Correction TD

Suites numériques

Suites réelles ou complexes

Exercice 1 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite.

On définit une nouvelle suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

Suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge mq la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV vers 0

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(S_n) = S \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

On a : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n$

$= s_{n-1} + u_n$

D'où $u_n = s_n - s_{n-1}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n - S_{n-1}$

$= \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1}$

$= S - S = 0.$

$\frac{n}{n(1+\frac{1}{n})}$

$\frac{1}{1} = 1$

Exercice 2 :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes.

$u_n = \frac{n + i\ln(n)}{n+1} = \frac{n}{n+1} + \frac{i\ln(n)}{n+1}$

$Re(u_n) = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} Re(u_n) = 1$

- étude $Re(u_n) \wedge Im(u_n)$
  - $Re \to a$
  - $Im \to b$
- étude de $|u_n|$
  - $u_n \to z \Rightarrow |u_n| \to |z|$
  - Si $z = 0$
  - $u_n \to 0 \Leftrightarrow |u_n| \to 0$

$$\operatorname{Im}(u_n) = \frac{\ln(n)}{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ln(n)}{n}$$

$$\lim \operatorname{Im}(u_n) = 0$$

$1 + 2 \times 2^{n+1} \cos n\theta$

$$\lim (u_n) = \lim \operatorname{Re}(u_n) + i \lim \operatorname{Im}(u_n)$$

$$= 1$$

$$u_n = \frac{(1+i)^n}{2^n} \Rightarrow |u_n| = \frac{|(1+i)^n|}{|2|^n}$$

$$= \frac{|1+i|^n}{|2|^n} = \frac{\sqrt{2}^n}{2^n} = 2^{-\frac{n}{2}}$$

$$\lim |u_n| = 0 \Rightarrow \lim u_n = 0$$

$$u_n = \frac{1}{1 + 2^n e^{in\theta}} \qquad |u_n| = \frac{1}{|1 + 2^n \cos n\theta + i 2^n \sin n\theta|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1+2^n \cos(n\theta))^2 + (2^n \sin(n\theta))^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + 2^{2n} + 2^{n+1} \cos(n\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{2^{2n}\left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + 2^{-n+1} \cos n\theta\right.}}$$

= Après étude des termes on a $|u_n| \to 0$

$u_n \to 0$

$$u_n = n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) e^{i \arctan(n)}$$

$$= n \ln(1+1/n) \cos(\arctan(n)) + i\, n \ln(1+1/n) \sin(\arctan(n)).$$

$\lim \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$$= \frac{\ln(1+1/n)}{1/n} \cdot 1/n$$

d'où $\lim \operatorname{Re}(u_n) = \lim n \ln(1+\frac{1}{n}) \cos(\arctan(n))$

$= \cos(\arctan n)$

or $\arctan(n) \to \pi/2$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \operatorname{Re}(u_n) = \cos(\pi/2) = 0$

⚠ Ici on utilise. $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Re}(u_n) = \lim \cos(\arctan n)$

$= \cos \lim \arctan n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Im}(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} n \ln(1+1/n) \sin(\arctan(n))$

$= \sin \pi/2 = 1$

$\sqrt{\sqrt{2^2}}$

$\sqrt{2}$

Donc $u_n = i$

$u_n = \arctan(n) \cdot e^{i \cdot n \cdot \pi/4}$

$= \arctan(n) \cdot \cos(n\pi/4) + i \arctan(n) \cdot \sin(n \cdot \pi/4)$

$\arctan(n) \to \pi/2$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Re}(u_n) = \pi/2 \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n\pi/4)$.

Si $n = 0\ [8]$ alors $\frac{n\pi}{4} = 0 \cdot \frac{\pi}{4}\ [8\pi/4] = 0\ [2\pi]$

donc $\cos(n\pi/4) = \cos(0) = 1$.

Si $n = 2\ [8]$ alors $n\frac{\pi}{4} = \pi/2\ [2\pi]$

$\cos(\pi/2) = 0$

Il n'y a pas de limite pour $\cos(n\pi/4)$ car la suite prend indéfinie.

Exercice 4 :

$$u_n = \sqrt{n}\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$= \sqrt{n}\ \frac{1}{n}\ \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}_{1}$$

$$\lim u_n = \lim \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n} = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$$u_n \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad , \quad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

$$u_n = \frac{n+\sqrt{n}}{2n+\ln(n)} = \frac{n}{2n}\ \frac{1+\frac{\sqrt{n}}{n}}{1+\frac{\ln(n)}{2n}}$$

$$u_n \overset{+\infty}{\sim} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\lim u_n = \frac{1}{2}$$

$$u_n = \sin(n) \cdot \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
$$= \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \qquad u_n \sim \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$$

$$\lim U_n = \lim \sin(n) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 .$$

$$u_n = \frac{e^{-n} + \frac{1}{n}e}{\ln\left(1+\frac{1}{ne}\right)} \Rightarrow u_n \underset{+\infty}{\sim} = n^2 e^{-n} + 1$$

$$\lim u_n = \lim n^2 e^{-n} + 1$$
$$= 1$$

Suite

Suites réelles :

Exercice 1

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\nearrow$ à partir d'un rang n_1

$u_{n_1} \leq u_{n_1+1} \leq u_{n_1+2}$

- Pour $n \geq n_1$ $\quad u_n \geq u_{n_1}$
  - Si $0 \leq n \leq n_1 - 1$

$E = \{u_0, u_1, \dots, u_{n_1}\}$ est un ensemble fini

il est minoré par son plus petit élément $\min(E)$

On en déduit que $u_n \geq \min(u_n)$

Exercice 2

1) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite $\mathbb{R}$ $\nearrow$ qui admet une suite extraite convergente

$u_n \nearrow \qquad u_n$ soit CV, DV

$u_{n_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} l$

- (u_{n_k}) est une suite extraite d'une suite croissante et donc elle est aussi croissante + majorée (CV).

$\exists M \in \mathbb{R}, \forall k \geq 0 \quad u_{n_k} \leq M \qquad u_{n_k} \leq M$

D'où (u_n) est majorée comme elle est $\nearrow$, elle CV vers la in limite q (u_{n_k})

$u_n \nearrow$ on extrait une suite (u_n) majorée

On a $u_{n_k} \leq u_{n_{k+1}}$ car $n_k \leq n_{k+1}$ et $(u_n) \nearrow$

donc (u_{n_k}) est une suite croissante et elle est majorée elle est donc convergente donc (u_n) CV.

Exercice 3

1) $$u_{2(n+1)} - u_{2n} = \sum_{k=0}^{2(n+1)} \frac{(-1)^k x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$$
$$= \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^{2n+2} x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$
$$= \frac{-x^{2n+1}(2n+2) x^{2n+1}}{(2n+2)!} = \frac{x^{2n+1}(-(2n+2)+x)}{(2n+2)!}$$

· Étude du signe de $-(2n+2)+x$: x fixé dans $\mathbb{R}^+_*$

À partir d'un certain rang. $-(2n+2)+x \leq 0$

donc $u_{2(n+1)} - u_{2n} \leq 0$

La suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissant à partir d'un certain rang.

De m̂ on mq (u_{2n+1}) est $\nearrow$ à partir d'un certain Rag

$$u_{2n} - u_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n} \dots - \sum_{k=0}^{2n+1} \dots$$
$$= -(-1)^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \to 0 \ (x \in]0,1]) \to 0 \ (x \in]1,+\infty[$$

(u_{2n}) & (u_{2n+1}) sont adjacents.

