^2}$$

$$\sigma_2 < \sigma_1$$

$$\sigma_2 = \frac{q}{4\pi R_2^2}$$

Par symétrie $\vec{E} = E_R(r) \vec{e}_R$

Soit (S) la surface de Gauss une sphère de rayon $R_1 < R < R_2$ de centre O

→ $\vec{E}$ entre les armatures

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi R^2 = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi R^2 \epsilon_0} \vec{e}_R$$

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{R} = \int_A^B E_R \vec{e}_R \cdot dR \vec{e}_R = \int_A^B E_R dR = V(A) - V(B)$$

$$\int_A^B \frac{-Q}{4\pi \epsilon_0 R^2} dR = \left[\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R} \right]_A^B = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right] = V_1 - V_2$$

$$U = V_2 - V_1 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} > 0 \quad R_2 > R_1$$

$$C = \frac{-q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{V_2 - V_1} = \frac{Q}{U}$$

$$C = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_2 R_1}{R_2 - R_1}$$

$$[C] = F$$

$$[C_0] = F/m$$

$$\text{Si } R_2 = R_1 + e \text{ avec } e \ll R_1$$

$$R_1 R_2 \approx R_1^2$$

$$R_2 - R_1 = e$$

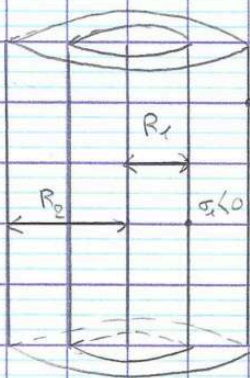
$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1^2}{e}$$

$$S = 4\pi R_1^2$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

capacité d'un condensateur plan de surface S dont les armatures sont espacées de e .

Exercice 48



$\vec{E}$ est dans tout plan de symétrie

Tout plan passant par $\vec{e}_z$ ou $\perp$ à $\vec{e}_z$ est plan de symétrie ainsi $\vec{E}$ est radial:

$$\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$$

Invariance par translation selon z , relation selon q

$$\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$$

Soit (s) la surface de Gauss un cylindre de rayon $R_1 < r < R_2$, de hauteur h et 2 disques fermant la surface.

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} \vec{E}_R dS$$

$$\vec{E}_R S = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_R 2\pi R h = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\text{or } Q_{int} = \sigma_1 2\pi R_1 h$$

$$\vec{E}_R = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 R} \Rightarrow \vec{E}_R < 0$$

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{R} = V(A) - V(B) \Rightarrow \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \frac{dR}{R} = V_1 - V_2$$

$$= \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \rho_m \frac{R_2}{R_1} = V_1 - V_2$$

$$U = V_2 - V_1 = -\frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \rho_m \frac{R_2}{R_1}$$

$$3) Q_1 = \sigma_1 2\pi R_1 h < 0$$

$$Q_2 = \sigma_2 2\pi R_2 h > 0$$

$$4) C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = -\frac{Q_1}{U}$$

$$= \frac{-\sigma_1 2\pi R_1 h \epsilon_0}{-\sigma_1 \rho_m \left(\frac{R_2}{R_1}\right) R_1}$$

$$= \frac{2\pi \epsilon_0 h}{\rho_m \left(\frac{R_2}{R_1}\right)} > 0$$

$$R_2 = R_1 + e \quad \frac{e}{R_1} \ll 1$$

$$\rho_m \left(1 + \frac{e}{R_1}\right) \approx \frac{e}{R_1} \Rightarrow C = \frac{2\pi \epsilon_0 h R_1}{e} = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

Exercice 4.3

(1) Q_0 en surface : $V_0 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R}$

$$\sigma_0 = \frac{Q_0}{4\pi R^2} = \frac{\epsilon_0 V_0}{R}$$

$$= 0,3 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

$$Q_0 = 4\pi\epsilon_0 R V_0 = 3 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

$$V_0 = 3000 \text{ V}$$

(2) Au voisinage de la sphère

$$E = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{V_0}{R} \quad (\text{théorème de Coulomb})$$

A une distance d :

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d^2} = 0,33 \cdot 10^{13} \text{ V/m}$$

