

PHYSIQUE

Électromagnétisme Semestre 3

Table des matières

I Ondes planes unidimensionnelles	2
II Électrocinétique	11
III Induction magnétique : Propriétés générales	15
IV Induction électromagnétique	22
V Les lois fondamentales de l'électromagnétisme en régime statique ou quasi statique	32
VI Les équations de l'Électromagnétisme en régime variable	40
VII Ondes électromagnétiques dans le vide	48
VIII Onde électromagnétique dans un milieu matériel	73

Première partie

Ondes planes unidimensionnelles

1 Ondes dans un milieu élastique.

1.1 Notion d'onde

Définition. Un milieu élastique est un milieu qui reprend sa forme (ou son état initial) après avoir subi une déformation.

Exemple. Une corde tendue pincée en un point, un ressort dont une spire est déplacée, l'air perturbé par un son...

Propriété.

- Si un point du milieu subit une brusque déformation d'amplitude, il aura tendance à revenir à l'équilibre en affectant son voisinage. On a ainsi une transmission de **proche en proche** de la perturbation d'un élément du milieu aux éléments voisins.
- Si la déformation est entretenue d'une manière périodique dans le temps, on dit qu'il y a création et propagation d'une onde dans le milieu.

Pendant le passage de l'onde, le milieu ne se déplace pas dans son ensemble, mais on observe une variation **temporaire** et **spatiale** d'une ou plusieurs grandeurs physiques :

- ressort : déplacement des spires
- son dans l'air : variation de pression
- houle : variation au niveau de la mer

Remarque. En même temps que la quantité de mouvement, l'énergie cinétique est transmise d'un élément au suivant, si bien que l'énergie se propage avec l'onde et cela, sans aucun transport de matière elle-même.

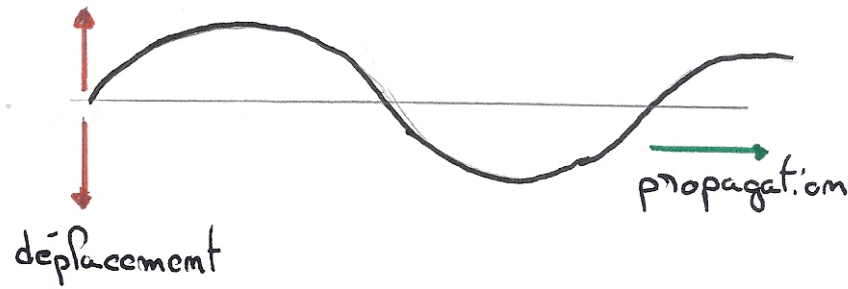
Propriété. Un milieu matériel est nécessaire pour transmettre des ondes mécaniques. Cependant deux systèmes physiques peuvent interagir à distance autrement que par un processus élastique entre particules.

Exemple. Le son ne se propage pas dans le vide. Cependant les interactions rayonnement-matière par l'intermédiaire d'ondes électromagnétiques peuvent se propager dans le vide.

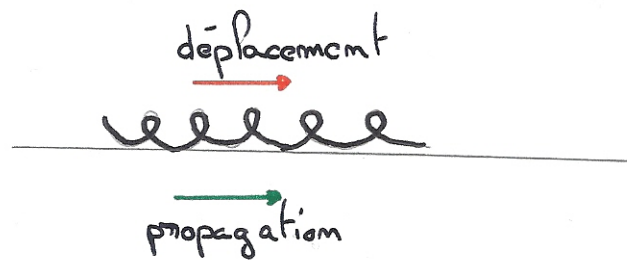
1.2 Différents types d'ondes.

Ondes transverse ou longitudinale.

onde transverse. le déplacement est perpendiculaire à la direction de propagation.



onde longitudinale. le déplacement est parallèle à la direction de propagation.



Ondes à 1, 2 ou 3 dimensions. Il s'agit du nombre de dimensions suivant lesquelles on peut décrire la propagation du déplacement ou de l'énergie :

- 1 dimension.** un ressort
- 2 dimension.** une onde de surface créée par une pierre tombant dans l'eau
- 3 dimension.** une onde sonore émise par une source ponctuelle

Forme de l'onde. On peut l'illustrer par la forme d'une corde à un instant quelconque après la perturbation.

- ébranlement ou pulse
- train d'ondes périodique
- onde sinusoïdale

2 Onde progressive sinusoïdale

Soit O la source, constituée par un oscillateur harmonique entretenu de pulsation ω , dont le déplacement au cours du temps est donné par

$$s = s_0 \cos(\omega t)$$

en choisissant l'origine du temps de manière à annuler la phase initiale.

A tout instant, le déplacement s d'un point M du milieu dépend de son abscisse x . L'état vibratoire de M sera entièrement déterminé si on connaît la fonction $s(M, t)$.

En désignant par v la vitesse de propagation de l'onde, et sachant que le point M ne sera dans l'état du point

O qu'au bout d'un temps $t_M = \frac{x}{v}$, on peut écrire

$$s(x, t) = s_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$$

On voit que dans ce cas (en supposant l'amortissement négligeable et par conséquent l'amplitude de l'onde conservée) le déplacement de M est une fonction sinusoïdale du temps et de l'espace. L'équation précédente peut alors s'écrire

$$s = s_0 \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

Il y a donc une double périodicité dans le temps (période T) et dans l'espace (période λ).

Temps	Espace
$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$
$\nu = \frac{1}{T}$	$\sigma = \frac{1}{\lambda}$

L'onde s'écrit alors : $s = s_0 \cos(\omega t - kx)$. En comparant avec la première équation on obtient la relation :

$$\omega = vk$$

liant la vitesse de propagation et la longueur d'onde ($\lambda = \frac{2\pi}{k}$) pour une fréquence donnée.

On peut rajouter aux formes précédentes la forme exponentielle $s = \text{Re}(s_0 e^{i(\omega t - kx)})$, parfois très utile pour les calculs. Dans le cas d'une onde progressive plane sinusoïdale, les plans d'onde sont dits "équiphases", car tous les points d'un plan d'onde ont la même phase.

3 Équation différentielle des ondes planes unidimensionnelles

Ces ondes ont certaines propriétés communes.

- une grandeur physique q , qui varie dans l'espace et le temps, de la forme $q(x, t)$. Elle peut être soit une grandeur scalaire (la variation de pression dans le cas des ondes sonores), soit une grandeur vectorielle (le champ électrique pour les ondes électromagnétiques).
- une propagation d'énergie qui accompagne l'onde. S'il s'agit d'une onde entretenue, il existe une source quelque part dans l'espace.
- en supposant une propagation à 1 dimension, la grandeur physique $q(x, t)$ obéit à l'équation différentielle (équation d'onde) :

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$$

dont la relation, tenant compte des conditions initiales ou des conditions aux limites, permet de suivre l'évolution de l'onde dans l'espace et le temps. Le paramètre v , homogène à une vitesse, constitue la vitesse de propagation de l'onde. Cette vitesse dépend essentiellement du milieu où l'onde se propage. On vérifie aisément que cette équation différentielle est satisfaite pour une onde sinusoïdale :

$$q = q_0 \cos(\omega t - kx)$$

On a en effet : $\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = -k^2 q$, $\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -\omega^2 q$. Il suffit donc de prendre :

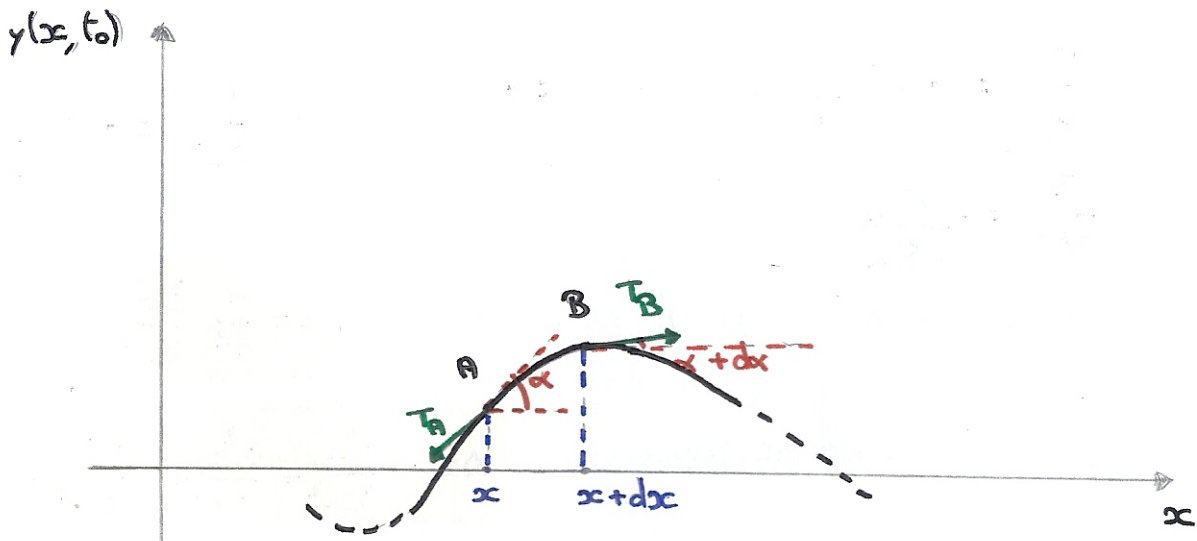
$$v^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

Plus généralement, on peut montrer que la solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$q(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) + g\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

où f et g sont des fonctions quelconques représentant des ondes planes progressives : $f\left(t - \frac{x}{v}\right)$ correspond à une propagation vers les x croissants et $g\left(t + \frac{x}{v}\right)$ à une propagation vers les x décroissants.

Exemple : onde transversale sur une corde. Soit une corde tendue à l'équilibre le long de l'axe Ox . La masse par unité de longueur de cette corde est μ et sa tension T (on négligera la force de pesanteur). La corde ayant été déformée puis abandonnée à elle-même, possède à l'instant t_0 la forme représentée sur la figure ci-dessous. On supposera que α est petit ($\sin(\alpha) \sim \tan(\alpha) \sim \alpha$).



En appliquant la deuxième loi de Newton à l'élément infinitésimal de corde AB et en projetant sur l'axe Oy , montrer que la déformation $y(x, t)$ vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Pour le petit élément de corde on écrit : $\sum \vec{F} = dm \vec{a}$ ici $dm = \mu AB$. Or puisque α est petit on a donc $\cos(\alpha) \sim 1$ et $\cos(\alpha) = \frac{dx}{AB} \Rightarrow AB = \frac{dx}{\cos(\alpha)} \Rightarrow dm = \frac{dx}{\cos(\alpha)} \mu \sim \mu dx$ On projette sur \vec{j} :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{j} = (\vec{T}_a + \vec{T}_b) \cdot \vec{j} = (T_b(\sin(\alpha + d\alpha)) - T_a \sin(\alpha)) \vec{j}$$

Dans l'approximation de petits déplacements et des petits angles :

$$\sin(\alpha + d\alpha) \sim \alpha + d\alpha \sim \tan(\alpha + d\alpha) = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+dx}$$

de plus

$$\tan(\alpha) = \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x$$

car $\sin(\alpha) \sim \alpha \sim \tan(\alpha)$. Par définition de la dérivée : $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+dx} - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x$ avec $T_a = T_b = T$ on a

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T dx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

On a donc une équation d'onde

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

4 Généralisation de la notion d'onde

Considérons une onde plane sinusoïdale se propageant dans une direction de vecteur unitaire $\vec{n}(\alpha, \beta, \gamma)$, par exemple : $s(\vec{r}, t) = A \sin(\omega(t - \frac{d}{c}))$ où $d = \vec{r} \cdot \vec{n} = \alpha x + \beta y + \gamma z$ est la distance parcourue par l'onde à partir de

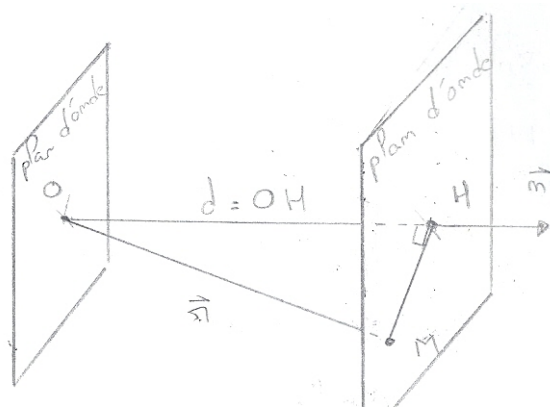
l'instant $t = 0$. On a : $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -\alpha \frac{\omega^2}{c^2} s$; $\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = -\beta \frac{\omega^2}{c^2} s$; $\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = -\gamma \frac{\omega^2}{c^2} s$; $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\omega^2 s$

Par conséquent, puisque \vec{n} est unitaire : $\Delta s = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$. Où Δ est l'opérateur Laplacien,

$$\Delta s = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}$$

. L'équation, dite de d'Alembert, est l'équation générale de propagation des ondes : elle est valable pour tout type d'onde, plane ou non. On utilise fréquemment le vecteur d'onde : $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}$ ce qui permet d'exprimer l'onde plane sinusoïdale sous la forme :

$$s(\vec{x}, t) = A \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$



5 Composition des ondes

La méthode des complexes. La partie réelle d'une somme de nombres complexes est, comme on le sait égale à la somme de leurs parties réelles.

Cette constatation permet de trouver simplement le résultat de la superposition d'oscillations harmoniques de

même fréquence, par exemple $s_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$ et $s_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$. On écrit

$$s = s_1 + s_2 = \operatorname{Re}(A_1 e^{i(\omega t + \phi_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \phi_2)})$$

Le module et l'argument de l'amplitude complexe sont respectivement l'amplitude et la phase de l'oscillateur réel. Pour trouver $s_1 + s_2$, il suffit de remarquer que les amplitudes complexes s'ajoutent : $\tilde{A} = A e^{i\phi} = A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2}$ de sorte que $A^2 = \tilde{A} \tilde{A}^* = (A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2})(A_1 e^{-i\phi_1} + A_2 e^{-i\phi_2}) = A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 (e^{i(\phi_1 - \phi_2)} + e^{-i(\phi_1 - \phi_2)})$. Soit $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)$.

Le rapport des parties imaginaire et réelles de \tilde{A} donne :

$$\tan(\phi) = \frac{A_1 \sin(\phi_1) + A_2 \sin(\phi_2)}{A_1 \cos(\phi_1) + A_2 \cos(\phi_2)}$$

Dans le cas particulier où $A_1 = A_2$ on a : $\tilde{A} = A_1 (e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2}) = A_1 e^{i((\phi_1 + \phi_2)/2)} (e^{i(\phi_1 - \phi_2)/2} + e^{-i(\phi_1 - \phi_2)/2}) \Rightarrow \tilde{A} = 2A_1 \cos(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}) e^{i(\phi_1 + \phi_2)/2}$ de sorte que :

$$A = 2A_1 \cos(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}) \text{ et } \phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$$

Remarques. Cette méthode ne peut pas s'appliquer à un produit d'oscillateurs car la partie réelle d'un produit n'est pas égale au produit des parties réelles.

Réflexion d'une onde plane sinusoïdale. Considérons une telle onde qui se propage suivant Ox et qui s'exprime par :

$$s_1 = s_0 \cos(\omega t - kx)$$

Si, en un point donné que nous prenons comme origine des abscisses, cette onde rencontre un plan rigide perpendiculaire à Ox , il se forme une onde réfléchie qui se propage vers les x négatifs, et qui est de la forme :

$$s_2 = s'_0 \cos(\omega t + kx + \phi)$$

En admettant que $s'_0 = s_0$, qui résulte de la conservation de l'énergie on peut écrire :

$$s_2 = s_0 \cos(\omega t + kx + \phi)$$

Une condition aux limites impérative est que, au point de contact avec le plan rigide, le milieu élastique ne peut se déplacer, quel que soit t . C'est le cas par exemple d'une corde vibrante fixée à une extrémité. En $x = 0$, on doit donc avoir

$$s_1 + s_2 = s_0 (\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \phi)) = 0$$

or $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2}) = 0 \Rightarrow \phi = \pi$. Par conséquent, l'onde réfléchi a pour équation :

$$s_2 = s_0 \cos(\omega t + kx + \pi) = -s_0 \cos(\omega t + kx)$$

La réflexion de l'onde se traduit par un changement de sens de la direction de propagation et par un changement de signe, c'est à dire un déphasage de π .

Ondes stationnaires.

Cas de 2 ondes : incidente et réfléchie. La composition des ondes incidente et réfléchie précédentes

s'obtient en appliquant le principe de superposition : $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$$\begin{aligned} s &= s_1 + s_2 = s_0(\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)) \\ &= 2s_0\sin(\omega t)\sin(kx) \\ &= 2s_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \end{aligned}$$

Cette équation montre que tous les points vibrant sont en phase. Il n'y a pas de propagation. On obtient un système d'ondes stationnaires.