2) u_n est convergente

Exemples de suites numériq

Exercice 1

- $u_n = \dfrac{n+2}{2n+1} = \dfrac{n+2}{2(n+1/2)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3/2}{2n+1}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} + \frac{3/2}{2n+3} - \frac{1}{2} - \frac{3/2}{2n+1}$$

$$= \frac{3/2\,(2n+1) - 3/2\,(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$= \frac{3/2\,(-2)}{(2n+3)(2n+1)} = \boxed{\frac{-3}{(2n+3)(2n+1)}} < 0$$

$(u_n) \searrow \quad \lim u_n = \lim \dfrac{1}{2} + \dfrac{3/2}{2n+1} = \boxed{1/2}$

- $u_n = \mathrm{Arctan}(\sqrt{n})$

$x \mapsto \sqrt{x} \nearrow$

$x \mapsto \mathrm{Arctan}(x) \nearrow$

$x \mapsto \boxed{\mathrm{Arctan}(\sqrt{x}) \nearrow}$

$\underline{\lim u_n = \pi/2}$

- $u_n = \sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\ln(n^{1/n})} = e^{\frac{\ln(n)}{n}}$

$\dfrac{\ln n}{n} \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

- on étudie $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

$g'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

$1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1$

$x = e$

x	1		e		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \exp\left(\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} - \dfrac{\ln n}{n}\right)$

si $n > e$

$\Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ d'où la suite est décroissante à rang du rang $n = 3$

Exercice 4

$$u_n = \int_n^{n+1} \frac{e^{t-n}}{t}\, dt \quad \text{on étudie} \quad u_{n+1} - u_n :$$

$$= \int_{n+1}^{n+2} \frac{e^{x-(n+1)}}{x}\, dx - \int_n^{n+1} \frac{e^{t-n}}{t}\, dt$$

$$= \int_n^{n+1} \frac{e^{t-n}}{t+1} - \int_n^{n+1} \frac{e^{t-n}}{t}\, dt$$

$$= \int_n^{n+1} e^{t-n} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t}\right) dt$$

$$= u_n$$

pour u_n :

$$n \leq t \leq n+1$$

$$0 \leq t-n \leq 1$$

$$1 \leq e^{t-n} \leq e$$

$$\frac{1}{t} \leq \frac{e^{t-n}}{t} \leq \frac{e}{t}$$

$$[\ln t]_n^{n+1} \leq u_n \leq e.[\ln t]_n^{n+1}$$

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq u_n \leq e.\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

(u_n) est minorée + décroissante donc elle est CV vers 0.

Exercice 2 :

$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

· Point fixe : $f(x) = x$

$x = -2$

· $v_n = u_n + 2 \wedge u_n = v_n - 2$

$v_{n+1} = u_{n+1} + 2$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$

$= \frac{1}{2}(v_n - 2) + 1$

$= \frac{1}{2} v_n$

· donc v_n de raison $1/2$ et de premier terme 3.

$\to 3 . \frac{1}{2}^n = v_n$

$u_n = v_n - 2$

$u_n = 3 . \frac{1}{2}^n - 2$

$u_{n+1} - u_n = 3 . \frac{1}{2}^{n+1} - 2 - (3 . \frac{1}{2}^n - 2)$

$= -\frac{3}{2} . \frac{1}{2}^n < 0$ décroissante

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \underline{-2}.$

Exercice 1 :

$u_n = (1 + \frac{1}{n})^n = \exp(\ln(1 + \frac{1}{n})^n)$

$= \exp(n . \ln(1 + 1/n))$

$= \exp(n . \frac{\ln(1 + 1/n)}{1/n} . 1/n)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e.$

$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0.$

cartridge
chip

$$u_n = \sqrt{n^2+1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$$\lim u_n = 0$$

$$u_n = \frac{-n+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \cancel{(-n+\sqrt{n})(n+} \frac{n(-1+\sqrt{n}/n)}{n\sqrt{n}}$$

$$= \frac{-1+\sqrt{n}/n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$u_n = \frac{n+\sin n}{3n+\cos 2n} = \frac{n(1+\frac{\sin n}{n})}{n(3+\frac{\cos 2n}{n})} = 1/3$$

$$u_n = \frac{2^n}{n!} \quad , \quad u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{2}(n+1)$$

$n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{2}(n+1) \geq 1$

donc $\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 1$

$\Rightarrow u_n \geq u_{n+1}$ donc décroissante

minorée, elle CV vers 0

Correction Exemple de suites numériques

TD maths

Exercice 3 :

$u_0 = 0$, $u_1 = 1$

$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$

Équation caractéristique : $R^2 - R - 1 = 0$

$\Delta = 5$

$R_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ $\quad R_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Donc $u_n = \alpha . R_1^n + \beta . R_2^n$

$= \alpha . \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta . \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

D'après les conditions initiales :

$u_0 = \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\beta$

$u_1 = \alpha . \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \beta \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1$

$\Rightarrow -\beta \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \beta \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1$

$\Rightarrow \beta \left(\dfrac{\sqrt{5} - 1 + 1 + \sqrt{5}}{2}\right) = 1$

$\Rightarrow \beta = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ $\quad \alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$u_n = -\dfrac{\sqrt{5}}{5} . \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \dfrac{\sqrt{5}}{5} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$v_0 = 1$, $v_1 = 0$

$v_{n+1} = 2 v_n - 2 v_{n-1}$

$R^2 - 2R + 2 = 0$

$\Delta = -4$

$R_1 = \dfrac{2 - 2i}{2} = 1 - i$

$R_2 = 1 + i$

$R_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$R_2 = \sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$

donc $v_m = \alpha \cdot (\sqrt{2})^m e^{im\pi/4} + \beta (\sqrt{2})^m e^{-im\pi/4}$

on détermine $\alpha \wedge \beta$:

$m = 0$ $\quad a + b = v_0 = 1$ $\quad a = \frac{1+i}{2}$

$m = 1$ $\quad a(1+i) + b(1+i) = 0$ $\quad b = \frac{1-i}{2}$

$v_m = \frac{(1+i)}{2}(1+i)^m + \frac{(1-i)}{2}(1-i)^m$

$w_0 = 1$, $w_1 = -3$ $\quad R^2 - 6R + 9R = 0$

$w_{m+2} = 6\, w_m - 9\, w_{m+1}$ $\quad \Delta = 0$

$R = 3$

$w_m = \alpha \cdot 3^m + b \cdot m \cdot 3^m$ $\quad \alpha = 1$

$w_m = \cdot 3^m - 2m \cdot 3^m$ $\quad \beta = -2$

Méthode de calcul intégral

- Trois méthodes pratiq de calcul d'intégrale
  - L'intégration directe

	Formule	Exemple
1	$u'u^n \longrightarrow \frac{1}{n+1} \cdot u^{n+1} + k$	$2 \cdot (2x)^2 \longrightarrow \frac{1}{3}(2x)^3$
2	$\frac{u'}{u^2} \longrightarrow -\frac{1}{u} + k$	$\frac{2}{(2x)^2} \longrightarrow -\frac{1}{2x}$
3	$\frac{u'}{\sqrt{u}} \longrightarrow 2\sqrt{u} + k$	$\frac{2}{\sqrt{2x}} \longrightarrow 2\sqrt{2x}$
4	$\frac{u'}{u} \longrightarrow \ln\lvert u\rvert + k$	$\frac{2}{2x} \longrightarrow \ln\lvert 2x\rvert$
5	$u' \cdot \sin u \longrightarrow -\cos u + k$	$2\sin 2x \longrightarrow -\cos 2x$
6	$u' \cdot \cos u \longrightarrow \sin u + k$	$2\cos 2x \longrightarrow \sin 2x$
7	$u'e^u \longrightarrow e^u + k$	$2e^{2x} \longrightarrow e^{2x}$
8	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \longrightarrow \text{Arcsin } u + k$	$\frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} \longrightarrow \text{Arcsin } 2x$
9	$\frac{u'}{1+u^2} \longrightarrow \text{Arctan } u + k$	$\frac{2}{1+(2x)^2} \longrightarrow \text{Arctan } 2x$
10	$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} \longrightarrow \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + k$	
11	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \longrightarrow \text{Arcsin}(x/a) + k$	
12	$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} \longrightarrow \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + k$	

13	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$= \frac{1}{a} \cdot \text{Arctan}(x/a) + k$
14	$\frac{1}{a^2-x^2}$	$= \frac{1}{2a} \cdot \ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + k$

- Le changement de variable.