(3) État initial

$$(s) \quad V_0 = 3000 \text{ V}$$

$$Q_0 = 3 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

(s') potentiel nul
charge nulle

État final

$$(s) \quad V =$$

$$Q =$$

$$(s') \quad V' =$$

$$Q' =$$

On a $V = V'$ même potentiel car (s) et (s') reliées par un fil

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$Q_0 = Q + Q'$$

De même $V' = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 r}$

On trouve $\begin{cases} Q = \frac{R}{R+r} Q_0 \\ Q' = \frac{r}{R+r} Q_0 \end{cases}$

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{Q_0 V}{R} \quad \sigma' = \frac{Q'}{4\pi r'^2} = \frac{\epsilon_0 V Q}{\pi R}$$

$$\begin{aligned} a) \quad Q &= 2,7 \cdot 10^{-8} \text{ C} \\ Q' &= 0,3 \cdot 10^{-8} \text{ C} \\ V &= 2700 \text{ V} \end{aligned}$$

Les charges ont tendance à s'accumuler dans les régions à forte courbure $\Rightarrow$ pouvoir des pointes

(4) Au voisinage d'un conducteur en équilibre électrostatique

$$(5) \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{V}{R} = 3 \cdot 10^4 \text{ V.m}^{-1}$$

$$\vec{E}' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{V}{r} = 27 \cdot 10^4 \text{ V.m}^{-1}$$

TD 6 : Calculs de champs magnétique

Exercice 6.1

Théorème d'Ampère :

$\vec{B}$ est $\perp$ à tout plan de symétrie des courants
Tout plan contenant le S.P est plan de symétrie des courants

$\hookrightarrow \vec{B}$ est orthoradial

$$\vec{B} = B_\phi \vec{e}_\phi$$

Invariance par translation d'axe z.

Invariance par rotation d'angle ϕ .

$$\vec{B} = B_\phi(\rho) \vec{e}_\phi$$

$$\int_{(\rho)} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{encagée}}$$

intensité du courant qui traverse n'importe quelle surface s'appuyant sur (ρ)
Cette intensité est comptée positivement dans le sens de la normale à la surface et négative si l'inverse.

$$\oint_{(q)} B_q(r) \vec{e}_q \cdot d\vec{l} \vec{e}_q = B_q \int_{(q)} dl = B_q 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B_q = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_q$$

Loi de Biot et Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} d\vec{l} \wedge \vec{u}$$

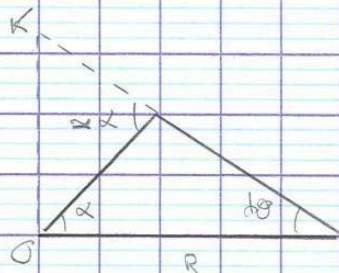
champ élémentaire créé par un élément de circuit parcouru par l'intensité I .

$d\vec{B} \perp$ au plan défini par $d\vec{l}$ et $\vec{u}$ dans le sens tel que $(d\vec{l}, \vec{u}, d\vec{B})$ forment un trièdre direct.

$$\text{norme } dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} dl \sin \alpha.$$

de : angle sous lequel de M, on voit l'élément $d\vec{l}$

$$d\vec{l} \wedge \vec{u} = dl \sin(\alpha) \vec{e}_n$$



$$\sin \alpha \approx \frac{OK}{R}$$

$$dl \sin \alpha \approx OK \approx R d\theta$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} d\alpha$$

champ créé par l'élément dl parcouru par I , vu du point M sous l'angle $d\alpha$

$$B = \int dB$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\alpha}{R} \quad \text{car } R \sin \alpha = R$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\sin \alpha d\alpha}{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Exercice 6.2

(1) $I = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = jS = j\pi R^2$

(2) $\vec{B}$ est $\perp$ à tout plan de symétrie même symétrie et invariante que le g.p.

À l'extérieur

Contour d'Ampère : Cercle (C) de centre l'axe z de rayon $\rho < R$ orienté dans le sens trig. $\vec{B} = B_\phi(\rho) \vec{e}_\phi$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{P} = B 2\pi \rho = \mu_0 I'$$

I' : courant qui traverse le disque de rayon ρ .

$$I' = \iint_{S'} j \cdot d\vec{S} = j\pi \rho^2$$

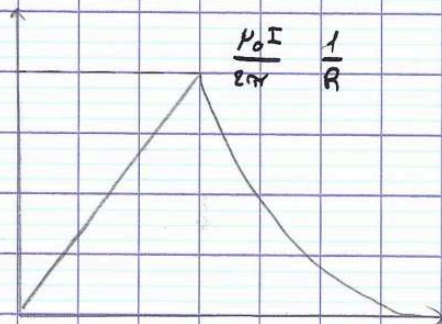
$$\Rightarrow B = \mu_0 \frac{I}{2\pi R}$$