Noeuds de vibration. Le déplacement est bien nul en $x = 0$, sur l'obstacle, quel que soit le temps t , mais il est également nul en une suite de points pour lesquels :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = 0$$

Ces points constituent les noeuds de vibration, données par :

$$x_N = n\frac{\lambda}{2} \forall n \in \mathbb{N}$$

Ventres de vibration. Les points correspondants à un déplacement maximum constituent les ventres de vibrations. Ils s'intercalent entre les noeuds et sont données par :

$$x_V = (2n + 1)\frac{\lambda}{4} \forall n \in \mathbb{N}$$

Résonateurs à fréquences multiples : cordes vibrantes. Dans l'expérience de Melde, une corde vibrante, dont une extrémité est fixée, est excitée à l'autre extrémité par un vibreur sinusoïdal. Pour certaines valeurs de la fréquence il y a résonance, c'est à dire que l'on observe des ondes stationnaires de grandes amplitude donnant à la corde un aspect en fuseaux avec un noeud à chaque extrémité. L'interprétation est la suivante : l'onde progressive émise par le vibreur subit une infinité de réflexions à chaque extrémités et il y a superposition d'une infinité d'ondes progressives sinusoïdales se propageant dans les 2 sens.

On peut donc penser que l'amplitude de l'onde stationnaire qui en résulte est du même type qu'avec deux ondes, soit :

$$A(x) = A_m|\sin(kx + \alpha)|$$

ce qui donne lieu là à une alternance de noeuds et de ventres distants de $\frac{\lambda}{4}$. Mais cette fois A_m n'est pas égale à $2a$: elle lui est très supérieure, de sorte que la source apparaît pratiquement comme un noeud.

On doit donc avoir :

$$A_m |\sin(\alpha)| = a \text{ au niveau du vibreur}$$

$$A_m \sin(kl + \alpha) = 0 \text{ noeud à l'extrémité}$$

$$\Rightarrow kl + \alpha = n\pi$$

Il en résulte que : $A_m = \frac{\alpha}{|\sin(\alpha)|} = \frac{\alpha}{|\sin(n\pi - kl)|}$ devient infini si kl est un multiple entier de π .

La condition de résonance est donc, compte tenu de $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{c}{v}$

$$l = p \frac{\lambda}{2} \text{ où } v = p \frac{c}{2l}$$

On note que $c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{v} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ et $l = p \frac{1}{2v} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$. A chaque valeur entière de p , correspond une valeur particulière de F .

En fait, A_m est limité par l'amortissement tout comme l'extrémité dans une bobine à la résonance. Finalement, l'amplitude de la corde vibrante est :

$$A(x) = A_m |\sin(kx)|$$

Si l'on pince la corde tendue en l'absence du vibreur, on constate qu'elle est en résonance avec l'une des fréquences précédentes. Les modes de vibration correspondants sont appelés modes propres ou encore modes normaux de la corde. La fréquence la plus faible correspond au mode fondamental, les autres aux modes harmoniques.

6 Compléments.

Remarque 1. On rappelle l'équation d'onde à une dimension

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

La solution générale est sous la forme $\Psi(t - \frac{x}{v})$ et $\Psi(t + \frac{x}{v})$ sont solutions de l'équation d'onde.

$\Psi(t - \frac{x}{v})$ propagation vers les x croissants quand t augmente. Supposons qu'à $t = t_0$, en $x = x_0$, la propagation soit $\Psi(t_0 - \frac{x_0}{v}) = \Psi_0$. Comme le signal se propage sans déformation, à $t_1 > t_0$ on retrouve Ψ_0 en x_1 donc :

$$\Psi(t_1 - \frac{x_1}{v}) = \Psi_0 \Rightarrow t_1 - \frac{x_1}{v} = t_0 - \frac{x_0}{v} \Rightarrow t_1 - t_0 = \frac{1}{v}(x_1 - x_0) > 0.$$

. L'onde $\Psi(t - \frac{x}{v})$ se propage le long de l'axe Ox dans le sens positif à la vitesse v .

Remarque 2. La solution particulière est l'onde plane uniforme monochromatique sa forme générale est sous la forme

$$\Psi(\vec{r}, t) = A_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \phi)$$

Cette onde se propage dans la direction du vecteur \vec{k} , appelé vecteur $v = \frac{\omega}{k}$.

Pour les calculs linéaires on pourra utiliser la représentation complexe :

$$\tilde{\Psi}(\vec{r}, t) = A_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \phi)}$$

Remarque 3. Pour un problème à symétrie sphérique (sources ponctuelles, émettant dans un milieu isotrope) l'onde plane n'est plus une solution satisfaisante. En particulier, l'amplitude dépend de r distance à la source et du temps t mais pas de la direction.

$$\begin{aligned} \Delta \Psi(r, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi(r, t)}{\partial t^2} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r}) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

En posant $\phi = r\Psi$ on obtient $\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$. On trouve donc une équation qui est l'équation d'onde à une dimension donc $\phi(r, t) = f(t - \frac{r}{v}) + g(t + \frac{r}{v}) \Rightarrow \Psi(r, t) = \frac{1}{r} f(t - \frac{r}{v}) + \frac{1}{r} g(t + \frac{r}{v})$ le terme $\left\{ \frac{1}{r} f(t - \frac{r}{v}) \right\}$ correspond à une onde sphérique le terme $\left\{ \frac{1}{r} g(t + \frac{r}{v}) \right\}$ correspond à une onde sphérique convergente (r diminue quand t augmente). La solution est donc sous la forme

$$\Psi(r, t) = \frac{A_n}{r} \cos(\omega t - k\pi\phi)$$

Deuxième partie

Électrocinétique

L'électrocinétique est l'étude des circuits électriques dans lesquels les charges électriques se déplacent et qui sont donc le siège d'un courant électrique.

1 Définitions.

Quand une différence de potentiel existe entre deux points d'un conducteur, les charges mobiles se déplacent dans ce conducteur. (charge ou décharge d'un condensateur.) Le conducteur est le siège d'un courant électrique. Quand on maintient constante la différence de potentiel qui est à l'origine du courant, on atteint (très vite) un régime permanent. Dans ce cours seul les états permanents nous intéressent.

On caractérise un courant électrique dans un conducteur par son intensité : c'est le rapport de la charge dq (ou quantité d'électricité) qui traverse une section de conducteur pendant le temps dt :

$$I = \frac{dq}{dt}$$

- Si le courant est continu, $I = cte$ et l'intensité est égale à la charge qui traverse une section de conducteur par seconde.
- Le sens du courant est fixé par convention du potentiel le plus haut vers le potentiel le plus bas. Si les charges mobiles étaient positives, elles se déplaceraient dans ce sens. Dans les conducteurs métalliques, les charges mobiles sont des électrons qui se déplacent dans le sens inverse.

En régime permanent, l'intensité en un point du circuit est constante et il ne peut y avoir d'accumulation de charges e aucun point du conducteur puisque alors les conditions changeraient avec le temps. Cette absence d'accumulation de charge entraîne que l'intensité est la même tout le long d'un conducteur filiforme, même si sa section n'est pas constante.

De plus à chaque instant, on est presque dans un état correspondant à l'électrostatique et, en particulier, il continue à ne pas y avoir de charges non compensées dans la masse du conducteur (c'est à dire que la densité volumique totale de charge est nulle : $\rho = 0$).

Dans ce qui suit, on désigne par ρ_m la densité volumique de charges mobiles en un point P du conducteur.

2 Le vecteur densité de courant \vec{j} .

La densité de courant en un point est un vecteur tel que l'intensité du courant à travers l'élément de surface $d\vec{S}$ autour de ce point est :

$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

On appelle cela le flux de \vec{j} à travers $d\vec{S}$. Soit \vec{v} la vitesse moyenne des charges mobiles. Ces dernières sont individuellement animées de mouvements erratiques de grande vitesse; la vitesse moyenne, très faible montré ci-dessous, caractérise le déplacement d'ensembles des charges du conducteur.

La charge dq qui traverse l'élément de surface pendant le temps dt est celle contenue dans la colonne de hauteur vdt s'appuyant sur dS . Le volume de cette colonne est $dV = dS \cos(\alpha) vdt = \vec{dS} \cdot \vec{v} dt$. On a donc $dq = \rho_m dV = \rho_m \vec{dS} \cdot \vec{v} dt$ finalement $dI = \frac{dq}{dt} = \rho_m \vec{dS} \cdot \vec{v}$. Comme $dI = \vec{j} \cdot \vec{dS}$, il vient : $\vec{j} = \rho_m \vec{v}$.
Notons que \vec{j} est toujours dirigé dans le même sens que le courant et que son module s'exprime en $A.m^{-2}$.

3 Intensité du courant continu et première loi de Kirchhoff.

Considérons le flux du vecteur densité de courant à travers une surface fermée S orientée de façon cohérente et limitant un volume V . Ce flux représente le bilan algébrique des charges qui traversent S par unité de temps. Dans ce cas, en régime permanent, il n'y a pas d'accumulation de charges, donc ce flux est nécessairement nul :

$$\int \int_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = 0$$

or

$$\int \int_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = \int \int \int_V \text{div}(\vec{j}) dV \quad (\text{Ostrogradsky})$$

Par suite, $\text{div}(\vec{j}) = 0$ pour un courant continu.

Conducteur filiforme. Considérons un tronçon filiforme, de section pas nécessairement uniforme, limité par la surface orientée constituée de la surface latérale du tronçon et des surfaces S_1 et S_2 . Ce tronçon est parcouru par un courant continu :

$$\int \int \int_V \text{div}(\vec{j}) dV = 0 = \int \int_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

Comme aucune charge ne s'échappe de la surface latérale du conducteur il reste

$$\int \int_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{dS} + \int \int_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{dS} = 0$$

Les surfaces S_1 et S_2 sont orientées en sens inverse (flux sortant). Les courants I_1 et I_2 étant définis par les flux de j à travers les surfaces S_1 et S_2 orientées selon le sens des courants :

$$I_1 = - \int \int_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{dS} \text{ et } I_2 = + \int \int_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

L'intensité est donc la même en tout point du circuit.

Conducteur ramifié. Appliquons le même raisonnement que précédemment :

$$\int \int_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{dS} + \int \int_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{dS} + \int \int_{S_3} \vec{j} \cdot \vec{dS} = 0 \Leftrightarrow I_2 + I_3 = I_1$$

Cette relation s'étend à un noeud quelconque d'un circuit ramifié. soit I_j les intensités dans les branches pour lesquelles le courant est orienté vers le noeud et I_k les intensités dans les branches pour lesquelles le courant est

orienté en sens contraire. On a donc la première loi de Kirchhoff

$$\sum_j I_j = \sum_k I_k$$

4 Loi d'Ohm.

Forme locale. Dans un conducteur parcouru par un courant continu, l'intensité est la même en tout point. si nous supposons la section du conducteur constant et la densité de courant \vec{j} constante en tout point d'une section, alors \vec{j} sera constant dans tout le conducteur et comme $\vec{j} = \rho_m \vec{v}$, \vec{v} sera également constant.

Or les porteurs sont soumis à un champ électrostatique \vec{E} qui, si ce dernier était seul en cause, devrait leur communiquer un mouvement uniformément accéléré; on fait intervenir une force de frottement proportionnelle à la vitesse : $\vec{F}' = -k\vec{v}$. D'après l'équation fondamentale de la dynamique on a $q\vec{E} - k\vec{v} = m\vec{a}$. Or en régime permanent, \vec{a} est nul : $q\vec{E} = k\vec{v}$ or $\vec{j} = \rho_m \vec{v}$ d'où $\vec{E} = k\rho_m q \vec{j}$. On pose $\frac{k}{\rho_m q} = \frac{1}{\sigma} = \rho_r$ or ρ_m et q sont du même signe donc σ et ρ sont positifs. Où σ est la conductivité du conducteur et ρ_r la résistivité du conducteur. On a

$$\vec{E} = \rho_r \vec{j} \text{ et } \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Loi d'Ohm pour une portion du circuit. Soit un conducteur cylindrique de longueur l , de section droite S , parcouru par un courant continu d'intensité I . Soit \vec{u} le vecteur unitaire dans le sens du courant. Soit $\vec{j} = \frac{1}{S} \vec{u}$ et $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} = \frac{1}{\sigma S} \vec{u} = E\vec{u}$. Ainsi $V_A - V_B = \int_{AB} \vec{E} d\vec{l} = \int_{AB} (E\vec{u})(d\vec{l}\vec{u}) = \int_{AB} E dl = El$ et donc $V_A - V_B = \frac{1}{\sigma S} l = \frac{I \rho_r}{S} l$, on pose $\frac{l \rho_r}{S} = R$ finalement on obtient $V_A - V_B = U_{AB} = RI$.

La résistance R s'exprime en ohms, la résistivité s'exprime en ohm mètre.

5 Puissance électrique dans un circuit.

Forme locale. Si E est le champ électrique en un point du circuit, la force qui s'exerce sur la charge dq contenue dans le volume dV est :

$$d\vec{F} = dq\vec{E} = \rho_m dV \vec{E}$$

Pendant le temps dt , le déplacement de dq est vdt et le travail correspondant du champ est

$$dW = d\vec{F} \vec{v} dt = \rho_m \vec{v} \vec{E} dt dV$$

$$\frac{dW}{dt dV} = \vec{j} \vec{E}$$

$\vec{j} \cdot \vec{E}$ est donc la puissance électrique par unité de volume du circuit, c'est à dire la densité de puissance électrique dans le conducteur.

Dans une portion de circuit. Soit une portion de circuit parcourue par un courant continu de porteurs qui, à l'instant t sont compris entre les sections A et B et $t + dt$ se sont déplacés et sont compris entre A' et B' . Pour la portion de circuit comprise entre A' et B , il n'y a aucun changement après déplacement. Par suite, le changement entre t et $t + dt$ revient à transporter la charge dq , comprise initialement entre A et A' , entre B et

B' . Le travail du champ électrique est donc :

$$dW = dq(V_A - V_B)$$

dq est aussi la quantité de charge qui a traversé une section du conducteur (par exemple B) pendant dt ; l'intensité dans le circuit est $I = dq/dt$. Donc :

$$P = RI^2$$

Troisième partie

Induction magnétique : Propriétés générales

1 Mise en évidence des interactions électromagnétiques

Les phénomènes suivants révèlent des forces que l'on ne peut interpréter à partir de ce que nous savons de la gravitation ou de l'électrostatique :

- un morceau de fer est attiré par un aimant
- l'aiguille d'une boussole indique sensiblement la direction du pôle nord de la Terre
- l'aiguille d'une boussole change de direction si l'on approche d'elle un aimant, un morceau de fer ou un fil parcouru par un courant (Oersted 1820)
- deux fils conducteurs parcourus tous deux par des courants électriques s'attirent ou se repoussent
- la trajectoire d'un électron est courbée au voisinage d'une bobine parcouru par un courant

L'analyse de ces phénomènes montre qu'il s'agit toujours d'interactions entre des particules chargées en mouvement. Ces interactions sont appelées interactions électromagnétiques.

La situation électrostatique n'est qu'un cas particulier correspondant à des charges immobiles, elle nous a permis de nous familiariser avec la notion de champ en partant de la forme simple que prennent les interactions électromagnétiques dans ce cas. Cette notion est indispensable à l'étude du cas général et nous procéderons de la façon suivante : étant donné des charges électriques animées de mouvements quelconques, on cherche à exprimer la force électromagnétique à laquelle une charge en un point P de l'espace est soumise en fonction de grandeurs caractéristiques de l'espace en ce point, propriétés qui résultent des autres charges et de leurs mouvements.

2 Force de Lorentz

- S'agissant de charges en mouvement, il faut préciser le référentiel. On choisit un référentiel dans lequel l'observateur est immobile. On considère un système quelconque de charges animées de mouvement quelconques par rapport à ce référentiel.

Étudions expérimentalement la force \vec{F} agissant sur une charge q de vitesse \vec{v} en un point de l'espace.