On veut calculer $\int_a^b f(x)\,dx$

$\exists\ \alpha \wedge \beta \wedge \varphi : U \to V$

$t \mapsto x = \varphi(t)$

$\varphi(U) \subset V$, $\varphi(\alpha) = a \wedge \varphi(\beta) = b$

donc $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t)$

on a fait $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t).dt$

- L'IPP

$\int_a^b f(x)\,dx$ avec $f(x) = u'v$

$\int_a^b u'v = [u.v]_a^b - \int_a^b u.v'$

- Règle de Bioche

- $f(-x) = + f(x)$: $u = \cos x$
- $f(\pi - x) = + f(x)$: $u = \sin x$
- $f(\pi + x) = f(x)$: $u = \tan x$
- Si $\sqrt{\alpha t + \beta}$ alors $u = \sqrt{\alpha t + \beta}$

- Si $e^{mt}.\cos(\omega t) \vee e^{mt}.\sin(\omega t)$ alors remplacer par $\text{Re}(e^{mt}.e^{i\omega t}) \vee \text{Im}(e^{mt}.e^{i\omega t})$

Techniq de calcul des primitives. Exemples et compléments

Décomposition en éléments simple de fractions rationnelles

$F(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ est irréductible

- $N(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$ → division euclidienne de $N(x)$ par $D(x)$ qd $d°N \geq d°D$

- $F(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)} = \dfrac{Q(x) \cdot D(x) + R(x)}{D(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{D(x)}$

$Q(x)$ est 1 produit → s'intègre sans pb $\int x^m dx = \dfrac{1}{m+1} x^{m+1} + K$

- $\dfrac{R(x)}{D(x)}$ avec $d°R < d°D$ → décomposée en éléments simple de 1st espèces $\left(\dfrac{\alpha}{x - a_1}\right)^m$ et él simples de 2nd espèces $\left(\dfrac{\alpha x + \beta}{(x^2 + bx + c}\right)^m$ avec $b^2 - 4ac < 0$

- Intégration de $\left(\dfrac{\alpha}{x - a_i}\right)^m$

  - Si cas $\underline{m > 1}$: $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x - a}\right)^m dx = -\frac{1}{m-1} \frac{1}{(x - a_1)^{m-1}} + K$

    $\underline{m = 1}$: $\displaystyle\int \frac{dx}{(x - a_1)} = \ln |x - a_1| + K$

•

mettre $x^2 + bx + c$ sous forme canoniq

Exemple 1 : Intégrer $\dfrac{1}{x^2 + 4}$

on écrit $x^2+4 = 4\left(\frac{x^2}{4}+1\right) = 4\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right)$ et de

$$\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{1}{2(u^2+1)} \times du = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\,u + K$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{2} + K = \int \frac{dx}{x^2+4}$$

__Exemple 2:__ Intégrer $\dfrac{x+1}{x^2+4}$

$$\int \frac{x+1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{2} + K$$

__Exemple 3:__ Intégrer $\dfrac{x}{x^2+2x+5}$

on a $\dfrac{d}{dx}(x^2+2x+5) = 2x+2 = 2(x+1)$

$$\Rightarrow \frac{x}{x^2+2x+5} = \frac{x+1-1}{x^2+2x+5} = \frac{x+1}{x^2+2x+5} - \frac{1}{x^2+2x+5}$$

On travail sur : $\dfrac{1}{x^2+2x+1}$: On a $x^2+2x+5 = (x+1)^2+4$

$$= 4\left(\frac{(x+1)^2}{4}+1\right) = 4\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{4\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right)}$$

on a donc : $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$

$$= \int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| - \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx$$

changement de variable $u = \dfrac{x+1}{2}$, $du = \dfrac{1}{2}\,dx$,

$dx = 2du$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| - \frac{2}{4}\int \frac{du}{u^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| - \frac{1}{2}\text{Arctan } u + K$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| - \frac{1}{2}\text{Arctan}\left(\frac{x+1}{2}\right) + K$$

- Intégration de fonction rationnelles en sin, cos et tan

$$f(x) = \frac{A(\sin, \cos, \tan)}{B(\sin, \cos, \tan)}$$

$\Rightarrow$ Règles de Bioche $\rightarrow$ 3 choses à tester

- $f(-x) = -f(x)$ $\rightarrow$ chg^t de var $u = \cos x$
- $f(\pi - x) = -f(x)$ $\rightarrow$ chg^t de var $u = \sin x$
- $f(\pi + x) = f(x)$ $\rightarrow$ chg^t de var $u = \tan x$

- Si f est quelconque (aucun des 3 cas précédents) le changement^t de variable à poser.

$$u = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow du = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2 x/_2\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}(1+u^2)\,dx$$

À savoir $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

Rappel : on a les relations suivant

$\cos(-x) = \cos x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$
$\tan(-x) = -\tan x$	$\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\tan(\pi + x) = \tan x$

<u>Exercice 1</u>

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{3+\cos(x)}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{2\sin x\cos x}{3+\cos x}\,dx$$

on a $f(x) = \dfrac{2\sin x\cos x}{3+\cos x}$

de $f(-x) = \dfrac{-2\sin x . \cos x}{3+\cos x} = -f(x)$

donc on va poser $u = \cos x$ $\quad x \to 0, \pi/4 \Rightarrow u \to 1, \sqrt{2}/2$

$\Rightarrow du = -\sin x\, dx$

$$= \int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{-2u\, du}{3+u}$$

On doit intégrer $\dfrac{-2u}{u+3}$ fraction rationnelle avec $d^\circ N(x) \geq d^\circ D(x) \Rightarrow$ division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l} -2u & u+3 \\ \cline{2-2} +2u+6 & -2 \\ \cline{1-1} 6 & \end{array}$$

on a $\dfrac{-2u}{u+3} = -2 + \dfrac{6}{u+3}$

donc $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{-2u}{u+3}\, du = \int_1^{\sqrt{2}/2} -2\,du + 6\int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{u+3}\, du$

Exemple : $I = \displaystyle\int \frac{\cos x}{6 - 5\sin x + \sin^2 x}\, dx$

① $f(x) = \dfrac{\cos x}{6 - 5\sin x + \sin^2 x}$ on n'a pas $f(-x) = -f(x)$

② $f(\pi - x) = \dfrac{\cos(\pi - x)}{6 - \sin(\pi - x) + (\sin(\pi - x))^2}$

$= \dfrac{-\cos x}{6 - 5\sin x + \sin^2 x}$ on a $f(\pi - x) = -f(u)$

$\Rightarrow$ changement de variable $u = \sin x$

$du = \cos x\, dx$

$x \to 0, \pi/2 \Rightarrow u \begin{cases} \sin 0, \sin \pi/2 \\ 0, 1 \end{cases}$

$F(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)} = \dfrac{1}{u^2 - 5u + 6} = \dfrac{1}{(u-3)(u-2)}$