À l'intérieur

$$I_{\text{encagée}} = \pi R^2 j_0 = \frac{R^2}{R^2} I$$

$$\Rightarrow 2\pi R B = \mu_0 \frac{\pi R^2}{R^2} I$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{R^2}$$



(3) On cherche I tel que $B = 1 \text{ tesla}$

Pour $R = 1 \text{ cm}$: $I = 500 \text{ mA}$

Exercice 6.3

(1) Un solénoïde est une juxtaposition de spires circulaires parcourues par un courant I .

$\vec{B}$ est perpendiculaire à tout plan de symétrie.

Tout plan perpendiculaire à l'axe z est plan de symétrie des courants.

$$\vec{B} = B_z \vec{e}_z$$

On applique le théorème d'Ampère sur un contour fermé $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{C}$ le rectangle ABCD avec $AB = L$ et $BC = l$. Ce rectangle contient n spires et est parcouru d'une intensité I .

On utilise le théorème d'Ampère:

$$\oint_{ABCD} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I n L$$

On décompose $\oint_{ABCD} \vec{B}(r) d\vec{l}$. De plus on

a $\vec{B} \parallel \vec{e}_z$ et $d\vec{l} \parallel \vec{e}_z$ donc

$$\oint_{ABCD} \vec{B}(r) d\vec{l} = \int_A^B \vec{B} d\vec{l} + \int_B^D \vec{B} d\vec{l} + \int_D^C \vec{B} d\vec{l} + \int_C^A \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I n L$$

$l < R$

(12) $B = \mu_0 n I$

$$B_r > 0$$

$$\text{car } I_{\text{enlacée}} = 0$$

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = B L - B_r L$$

$$= \mu_0 I_{\text{enlacée}}$$

$$\Rightarrow B_r = B = \mu_0 n I$$

$l > R$

(13) $I_{\text{enlacée}} = n I L$

$$B L - B_r L = \mu_0 n I L$$

$$B_r = 0$$

Exercice 6.1

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} d\vec{p} \wedge \vec{u} \quad \begin{cases} dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} d\varphi \sin \alpha \\ dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} d\theta \end{cases}$$

dB est dans la direction et le sens donné par le fait que $(d\vec{p}, \vec{u}, d\vec{B})$ forment un trièdre direct
 $\rightarrow d\vec{B}$ dans le sens de $\vec{e}_z$
Tous les éléments $d\vec{p}$ sont créés dans le même champ $\vec{B}$ dans la même direction et sens

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} I d\varphi \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} R d\varphi \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e}_z \end{aligned}$$

Par symétrie $\vec{B}$ est suivant Oz , dB_z : partie d.f. de $d\vec{B}$.

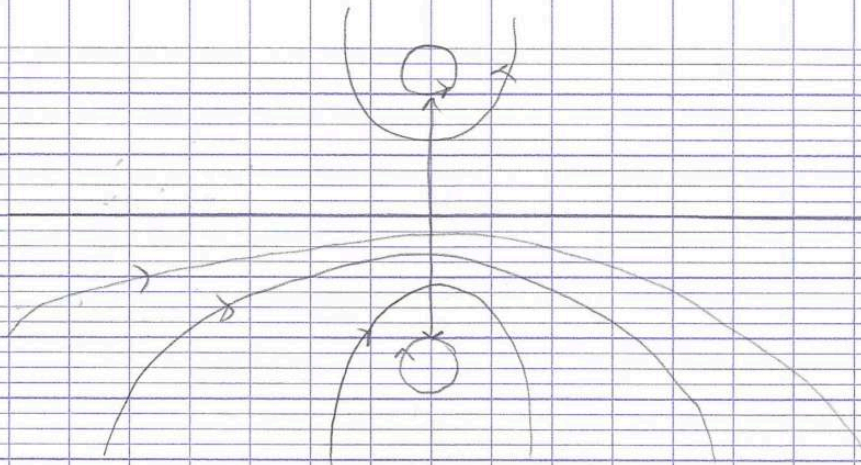
$$dB_z = dB \sin \varphi$$

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} d\varphi \sin \varphi \quad \text{or} \quad \sin \varphi = \frac{R}{R} \Rightarrow \sin^3 = \frac{R^3}{R^3}$$