- Quelle que soit \vec{v} , \vec{F} est proportionnelle à q .
- Si $\vec{v} = 0$, la charge est soumise à une force \vec{F}_E que nous mettons sous la forme :

$$\vec{F}_E = q\vec{E}$$

(\vec{E} est le champ électrique en P c'est aussi le champ électrostatique si toutes les autres charges sont aussi mobiles)

- Si $\vec{v} \neq 0$, la charge est soumise à la force \vec{F} . On constate que la différence $\vec{F} - \vec{F}_E$ est proportionnelle à \vec{v} , perpendiculaire à une même direction de l'espace en P quelle que soit \vec{v} . On peut mettre cette différence sous la forme :

$$\vec{F} - \vec{F}_E = \vec{F}_B = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

relation qui définit le champ magnétique \vec{B} en P . Finalement :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

\vec{B} est un vecteur axial. L'unité du champ magnétique est le Tesla (T). Par exemple sur terre le champ magnétique vaut $6,2 \cdot 10^{-5} T$, un électroaimant vaut $1,5 T$ et un matériau supraconducteur vaut $15 T$

3 Action d'un champ magnétique sur un courant

Force exercée sur un élément de volume conducteur. Soit un élément de volume dV d'un conducteur entourant un point M et parcouru par un courant de densité \vec{j} . L'élément dV contient la charge $\rho_m dV$ qui subit la force magnétique :

$$dF = \rho_m dV (\vec{v} \wedge \vec{B}) = dV \vec{j} \wedge \vec{B}$$

$$\frac{d\vec{F}}{dV} = \vec{j} \wedge \vec{B}$$

La force magnétique par élément de volume de conducteur est $\vec{j} \wedge \vec{B}$. Ceci va rester valable dans le cas où il ya plusieurs types de porteurs mobiles car :

$$d\vec{F} = \sum \rho_{im} dV (\vec{v}_i \wedge \vec{B}) = dV [(\sum \rho_{im} \vec{v}_i) \wedge \vec{B}] = dV \vec{j} \wedge \vec{B}$$

Force exercée sur un élément de circuit filiforme parcouru par un courant. Soit un élément de conducteur filiforme de section constante et de longueur dl assez petit pour que \vec{B} puisse être considéré comme constant et que le tronçon envisagé puisse être considéré comme rectiligne et assimilable à un cylindre de hauteur dl , de base d'aire dS . Le vecteur densité de courant \vec{j} est uniforme dans tout le volume du cylindre et parallèle à \vec{u} (vecteur unitaire dans le sens du courant).

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= dV \vec{j} \wedge \vec{B} = (d\vec{S} \cdot d\vec{l})(\vec{j} \wedge \vec{B}) = (d\vec{S} \cdot \vec{u}) dl j (\vec{u} \wedge \vec{B}) \text{ car } \vec{j} = j\vec{u}. \\ &= (d\vec{S} \cdot \vec{u} j)(dl \vec{u} \wedge \vec{B}) \text{ car } d\vec{l} = dl \vec{u} \\ &= (\vec{j} \cdot d\vec{S})(d\vec{l} \wedge \vec{B}). \end{aligned}$$

$$dF = I(d\vec{l} \wedge \vec{B})$$

Cette loi peut s'écrire sous une forme équivalente en introduisant le vecteur intensité de courant, de module I et orienté dans le sens du courant :

$$\frac{d\vec{F}}{dl} = \vec{I} \wedge \vec{B}$$

La force magnétique qui s'exerce par longueur unité d'un fil parcouru par un courant est $\vec{I} \wedge \vec{B}$.

Bien entendu, la résultant des forces d'origine magnétique s'exerçant sur une portion Γ de circuit sera :

$$\vec{F} = I \int_T d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Effet hall. Dans un conducteur, le mouvement des charges est dû à la présence d'un champ électrique \vec{E} et de la densité de courant est $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.

Si le conducteur est plongé dans un champ magnétique \vec{B} , ces porteurs sont soumis (outre la force électrique et

la force de frottement) à une force magnétique perpendiculaire à \vec{j} .

Un déplacement de charges va donc se produire, qui se superpose au mouvement initial et produit des accumulations de charges sur les parois de conducteur. Ces distributions de charges produisent un champ électrique qui exerce sur les charges mobiles une force opposée à la force magnétique. Ce phénomène se poursuit jusqu'à ce que la force résultante à laquelle les porteurs sont soumis (force magnétique + force électrique) soit de nouveau parallèle aux parois du conducteur, c'est à dire reprenne la même direction qu'en l'absence de champ magnétique. Pour étudier ce phénomène de manière plus quantitative, considérons un tronçon de conducteur de forme parallélépipédique donc les faces sont parallèles respectivement aux axes Ox, Oy, Oz d'un trièdre trirectangle. Le courant circule parallèlement à Ox . ($j > 0$) : $\vec{j} = j\vec{u}_x$ et $\vec{v} = v\vec{u}_x$ (ici, les porteurs sont des électrons, \vec{v} est dirigé en sens contraire de \vec{j}) Le champ magnétique est parallèle à Oy : $\vec{B} = B\vec{u}_y$.

Supposons $j > 0$ et $B > 0$.

Il y a excès de porteurs sur la face avant et défaut sur la face arrière du parallélépipède. Ces charges produisent un champ électrique \vec{E}_H dirigé selon Oz dont l'effet doit compenser exactement la force magnétique. Pour un élément de volume dV , la force transversale totale doit être nulle :

$$(\rho_m dV)\vec{E}_H + (\rho_m dV)(\vec{v} \wedge \vec{B}) = 0$$

$$\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B} \text{ où } \vec{E}_H \text{ est le champ de Hall.}$$

La distribution de charges est stationnaire en régime permanent et \vec{E}_H est ainsi de nature électrostatique. La différence de potentiel entre la face arrière et la face avant est :

$$\Delta V = V_A - V_C = \vec{E}_H \cdot \vec{AC} = -Bvb \quad (\vec{AC} = b\vec{u}_z)$$

ici $B > 0$

Cette différence de potentiel qui apparaît ainsi est la manifestation de l'effet Hall. ΔV peut s'exprimer en fonction de I , de ρ_m et de a ; en effet :

$$\vec{j} = j\vec{u}_x = \rho_m v\vec{u}_x = \frac{I}{ab}\vec{u}_x \Rightarrow v = \frac{I}{ab\rho_m}$$

$$\Delta V = -\frac{1}{\rho_m} \frac{IB}{a}$$

ici $\rho_m < 0$ (électrons) : $I > 0, B > 0$ et $a > 0$.

Ordre de grandeur. Pour de l'argent (un électron libre par atome, on trouve par $B = 1T, I = 10A$ et $a = 0,1mm$: $\Delta V \sim 8,4\mu V$, effet faible mais parfaitement mesurable.

Application. Détermination du signe des porteurs si inconnu. Mesure de B , après étalonnage (sonde à effet Hall, voir TP)

4 Flux du champ magnétique

Travail fourni par la force magnétique qui s'exerce sur un circuit qui se déplace - Flux coupé. Le travail fourni par la force magnétique qui s'exerce sur une charge ponctuelle en mouvement est nulle ($\vec{F} \perp \vec{v}$). Il

n'en est pas de même pour un conducteur parcouru par un courant, qui se déplace dans le champ. En effet, le mouvement du conducteur n'a aucune relation avec le mouvement des porteurs à l'intérieur du conducteur. Soit un élément $d\vec{l}$ d'un circuit parcouru par un courant I et supposons que cet élément subit une translation $d\vec{r}$. La force magnétique qu'il subit fournit alors le travail :

$$dW = d\vec{F} \cdot d\vec{r} = I(d\vec{l} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{r}$$

Par suite de l'invariance d'un produit mixte par permutation circulaire :

$$dW = I\vec{B} \cdot (d\vec{r} \wedge d\vec{l})$$

$$dW = I\vec{B} \cdot d\vec{S}$$

où $d\vec{S}$ est le vecteur-aire du parallélogramme construit sur $d\vec{r}$ et $d\vec{l}$; ce parallélogramme est la surface balayée par $d\vec{l}$ lors de son déplacement $d\vec{r}$. $\vec{B} \cdot d\vec{S}$ est le flux de \vec{B} à travers $d\vec{S}$; ce flux $d\Phi_c$ est le flux d'induction à travers la surface balayée par l'élément de circuit dans son déplacement; on dit encore qu'il s'agit du flux coupé par l'élément lors de son déplacement

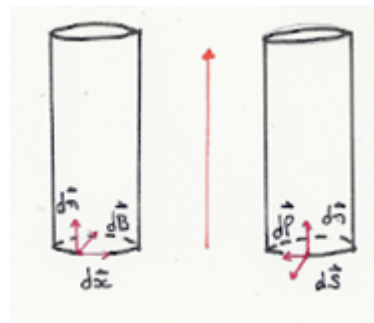
$$dW = Id\Phi_c$$

Considérons maintenant un circuit fermé qui passe d'une position initiale à une position finale, en changeant éventuellement de forme durant son déplacement. On décompose le circuit en éléments $d\vec{l}$ dont le déplacement peut lui aussi être décomposé en éléments $d\vec{r}$. Le travail total des forces magnétiques est la somme des travaux élémentaires du type précédent. Si l'intensité du courant reste constante durant le déplacement du circuit, ce travail est :

$$W = I \int d\Phi_c = I\Phi_C$$

Φ_c est le flux d'induction coupé par le circuit dans son déplacement, c'est à dire le flux d'induction à travers la surface balayée par le circuit. L'orientation de cette surface est définie par $d\vec{S} = d\vec{r} \wedge d\vec{l}$ et dépend donc du sens positif arbitraire choisi sur le circuit.

Ainsi dans la figure ci contre, (à gauche) le flux coupé est le flux à travers le cylindre balayé par le circuit, orienté vers l'intérieur. Si l'on change le sens de circulation, le flux coupé est flux à travers le cylindre orienté vers l'extérieur (à droite) et change de signe. Mais I change également de signe, donc W est, comme il se doit, indépendant du sens choisi : l'unité du flux est le Weber (Wb) : $1Wb = 1T/m^2$.



L'évaluation du flux coupé par le circuit est souvent difficile. Une autre expression, faisant appel à la variation du flux à travers le circuit des les positions finale et initiale de ce circuit est en général, beaucoup plus comme à utiliser : c'est la loi de Maxwell.

Loi de Maxwell.

— Nous admettons qu'une propriété fondamentale de \vec{B} est la suivante

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0$$

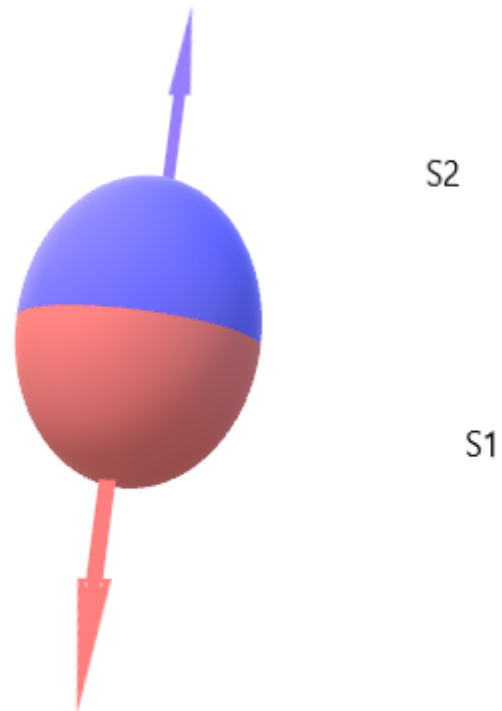
— Par suite, le flux de \vec{B} à travers une surface fermée est nul ; en effet :

$$\int \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int \int \int_V \operatorname{div}(\vec{B}) dV = 0$$

— Soit le contour Γ muni d'un sens de circulation arbitraire et deux surfaces s'appuyant sur Γ et orientées par rapport à ce contour (il en résulte que S_2 peut être obtenue par déformation de S_1).

Dans l'exemple ci contre changeons l'orientation de S_1 pour obtenir S'_1 . La réunion de S_2 et de S'_1 constitue une surface fermée, orientée de l'intérieur vers l'extérieur. Soient $\phi(S_1)$, $\phi(S'_1)$ et $\phi(S_2)$ les flux de \vec{B} à travers S_1 , S'_1 et S_2 : on a $\phi(S_1) = -\phi(S'_1)$ (il s'agit de la même surface à l'orientation près) de plus $\phi(S'_1) + \phi(S_2) = 0$ donc $-\phi(S'_1) = \phi(S_2)$ et $\phi(S_1) = \phi(S_2)$

Ainsi le flux d'induction à travers une surface quelconque de bord Γ orientée par rapport à ce bord ne dépend que de Γ



Soit un circuit doté d'un sens de parcours positif arbitraire et dans lequel circule un courant constant I . Ce circuit subit un déplacement d'une position initiale 1 à une position finale 2 ; ce circuit peut éventuellement, se déformer durant le déplacement. Le travail des forces magnétiques est $W = I\phi C$

Considérons la surface fermée constituée de la réunion de la surface balayée et de deux surfaces (absolument quelconques) s'appuyant sur le contour du circuit dans ses positions respectivement initiale et finale (bien noter que le choix de ces deux surfaces est arbitraire en raison du caractère conservatif du flux ; si le circuit est, il est commode de prendre pour surfaces planes limitées par le circuit lui-même dans ses positions extrêmes). La surface fermée, bien entendu, être orientée d'une manière cohérente.

Dans le cas particulier illustré par la figure, la surface coupée est orientée vers l'intérieur de la surface (voir sens du produit vectoriel $\vec{dr} \wedge \vec{dl}$) ; la surface S_1 est orientée, par rapport au contour, également vers l'intérieur alors que la surface S_2 est orientée vers l'extérieur. Modifions l'orientation de S_2 pour obtenir S'_2 . Alors la réunion de S_1 et S'_2 et S_c est une surface fermée donc :

$$\phi(S_1) + \phi(S'_2) + \phi_C = 0$$

$$\phi(S_1) - \phi(S_2) + \phi_C = 0$$

$$\phi_C = \phi_2 - \phi_1$$

avec ϕ_2 le flux à travers le circuit dans sa position finale (c'est à dire le flux à travers toute surface s'appuyant sur le contour et orientée par rapport à ce contour) et ϕ_1 est le flux à travers le circuit. On obtient donc la loi de Maxwell

$$W = I(\phi_2 - \phi_1)$$

Remarquons que W est, comme il se doit, indépendant du sens de circulation choisi sur le circuit : le changement de ce sens modifie, en effet, simultanément le signe de I et le signe des flux.

Énergie potentielle d'un circuit dans un champ magnétique parcouru par un courant continu.

On est conduit, d'après ce qui précède, à attribuer à un circuit par un courant continu et placé dans un champ magnétique une énergie potentielle

$$U = -I\phi$$

où ϕ est le flux d'induction à travers le circuit.

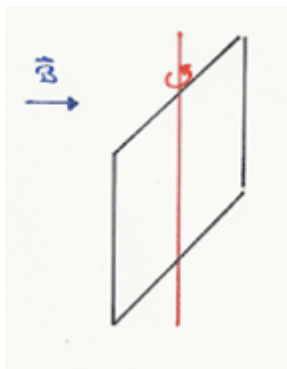
Lors du déplacement le travail ($W_2 - W_1$) des forces magnétiques est

$$W_2 - W_1 = -(U_2 - U_1) = I(\phi_2 - \phi_1)$$

Un circuit tendra à se déplacer de manière à rendre minimum son énergie potentielle (compte tenu des contraintes qui s'exercent sur lui, bien entendu) pour atteindre une position d'équilibre stable. Supposons que le sens de parcours arbitraire du circuit soit tel que I soit positif. Alors U minimal est obtenu pour $-\phi$ minimal, c'est à dire pour :

ϕ maximal (règle dite du flux maximum)

Exemple. Soit un cadre rectangulaire pouvant tourner autour d'un axe de rotation fixe dans un champ magnétique uniforme perpendiculaire à l'axe de rotation :



$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

or \vec{B} est uniforme donc :

$$\phi = \vec{B} \int \int d\vec{S}$$

comme la surface est plane tous les $d\vec{S}$ sont parallèles

et :

$$\int \int d\vec{S} = S$$

On obtient donc

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos(\alpha)$$

Comme $I > 0$ pour le sens de circulation choisi, le flux maximal caractérise la position d'équilibre stable. Ce flux maximal, puisque aucune contrainte n'empêche le cadre de tourner, est obtenu pour $\alpha = 0$ ($\vec{S} // \vec{B}$). La position $\alpha = \pi$ minimise le flux : c'est la position d'équilibre instable.

Si le circuit est déformable, le flux maximal sera atteint par déplacement et déformations combinés, dans la limite des contraintes s'exerçant sur le circuit.

Quatrième partie

Induction électromagnétique

Introduction. Les phénomènes que nous avons étudiés jusqu'à présent concernent des charges au repos (électrostatique) ou des courants permanents (magnétostatique). On va aborder maintenant une nouvelle classe de phénomènes, ceux où les courants sont variables dans le temps (régimes variables).

1 Expériences fondamentales

En électrostatique, la présence de charges à proximité d'un conducteur produit l'apparition de charges sur ce conducteur (phénomène d'influence).

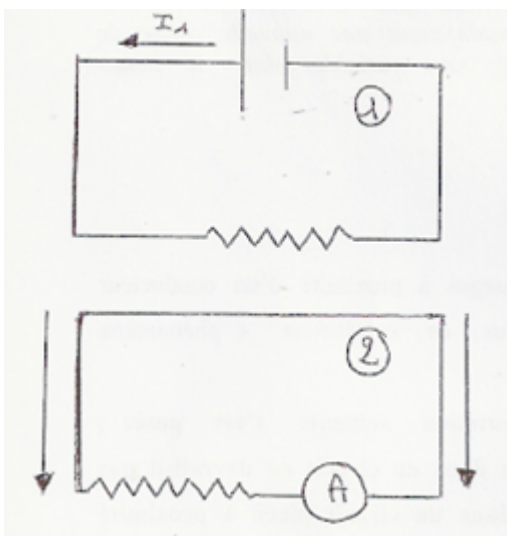
D'une manière analogue, la question suivante s'est posée, historiquement : un courant circulant dans un circuit ne devrait-il pas produire l'apparition d'un courant dans un circuit placé à proximité du premier ?