$= \dfrac{a}{u-3} + \dfrac{b}{u-2}$

• déterminer les coefs a et b

* a : $\times (u-3)$ $u \to 3$

$a = 1$

* b : $\times (u-2)$, $u \to 2$ $\dfrac{a(u-2)+b(u-3)}{(u-3)(u-2)}$

$b = -1$

$\ln 2 - \ln 3$

$\Rightarrow I = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{u-3} - \frac{1}{u-2} \right) du$

$= \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{u-3}\, du - \int_0^1 \frac{1}{u-2}\, du$

$= [\ln|u-3|]_0^1 - [\ln|u-2|]_0^1 = \ln 2 - \ln 3 - \ln 1 + \ln 2)$

$= \underline{2\ln 2 - \ln 3}$

• $I = \displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\tan^2 x + 1}{\tan^3 x - 1}\, dx$

$f(x) = \dfrac{\tan^2 x + 1}{\tan^3 x - 1}$ ~~dx~~

$f(-x) \neq -f(x)$

$f(\pi - x) \neq -f(x)$

$f(\pi + x) = f(x)$

$\Rightarrow$ changement de variable

$u = \tan x$

$du = (1 + \tan^2 x)\, dx$

$x \to 0, \frac{\pi}{6} \to u \to 0, \frac{\sqrt{3}}{3}$

$I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{du}{u^3 - 1}$

$F(x) = \dfrac{1}{u^3 - 1} = \dfrac{1}{(u-1)(u^2+u+1)}$

$= \dfrac{a}{u-1} + \dfrac{bu + c}{u^2 + u + 1}$

détermination de a, b $\wedge$ c

* $a \to \times (u-1)$ et $u \to 1$

$a = 1/3$

* $c \to u \to 0$

$-1 = -a + c \to c = -1 + a = -2/3$

* $b \to \times u$ et $u \to +\infty$

$0 = a + b \Rightarrow b = -a \Rightarrow b = -1/3$

$F(x) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{u-1} \right) - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{u+2}{u^2+u+1} \right)$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{1}{u-1}\, du - \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{u+2}{u^2+u+1}$$

on regarde $J = \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{u+2}{u^2+u+1}\, du = \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{u+1/2}{u^2+u+1} + \frac{3}{2}\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{1}{u^2+u+1}$

$= \left[\frac{1}{2}\ln(u^2+u+1)\right]_0^{\sqrt{3}/3} + \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2(u+1/2)}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)$

on pose $X = \frac{2(u+1/2)}{\sqrt{3}} \Rightarrow dX = \frac{2}{\sqrt{3}}\, du$

$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1$

$\frac{1}{4} - \frac{2}{4} + \frac{4}{4}$

$$J = \left[\frac{1}{2}\ln|u^2+u+1|\right]_0^{\sqrt{3}/3} + 2\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{1}{\left(\frac{2(u+1/2)}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\, du$$

$u \to 0, \sqrt{3}/3 . \quad X = \sqrt{3}/3 \to \frac{2\sqrt{3}/3+1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow J = \frac{1}{2}\ln(u^2+u+1) + \frac{\sqrt{3}}{\frac{4}{\sqrt{3}}}\int_{\sqrt{3}/3}^{\frac{2\sqrt{3}/3+1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{X^2+1}$$

$\dots$

$$+ \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{3}\left[\operatorname{Arctan} X\right]_{\sqrt{3}/3}$$

$I = \dots + 1/3\ J.$

- Exemple : $I = \int \frac{1}{2+\cos x}\, dx$

$f(-x) \neq -f(x)$ $\quad\Rightarrow$ on pose $u = \tan(x/2)$

$f(\pi - x) \neq -f(x)$ $\quad du = \frac{1}{2}(1+\tan^2(x/2))dx$

$f(\pi + x) \neq f(x)$ $\quad = \frac{1}{2}(1+u^2)\,dx$

$\Rightarrow dx = \frac{2}{1+u^2}\, du$

$$I = \int \frac{2}{(1+u^2)} \times \frac{1}{2+\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)}\, du$$

$$= \int \frac{2}{2+2u^2+1-u^2}\, du = \int \frac{2}{3+u^2}\, du$$

donc $I = 2\int \frac{1}{2+\cos x}\, dx = 2\int \frac{du}{u^2+3}$ avec $u = \tan(x/2)$

$= 2\int \frac{du}{3((u/\sqrt{3})^2+1)}$ fini !

$= 2\left[\frac{\arctan(u/\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\right]$

$= 2\left[\frac{\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}\right]$

Correction ~~Prépa~~ TD maths

Méthode de calcul intégral

Exercice 1

$\int_{-3/2}^{-1} \sqrt{2t+3}$

Changement de variable : $u = \sqrt{2t+3}$, $t = \frac{u^2-3}{2}$

• bornes $u(-3/2) = 0$

$u(-1) = 1$

• fonction $\sqrt{2t+3} = \sqrt{2\left(\frac{u^2-3}{2}\right)+3} = \sqrt{u^2} = u$

• élément différentiel : $dt = d\left(\frac{u^2-3}{2}\right) = u\,du$

$\Rightarrow \int_{-3/2}^{-1} \sqrt{2t+3} = \int_0^1 u^2\,du = \left[\frac{1}{3}u^3\right]_0^1 = \boxed{1/3}$

$\int_{-1}^{1/3} \sqrt{1-3t}\,dt$

Changement de variable : $u = \sqrt{1-3t}$, $t = \frac{1-u^2}{3}$

• bornes $u(-1) = 2$

$u(1/3) = 0$

• fonction : $\sqrt{1-3t} = \sqrt{1-3\left(\frac{1-u^2}{3}\right)} = u$

• élément différentiel : $dt = d\left(\frac{1-u^2}{3}\right) = -\frac{2}{3}u\,du$

$\Rightarrow \int_{-1}^{1/3} \sqrt{1-3t}\,dt = \int_2^0 -\frac{2}{3}u^2\,du = \left[-\frac{2}{9}u^3\right]_2^0 = \boxed{\frac{16}{9}}$

Exercice 2 :

$\int u'v = [u.v] - \int uv'$

$\int_0^1 (t^2-3t+1).e^{2t}\,dt$

$u' = e^{2t}$, $v' = 2t-3$

$u = \frac{1}{2}e^{2t}$, $v = (t^2-3t+1)$

$= \left[\frac{1}{2}e^{2t}.(t^2-3t+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2t}.(2t-3)$

$= -\frac{1}{2}(e^2+1) - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2t}.(2t-3)$

$u' = \frac{1}{2}e^{2t}$, $v' = 2$

$u = \frac{1}{4}e^{2t}$, $v = 2t-3$

$\int_0^1 \frac{1}{2}e^{2t}.(2t-3) = \left[\frac{1}{4}e^{2t}.(2t-3)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{4}e^{2t}.2$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}e^2 - \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2}e^2$

$= -\frac{1}{2}(e^2+1) - (1 - \frac{1}{2}e^2) = \boxed{-\frac{3}{2}}$

$\int_0^1 (t^2-t+1)e^{-t}\,dt$

On cherche une primitive de la forme :

$f(t) = (at^2+bt+c).e^{-t}$

$f'(t) = (2at+b-at^2-bt-c).e^{-t}$

$= (-at^2+(2a-b)t+b-c)e^{-t}$

$f(t) = (-t^2-t).e^{-t}$

$I = \left[(-t^2-t)e^{-t}\right]_0^1 = -\frac{2}{e}$

Exercice 3 :

Rappel $\cos(\omega t) = Re(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))$