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \sin^3 d\varphi$$

$$\text{donc } \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} \int d\varphi \wedge \vec{R}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$



Exercice 6.5

Pour une spire vue sous l'angle φ

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \varphi$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \varphi \, dz$$

tranche élémentaire dz du solénoïde

$$dB = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \varphi \, m \, dz$$

$$\tan \varphi = \frac{R}{z}, \quad z = R \cotan \varphi$$

$$dz = -\frac{R}{\sin^2 \varphi} d\varphi \quad \text{pour } dz > 0 \Rightarrow d\varphi < 0$$

$$B = -\frac{\mu_0 I m R}{2R} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sin^3 \varphi}{\sin^2 \varphi} d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2} (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)$$

TD 5: action du champ magnétique

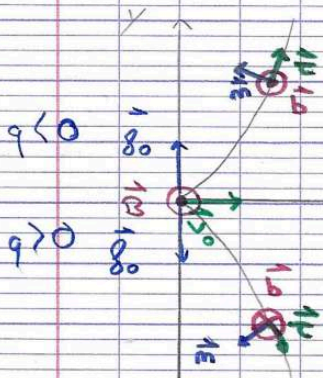
Rappel

Force de Lorentz

$$\vec{f} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

force qui s'exerce sur une charge q animée d'une vitesse $\vec{v}$ placée dans un champ magnétique $\vec{B}$.
 $\vec{f}$ est $\perp$ au plan défini par $\vec{v}$ et $\vec{B}$. Le sens de $\vec{f}$ est tel que $\vec{v}$, $\vec{B}$, $\vec{f}$ forment un trièdre direct.

Exercice 5.1



à $t=0$

$$\vec{f}_0 = q \vec{v}_0 \wedge \vec{B}$$

Cette force va provoquer une trajectoire vers le bas si $q > 0$ et vers le haut pour $q < 0$.

$$\vec{f}_0 = q v_0 \vec{e}_x \wedge B \vec{e}_z = -q v_0 B \vec{e}_y$$

$$\vec{f} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$
$$\vec{v} = v \vec{t}$$

PFD:

$$m \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{v^2}{R} \vec{m} \right) = q v \vec{t} \wedge B \vec{e}_z$$

$$q > 0 \Rightarrow m \left(\frac{dv}{dt} \vec{t} + \frac{v^2}{R} \vec{m} \right) = q v \vec{t} \wedge -B \vec{b}$$

$$q < 0 \Rightarrow m \left(\frac{dv}{dt} \vec{t} + \frac{v^2}{R} \vec{m} \right) = q v \vec{t} \wedge B \vec{b}$$

$$q > 0 \quad m \left(\frac{dv}{dt} \vec{r} + \frac{v^2}{R} \vec{m} \right) = qvB \vec{m}$$

$$q < 0 \quad m \left(\frac{dv}{dt} \vec{r} + \frac{v^2}{R} \vec{m} \right) = -qvB \vec{m}$$

dans les 2 cas $\frac{dv}{dt} = 0$, $v = \text{cte} = v_0$

Le champ B ne permet pas d'accélérer des particules mais seulement de dévier.