L'expérience a montré que le courant apparaît dans le second circuit que s'il y a déplacement relatif des deux circuits ou encore si le courant qui parcourt le premier circuit varie. Le courant cesse dès que le déplacement cesse ou dès que le courant est maintenu constant dans le premier circuit.

Les phénomènes d'influence ont un caractère statique : les charges développées à la surface d'un conducteur par l'approche d'une charge extérieure se maintiennent si cette dernière est fixe. Au contraire les phénomènes d'induction ont un caractère dynamique : ils sont liés à un mouvement ou à une variation.

Parmi la grande diversité des expériences d'induction, on va décrire trois expériences, réalisées toutes trois par Faraday et qui mettent bien en évidence les divers aspects du phénomène.

Expérience A.



On considère deux circuits 1 et 2 placés à proximité. 1 comporte un générateur et est parcouru par un courant I_1 ; 2 ne comporte pas de générateur mais un milliampèremètre. On déplace 2 ; on constate que tant que 2 se déplace, un courant circule dans le circuit 2. Un effet analogue est observé si un simple aimant est substitué au circuit 1. Le sens du courant est inversé si, au lieu, par exemple, de rapprocher 2 de 1 on l'éloigne.

Expérience B. Même expérience que la précédente, sinon que 2 est fixe et 1 mobile. On observe, comme précédemment, apparition d'un courant dans 2 (immobile) tant que dure le déplacement. Il y a accord

quantitatif, si le mouvement relatif des deux circuits est le même que dans l'expérience *A*. Le circuit 1 peut être remplacé par un aimant.

Expérience C. Les deux circuits sont fixes, mais on modifie I_1 (à l'aide d'une résistance variable insérée dans le circuit 1). De nouveau, un courant apparaît dans 2 et s'annule dès que I_1 reprend une valeur constante.

2 Interprétation

Soit $d\vec{l}$ un élément du fil filiforme 2 plongé dans une région où règne un champ \vec{B} engendré par 1.



Soit \vec{v} la vitesse d'un porteur du circuit 2 et \vec{v}_0 la vitesse avec laquelle on déplace l'élément $d\vec{l}$:

$$\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

(le référentiel utilisé est celui du conducteur 1 immobile).

Le porteur de charge est soumis à la force de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{v}_0 + \vec{v}) \wedge \vec{B}$$

ceci équivaut à dire que q est soumise à un champ électrique (champ électromoteur) :

$$de = \vec{E} \cdot d\vec{l} = [(\vec{v}_0 + \vec{v} \wedge \vec{B})] \cdot d\vec{l} = (\vec{v}_0 \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} + (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

le second produit mixte est nul (\vec{v} et $d\vec{l}$ sont colinéaires) ; remplaçons \vec{v}_0 par $d\vec{r}/dt$:

$$de = \frac{d}{dt} (d\vec{r} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} (d\vec{r} \wedge d\vec{l}) \cdot \vec{B}$$

où $(d\vec{r} \wedge d\vec{l}) \cdot \vec{B}$ est le flux coupé par l'élément $d\vec{l}$ donc :

$$de = -\frac{d\phi_C}{dt}$$

Pour le circuit entier, la forme électromotrice totale est donnée par l'expression :

$$e = -\frac{d\phi_C}{dt} = -\frac{d\phi}{dt}$$

où $d\phi$ est la variation de flux à travers le circuit.

Dans ce cas, le circuit 2 où se développe le courant induit est immobile. Le référentiel utilisé est celui de 2. Comme $\vec{v}_0 = 0$, les porteurs e sont pas soumis à une force magnétique; ils ne sont pas non plus soumis à une force électrostatique. Comme il y a néanmoins un courant observé, les porteurs sont soumis à une force de

Lorentz où intervient seulement un champ électrique \vec{E} :

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Ceci provient du fait que dans cette expérience, où le référentiel de 2 est utilisé, le champ magnétique auquel 2 est soumis varie par suite du mouvement de 1.

Un champ magnétique variable dans le temps est nécessairement accompagné d'un champ électrique.

La force électromagnétique d'induction dans le circuit qui correspond à ce champ électrique est donnée par la même formule que dans l'expérience *A* :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

Ici, la variation de ϕ n'est plus due au mouvement du circuit (il est immobile) mais à la variation du champ magnétique.

Les expériences du type *A* et *B* qui conduisent aux mêmes faits expérimentaux sont interprétées à première vue de manière très différentes. En réalité, champ électrique et champ magnétique sont deux composantes du champ électromagnétique et les deux expériences constituent une seule et même expérience "vue" de deux référentiels différents, celui du circuit induit pour *B*.

Cette dissymétrie entre les deux expériences sert de point de départ à l'article de 1905 d'Einstein, relatif à l'électrodynamique des corps en mouvement, qui introduit la relativité restreinte.

Si l'on admet, comme pour *B*, que la variation dans le temps du champ magnétique est accompagnée d'un champ électrique, alors l'expérience *C* s'interprète comme l'expérience *B* et la force électromagnétique d'induction dans 2 est donnée par $e = -\frac{d\phi}{dt}$. La variation de flux provient de la variation de l'induction magnétique, due elle-même à la variation de I_1 .

3 Loi de Lentz

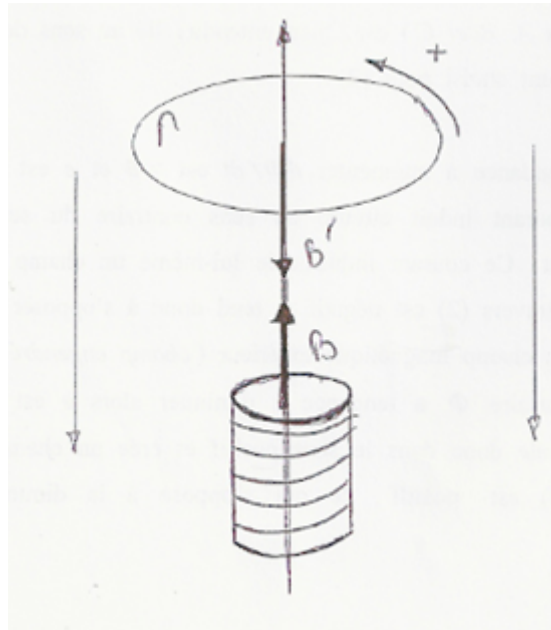
Le signe du flux d'induction Φ à travers le circuit 2 (décrit dans les expériences *A*, *B* et *C*) est bien entendu, lié au sens de parcours positif arbitrairement choisi pour 2.

Si ϕ a tendance à augmenter $d\phi/dt$ est positif et e est négatif, c'est à dire que le courant induit circule en sens contraire du sens positif choisi initialement. Ce courant induit crée lui même un champ magnétique dont le flux à travers 2 est négatif et tend donc à s'opposer à l'augmentation du flux du champ magnétique extérieur (champ engendré par 1).

Si au contraire ϕ a tendance à diminuer alors e est positif; le courant induit circule donc dans le sens positif et crée un champ dont le flux à travers 2 est positif, ce qui s'oppose à la diminution du champ extérieur. On a donc la loi de Lentz :

Le courant induit dans le circuit est d'un sens qu'il tend à s'opposer à la cause qui le produit; de manière plus précise, le flux du champ produit par le courant induit tend à compenser les variations du flux du champ extérieur.

Exemple. Soit l'expérience ci contre, où l'on rapproche la boucle Γ du solénoïde. Cette boucle est munie d'un certain sens de circulation (figure). Le flux du champ inducteur à travers la boucle ainsi orientée a tendance à augmenter donc le courant induit circule dans le sens négatif et crée un champ magnétique B' qui s'oppose au champ inducteur ; on arrive évidemment à la même conclusion si le sens de circulation est inversé sur la boucle.



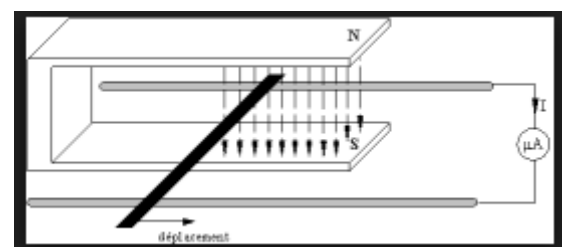
4 Interprétation du phénomène d'induction dans un cas particulier simple

Nous avons constaté qu'une variation du flux inducteur engendre une force électromagnétique induite et un courant induit dans un circuit fermé.

Nous souhaitons maintenant analyser les causes du courant induit : quelle sont les actions qui entraînent les porteurs de charge en un courant induit ?

Cette analyse sera faite dans le cas simple d'une portion de circuit rectiligne mobile dans un champ magnétique uniforme et constant.

Expérience Un conducteur rectiligne est posé sur deux rails parallèles et horizontaux (figure). Le conducteur est perpendiculaire à ceux-ci. L'ensemble est placé dans l'entrefer d'un aimant en U . Les lignes de champ du champ magnétique uniforme sont perpendiculaires au plan du rails. Un galvanomètre branché aux extrémités et ferme le circuit.



Provoquons le déplacement de la barre le long des rails : le galvanomètre détecte un courant induit. En augmentant la surface du circuit, nous provoquons une variation du flux magnétique inducteur et engendrons de la sorte une force électromagnétique induite.

Champ électromoteur d'induction. Lorsqu'on déplace la barre parallèlement aux rails à la vitesse d'entraînement \vec{v}_e , chaque électron du métal est entraîné avec la barre à la vitesse \vec{v}_e (Fig 2). Il correspond à ce mouvement d'entraînement une force d'origine électromagnétique :

$$\vec{F} = q\vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

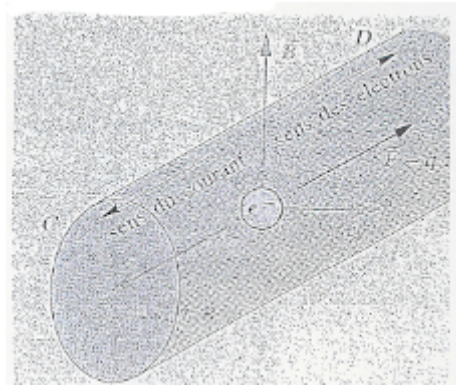
s'exerçant sur chaque électro.

Cette force qui provoque, dans la barre, un mouvement d'ensemble des électrons liés au métal, est à l'origine du courant induit. Elle peut se noter :

$$\vec{F} = q\vec{E}_m$$

La grandeur vectorielle $\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}$ appelée champ électromoteur d'induction, caractérise l'action qui s'exerce sur les porteurs de charge contenus dans la barre et se déplaçant dans le champ magnétique.

- \vec{E}_m est perpendiculaire à \vec{v}_e et à \vec{B}
- $\vec{v}_e, \vec{B}, \vec{E}_m$ forment un trièdre direct
- $E_m = v_e B |\sin(\vec{v}_e, \vec{B})|$



D'autre part, \vec{F} et \vec{E}_m sont de sens contraires ($q < 0$).

Les électrons se déplaceront dans la barre dans le sens opposé à \vec{E}_m : le sens opposé à \vec{E}_m ; le sens du courant induit (sens conventionnel) est donc celui de \vec{E}_m

Dans le cas de la figure, \vec{E}_m celui de i sont dirigés de D vers C .

Le sens de \vec{E}_m donne celui de i (en l'absence de toute autre force électromagnétique)

Force électromagnétique induite. Calculons le travail $W_{C-D}(\vec{F})$ reçu par une charge q lorsqu'elle se déplace de C vers D sous l'action de la force d'origine électromagnétique \vec{F} :

$$W_{C-D}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{CD} = q\vec{E}_m \cdot \vec{CD}$$

Le rapport $W_{C-D}(\vec{F})/q$, homogène à une tension, n'est autre que la force électromotrice d'induction que l'on note e_{CD} . Ainsi :

$$e_{CD} = \vec{E}_m \cdot \vec{CD} \text{ avec } \vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

Dans le cas particulier étudié, les vecteurs \vec{v}_e et \vec{B} sont orthogonaux entre eux et à la direction du conducteur CD de longueur l . La valeur absolue de la force électromagnétique induite dans un champ uniforme vaut :

$$|e_{CD}| = |e| = v_e \cdot B \cdot l$$

Orientons la normale \vec{n} à la surface dans le sens de \vec{B} (Figure). Désignons par ϕ_0 le flux initial à travers le circuit comprenant la barre et le rails

$$\Phi_0 = \sum \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

A une translation x de la barre de longueur l correspond une variation $\delta S = x.l$ de la surface du circuit induit, et le flux devient :

$$\Phi = \Phi_0 + \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot l \cdot x$$

Dans notre exemple, \vec{B} et \vec{n} ont le même sens

$$\Phi = \Phi_0 + B.l.x$$

Φ et x sont des fonctions du temps, dérivons :

$$\frac{d\phi}{dt} = B.l. \frac{dx}{dt}$$

Finalement

$$\left| \frac{d\phi}{dt} \right| = B.l.v_e = |e|$$

Nous retrouvons la relation entre les valeurs absolues de la force électromagnétique induite et la dérivée du flux par rapport au temps.

Procédons à une étude du signe : \vec{n} définit un sens positif de circulation le long du circuit, de C vers D dans le cas de la figure. Le courant induit allant de D vers C a une intensité négative. On a donc :

$$e = R.i < 0$$

Or :

$$\frac{d\phi}{dt} = B.l. \frac{dx}{dt} > 0$$

Donc

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$

On notera d'ailleurs que le champ électromoteur d'induction \vec{E}_m est effectivement de sens contraire à \vec{CD} , de sorte que

$$e = \vec{E}_m \cdot \vec{CD} < 0$$

5 Induction mutuelle

Soient deux circuits Γ_1 et Γ_2 immobiles l'un par rapport à l'autre. Supposons que dans Γ_1 circule un courant $I_1(t)$. Γ_2 est le siège d'un courant induit dû à la force électromagnétique :

$$e_2 = - \frac{d\phi_2}{dt}$$

(Φ_2 désigne le flux du champ dû à Γ_1 à travers Γ_2). Φ_2 est évidemment proportionnel au champ créé par Γ_1 , lequel est proportionnel à I_1 ; on peut écrire :

$$\Phi_2 = k_2 I_1$$

et par suite :

$$e_2 = -k_2 \frac{dI_1}{dt}$$

où k_2 est une constante (c'est à dire indépendante du temps) qui est fonction des caractéristiques (formes et position relative) des deux circuits.

D'une manière symétrique, Γ_2 peut comporter un générateur et être le siège d'un courant variable $I_2(t)$ qui provoque dans Γ_1 , l'apparition d'un courant induit dû à la force électromagnétique d'induction :

$$e_1 = -k_1 \frac{dI_2}{dt}$$

On va montrer que $k_1 = k_2$. Pour cela, les intensités I_1 et I_2 étant maintenues constantes :

1. On transporte Γ_2 de sa position initiale à ∞ , Γ_1 restant fixe. Le travail des forces magnétiques est :

$$W_2 = I_2(0 - \phi_2) = -I_2\phi_2 = -I_1I_2k_2$$

2. On transporte Γ_1 de sa position initiale à ∞ , Γ_2 restant fixe. Le travail des forces magnétiques est :

$$W_1 = I_1(0 - \phi_1) = -I_1\phi_1 = -I_1I_2k_1$$

Comme :

1. Les forces qui agissent sur les deux circuits ne dépendent à chaque instant que des positions relatives des deux circuits.
2. Que ces deux forces satisfont au principe de l'action et de la réaction qui s'exerce sur les deux circuits.
3. Que le déplacement relatif est le même dans les deux opérations envisagées, le travail effectué est le même et $W_1 = W_2$.

$$\text{Donc } k_1 = k_2 = k$$

M est un coefficient, positif ou négatif, appelé inductance mutuelle des deux circuits. M est le quotient d'un flux par une intensité et s'exprime en henry (symbole H : $m^2.kg.s^{-2}.A^{-2}$).

6 Auto-induction

Auto-inductance. Soit un circuit Γ parcouru par un courant variable $I(t)$.