$= Re(e^{i\omega t})$

$I = \int_a^b e^{mt}\, Re(e^{i\omega t})\,dt$

$= Re \int_a^b e^{mt}.e^{i\omega t}\,dt$

$= Re \int_a^b e^{(m+i\omega)t}\,dt$

Une primitive de $e^{(m+i\omega)t}$ est $\frac{1}{m+i\omega}e^{(m+i\omega)t}$

$I = Re\left[\frac{1}{m+i\omega}e^{m+i\omega}\right]_a^b$

$\int_0^{\pi/4} e^t.\cos(4t)\,dt = Re\int_0^{\pi/4} e^{(1+i4)t}\,dt$

$= Re\left[\frac{1}{1+i4}.e^{(1+i4)t}\right]_0^{\pi/4}$

$= \frac{1}{17}(-e^{\pi/4}-1)$

$\int_0^{\pi/2} e^{-t}\sin(2t)\,dt = Im\int_0^{\pi/2} e^{(-1+2i)t}\,dt$

$= Im\left[\frac{1}{-1+2i}.e^{(-1+2i)t}\right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{2}{5}(e^{-\pi/2}+1)$

Correction
TD maths

$u = \sin 2t$ $\quad u' = 2\cos 2t$

$v' = e^{-t}$ $\quad v = -e^{-t}$

$$I = \left[-e^{-t}\sin(2t)\right]_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} \cos(2t)e^{-t}\,dt$$

$u = \cos 2t$ $\quad v = -e^{-t}$

$u' = -2\sin 2t$ $\quad v' = e^{-t}$

$$J = \left[-e^{-t}\cos(2t)\right]_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} \sin(2t)e^{-t}\,dt$$

$$I = \left[e^{-t}\sin 2t\right]_0^{\pi/2} + 2\left[-e^{-t}\cos 2t\right]_0^{\pi/2} - 4I$$

D'où $I = \frac{2}{5}\left(e^{-\pi/2} + 1\right)$

Exercice 4 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2 - t - 2}\,dt$

$d°(1) = 1 < d°(t^2 - t - 2) = 2$

$t^2 - t - 2 = 0$ $\quad t_1 = 2$

$\Delta = 9$ $\quad t_2 = -1$

$t^2 - t - 2 = (t-2)(t+1)$

$$\frac{1}{t^2-t-2} = \frac{\alpha}{t-2} + \frac{\beta}{t+1}$$

Identification : $\dfrac{1}{t^2+t-2} = \dfrac{\alpha(t+1) + \beta(t-2)}{t^2 - t - 2}$

Donc $1 = \alpha t + \alpha + \beta t - 2\beta$

$= (\alpha + \beta)t + \alpha - \cancel{2/\beta}\, 2\beta$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - 2\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1/3 \\ \beta = -1/3 \end{cases}$$

ou alors on a $\dfrac{1}{t^2-t-2} = \dfrac{\alpha}{t-2} + \dfrac{\beta}{t+1}$ en multipliant

par $t-2$ $\quad \dfrac{1}{t+1} = \alpha + \dfrac{\beta(t-2)}{(t+1)}$ $\quad$ pour $t = 2$ $\quad \alpha = 1/3$

$\beta = -1/3$

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2-t-2}\,dt = \int_0^1 \frac{1/3}{t-2}\,dt + \int_0^1 \frac{-1/3}{t+1}\,dt$$

$$= -1/3 \int_0^1 \frac{1}{2-t}\,dt - 1/3 \int_0^1 \frac{1}{t+1}\,dt$$

$$= -1/3\,[-\ln(2-t)]_0^1 - 1/3\,[\ln(1+t)]_0^1$$

$$[-\ln(2-t)]' = \frac{1}{2-t}$$

$$[\ln(1+t)]' = \frac{1}{1+t}$$

$$= 1/3\,(\ln(2)) - 1/3\ln(2) = 0$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t-t^3}{1-3t^2}\,dt$$

Simplification de la fraction

$$\begin{array}{l|l} -t^3+3t & -3t^2+1 \\ -(-t^3+\frac{1}{3}t) & \frac{1}{3}t \\ \hline \frac{8}{3}t & \end{array}$$

$$-t^3+3t = (-3t^2+1)\frac{1}{3}t + \frac{8}{3}t$$

$$\frac{-t^3+3t}{-3t^2+1} = \frac{1}{3}t + \frac{\frac{8}{3}t}{-3t^2+1}$$

donc $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{3}t + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\frac{8}{3}t}{-3t^2+1}$

$$\frac{8/3\,t}{-3t^2+1} = \frac{8/3\,t}{-3(t-\frac{1}{\sqrt{3}})(t+\frac{1}{\sqrt{3}})}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{a}{t-\frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{b}{t+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)$$

En multipliant par $t-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$a = 4/3$

$b = 4/3$

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{3}t\,dt + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{-4/9}{t-\frac{1}{\sqrt{3}}}\,dt + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{-4/9}{t+\frac{1}{\sqrt{3}}}\,dt$$

$g'(f(x))$

3) a) (u_{2n+1})

$u_3 = f(u_2) = ff(u_1)$

$u_5 = f(u_4) = ff(u_3)$

$u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = ff(u_{2n+1})$

$u_1 \in [0, \sqrt{3}]$

$u_1 \wedge u_3 = f(f(u_1))$

$u_{2n+1} \wedge f(f(u_{2n+1}))$

$u_{2n+1} - ff(u_{2n+1})$

Il faut étudier le signe $x - f(f(x))$

On étudie:

$$g'(x) = 1 - f'(f(x)) \times f'(x)$$

$$= 1 - \frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{3-x}}} \times \frac{1}{2\sqrt{3-x}}$$

$$g'(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\sqrt{3-\sqrt{3-x_0}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3-x_0}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \sqrt{3-\underbrace{\sqrt{3-x_0}}_{X}} \cdot \sqrt{3-x_0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \sqrt{3-X} \cdot X$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 = (3-X)X^2 = 3X^2 - X^3$$

$1 = 0,4218$

Exercice 5 $\int_0^{\pi/2} \sin^5(t)\,dt$

$$\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 = \frac{\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^2}{-4}\frac{\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^2}{-4}\frac{\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)}{2i}$$

$$= \frac{\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)}{32i}$$

$$= \left(e^{4ix}-\cancel{2e^{2ix}}+1-\cancel{2e^{2ix}}+4-\cancel{2e^{-2ix}}+1-\cancel{2e^{-2ix}}+e^{-4ix}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$$

$$= \frac{\left(e^{4ix}-4e^{2ix}-4e^{-2ix}+e^{-4ix}+6\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)}{32i}$$

$$= \frac{\left(\cancel{e^{5ix}}-\cancel{e^{3ix}}-\cancel{4e^{3ix}}+4e^{ix}-4e^{-ix}+\cancel{4e^{-3ix}}+\cancel{e^{-3ix}}-\cancel{e^{-5ix}}+6e^{ix}-6e^{-ix}\right)}{32i}$$

$$= \frac{1}{16}\left[\left(\frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2i}\right)-\left(\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\right)-\left(\frac{4e^{3ix}-4e^{-3ix}}{2i}\right)+\left(\frac{10e^{ix}-10e^{-ix}}{2i}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left(\sin(5x)-\sin(3x)-4\sin(3x)+10\sin(x)\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(\sin(5x)-5\sin(3x)+10\sin(x)\right)$$

$$\frac{1}{16}\left(\int_0^{\pi/2}\sin(5x) - 5\int_0^{\pi/2}\sin(3x) + 10\int_0^{\pi/2}\sin(x)\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left([5\cos(5x)]_0^{\pi/2} - 5[3\cos(3x)]_0^{\pi/2} + 10[\cos(x)]_0^{\pi/2}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(-5+15-10\right) = 0$$