$$q > 0 \quad m \frac{v_0^2}{R} = qv_0 B$$

$$\rightarrow R = \frac{mv_0}{qB} = \text{cte}$$

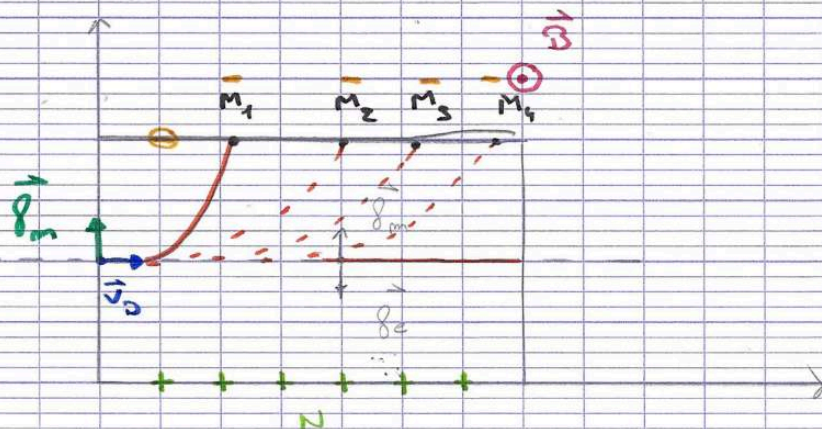
$\rightarrow$ trajectoire circulaire

$$q < 0 \quad m \frac{v_0^2}{R} = -qv_0 B$$

$$\rightarrow R = \frac{mv_0}{qB} > 0$$

donc $R = \frac{mv_0}{|q|B}$

Exercice 5.2: Essai Hall



1) 2) La force de Lorentz va incurver la trajectoire des e^- qui vont venir peupler la face supérieure (M) dégageant au contraire la face inférieure (N) qui va nous apparaître avec une polarité opposée
(t) Il va alors apparaître une ddp entre N et M et donc le champ électrique vers le haut. La force électrique qui s'agit sur les e^- sera alors vers le bas, opposée à la force magnétique. Ce champ électrique va augmenter pour s'annuler par avoir la même norme que la force magnétique. A ce moment là, la force totale est nulle et les e^- ont pour mouvement Osc . Ce régime transitoire est très bref.

3) Lorsque le régime transitoire est terminé $\vec{f}_c + \vec{f}_m = \vec{0}$

$$U = \int_N \vec{v}_0 \cdot \vec{v}_m = \int_N \vec{v}_0 \cdot \vec{B} \vec{e}_y = \int_N v_0 B \vec{e}_y \cdot d\vec{P} = \int_N v_0 B \vec{e}_y \cdot d\vec{y} \vec{e}_y$$

4) $U = v_D B L_y$

$\vec{j} = n q v_D \vec{v}_D$

$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$

$\vec{j} = n_e q \vec{v}_D = -n_e e \vec{v}_D$

$$I = \iint -n_e e \vec{v}_D \cdot d\vec{S} = -n_e e \iint v_D \vec{e}_x \cdot (-dS \vec{e}_x)$$

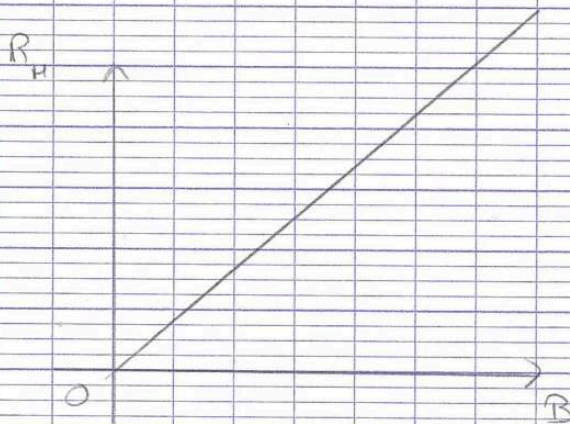
$$= n_e e v_D \iint dS$$

$$= n_e e v_D L_y L_z$$

5) $R_H = \frac{U}{I} = \frac{v_D B L_y}{n_e e v_D L_y L_z}$

$= \frac{B}{n_e e L_z}$

R_H est une fonction linéaire de B .



Une mesure de R_H permet d'en déduire la valeur de B .

Une mesure de R_H permet de mesurer n_H si B est connu.

6) $R_H (\text{métal}) = 6,3 \cdot 10^{-8} \Omega$

$R_H (\text{semi conducteur}) = 0,63 \Omega$

charge des ions $\oplus$ $q = +m_e e$

car le conducteur est neutre et on a vu que

la charge totale des e^- est $-m_e e$

$\vec{E}_H$ va agir également sur les ions $\oplus$.