On peut définir à tout instant le flux du champ créé par ce circuit à travers lui-même et ce flux va varier dans le temps, ce qui provoque l'apparition d'une force électromagnétique d'induction dans le circuit :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

Le champ magnétique créé est en tout point proportionnel à $I(t)$ d'où :

$$\phi(t) = LI(t)$$

où L est un coefficient caractéristique du circuit et indépendant du temps appelée auto-induction du circuit, finalement :

$$e = -L \frac{dI}{dt}$$

Donc la force électromagnétique d'induction qui apparaît aux bornes d'un circuit d'auto-induction L , parcouru par un courant I variable, est :

$$e = -L \frac{dI}{dt}$$

Étudions l'auto-induction dans un solénoïde :

Soit un solénoïde de longueur l comportant n spires de surface S . On a :

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

$$\phi = NBS = \mu_0 \frac{N^2}{l} IS$$

d'où

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$$

Insérons ce solénoïde, de résistance R (en général très petite) dans un circuit comportant une pile de force électromagnétique constante e_0 et un interrupteur. A tout instant t , on a dans ce circuit, après fermeture :

$$e_0 + e = RI$$

C'est à dire :

$$e_0 = RI + L \frac{dI}{dt}$$

Cette équation différentielle régit les variations de I .

A partir de l'instant où l'on ferme le circuit à l'aide de l'interrupteur, l'intensité I doit croître depuis $I = 0$ jusqu'à $I = \frac{e_0}{R}$ (régime permanent) : on doit donc avoir initialement $dI/dt > 0$.

Comme d'après la loi de Lenz, le phénomène d'auto-induction doit s'opposer à l'accroissement du courant, la force électromagnétique doit être en opposition par rapport à celle du générateur c'est à dire que $e < 0$, donc $L(dI/dt) > 0$. Comme $dI/dt > 0$, L doit être positif. Ceci est une propriété générale de l'auto-inductance.

$$L > 0$$

Si le circuit, une fois le régime permanent atteint, est ouvert, l'intensité va passer progressivement de la valeur E/R à la valeur 0 ; le solénoïde s'oppose en effet à la variation du courant et se comporte comme un générateur.

7 Application de l'induction

7.1 Principe de l'alternateur.

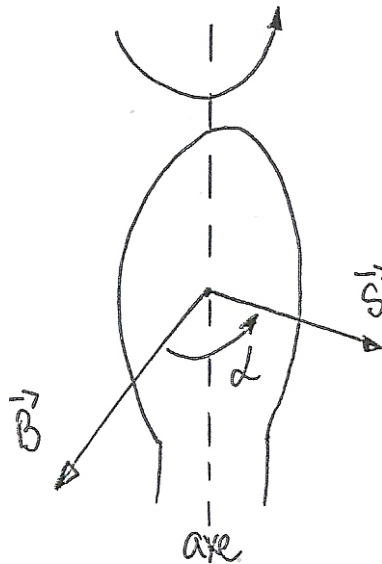
Soit un circuit plan qui peut tourner autour d'un axe situé dans son plan. Le circuit est placé dans un champ uniforme \vec{B} et soit α l'angle (\vec{B}, \vec{S}) le flux d'induction à travers ce circuit est :

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos(\alpha)$$

Faisons tourner ce circuit d'un mouvement uniforme, avec $\alpha = \omega t + \phi$ avec ω la pulsation. Alors il apparaît aux bornes du circuit une force électromagnétique d'induction alternative.

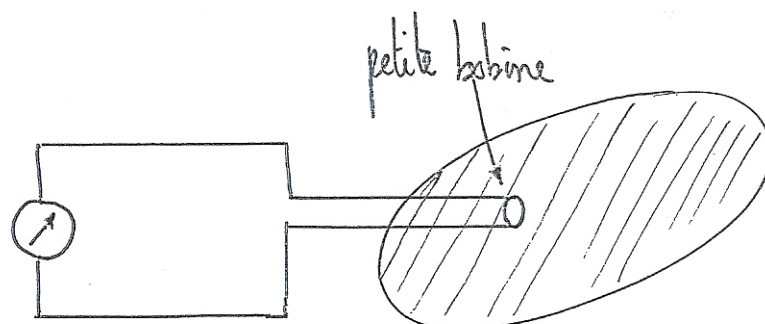
$$e = -\frac{d\phi}{dt} = BS\omega \sin(\omega t + \phi)$$

Pour faire tourner ce circuit, il faut évidemment fournir de l'énergie mécanique l'appareil transforme donc de l'énergie mécanique en énergie électrique.



7.2 Mesures d'induction magnétiques.

Pour mesurer l'induction magnétique dans une certaine région, on utilise une petite spire insérée dans un circuit comportant un intégrateur de charge.



Pour faire la mesure, on déplace la bobine de la région où règne le champ à mesurer à la région où le champ est nul.

A chaque instant, durant ce déplacement qui concerne à l'instant t_0 et s'achève à l'instant t_1 , la force électromagnétique induite est :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

L'intensité dans le circuit incluant la bobine est :

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{e}{R}$$

La charge totale, mesurée à l'aide d'un intégrateur de charge est :

$$\begin{aligned} q &= \int_{t_0}^{t_1} i dt = \frac{1}{R} \int_{t_0}^{t_1} e dt = -\frac{1}{R} \int_{\phi_0}^{\phi_1} d\phi \\ &= -\frac{1}{R}(\phi_1 - \phi_0) = \frac{1}{R}(\phi_0 - \phi_1) \end{aligned}$$

Le flux à l'instant t_1 est nul ($B = 0$ donc $\phi_1 = 0$).

A l'instant initial, on peut orienter par tâtonnements la bobine pour que le flux soit maximum, alors :

$$\phi_0 = NSB$$

avec N le nombre de spires de la bobine, S la surface d'une spire et B la norme du champ magnétique.

$$B = \frac{R}{NS}\phi$$

Cinquième partie

Les lois fondamentales de l'électromagnétisme en régime statique ou quasi statique

1 Introduction - But du chapitre

Ce chapitre est destiné à rappeler les propriétés fondamentales des champs électriques et magnétiques en régime statique ou quasi statique.

L'interaction électromagnétique est une des quatre interactions fondamentales (gravitation, électromagnétiques, interactions nucléaires, fortes et faibles) qui entrent en jeu dans la nature.

Les forces électromagnétiques s'exercent essentiellement entre particules chargées, elles sont responsables de la cohésion des atomes, des molécules et des phases condensées (liquide, cristaux...) de la matière et sont à la base de l'ensemble des phénomènes chimiques et biologique.

La description des interactions électromagnétiques entre particules de matière met en oeuvre deux champs vectoriels, le champ électrique et le champ magnétique suivant le schéma suivant :

Pour déterminer la force exercée par l'ensemble des charges Σ , on calcule d'abord les champs électriques et magnétique que cet ensemble produit dans l'espace; l'action des champs \vec{E} et \vec{B} , créés par Σ sur la particule ponctuelle de charge q , située en M à l'instant t , de vecteur position $O\vec{M} = \vec{r}$ et de vecteur vitesse \vec{v} à cet instant est donnée par la formule de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E}(M, t) + \vec{v} \wedge \vec{B}(M, t))$$

Il est à noter que cette formule est la formule de définition des champs \vec{E} et \vec{B} . La formule de Lorentz est valable en toute généralité et en toute rigueur, même en régime variable.

Le schéma précédent parait faire jouer aux champs électrique et magnétique le rôle de simples intermédiaires de calcul. Le développement de la théorie de l'électromagnétisme montre qu'ils sont en fait autant de "réalité physique" que les particules "matérielles" (électron, proton,...), on est en effet conduit à leur conférer

- une énergie, distribuée dans l'espace
- une quantité de mouvement et un moment cinétique

et finalement la théorie leur associe des particules, les photons.

L'étude de l'électromagnétisme est donc dans une large mesure celle des propriétés des champs électrique et magnétique et des relations qui existent entre ces champs et les particules qui les créent (appelées source des champs).

L'ensemble de ces propriétés est exprimé par 4 lois fondamentales qu'on va passer en revue, du moins sous la forme particulière en régime statique ou lentement variable.

On va regarder les 3 aspects que chacune de ces relation peut prendre : la formulation intégrale, locale et les relations de passage. l'étude de l'électromagnétisme est donc dans une large mesure celle des propriétés des champs électriques et magnétiques et des relations qui existent entre ces champs et les particules que les créent

(appelées source des champs).

L'ensemble de ces propriétés est exprimé par 4 lois fondamentales qu'on va passer en revue, du moins sous la forme particulière en régime statique ou lentement variable.

On va regarder les 3 aspects que chacune de ces relations peut prendre : la formulation intégral, la formulation locale et les relations de passage.

2 Circulation du champ électrique

2.1 Formulation intégrale

En statique, le champ \vec{E} est à circulation conservative :

— la circulation de \vec{E} le long d'une courbe fermée quelconque est nulle

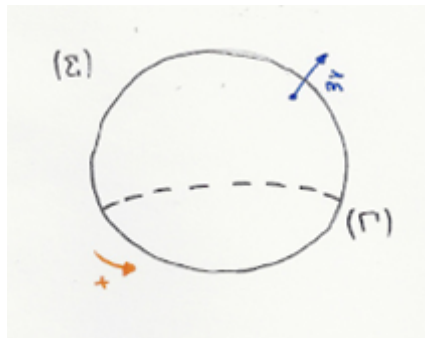
$$\oint_{\Gamma^+} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

— La circulation de \vec{E} d'un point A à un point B de l'espace ne dépend pas du chemin suivi entre A et B .

Les phénomènes d'induction conduisent à une modification de cette loi. Rappelons en effet que si un circuit électrique fermé, constitué de fil conducteur très fin, immobile est placé dans un champ électromagnétique variable dans le temps, il est le siège d'une force électromotrice d'induction.

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{Faraday})$$

où $\phi = \int_{\Sigma} (\vec{B} \cdot \vec{n}) dS$ désigne le flux magnétique à travers le circuit.



Le circuit étant immobile, c'est le champ électrique qui joue le rôle de champ électromoteur, et par définition du champ électromoteur on a :

$$e = \oint_{\Gamma^+} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

En régime quasi-stationnaire, on a donc :

$$\oint_{\Gamma^+} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left(\int_{\Sigma} (\vec{B} \cdot \vec{n}) dS \right)$$

ce qui peut s'exprimer de la manière suivante :

La circulation du champ électrique le long d'un contour fermé Γ est égale à l'opposé de la dérivée temporelle du flux magnétique à travers une surface Σ limité par Γ .

Le caractère algébrique de cette loi repose sur la conservation qui lie l'orientation de la normale \vec{n} à Σ au sens de parcours choisi sur Γ : règle du tir-bouchon.

La surface Σ peut être choisie arbitrairement (elle est seulement astreinte à admettre Γ pour frontière) cette possibilité de choix Σ résulte du fait que le champ magnétique est à flux conservatif.

2.2 Formulation locale

Le flux magnétique à travers Σ a pour dérivée :

$$\frac{d\phi}{dt} = \int \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} \cdot dS$$

La loi de l'induction établit donc l'égalité :

$$\oint_{\Gamma^+} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} \cdot dS$$

En transformant l'intégrale de circulation en intégrale de flux par la relation de Stokes

$$\oint_{\Gamma^+} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot \vec{n} \cdot dS$$

On aboutit à l'égalité de deux intégrales de flux

$$\int \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot \vec{n} \cdot dS = \int \int_{\Sigma} - \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} \cdot dS$$

La surface Σ étant quelconque, l'égalité des deux intégrales ne peut être réalisée que si les deux fonctions vectorielles sont égales en tout point (et à tout instant) on a finalement :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Maxwell - Faraday})$$

Cette équation a été introduite dans le contexte des régimes lentement variable, mais elle est en fait toujours valable.

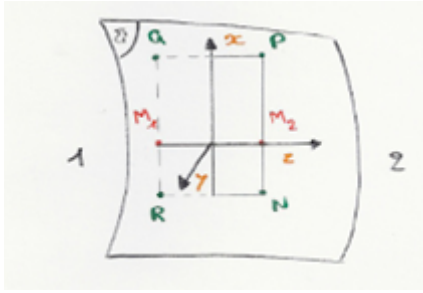
2.3 Relation de passage pour la composante tangentielle \vec{E}

On considère une surface Σ qui porte une charge et/ou un courant superficiel, il s'agit en général d'une surface séparant deux milieux matériels différents (un métal et un isolant ou deux isolants différents par exemple).

Il peut arriver que certaines composantes des champs \vec{E} et \vec{B} soient discontinues et que leurs dérivées spatiales ne soient pas définies de sorte que les équations locales sont inapplicables sur cette surface.

Il faut donc établir des formules qui fournissent la variation des champs à la traversée d'une telle surface : ces formules sont établies à partir des équations intégrales.

Considérons une surface Σ et désignons par 1 et 2 respectivement les régions de l'espace situées de part et d'autre de Σ



Soit M un point de la surface Mz de l'axe normal à Σ en M orienté dans le sens allant de 1 vers 2, Mx et My deux axes tangents en M à Σ et formant avec Mz un trièdre direct.

Étant donné deux points M_1 et M_2 situés sur Mz de part et d'autre de M (M_1 dans la région 1 et M_2 dans la région 2).

Trouver la relation de passage pour \vec{E} consiste à déterminer la quantité

$$\lim_{M_1 \rightarrow M, M_2 \rightarrow M} (\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1))$$

Dans cette expression vectorielle, on est amené à traiter séparément les composantes tangentielle (orthogonale à Mz) et normale (parallèle à Mz) du champ.

Le comportement de la composante tangentielle est lié à la loi sur la circulation, celui de la composante normale à la loi sur le flux.

Pour déterminer la quantité : $\lim_{M_1 \rightarrow M, M_2 \rightarrow M} (\vec{E}_{//}(M_2) - \vec{E}_{//}(M_1))$ on considère un contour rectangulaire $NPQR$ tracé dans le plan Mxy , le côté NP passe par M_2 , le côté QR par M_1 . Les côtés du rectangle sont très petits de sorte que le champ \vec{E} reste pratiquement constant et égal à $\vec{E}(M_1)$ le long de QR et à $\vec{E}(M_2)$ le long de NP .

On a donc $\lim_{M_1 \rightarrow M, M_2 \rightarrow M} \oint_{NPQRN} \vec{E} \cdot d\vec{l} = [E_x(M_2) - E_x(M_1)]\Delta x + \Delta x \epsilon(\Delta x)$ On pose $\Delta x = \overline{NP} = \overline{RQ}$.

Le flux magnétique à travers la surface $MNPQ$ tend vers 0 lorsque M_1 et M_2 tendent vers M puisque l'aire du rectangle devient alors nulle.

On a donc, à la limite où $M_1 \rightarrow M$ et $M_2 \rightarrow M$ et divisant par Δx , $[E_x(M_2) - E_x(M_1)] + \epsilon(\Delta x) = 0$.

En faisant tendre Δx vers 0, on obtient

$$E_x(M_2) - E_x(M_1) = 0$$

On démontre de même que

$$E_y(M_2) - E_y(M_1) = 0$$

En conclusion la composante tangentielle du champ électrique est continue.

Cette relation de passage, de même que l'équation locale (équation de Maxwell - Faraday) et l'équation intégrale correspondante relative à la circulation du champ électrique est valide en toute généralité c'est à dire en régime variable.

3 Flux du champ électrique

3.1 Formulation intégrale (théorème de Gauss)

Le flux du champ électrique sortant d'une surface fermée Σ est égal à la somme algébrique des charges électriques situées dans la région intérieure à cette surface, divisée par ϵ_0

$$\phi_e = \oint \oint_{\Sigma} (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

3.2 Formulation locale

Elle résulte immédiatement :

— de la définition de la charge volumique (au point M de l'espace) :

$$\rho(M) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta\tau} \right)$$

où ΔQ représente la charge contenue dans le domaine de l'espace de volume $\Delta\tau$, contenant le point M .

— de la définition de la divergence :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(M) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \left(\frac{\phi}{\Delta\tau} \right)$$

où ϕ désigne le flux électrique sortant de la surface Σ limitant le domaine de l'espace déjà envisagé ci-dessus.

— du théorème de Gauss appliqué à la surface Σ précédente

$$\Phi = \frac{\Delta Q}{\epsilon_0}$$

On obtient ainsi

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Maxwell - Gauss})$$

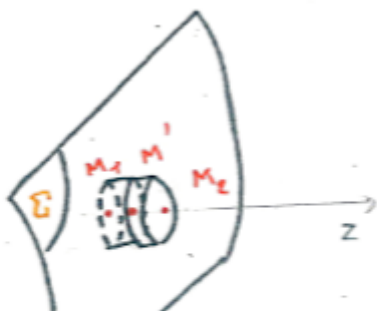
3.3 Relation de passage pour la composante du champ électrique

On revient au problème exposé au paragraphe 2.3.

Le comportement de la composante normale de \vec{E} est lié à la loi sur le flux. Pour déterminer la composante :

$$\lim_{M_1 \rightarrow M, M_2 \rightarrow M} (E_{\perp}(M_2) - E_{\perp}(M_1))$$

on considère une boîte cylindrique, d'axe Mz limitée par deux disques situés de part et d'autre de la surface Σ , normaux à l'axe Mz et contenant respectivement le point M_1 et le point M_2 . La boîte découpe sur la surface Σ un disque d'aire ΔS .