Correction TD maths

Exercice 6

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t+i}{1+t^2}\, dt$$

$$I = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t}{1+t^2}\, dt + i\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(4) - \ln(2)\right]_1^{\sqrt{3}} + i\left(\arctan\sqrt{3} - \arctan 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2) + i\frac{\pi}{2}$$

$$J = \int_{-a}^{a} e^{-2i\pi t x}\, dt \qquad a > 0$$

$$= \int_{-a}^{a} \cos(-2\pi t x) + i\sin(-2\pi t x)$$

$=$

<u>$x = 0$</u>

$$J = \int_{-a}^{a} e^{0}\, dt = 2a$$

<u>$x \neq 0$.</u> $\qquad -2i\pi x \neq 0$

$$I = \int_{-a}^{a} e^{-2i\pi t x}\, dt$$

$$= \left[\frac{1}{-2i\pi x} e^{-2i\pi t x}\right.$$

$$= \int_{-a}^{a} \cos(-2\pi t x)\, dt + i\int_{-a}^{a} \sin(-2\pi t x)\, dt$$

Exercice 2 p 24

$u_0 = 1$

$u_{n+1} = \sqrt{3-u_n}$

On a $u_{n+1} = f(u_n)$

avec $f(x) = \sqrt{3-x}$

Étude de f :

· Domaine de def :

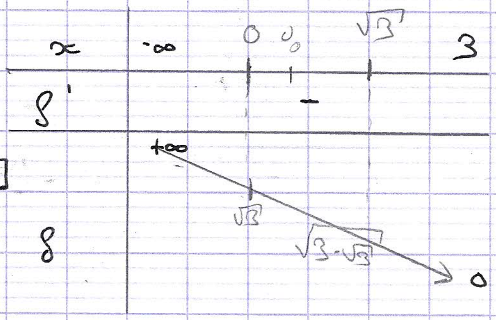
$D_f =]-\infty, 3]$

· f est continue par continuité de $x \mapsto 3-x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$

· Dérivabilité : $\mathbb{R}_*^+$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{3-x}} < 0$$

donc f est décroissante



On a $f([0,\sqrt{3}]) = [\sqrt{3-\sqrt{3}}, \sqrt{3}]$

$\subset [0,\sqrt{3}]$

Récurrence :

· $u_0 = 1$ existe et appartient à $[0,\sqrt{3}]$

· On suppose que u_n existe et appartient à $[0,\sqrt{3}]$ pour un certain $n \geq 0$

· On ~~suppose~~ montre que c'est vrai à n+1. Comme $u_n \in [0,\sqrt{3}]$, $u_{n+1} = f(u_n)$ existe de plus u_{n+1} $(u_n) \in [\sqrt{3-\sqrt{3}}, \sqrt{3}] \subset [0,\sqrt{3}]$ c'est $\forall n \in \mathbb{N} \wedge u_n \in [0,\sqrt{3}]$

• Équations différentielles

$$y' - \frac{1}{4x} . y = \frac{1}{4}$$

• Ordre 1 :

• Équation du type : $\boxed{y' + a(x).y = g(x)}$

où $a(x)$ & $g(x)$, 2 fonctions variables.

• Résoudre l'équation homogène : $\boxed{y' + a(x).y = 0}$

➡ $y_H(x) = C . e^{\int -a(x)\,dx}$

Exemple : On doit résoudre : $y' - \frac{1}{4x} . y = 0$

➡ $y_H(x) = C . e^{\int \frac{1}{4x}\,dx} = C . e^{\ln(x) . \frac{1}{4}} = C . e^{\ln(x^{1/4})}$
$= C . x^{1/4}$

• Résoudre l'équation particulière : $\boxed{y' + a(x).y = g(x)}$

➡ méthode de Lagrange (variation de la cte)

• on détermine : $y_0(x) = e^{\int -a(x)\,dx}$

• puis : $C'(x) = \frac{g(x)}{y_0(x)}$

➡ $y_P(x) = C(x) . y_0(x)$

Exemple : $y_0 = x^{1/4}$ ➡ $C'(x) = \frac{1}{4} . x^{-1/4}$

$C(x) = \frac{1}{3} x^{3/4}$

$y_P(x) = \frac{x}{3}$

• Solution complète : $y = y_H(x) + y_P(x)$

Exemple : $\left[y(x) = C . x^{1/4} + \frac{x}{3} \right]$

- Ordre 2 :

Équation du type $\boxed{y'' + a.y' + b.y = g(x)}$

- Résoudre l'équation homogène : $y'' + ay' + b.y = 0$
  - On résout l'équation caractéristique :

$$\boxed{r^2 + ar + b = 0}$$

- Si $\Delta > 0$: $y_H(x) = C_1.e^{r_1 x} + C_2.e^{r_2 x}$
- Si $\Delta = 0$: $y_H(x) = C_1.e^{r_0 x} + C_2.x.e^{r_0 x}$
- Si $\Delta < 0$: $y_H(x) = C_1.e^{\alpha x}.\cos(\beta.x) + C_2.e^{\alpha x}.\sin(\beta.x)$

- Résoudre l'équation particulière : $y'' + a(x).y' + b(x).y = g(x)$.
  - Si $g(x) = P(x)$: $y_p(x) = x.Q(x)$
  - Si $g(x) = e^{\alpha x}.P(x)$: $y_p(x) = e^{\alpha x}.x^m.Q(x)$
  - Si $g(x) = e^{\alpha x}.(l\cos(\beta x) + m\sin(\beta x))$:
    - Si $\alpha + i\beta$ pas solutions : $y_p(x) = e^{\alpha x}.(\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x))$
    - Si $\alpha + i\beta$ solutions : $y_p(x) = e^{\alpha x}.(\lambda.x^m.\cos(\beta x) + \mu.x^m.\sin(\beta x))$
  - Si $g(x) = l.\cos(\beta x) + m.\sin(\beta x)$:
    - Si $i\beta$ pas solution : $y_p(x) = \lambda.\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x)$
    - Si $i\beta$ est solution : $y_p(x) = \lambda.x^m.\cos(\beta x) + \mu.x^m.\sin(\beta x)$.

- Solution complète : $y = y_H(x) + y_p(x)$

Factoriser x^4+1 en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}$

$$x^4+1 = (x^2+1)^2 - 2x^2$$
$$= (x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x)$$

Factoriser x^6+1

$$x^6+1 = (x^2+1)(x^4-x^2+1)$$
$$= (x^2+1)(x^4+2x^2+1-3x^2)$$
$$= (x^2+1)\left((x^2+1)^2-(\sqrt{3}x)^2\right)$$
$$= (x^2+1)\left[(x^2+1-\sqrt{3}x)(x^2+1+\sqrt{3}x)\right]$$

Équations différentielles :

Exercice 1:

1) $2y' = x^2 \iff \boxed{y = \frac{1}{2}x^2}$ (E)

$$\Rightarrow y(x) = \int \frac{1}{2}x^2\,dx = \frac{1}{6}x^3 + C$$

2) $\boxed{y' - 2y = 2x - 3}$ (E)

· On résout l'EH $y' - 2y = 0$

$$y_H(x) = Ce^{\int 2dx} = \boxed{Ce^{2x} = y_H(x)}$$

· On cherche 1 solution particulière de $y' - 2y = 2x - 3$

· variation de la constante (Lagrange)

$$y_P(x) = C(x) \cdot y_0(x) = C(x) \cdot e^{2x}.$$

· on a donc à résoudre

$$C'(x) = \frac{g(x)}{y_0(x)} = \frac{2x-3}{e^{2x}} = (2x-3)e^{-2x}$$

· on aura $C(x) = \int (2x-3)e^{-2x}\,dx$

5

• $y' - 2y = 2x - 3$

1) Solution de l'équat° homogène associé :