Pour un élément de volume dV du conducteur ayant une charge dq , est placé dans le champ

$\vec{E}_H$, la force $d\vec{g}$ qui s'exerce sur dV vaut:

$$d\vec{g} = dq \vec{E}_H$$

$$\begin{aligned} d\vec{g} &= \rho dV \vec{E}_H \\ d\vec{g} &= m_e e dV \vec{E}_H \end{aligned} \quad \text{où} \quad \rho = \frac{dq}{dV} = m_e e$$

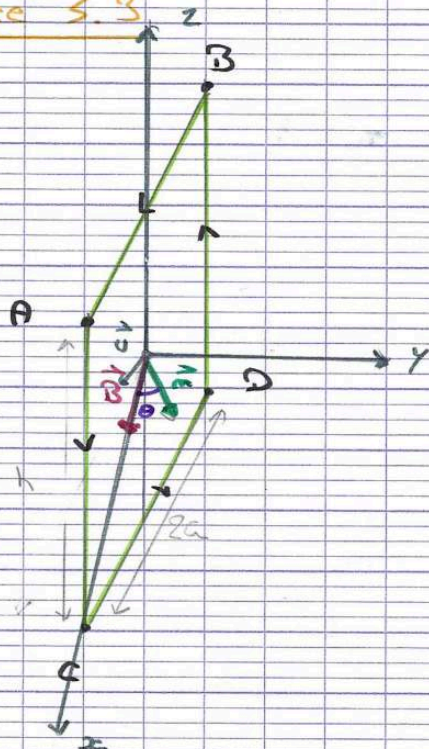
On a donc

$$\begin{cases} \vec{j} = -m_e e \vec{v}_0 \\ \vec{E}_H = -\frac{\vec{v}_0}{c} \wedge \vec{B} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d\vec{g} &= -m_e e dV \vec{v}_0 \wedge \vec{B} \\ &= \vec{j} \wedge \vec{B} dV \\ &= \vec{j} \wedge \vec{B} d\vec{P} d\vec{s} \\ &= d\vec{P} \wedge \vec{B} (\vec{j} d\vec{s}) \\ &= \int d\vec{P} \wedge \vec{B} \vec{j} d\vec{s} \\ &= \int \vec{j} d\vec{s} d\vec{P} \wedge \vec{B} \\ &= I d\vec{P} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

Force de Laplace

Exercice 5.3



Forces:

Sur AB:

$$\begin{aligned} d\vec{g}_{AB} &= I d\vec{P} \wedge B \vec{e}_y \\ \vec{v} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \vec{e}_x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \vec{e}_z \\ &= \sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\vec{g}_{AB} &= I d\vec{P} (\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_z) \\ &\quad \wedge B \vec{e}_y \\ &= -I d\vec{P} \cos \theta B \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x \\ &= IB \cos \theta d\vec{P} \vec{e}_z \\ &= IB \cos \theta \int_B^A d\vec{P} \vec{e}_z \\ &= 2NB a \cos \theta \vec{e}_z \end{aligned}$$

I, B, g direct

SUR AC

$$\begin{aligned} d\vec{g}_{AC} &= I(-dP) \vec{e}_z \wedge B \vec{e}_x \\ &= -IB dP \vec{e}_y \\ N\vec{g}_{AC} &= -NIB \int_A^C dP \vec{e}_y \\ &= -NIBh \vec{e}_y \end{aligned}$$

SUR CD

$$N\vec{g}_{CD} = -2a INB \cos \theta \vec{e}_x \quad \text{idem AD}$$

SUR DB

$$\begin{aligned} d\vec{g}_{DB} &= IB dP \vec{e}_z \wedge B \vec{e}_x \\ &= IB dP \vec{e}_y \\ N\vec{g}_{DB} &= NIB \int_D^B dP \vec{e}_y \\ &= NIBh \vec{e}_y \end{aligned}$$

$\sum \vec{F} = \vec{0}$ mais $\sum \vec{M}_O(\vec{F}) \neq \vec{0}$

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{g}_{AB}) &= \vec{OM} \wedge \vec{g}_{AB} \\ &= \frac{h}{2} \vec{e}_z \wedge 2a INB \cos \theta \vec{e}_z = \vec{0} \end{aligned}$$

de même $\vec{M}_O(\vec{g}_{CD}) = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{g}_{AC}) &= \vec{OK} \wedge \vec{g}_{AC} \\ &= a (\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_y) \wedge -NIBh \vec{e}_y \\ &= -NIBah \sin \theta \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\vec{M}_O(\vec{g}_{DB}) = -NIBah \sin \theta \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_O &= \vec{M}_O(\vec{g}_{AC}) + \vec{M}_O(\vec{g}_{DB}) \\ &= -2ahNIB \sin \theta \vec{e}_z = -NSIB \sin \theta \end{aligned}$$

ce couple à tendance à ramener le cadre +
 $\vec{e}_x$ et donc à égaliser la règle du flux max