La surface est chargée avec la densité surfacique σ , qui peut varier d'un point à l'autre. Les dimensions de la boîte sont très petites, on peut donc considérer :

- que le champ électrique est pratiquement constant et égal à $\vec{E}(M)$ sur le disque 1, constant et égal à $\vec{E}(M_2)$ sur le disque 2.
- que la charge surfacique est pratiquement constante et égale à $\sigma(M)$ sur la surface d'aire $\Delta(S)$ découpée par la boîte cylindrique sur Σ .
- que les disques et la surface précédente ont la même aire ΔS .

Lorsque M_1 et M_2 tendent vers M , l'aire de la surface cylindrique de la boîte tend vers 0 et la contribution de cette surface au flux sortant de la boîte également.

On a donc

$$\lim_{M_1 \rightarrow M, M_2 \rightarrow M} \oint (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS = [E_z(M_2) - E_z(M_1)] \Delta S + \Delta S \epsilon(\Delta S)$$

(la somme sortante est $\vec{n} = -\vec{u}_z$ sur le disque 1, $\vec{n} = +\vec{u}_z$ sur le disque 2).

La charge contenue dans la boîte ΔQ est la somme de la charge distribuée dans son volume ΔQ_v et de celle distribuée sur l'élément ΔS de la surface Σ .

Lorsque M_1 et M_2 tendent vers M , le volume de la boîte tend vers 0 et donc aussi la charge ΔQ_v , de sorte que :

$$\lim_{M_1 \rightarrow M, M_2 \rightarrow M} \Delta Q = \sigma(M) \Delta + \Delta \epsilon(\Delta S)$$

Le théorème de Gauss fournit l'égalité (après division par ΔS)

$$E_z(M_2) - E_z(M_1) + \epsilon(\Delta S) = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \epsilon(\Delta S)$$

En faisant tendre vers 0 les dimensions des disques qui ferment la boîte, on obtient finalement :

$$\lim_{M_1 \rightarrow M, M_2 \rightarrow M} [E_z(M_2) - E_z(M_1)] = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0}$$

Remarques.

- Les deux relations de passage, pour le champ électrique peuvent être rassemblés en une formule vectorielle unique

$$\lim_{M_1 \rightarrow M, M_2 \rightarrow M} (\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1)) = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

En désignant par \vec{M}_{12} , la normale à Σ en M orientée de 1 vers 2 et en sortant plus simplement :

$$\lim_{M_1 \rightarrow M, M_2 \rightarrow M} (\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1)) = \vec{E}_2 - \vec{E}_1$$

on obtient

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$$

- Ces lois relatives au flux du champ électrique sont en toute généralité donc en régime variable.

4 Flux du champ magnétique

4.1 Formulations intégrale

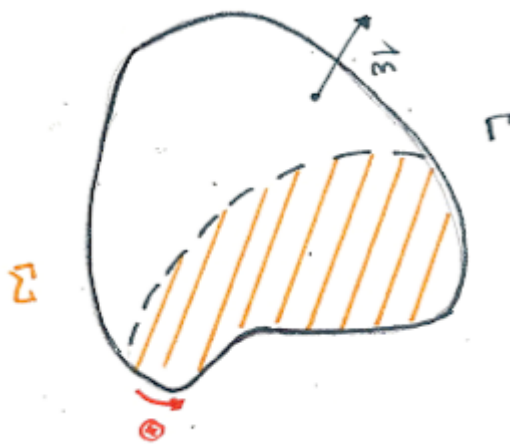
Le champ magnétique \vec{B} est à flux conservatif. Cela signifie que :

- le flux du champ \vec{B} sortant d'une surface fermée quelconque est nul :

$$\oint \oint (\vec{B} \cdot \vec{n}) dS = 0$$

- tant donné un contour fermé Γ , le flux magnétique :

$$\phi = \int \int (\vec{B} \cdot \vec{n}) dS$$



à travers une surface quelconque Σ limitée par Γ est indépendante de la surface Σ considérée, pour cette raison on parle souvent de flux à travers le contour Γ .

Pour que cet énoncé soit valide, il faut évidemment que les normales aux différentes surfaces Σ limitées par Γ soient orientées de manière cohérente : cela est réalisé en orientant toutes les normales par référence au sens de parcours positif choisi sur leur frontière commune Γ (règle du tir bouchon).

4.2 Formulation locale

Le même raisonnement qu'au 3.2 conduit à

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Flux magnétique})$$

4.3 Relation de passage

Le même raisonnement qu'au 3.3 montre que la composante normale de \vec{B} est continue.

Remarque. Ces propriétés concernant le flux du champ magnétique sont valides en toute généralité c'est à dire en régime variable.

5 Circulation du champ magnétique

5.1 Formulation intégrale - théorème d'Ampère

En magnétostatique, on a vu que la circulation du champ magnétique \vec{B} le long d'un contour fermé Γ est égale au produit par μ_0 de la somme algébrique des courants traversant une surface Σ quelconque limitée par le contour Γ :

$$\oint_{\Gamma^+} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k$$

Les signes sont déterminés de la manière suivante :

- la normale à la surface Σ est orientée par référence au sens de parcours positif choisi sur Γ
- le sens sur chacun des circuits électriques C_k qui traversent Σ est déterminé par l'orientation de la normale à Σ au point de traversée : le signe de l'intensité I_k est défini par ce sens de parcours.

La surface Σ limitée par le contour Γ peut être choisie arbitrairement. Cela résulte du fait qu'en régime stationnaire l'intensité du courant est la même en tous les points d'un circuit donné.

5.2 Formulation locale.

On considère qu'on a ici à faire à des courants distribués en volume et on désigne \vec{j} le vecteur densité de courant. L'intensité de courant étant le flux du vecteur densité de courant en volume, le théorème d'Ampère se formule :

$$\oint_{\Gamma^+} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \int_{\Sigma} (\vec{j} \cdot \vec{n}) dS$$

où Γ désigne le contour fermé et Σ la surface limitée par Γ introduit au paragraphe précédent.

On transforme l'intégrale de circulation en intégrale de flux par la formule de Stokes et on obtient :

$$\int \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{n} \cdot dS = \mu_0 \int \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} dS$$

L'égalité des deux intégrales devant être réalisée quelle que soit Σ il en résulte

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (\text{Maxwell - Ampère})$$

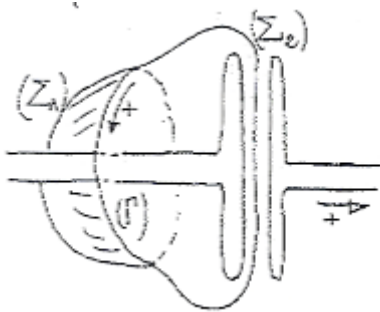
Remarque. Ces lois sont valides seulement en régime statique ou quasi stationnaire. Pour cette raison, l'étude de la relation de passage associé est reportée au chapitre suivant.

Sixième partie

Les équations de l'Électromagnétisme en régime variable

1 Introduction - But du chapitre

Considérons un circuit RLC et essayons d'appliquer le théorème d'Ampère à un contour fermé Γ proche du condensateur.



On choisit une surface Σ_1 limitée par Γ et coupant le fil de connexion reliant une électrode du condensateur du reste du circuit. Si I désigne l'intensité du courant circulant dans ce fil, le

théorème d'Ampère fournit, pour la circulation du champ magnétique le long de Γ la valeur

$$C_1 = \oint_{\Gamma^+} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Mais quand on applique le théorème d'Ampère à un contour fermé Γ , le choix de la surface Σ limitée par ce contour est en principe arbitraire. On peut également choisir, une surface Σ_2 limitée par le même contour Γ mais enveloppant l'électrode du condensateur de manière à ne pas couper le fil de connexion, aucun courant ne traverse cette surface et l'application du théorème d'Ampère donne alors :

$$C_2 = \oint_{\Gamma^+} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

On a donc $C_1 \neq C_2$, on aboutit à une contradiction.

Quand on applique le théorème d'Ampère en régime statique, la liberté de choix de la surface Σ repose sur la propriété de conservation de l'intensité du courant le long d'un conducteur (l'intensité entre la même le long du fil et le circuit est un circuit fermé).

Cette propriété n'est donc pas réalisée dans un circuit comportant un condensateur : les lignes de courant s'arrêtent sur les électrodes du condensateur.

Les difficultés mentionnées paraissent donc liées au problème de la conservation de l'électricité. Ce chapitre va donc commencer par la recherche de l'expression de la conservation de l'électricité en régime variable, c'est à dire par l'établissement de ce qu'on appelle l'équation de continuité. Ensuite, on cherche comment-il faut modifier les équations fondamentales de l'électromagnétisme pour qu'elles soient cohérentes avec l'équation de conservation de la charge électrique. Cela conduit à introduire le courant de déplacement dans l'équation de

l'expression locale du théorème d'ampère. On vérifie alors la modification apportée lève bien le problème du début. On récapitule alors l'ensemble des équations de l'électromagnétisme en examinant en détail celle qui a été modifiée, c'est à dire l'équation de Maxwell-Ampère.

2 La conservation de la charge électrique

2.1 Énoncé et signification physique

La charge électrique totale d'un système physique isolé (c'est à dire un système n'ayant aucun échange de matière avec le milieu extérieur) est une constante.

Si 2 systèmes physiques échangent entre eux de la matière mais sans qu'aucun des deux n'ait échangé de matière avec le milieu extérieur, la somme de leurs charges électriques est une constante et donc les variations ΔQ_1 et ΔQ_2 de ces charges électriques est une constante qui interviennent pendant un intervalle de temps donné sont opposées :

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = 0 \text{ d'où } \Delta Q_1 = -\Delta Q_2$$

2.2 Équation de continuité - Cas particulier

Dans un premier temps, on établit l'expression de la conservation de la charge sur un cas particulier simple en explicitant bien les détails mathématiques de la démonstration.

On considère un cylindre d'axe Ox de section droite S , contenant une charge électrique, parallèle à l'axe Ox également distribué en volume.

Les répartitions de charge et de courant ne dépendant que de l'abscisse x et du temps t : $\rho(x, t) = \vec{j} = j(x, t)\vec{u}_x$.

La charge contenue dans un tronçon du cylindre limité par les plans d'abscisses respectives x_1 et x_2 est

$$Q(t) = S \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx$$

Cette charge dépend en général du temps et entre les instants t_1 et t_2 , elle varie de :

$$\Delta Q = Q(t_2) - Q(t_1) = S \int_{x_1}^{x_2} [\rho(x, t_2) - \rho(x, t_1)] dx$$

La charge du tronçon de cylindre peut varier avec le temps parce que ce tronçon ne constitue pas un système physique isolé : il échange de la matière avec le reste du cylindre. Le courant électrique transporte des charges à travers les plans de section droite d'abscisses x_1 et x_2 .

Par définition, du vecteur densité de courant volumique, il pénètre dans le tronçon du cylindre, à travers le plan d'abscisses x_1 entre les instants t_1 et t_2 la charge :

$$\Delta Q_1 = S \int_{t_1}^{t_2} j(x_1, t) dt$$

De même, il sert à travers le plan d'abscisse x_2 la charge

$$-\Delta Q_2 = S \int_{t_1}^{t_2} j(x_2, t) dt$$

La somme des charges qui pénètrent dans le cylindre entre les instant t_1 et t_2

$$\Delta Q' = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 = S \int_{t_1}^{t_2} (j(x_1, t) - j(x_2, t)) dt$$

D'après la loi de conservation de la charge électrique, la variation de la charge du cylindre est égale à la quantité de charge qui pénètre dans le cylindre :

$$\Delta Q = \Delta Q'$$

Soit

$$S \int_{x_1}^{x_2} [\rho(x, t_2) - \rho(x, t_1)] dx = S \int_{t_1}^{t_2} (j(x_1, t) - j(x_2, t)) dt$$

En posant $x_2 = x_1 + \Delta x$ et $t_2 = t_1 + \Delta t$ et en divisant par $S \Delta x \Delta t$, on obtient :

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\rho(x, t_2) - \rho(x, t_1)}{\Delta t} dx = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \frac{j(x_1, t) - j(x_2, t)}{\Delta x} dt$$

En effectuant alors le passage à la limite quand $\Delta x \rightarrow 0$, on obtient

$$\frac{\rho(x_1, t_2) - \rho(x_1, t_1)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} -\left(\frac{\partial j(x_1, t)}{\partial x}\right) dt$$

Puis en effectuant le passage à la limite $\Delta t \rightarrow 0$, on aboutit finalement au résultat :

$$\frac{\partial \rho(x_1, t_1)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x_1, t_1)}{\partial x}$$

L'instant t_1 et l'abscisse x_1 étant bien évidemment arbitraires, on a de manière générale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial j}{\partial x}(x, t) = 0$$

2.3 Équation de continuité - Cas général

On généralise maintenant cette équation au cas où les distributions volumiques de charge et de courant sont quelconques : les fonctions ρ et \vec{j} dépendent des 3 coordonnées d'espace et du temps la direction de \vec{j} peut varier d'un point à l'autre de l'espace.

On considère dans l'espace un domaine τ limité par une surface fermée Σ . Le domaine τ contient une charge électrique Q , fonction du temps, donnée, en fonction de la charge volumique $\rho(M, t)$ par

$$Q(t) = \int \int \int_{\tau} \rho(M, t) d\tau$$

Pendant l'intervalle de temps dt cette charge varie de

$$dQ = \int \int \int_{\tau} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dt d\tau$$

La surface Σ est traversée par les lignes de courant. Si l'on introduit comme d'habitude la normale \vec{n} à la surface Σ orientée vers l'extérieur, la quantité de charge qui sort du domaine τ .

A travers la surface Σ pendant le temps dt on a

$$-dQ' = \oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} dS dt$$

La charge électrique qui pénètre dans le domaine τ est évidemment égale à $(+dQ')$ et l'on doit avoir

$$dQ = dQ'$$

Pour exprimer cette égalité, on transforme l'intégrale de flux (de \vec{j}) en une intégrale de volume (de $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$) grâce à la formule d'Ostrogradsky :

$$\oint_{\sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \int \int \int_{\tau} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) d\tau$$

Et l'égalité $dQ = dQ'$ conduit alors, après division par dt à

$$\int \int \int_{\tau} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}) d\tau = 0$$

Le domaine τ a bien entendu été choisi de manière arbitraire. Pour que l'intégrale de volume soit nulle, quel que soit le domaine τ d'intégration, il est nécessaire que la fonction à intégrer soit nulle en tout point. On a donc finalement

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(M, t) + \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} = 0$$

Cette équation qui exprime la conservation de la charge électrique est connue sous le nom d'équation de continuité.

3 L'équation de Maxwell Ampère

3.1 Courant de déplacement

En régime statique, les fonctions ρ et \vec{j} ne sont pas fonctions du temps de sorte que l'équation de continuité se réduit à

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

Cette équation est cohérente avec l'expression locale du théorème d'Ampère

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

En effet, la divergence du premier membre est nulle ($\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})$ est nulle quel que soit la fonction \vec{B}) et celle du deuxième membre en statique car

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

En régime variable, $\vec{j} \neq \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$. On peut toujours poser $\vec{T} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \mu_0 \vec{j}$ où T désigne une fonction de l'espace et du temps.

La fonction T est telle que

$$\mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \vec{\nabla} T = 0$$

soit

$$\vec{\nabla} T = \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

En admettant alors que le théorème de Gauss à la même expression locale qu'en statique c'est à dire que $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$. On aboutit à : $\vec{\nabla} T = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$.

Soit $\vec{\nabla} \left(T - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$.

Une manière très simple de rétablir la cohérence des équations consiste à poser : $\vec{T} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ c'est à dire

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

C'est l'équation de Maxwell Ampère. Remarques les 3 autres équations de Maxwell gardant en régime variable la forme qu'elles ont en régime quasi stationnaire.

3.2 Récapitulatif des équations de Maxwell

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

La théorie de l'électromagnétisme repose sur les postulats de base constitués par ces 4 équations et sur la formule de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

qui , fournit la loi de la force et définit les champs électriques et magnétique. Il faudrait ajouter la loi de conservation de la charge électrique (équation de continuité) mais celle ci peut être en quelque sorte considérée comme contenue implicitement dans les équation de Maxwell.

A chacune des équations de Maxwell est associée une relation de passage concernant : la composante normale de \vec{E} (1), la composante normale de \vec{B} (2), la composante tangentielle de \vec{E} (3) et la composante tangentielle de \vec{B} (4).

A chacune des équations de Maxwell est associé une formulation intégrale concernant : le flux de \vec{E} , le flux de \vec{B} , la circulation de \vec{E} et la circulation de \vec{B} .

Les formulations intégrales associées aux 3 premières équations ont déjà été étudiées. On va examiner en détail celle associée à l'équation de Maxwell Ampère ainsi que la relation de passage associée aux paragraphes 3.4 et 3.5.

3.3 Relations entre les champs et les sources de champs

Un problème important en M est le calcul des champs électriques et magnétiques produits par des distributions de charges et de courants données.