• $y_H = Ce^{2x}$

2) Solution particulière de l'équation complète

• variations de la cte $y_p(x) = C(x) . y_0(x)$

où $y_0(x) = e^{2x}$

on sait que $C(x)$ est solut° de $C'(x) = \dfrac{2x-3}{e^{2x}}$

donc $C(x) = \int C'(x)\,dx$

$= \int (2x-3) . e^{-2x}\,dx$

donc $\int (2x-3) . e^{-2x}\,dx$ IPP : $u'(x) = e^{-2x}$

$= -\frac{1}{2} e^{-2x} . (2x-3) - \int -\frac{1}{\cancel{2}} e^{-2x} \times \cancel{2}\,dx$ $u(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x}$

$\Rightarrow \int C'(x)\,dx = -\frac{1}{2}(2x-3)e^{-2x} + \int e^{-2x}\,dx$ $v(x) = 2x-3$

$= [-x+1]\, e^{-2x}$ $v'(x) = 2$

$= -x+1 = y_p(x)$

$-\frac{1}{2}(2x-3) - \frac{1}{2}$

$y(x) = y_H(x) + y_p(x) = C . e^{2x} - x + 1$

donc ici $y(0) = Ce^0 + 1$

$= C + 1 = 1 \Rightarrow C = 0$

• $y' - 2y = \frac{1}{2} e^{mx}$ $m \in \mathbb{R}$

$y(0) = 1$

1) $y_H(x) = Ce^{2x}$

2) Solution particulière de l'équation complète variation de la cte.

$y_p(x) = C(x)\, y_0(x) = C(x)\, e^{2x}$

C vérifie $C'(x) = \dfrac{1}{2} \dfrac{e^{mx}}{e^{2x}} = \dfrac{1}{2} e^{(m-2)x}$

$\Rightarrow C(x) = \int \frac{1}{2} e^{(m-2)x}\,dx$

$$\Rightarrow C(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(m-2)} e^{(m-2)x} & \text{si } m \neq 2 \\ \dfrac{1}{2} x e^{x} & \text{si } m = 2 \end{cases}$$

Solution générale de l'équation complète

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x)$$

$$y(x) = \begin{cases} Ce^{2x} + \dfrac{1}{2(m-2)} e^{mx} & \text{si } m \neq 2 \\ Ce^{2x} + \dfrac{x}{2} e^{2x} & \text{si } m = 2 \end{cases}$$

On cherche la cte / $y(0) = 1$

$m \neq 2$, $y(0) = 1 \Rightarrow C = \dfrac{2m-5}{2m-4}$

$m = 2$, $y(0) = 1 \Rightarrow C = 1$

- $y' - 2y = ch\, x = \frac{1}{2} e^{x} + \frac{1}{2} e^{-x}$

1) $y_H(x) = Ce^{2x}$

2) solution particulière de : $y' - 2y = ch\, x$

variation de la cte

$$y_p(x) = C(x) \times e^{2x}$$

et C solut° $C'(x) = \dfrac{ch\, x}{e^{2x}} = ch\, e^{-2x}$

$$\Rightarrow C(x) = \int ch(x) e^{-2x} dx = \frac{1}{2} \int (e^{x} + e^{-x}) e^{-2x} dx$$
$$= \frac{1}{2} \int e^{x} . e^{-2x} dx + \frac{1}{2} \int e^{-x} . e^{-2x} dx$$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{1}{2} \int e^{-x} dx + \frac{1}{2} \int e^{-3x} dx$$
$$= -\frac{1}{2} e^{-x} - \frac{1}{6} e^{-3x}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = -\frac{1}{2} e^{-x} \times e^{2x} - \frac{1}{6} e^{-3x} e^{2x}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{x} - \frac{1}{6} e^{-x}$$

3) $C = \dfrac{5}{3}$

• $y' - 2y = x.e^{x}$

1) $y_H(x) = Ce^{2x}$

2) Sol particulière

→ variation ~~par~~ de la cte : $y_P(x) = C(x)\, y_0(x) = C(x).e^{2x}$

$\Rightarrow \int x.e^{-x}\,dx \Rightarrow -xe^{-x} - e^{-x}$

$\Rightarrow y_P(x) = (-xe^{-x} - e^{-x})\, e^{2x}$

$\Rightarrow y_P(x) = -xe^{x} - e^{x} = (-x-1)e^{x}$

3) $\Rightarrow y(x) = Ce^{2x} + (-x-1)e^{x}$

$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = C - 1 \Rightarrow C = 2$

• $y' - 2y = \cos x - \sin x$

1) $y_H(x) = Ce^{2x}$

2) Sol particulière de l'eq complète

⇒ Methode de supperposition

$\left.\begin{array}{l} \cdot\, y' - 2y = \cos x \rightarrow y_{P_1} \\ \cdot\, y' - 2y = -\sin x \rightarrow y_{P_2} \end{array}\right\}\ y_P = y_{P_1} + y_{P_2}$

$\cdot\, C'(x) = \dfrac{g(x)}{y_0(x)}$

→ variation de la cte

$y_{P_1}(x) = C(x).e^{2x}$ $\qquad y_P(x) = C(x).e^{2x}$

$c'(x) = \cos.e^{-2x}$ $\qquad$ de solution $C'(x) = \cos x\, e^{-2x}$

$\int \cos(x).e^{-2x}$ $\qquad C(x) = \int \cos(x).e^{-2x}$

IPP : $u' = e^{-2x}$, $u = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$v = \cos x$, $v' = -\sin x$

$C(x) = -\frac{1}{2}\cos e^{-2x} - \int -\frac{1}{2}e^{-2x} \times -\sin x\, dx$

$= -\frac{1}{2}\cos e^{-2x} - \underbrace{\int \frac{1}{2}e^{-2x}.\sin x}$

IPP $u' = e^{-2x}$, $u = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$v = \sin x$; $v' = \cos x$

$\Rightarrow C(x) = -\frac{1}{2}\cos x\, e^{-2x} - \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2}\sin x\, e^{-2x} + \frac{1}{2}\underbrace{\int e^{-2x}.\cos x}_{I}\right\}$

$\Rightarrow I + \frac{1}{4}I = -\frac{1}{2}\cos x\, e^{-2x} + \frac{1}{4}\sin x\, e^{-2x}$

$$\Rightarrow \frac{5}{4} I = -\frac{1}{2} \cos x \, e^{-2x} + \frac{1}{4} \sin x \, e^{-2x}$$

$$\Rightarrow I = -\frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \cos x \, e^{-2x} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} \sin x \, e^{-2x}$$

$$C(x) = -\frac{2}{5} \cos x \, e^{-2x} + \frac{1}{5} \sin x \, e^{-2x}$$

$$\Rightarrow y_{P_1}(x) = -\frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x$$

C sol de $C'(x) = \dfrac{\sin x}{e^{2x}} = \sin x \, . \, e^{-2x}$

$$C(x) = \int C'(x) \, dx = \int - \sin x \, . \, e^{-2x} \, dx$$

IPP : $u' = e^{-2x}$, $u = -\frac{1}{2} e^{-2x}$

$v = - \sin x$, $v' = \cos x$

$$I = C_2(x) = \frac{1}{2} \sin x \, e^{-2x} - \int -\frac{1}{2} e^{-2x} \times -\cos x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \sin x \, e^{-2x} - \frac{1}{2} \int e^{-2x} \times \cos x \, dx$$