En régime statique (et de manière approchée en régime lentement variable) le champ électrique est calculé en fonction des distributions de charges par la loi de Coulomb, le champ \vec{B} est calculé en fonction des distributions de courant par la loi de Biot et Savart.

En régime variable, les lois de Coulomb et de Biot et Savart ne sont pas valables.

En régime variable, les lois de Coulomb et de Biot et Savart ne sont pas valables.

En régime variable ce sont les équations de Maxwell qui établissent la relation entre les champs et les distributions de charge, plus précisément la relation

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

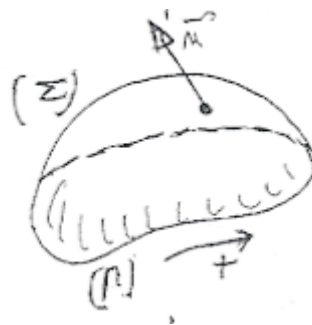
et la relation

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Le calcul dans chaque à partir de ces relations est sauf dans le cas particulier, fort compliqué. Il est simplifié par l'intermédiaire des potentiels.

3.4 Le théorème d'ampère généralisé

Ce théorème peut se déduire de l'équation de Maxwell-Ampère établie précédemment. Cependant il s'applique dans des conditions plus larges en particuliers quand les champs sont discontinus en certains points.



On considère la circulation de \vec{B} le long d'une courbe fermée Γ :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

On transforme ensuite cette intégrale en une intégrale de flux à travers une surface Σ limitée par le contour Γ .

$$\oint_{\Gamma^+} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{n} dS$$

Puis, par la relation de Maxwell-Ampère, on obtient

$$\int \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{n} dS = \int \int_{\Sigma} \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{n} dS + \int \int_{\Sigma} \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS$$

On aboutit finalement au théorème d'Ampère généralisé

$$\oint_{\Gamma^+} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \vec{Z} + \mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{d\phi_E}{dt} \right)$$

où ϕ_E est le flux de \vec{E} à travers Σ , $\phi_E = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} dS$.

3.5 La relation de passage de la composante tangentielle de \vec{B}

Considérons une surface de discontinuité Σ sur laquelle est présentée une densité surfacique de charges σ et une densité surfacique de courant \vec{j}_0 .

Par analogie avec les densité surfacique de charge et de courant liées entre elles par $\vec{j} = \rho \vec{v}$, où \vec{v} est la vitesse des charges mobiles créant le courant on définit la densité surfacique de courants par

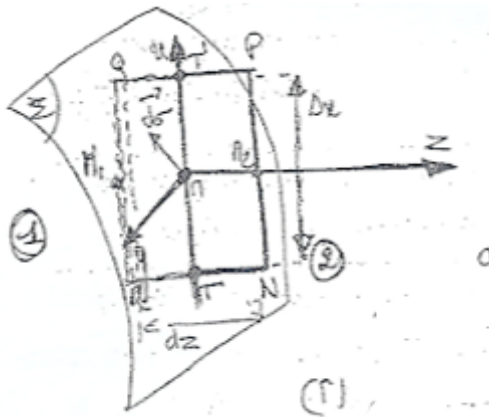
$$\vec{j}_0 = \sigma \vec{v}$$

où \vec{v} est la vitesse des charges mobiles en surface et σ leur densité surfacique.

Remarque.

- La densité \vec{j} de courant volumiques est homogène à une intensité divisé par une surface.
- La densité \vec{j}_0 de courant surfacique est homogène à une intensité divisée par une longueur. Soit $dl = AB$ un segment appartenant à Σ et \vec{u}_N de vecteur unitaire normal à AB et appartenant à Σ . Ainsi l'intensité de 2 qui traverse AB est

$$dI = (\vec{j}_0 \cdot \vec{u}_n) dl$$



Relation de passage par la composante tangentielle B_n de \vec{B} à la traversée de Σ . $M \in \Sigma$, M_z est un axe normal à Σ orienté de 1 vers 2, M_x et M_y deux axes orthogonaux dans le plan tangent à M à Σ qui forment avec M_z un repère orthogonal direct. Dans le plan Mxy , considérons le contour Γ , $PQRN$ passent par les points M_1 dans 1 et M_2 dans 2. La circulation de \vec{B} le long de ce contour est égal à

$$\oint_{NPQRN} \vec{B} \cdot d\vec{l} = [B_x(M_2) - B_x(M_1)] \Delta x + \Delta x \epsilon(\delta u)$$

D'après le théorème d'Ampère généralisé, cette quantité s'exprime en fonction du courant la surface du rectangle $NPQR$ et du flux électrique à travers cette surface.

Le courant I est le courant surfacique traversant la médiane TT' du rectangle

$$I = (\vec{j}_0 \cdot \vec{u}_H) \Delta u = j_{Oy} \Delta u$$

Le flux est rendu arbitrairement petit quand Δz tend vers 0.

Finalement, on a donc quand M_1 et M_2 tendent vers M puis Δx vers 0.

$$B_{x_2} - B_{x_1} = \mu_0 j_{Oy}$$

En choisissant un contour rectangulaire dans le plan Myz on peut montrer que

$$B_{y_2} - B_{y_1} = -\mu_0 j_{Ox}$$

On peut rassembler ces 2 formules en une seule relative à la composante tangentielle \vec{B}_t du champ magnétique en s'affranchissant des axes M_x et M_y

$$\vec{B}_{t_2} - \vec{B}_{t_1} = \mu(\vec{j}_0 \wedge \vec{n}_{12})$$

où \vec{n}_{12} représente la normale unitaire à Σ en M orienté de 1 vers 2.

De plus comme la composante normale de \vec{B} est continue, on peut écrire

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_0 \wedge \vec{n}_{12}$$

Septième partie

Ondes électromagnétiques dans le vide

1 Introduction - but du chapitre

En 1873 J.C Maxwell publie le célèbre ensemble d'équations qui forme les bases de l'électromagnétisme. Une solution très facile à déduire de ces équations dans la propagation d'un champ électrique et d'un champ magnétique (liés l'un à l'autre) : la vitesse de propagation de cette "onde électromagnétique" peut être calculée à partir des valeurs numériques des constantes, connues, qui figurent dans les lois de Coulomb ϵ_0 et de Biot et Savart μ_0 . On constate alors que la vitesse ainsi calculée coïncide avec la valeur de la vitesse de la lumière connue avec précision à cette époque à la suite des mesures de Fizeau et de Foucault et on en infère que la lumière est une onde électromagnétique. Il s'agissait là bien sur d'une découverte de première grandeur. Cependant la production d'une onde électromagnétique par un dispositif électrique (macroscopique) n'allait être réussie que quinze ans plus tard en 1888, par Heinrich Hertz montre que les ondes "Hertziennes" ainsi produites ont des propriétés analogues à la lumière en ce qui concerne par exemple la réflexion, la polarisation etc... et que ces propriétés découlent des équations de Maxwell.

But de ce chapitre.

- Établir l'équation de propagation des champs E et B à partir des équation de Maxwell et de calculer la célérité.
- Décrire la structure d'une onde électromagnétique plane (disposition de E et de B par rapport à la direction de propagation et de l'un par rapport à l'autre).
- Étudier plus en détail les ondes sinusoïdales et les problèmes de polarisation.
- Examiner les problèmes énergétiques : énergie distribuée dans l'espace et flux d'énergie, décrit par le vecteur de Poynting, définition d'une onde électromagnétique.

2 Équation de propagation, célérité

2.1 Équation de propagation de E

On se place dans un domaine de l'espace vide c'est à dire qui ne contient aucune charge ni aucun courant. Les densités de charge volumique ρ et de courant volumique j sont nulles en tous les points de ce domaine. Dans ces conditions les équations de Maxwell on une forme particulière :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On cherche à éliminer B entre deux équations en rotationnel pour obtenir une équation relative à E seul.

Pour cela on prend le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Puis on introduit le Laplacien vectoriel et on tient compte de l'équation $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$.

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

et finalement $\Delta \vec{E} (\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}) = 0$.

Cette équation est l'équation de d'Alembert pour une onde vectorielle décrite par le champ E . En coordonnées cartésiennes les composantes de $\Delta \vec{E}$ sont :

$$\Delta \vec{E} = \begin{cases} u_x = \partial^2 E_x / \partial x^2 + \partial^2 E_x / \partial y^2 + \partial^2 E_x / \partial z^2 = \Delta E_x \\ u_y = \partial^2 E_y / \partial x^2 + \partial^2 E_y / \partial y^2 + \partial^2 E_y / \partial z^2 = \Delta E_y \\ u_z = \partial^2 E_z / \partial x^2 + \partial^2 E_z / \partial y^2 + \partial^2 E_z / \partial z^2 = \Delta E_z \end{cases}$$

2.2 Onde plane homogène, solution de l'équation de propagation

On cherche comme solution de l'équation de propagation établie au paragraphe précédent une fonction de la forme

$$E(x, y, z, t) = E(0, 0, 0, t - (\alpha x + \beta y + \gamma z)/c)$$

Une telle fonction qui ne dépend que de la variable

$$u = t - ((\alpha x + \beta y + \gamma z)/c)$$

représente une onde plane homogène se propageant parallèlement à la direction du vecteur unitaire u de composante α, β et γ .

Pour vérifier que cette fonction \vec{E} satisfait bien à l'équation de propagation, on calcule les dérivées :

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{dE_x}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dE_x}{du}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \left(\frac{dE_x}{du} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\alpha}{c} \frac{dE_x}{du} = -\frac{\alpha}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

En dérivant une deuxième fois par rapport à t d'une part et à x d'autre part, on aboutit à

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \frac{\alpha^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

Et on obtient de même :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \frac{\beta^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{\gamma^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

Ainsi

$$\Delta E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

2.3 Célérité

La célérité de l'onde plane introduite au paragraphe précédent est

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

A l'époque de Maxwell, on calculait c à partir des valeurs numériques des constantes ϵ_0 et μ_0 déduites de l'étude des phénomènes statiques. Actuellement (depuis la mise en vigueur de la nouvelle définition du mètre en 1983) la constante c est égale, exactement, à

$$c = 299792458 \text{ m.s}^{-1}$$

La valeur de la constante μ_0 résulte de la définition de l'ampère : on a exactement :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$$

La valeur de la constante ϵ_0 dérive de ces deux valeurs suivant la formule :

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0} c^2 = 8,854187817 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$$

Remarque. On a établi l'équation de propagation relative à E . En éliminant E entre les 2 équations en rotationnel on obtient pour B une équation de propagation identique.

$$\Delta B - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0$$

3 Structure de l'onde plane homogène

3.1 Transversalité du champ électrique

On dit qu'une onde vectorielle est transversale, lorsque le vecteur représentant la grandeur physique qui se propage est orthogonal à la direction de propagation en tout point et à tout instant.

Pour les ondes électromagnétiques, comme on va le constater dans ce qui suit, la transversalité des champs, pour une onde plane homogène est liée au fait que les divergences sont nulles.

Reprenons l'expression du champ électrique représentant une onde plane homogène se propageant parallèlement à la direction $u(\alpha, \beta, \gamma)$.

$$E(x, y, z, t) = E(0, 0, 0, t - (\alpha x + \beta y + \gamma z)/c)$$

Calculons

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

En utilisant les expressions des dérivées établies en 2.3 on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\alpha}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\beta}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{\gamma}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

Soit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{u}{c} \frac{\partial E}{\partial t}$$

La propriété

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

entraîne donc pour l'onde plane homogène considérée

$$u \cdot \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

Si le champ E est alors décomposé en une composante transversale E_{\perp} et une composante longitudinale $E_{//}$ on a

$$u \cdot E_{\perp} = 0 \text{ donc } u \cdot \frac{\partial E_{\perp}}{\partial t} = 0$$

La nullité de la divergence entraîne alors, en posant $E_{//} = E_{//} \cdot u$:

$$u \cdot \frac{\partial E_{//}}{\partial t} = u \cdot \frac{\partial u E_{//}}{\partial t} = \frac{\partial E_h}{\partial t} = 0$$

Cela signifie que la composante longitudinale de E est statique.

Un champ statique uniforme est évidemment de la forme donnée au paragraphe 2.2 pour l'onde plane homogène mais il ne correspond pas à l'idée physique d'une onde qui est associée à un phénomène physique variable dans le temps et l'espace.

Nous considérons donc que la composante longitudinale statique ne fait pas réellement partie de l'onde électromagnétique considérée (il est toujours possible de faire passer une onde lumineuse entre les plaques d'un condensateur plan chargé mais on ne considère pas pour autant que le champ créé par le condensateur fait partie du champ de l'onde lumineuse) et que la composante longitudinale du champ de l'onde électromagnétique plane homogène est nulle. Autrement dit :

La champ électrique d'une onde électromagnétique plane homogène se propageant dans le vide est transversal.

3.2 Détermination du champ magnétique

Dans ce paragraphe, on va montrer que le champ électrique de l'onde électromagnétique ne peut exister seul et qu'il est nécessairement associé à un champ magnétique qu'on va exprimer en fonction du champ électrique donné.

Pour déterminer le champ magnétique associé au champ électrique, on part de l'équation de Maxwell- Faraday

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Les projections sur les axes cartésiens de cette équation vectorielle s'écrivent :

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} (\beta \frac{\partial E_z}{\partial t} - \gamma \frac{\partial E_y}{\partial t})$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{1}{c} (\gamma \frac{\partial E_x}{\partial t} - \alpha \frac{\partial E_z}{\partial t})$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{1}{c}(\alpha \frac{\partial E_y}{\partial t} - \beta \frac{\partial E_x}{\partial u})$$

Soit

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\vec{u}}{c} \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Par intégration par rapport au temps, on obtient

$$\vec{B} = \frac{u}{c} \wedge \vec{E} + \vec{B}_s$$

La constante d'intégration B_s est indépendante du temps : elle représente un champ statique qui n'est pas considéré comme faisant partie du champ de l'onde électromagnétique (on peut faire passer une onde électromagnétique à l'intérieur d'un solénoïde, parcouru par un courant continu mais le champ statique de ce solénoïde n'est pas considéré comme faisant partie de l'onde électromagnétique). On retiendra donc la relation

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E}$$

qui relie en tout point et à tout instant le champ magnétique et le champ électrique de l'onde électromagnétique plane homogène se propageant dans le vide.

3.3 Structure de l'onde

De la relation précédente, il résulte immédiatement que le champ magnétique B est orthogonal à u donc transversal

Le champ magnétique d'une onde électromagnétique plane homogène se propageant dans le vide est transversal.

Cette propriété aurait pu être déduite, comme pour le champ électrique du fait que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

La relation

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E}$$

montre également que les champs E et B sont orthogonaux en tout point et à tout instant.

Plus précisément les trois vecteurs \vec{E} , \vec{B} , \vec{u} , forment en tout point et à tout instant un trièdre trirectangle direct. Enfin, il résulte de cette relation et de l'orthogonalité de u et de E que les modules des champs sont dans le rapport

$$\frac{\|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} = \frac{1}{c}$$

Dans tout ce qui précède, on ne suppose pas que la direction de \vec{E} ni celle de \vec{B} sont invariables dans le temps et dans l'espace.

La direction de \vec{u} est bien sûr fixe puisqu'il s'agit d'une propagation par ondes planes, les directions de \vec{E} et \vec{B} peuvent varier mais ces champs restent partout et à tout instant entre eux et à la direction de propagation \vec{u} .

En résumé, une onde électromagnétique plane, homogène, progressive, se propageant dans le vide est constituée

d'un champ électrique et d'un champ magnétique, tous les deux transversaux, mutuellement orthogonaux et tels que le rapport des modules du champ magnétique et du champ électrique soit égal à $\frac{1}{c}$.

4 Ondes sinusoïdales - polarisation

4.1 Importance des ondes sinusoïdales

Du point de vue expérimental, il existe de nombreux types d'ondes électromagnétiques qui se distinguent radicalement les unes des autres par la nature des dispositifs qui les produisent et les détectent et par leurs interactions avec la matière. On distingue ainsi les ondes hertziennes (radiodiffusion, télévision...), les micro-ondes, la lumière infrarouge, la lumière visible, la lumière ultraviolette, les rayons X et les rayons γ .

Le paramètre physique à la base de ce classement est la fréquence : cela signifie qu'on se réfère (implicitement) au caractère sinusoïdal de la variation temporelle des champs. Les fonctions sinusoïdales jouent donc un rôle privilégié lorsqu'on étudie les radiations électromagnétiques : cela tient en particulier à leur mode d'émission comme les deux exemples suivants permettent de le comprendre.

Considérons d'abord un émetteur de radiodiffusion. Cet émetteur émet une onde sinusoïdale appelée porteuse : pour diffuser le signal (son), on module, par exemple en amplitude, l'onde porteuse ; cela signifie qu'on fait varier l'amplitude de manière qu'elle reproduise la fonction qui représente le signal. L'onde diffusée n'est plus alors rigoureusement sinusoïdale mais elle reste presque sinusoïdale parce que les variations de l'amplitude sont lentes à l'échelle de la période de la porteuse (la fréquence de la porteuse est par exemple de l'ordre de $1MHz$ alors que la fréquence des sons à diffuser est au plus de $10kHz$).