IPP : $u' = e^{-2x}$, $u = -\frac{1}{2} e^{-2x}$

$v = \cos x$, $v' = - \sin x$

$$\Rightarrow \int -e^{-2x} \sin x \, dx = \frac{1}{2} \sin e^{-2x} - \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2} \cos x \, e^{-2x} + \frac{1}{2} \int -e^{-2x} . \sin x \right\}$$

on a donc $I = \frac{1}{2} \sin x \, e^{-2x} + \frac{1}{4} \cos e^{-2x} - \frac{1}{4} I$

$$\Rightarrow I = \frac{2}{5} \sin e^{-2x} + \frac{1}{5} \cos x \, e^{-2x}$$

$$\Rightarrow \cancel{C(x) =} \; y_{P_2}(x) = \frac{2}{5} \sin x + \frac{1}{5} \cos x$$

$$\Rightarrow y_P(x) = \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \sin x + \frac{1}{5} \cos x$$

- $y' + 2xy = 4x$
  - $y' + 2xy = 0$

    $y_H(x) = C . e^{-2x}$
  - Solution particulière : $y = 2$
  - Solution générale

    $y(x) = C . e^{-2x} + 2$

- $(x+1) y' + xy = 1$
  - $y' + \frac{x}{x+1} y = \frac{1}{x+1}$

On résout équa homogène :

- $y_H(x) = C . e^{\int \frac{x}{x+1} dx}$

$$\int \frac{x}{x+1} dx = \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int dx - \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= x - \ln(1+x) + C.$$

⇒ $y_H(x) = C . e^{x} . e^{-\ln(1+x)}$

$$= C . \frac{e^{x}}{x+1}$$

⇒ Solution particulière : variation de la cte : on pose

$y_P(x) = C(x) . y_0(x)$ avec $y_0(x) = \frac{e^{x}}{x+1}$

$C'(x) = e^{-x}$

$C(x) = e^{-x}$

$y_P(x) = -\frac{1}{x+1}$

$y(x) = C . \frac{e^{x}}{x+1} - \frac{1}{x+1}$

- $xy' + y = \text{Arctan } x$ $\quad U = \mathbb{R}_+^*$

⇒ $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x} \text{Arctan } x$

- $y_H(x) = C \cdot e^{\int -\frac{1}{x}\,dx} = C \times \frac{1}{x}$

- $y_0 = \frac{1}{x}$ $\quad \cdot\; C'(x) = \frac{\text{Arctan}\, x}{\cancel{x}}$

$\cdot\; C(x) = \int \text{Arctan}\, x \, dx$

IPP : $u' = 1$, $u = x$

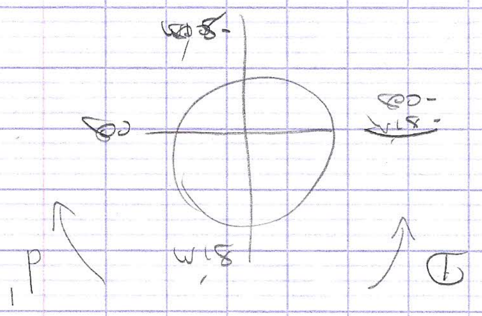
$v = \text{Arctan}\, x$, $v' = \frac{1}{1+x^2}$

$\Rightarrow K(x) = x\, \text{Arctan}\, x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

$\Rightarrow y_P(x) = \text{Arctan}\, x - \frac{1}{2x} \ln(1+x^2)$

$y(x) = C \cdot \frac{1}{x} + \text{Arctan}\, x - \frac{1}{2x} \ln(1+x^2)$

108



- $y'' + y' + \frac{1}{4} y = 2x - 3$
  - équation homogène
  - équation caractéristiq

$$R^2 + R + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \times \frac{1}{4} = 0$$

une racine double $R = -\frac{1}{2}$

- $y_H = C_1 \cdot e^{-1/2\, x} + C_2\, x e^{-1/2\, x}$

- équations particulière de l'équation :

$\Rightarrow$ 2nd membre polynome de $d° = 1$ $\Rightarrow$ solution de la forme $ax+b$

- on pose $y_P(x) = ax + b$ $\to$ on dérive 2 fois y_P

$y_P'(x) = a$, $y_P''(x) = 0$

- On reprend dans l'équation complète

$$a + \frac{1}{4}(ax+b) = 2x - 3$$

$$\frac{1}{4} ax + (a + \frac{1}{4} b) = 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1/4\, a = 2 \Leftrightarrow a = 8 \\ a + 1/4\, b = -3 \ , \ 1/4\, b = -3 - 8 \Rightarrow b = -44 \end{cases}$$

$$y_P(x) = 8x - 44$$

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = C_1 e^{-1/2\, x} + C_2\, x e^{-1/2\, x} + 8x - 44$$

- $y'' - 2y' + 2y = \cos x$
  - homogène :
    - équation homogène

$R^2 - 2R + 2 = 0$ $\qquad R_1 = 2 + 2i/2 = 1 + i$

$\Delta = -4 < 0$ $\qquad R_2 = 1 - i$

$$y_H(x) = C_1 e^{R_1 x} + C_2 e^{R_2 x}$$

$$= C_1$$

$y_H(x) = (C_1 + C_2)\, e^{x} \cos x + i\,(C_1 - C_2)\, e^{x} \sin x$

- particulière

y_p sous la forme d'1 combinaison linéaire de sin ∧ cos.

$y_p(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$

$y'_p = -\alpha \sin x + \beta \cos x$

$y''_p = -\alpha \cos x - \beta \sin x$

On reporte dans $\mathcal{E}$

: $\cos x(-\alpha - 2\beta + 2\alpha) + \sin x(-\beta + 2\alpha + 2\beta) = \cos x$

on a résoudre $\begin{cases} \alpha - 2\beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases}$ $\beta = -2/5$ $\alpha = 1/5$

$y_p = \frac{1}{5} \cos x - \frac{2}{5} \sin x$

$y(x) = y_H(x) + y_p(x)$

- $y'' + 5y' + 4y = 3 - 2x$

- équa homogène
- carac

$R^2 + 5R + 4 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9$

$R_1 = -1$

$R_2 = -4$

$y_H(x) = C_1 e^{R_1 x} + C_2 e^{R_2 x}$

$= C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}$

$y_p(x)$ est sous la forme $ax + b$, $y'_p(x) = a$

$y''_p(x) = 0$

$5a + 4(ax + b) = 3 - 2x$

$\begin{cases} 5a + 4ax + 4b = 3 - 2x \\ 4a = -2 \\ 5a + 4b = 3 \end{cases}$

$3 + \frac{5}{2}$

$\frac{6}{2} + \frac{5}{2} = \frac{11}{2}$

$a = -1/2$

$b = 11/8$

$y_p(x) = -\frac{1}{2}x + 11/8$

- $y'' + 5y' + 4y = xe^{-x}$
  - homogène
    - carac

$r^2 + 5r + 4 = 0$

$\Delta = 9$

$r_1 = -1$, $r_2 = -4$

$C_1 . e^{-x} + C_2 . e^{-4x}$

- particulières

$y'' + 5y' + 4y = xe^{-x}$

on a (-1) qui est racine simple de l'équation caractéristique

donc on va chercher 1 sol particulière de la forme $y_p(x) = x \times (ax + b) . e^{-x}$

$= (ax^2 + bx) e^{-x}$

$u'v + uv'$

$y_p'(x) = (2ax + b) . e^{-x} - (ax^2 + bx) e^{-x}$

$y_p'(x) = e^{-x} (2ax + b - ax^2 - bx)$

$y_p''(x) = (-2ax + 2a - b) e^{-x} - (-ax^2 + 2ax - bx + b) e^{-x}$

$= (-\cancel{2ax} + 2a - \cancel{b} + \cancel{ax^2} - \cancel{2ax} + bx - \cancel{b}) e^{-x}$

$= (-4ax - 2b + ax^2 + 2a + bx) e^{-x}$

$= (x(ax - 4a + b) - 2b + 2a) e^{-x}$