Le deuxième exemple concerne l'émission de lumière par les atomes et les molécules : cette émission est associée à la transition de l'atome ou de la molécule d'un niveau d'énergie donné E_1 à un niveau d'énergie plus basse E_0 . La fréquence de l'onde émise est déterminée par la différence d'énergie entre les niveaux suivant la formule

$$v = \frac{E_1 - E_0}{h}$$

L'onde émise est donc sinusoïdale (en fait, elle n'est qu'approximativement sinusoïdale, pour des raisons qui ne peuvent être données ici).

Pour ce qui concerne la lumière visible, la fréquence correspond à la couleur. La lumière blanche, émise par exemple par le soleil ou les lampes à incandescence, est une superposition de toutes les couleurs. Il est possible de séparer les composantes de couleurs c'est à dire de fréquences différentes contenues dans une lumière complexe à l'aide d'un appareil appelé spectroscope. Cet appareil contient un élément dispersif (prisme ou réseau) qui dévie les ondes électromagnétiques de manière différente suivant leur fréquence ; on verra plus tard que l'indice de réfraction d'un milieu diélectrique tel que le verre dépend de la fréquence de la radiation qui le traverse : l'angle de déviation par un prisme est donc fonction de la fréquence.

La lumière blanche fournit ainsi un "spectre" coloré, rouge à un bord (basses fréquences), violet à l'autre (hautes fréquences).

4.2 Composantes cartésiennes des champs

On considère une onde plane progressive se propageant parallèlement à Oz dans le sens z croissant. La variation des champs étant sinusoïdale leur composantes ont la forme suivante

$$\vec{E}(M, t) \begin{cases} E_{O_x} \cos(\omega t - kz + \phi) \\ E_{O_y} \cos(\omega t - kz + \psi) \\ 0 \end{cases} \quad \vec{B}(M, t) \begin{cases} -(E_{O_y} k) \cos(\omega t - kz + \psi) \\ (E_{O_x} k) \cos(\omega t - kz + \phi) \\ 0 \end{cases}$$

Dans ces expressions, on a introduit le module du vecteur d'onde $k = \omega/c$.

Les quantités $E_{O_x} = E_{O_y}$ sont des constantes qui rendent compte des amplitudes des composantes des champs, les quantités ϕ et ψ décrivent les phases de ces composantes.

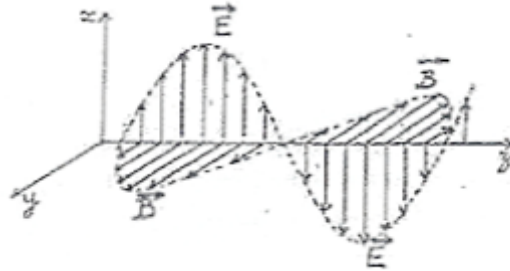
En représentation complexe, les composantes des champs sont

$$\vec{E}(M, t) \begin{cases} E_{O_x} e^{i\phi} e^{i(\omega t - kx)} \\ E_{O_y} e^{i\psi} e^{i(\omega t - kx)} \\ 0 \end{cases} \quad \vec{B}(M, t) \begin{cases} -\frac{E_{O_y}}{c} e^{i\psi} e^{i(\omega t - kx)} \\ \frac{E_{O_x}}{c} e^{i\phi} e^{i(\omega t - kx)} \\ 0 \end{cases}$$

4.3 Polarisation rectiligne

La direction du champ électrique reste donc invariable dans le temps et dans l'espace : on a affaire à une onde polarisée rectilignement.

Bien entendu le champ magnétique, qui est orthogonal à E , garde aussi une direction constante.



Remarque. La caractéristique d'une onde polarisée rectilignement est le fait que le champ électrique garde une direction constante : une onde polarisée rectilignement n'est donc pas nécessairement sinusoïdale.

4.4 Polarisation circulaire et elliptique

Si $\psi = \phi + \frac{\pi}{2}(2\pi)$, les expressions de E deviennent

$$\begin{cases} E_x = E_{O_x} \cos(\omega t - kz + \phi) \\ E_y = -E_{O_y} \sin(\omega t - kz + \phi) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

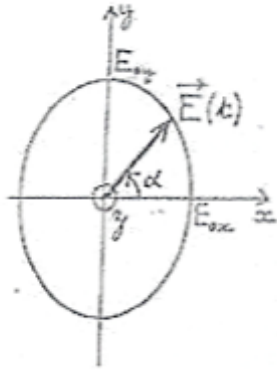
En un point donné de l'espace (x fixé), l'extrémité du vecteur représentant le champ électrique c'est à dire le point de coordonnées

$$X = E_{Ox} \cos(\omega t - kz + \phi) \quad Y = -E_{Oy} \sin(\omega t - kz + \phi) \quad Z = z$$

décrit une ellipse au cours du temps.

On a en effet

$$\frac{X^2}{E_{Ox}^2} + \frac{Y^2}{E_{Oy}^2} = 1$$



La pulsation ω étant toujours choisie positive, si les constantes E_{Ox} et E_{Oy} sont de même signe (elles sont en principe positive toutes les deux : amplitudes réelles de vibrations sinusoïdales), le point (X, Y) décrit l'ellipse dans le sens rétrograde. En effet l'angle

$$\alpha = (Ox, E)$$

est une fonction décroissante du temps puisque

$$\tan(\alpha) = \frac{Y}{X} = -\frac{E_{Oy}}{E_{Ox}} \tan(\omega t - kz + \phi)$$

et

$$(1 + \tan^2(\alpha)) \dot{\alpha} = -\omega \frac{E_{Oy}}{E_{Ox}} = -\omega \frac{E_{Oy}}{E_{Ox}} [1 + \tan^2(\omega t - kz + \phi)]$$

On dit que l'onde a une polarisation elliptique droite. Dans le cas particulier ou de plus $E_{Ox} = E_{Oy}$ l'ellipse est un cercle. On dit que l'onde a une polarisation circulaire droite. On montre de la même façon que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \psi = \phi - \frac{\pi}{2} (2\pi) \text{ on a affaire à une corde de polarisation elliptique gauche.} \\ \text{si } \psi = \phi - \frac{\pi}{2} (2\pi) \text{ et si de plus } E_{Ox} = E_{Oy} . \text{ On a affaire à une onde de polarisation circulaire gauche} \end{array} \right.$$

De manière plus générale, si $\psi - \phi \neq \frac{\pi}{2} (\frac{\pi}{2})$, on montre que l'onde à une polarisation elliptique mais les axes de l'ellipse décrite par le vecteur E ne sont pas parallèles aux axes de coordonnées Ox et Oy .

Dans ce qui précède, on a défini la caractéristique, droite ou gauche d'une onde polarisée elliptiquement par référence au sens de rotation du vecteur champ électrique dans le plan xOy , c'est à dire autour de l'axe Oz . Mais il faut pouvoir définir l'état de polarisation pour une onde ne se propageant pas suivant Oz : la direction de référence physique est évidemment la direction de propagation définie par le vecteur unitaire u .

On dit qu'une onde, polarisé circulairement ou elliptiquement, est droite (respectivement gauche) si son champ électrique, en un point donné, tourne, autour d'un vecteur direction de propagation u , dans le sens rétrograde (respectivement direct). La "règle du tire bouchon" permet de trouver le sens direct de rotation autour de l'axe u .

On vérifie aisément qu'il est nécessaire que $\psi = \phi(\pi)$ pour que l'onde soit polarisée rectilignement.

De même, il est nécessaire que $\psi = \phi + \frac{\pi}{2}(\pi)$ et que $|E_{Ox}| = |E_{Oy}|$ pour que l'onde soit polarisée circulairement. Enfin, puisque le champ magnétique forme avec E un angle de $+\pi/2$ et puisque le rapport

$$\frac{\|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} = \frac{1}{c}$$

l'état de polarisation du champ magnétique est le même que celui du champ électrique :

- Si la polarisation de E est rectiligne, celle de B l'est aussi mais la direction de polarisation de B est orthogonale à celle de E .
- Si la polarisation de E est elliptique droite (respectivement gauche) celle de B est droite (respectivement gauche) mais la direction du grand axe de l'ellipse de B est orthogonale à celle du grand axe de l'ellipse de E .

4.5 Onde de direction de propagation quelconque et représentation complexe

Les composantes du champ électrique d'une onde de direction de propagation quelconque sont données par les expressions

$$\begin{cases} E_x = E_{Ox} \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \phi) \\ E_y = E_{Oy} \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \psi) \\ E_z = E_{Oz} \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \eta) \end{cases} \quad \text{avec } \vec{k}\cdot\vec{r} = k_x \vec{x} + k_y \vec{y} + k_z \vec{z}$$

En général, les trois composantes de E sont différentes de zéro. La transversalité de E exige que

$$\vec{k}\cdot\vec{E} = k_x \vec{E}_x + k_y \vec{E}_y + k_z \vec{E}_z = 0 \text{ quels que soient } t \text{ et } x, y, z$$

La représentation complexe permet de retrouver rapidement et d'exprimer simplement la structure de l'onde électromagnétique (sinusoïdale), parce que les expressions de divergence et rotationnel sont très simples.

La représentation complexe des composantes de E est

$$\begin{cases} \vec{E}_x = E_{Ox} e^{i\phi} e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} = \vec{E}_{Ox} e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \\ \vec{E}_y = E_{Oy} e^{i\psi} e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} = \vec{E}_{Oy} e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \\ \vec{E}_z = E_{Oz} e^{i\eta} e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \end{cases}$$

On peut donc mettre \vec{E} sous la forme $\vec{E} = \vec{E}_O e^{i\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}}$.

Bien noter qu'une factorisation de l'expression réelle du champ E , en un vecteur constant par un scalaire n'est en général pas possible.

La dérivée, par rapport à une coordonnée quelconque, d'une composante quelconque de E ou B , par exemple $\frac{\partial \vec{E}_x}{\partial y}$ est donnée par

$$\frac{\partial \vec{E}_x}{\partial y} = -ik_y \vec{E}_{Ox} e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

On en déduit

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -i\vec{k}\cdot\vec{E} \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -i\vec{k}\wedge\vec{E} \end{cases}$$

Du fait que le vecteur \vec{k} est réel, on a évidemment $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \text{Re}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) : \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \text{Re}(\vec{\nabla} \wedge \vec{E})$

L'équation $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, conduit donc à $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$

L'équation $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ se traduit par

$$-i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B} \text{ soit } \omega \vec{B} = \vec{k} \wedge \vec{E}$$

(On suppose que \vec{B} est une onde plane sinusoïdale de pulsation ω et de vecteur d'onde \vec{k} , on rappelle que la dérivation par rapport à t se traduit par la multiplication du facteur $i\omega$). On a donc $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$ et par conséquent, en prenant les parties réelles

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$$

Cette relation est identique à celle du paragraphe 3.2 puisque $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}$ ou \vec{u} désigne le vecteur unitaire de la direction de propagation.

5 Énergie électromagnétique : densité volumique et flux

En électrostatique, on a introduit une énergie associée au champ et distribuée dans l'espace avec la densité volumique

$$u_E = \epsilon_0 \frac{E^2}{2}$$

De même en magnétostatique, on a introduit la densité volumique d'énergie magnétique

$$u_M = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

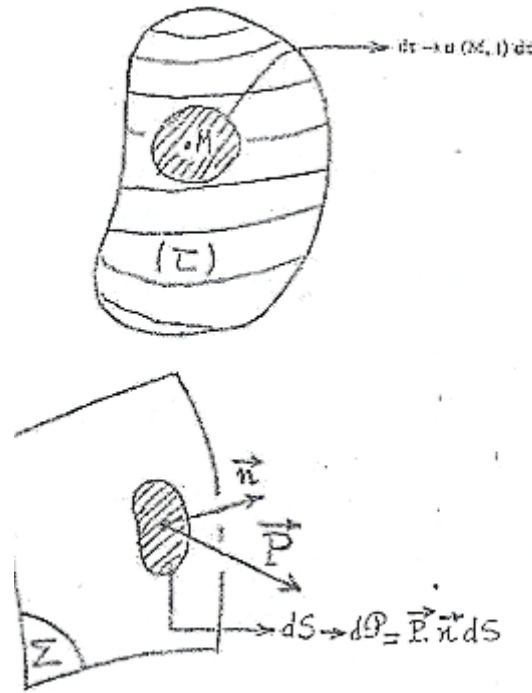
Il n'est pas a priori évident qu'en régime variable la densité d'énergie électromagnétique soit simplement la somme de ces deux quantités.

De plus, un autre problème se pose : du fait que les champs varient avec le temps il faut s'attendre à ce que l'énergie électromagnétique se déplace.

Il faut donc trouver l'expression de la densité d'énergie électromagnétique permettant de calculer l'énergie stockée dans un volume donné de l'espace et introduire une nouvelle grandeur physique permettant de décrire le transport de l'énergie c'est à dire de calculer le flux de puissance à travers une surface donnée.

La première quantité est un scalaire dont l'intégrale de volume étendue à un domaine τ de l'espace est égal à l'énergie électromagnétique contenue dans ce domaine

$$W = \int \int \int_{\tau} u d\tau$$

**Définition de u .**

Chaque élément de volume $d\tau$ de l'espace contient l'énergie électromagnétique

$$dW = u(M, t)d\tau$$

L'énergie contenue dans un domaine (τ) est donnée par l'intégrale

$$W = \int \int \int_{\tau} u d\tau$$

La densité volumique d'énergie électromagnétique est fonction de la position du point dans l'espace et du temps.

Définition de \vec{P} .

La puissance électromagnétique qui traverse une surface (Σ) est égale au flux du vecteur \vec{P} à travers la surface (définition de \vec{P})

$$\mathcal{P} = \int \int_{\Sigma} \vec{P} \cdot \vec{n} dS$$

Le vecteur \vec{P} est fonction de la position du point dans l'espace et du temps.

La seconde quantité est un vecteur dont le flux à travers une surface Σ est égal à la puissance électromagnétique traversant cette surface.

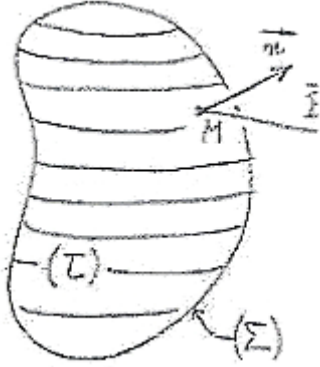
$$\mathcal{P} = \int \int_{\Sigma} \vec{P} \cdot \vec{n} dS$$

5.1 Expression de la conservation de l'énergie

Pour trouver les expressions des quantités u et \vec{P} définies ci-dessus, on cherche la condition que ces quantités doivent vérifier pour que la conservation de l'énergie soit assurée. Le raisonnement qu'on va faire n'est pas restreint à l'onde électromagnétique dans le vide mais est relatif au cas général où des charges et des courants

sont distribués dans le domaine de l'espace considéré. Considérons donc un domaine de l'espace τ limité par une surface Σ dont la normale unitaire orientée vers l'extérieur est désigné par n . La quantité d'énergie dans le domaine τ à l'instant t est

$$W(t) = \int \int \int u(M, t) d\tau$$



Sa variation différentielle pendant l'intervalle de temps dt est

$$dW = \int \int \int_{\tau} \frac{\partial u}{\partial t} d\tau dt$$

La puissance électromagnétique pénétrant dans le domaine τ à travers la surface Σ est

$$\mathcal{P} = - \oint \oint \vec{P} \cdot \vec{n} dS$$

L'énergie élémentaire pénétrant dans le domaine τ pendant dt est

$$dW' = \mathcal{P} dt = - \oint \oint_{\Sigma} \vec{P} \cdot \vec{n} dS dt$$

Pour assurer la conservation de l'énergie, on pourrait être tenté d'exprimer que l'énergie pénétrant dans le domaine τ est égale à l'accroissement du stock d'énergie dans ce domaine. Mais les quantités u et \vec{P} ne concernent que l'énergie électromagnétique. Il faut tenir compte d'une possible conversion d'énergie électromagnétique en une autre forme d'énergie (ou du processus inverse) à l'intérieur du volume τ . Ces conversions sont dues au mécanisme suivant : des charges électriques sont présentes dans le domaine τ , certaines sont susceptibles de se mouvoir et donc de recevoir du travail fourni par les champs \vec{E} et \vec{B} par le jeu de la force de Lorentz. Soit en effet une particule ponctuelle de charge q , de vitesse \vec{v} . Elle est soumise à la force

$$F = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

et reçoit la puissance

$$\mathcal{P} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

Soit $\rho^{(m)}$ la charge volumique mobile, la puissance $d\mathcal{P}$ reçue, sous forme d'énergie mécanique par l'élément $d\tau$ du domaine considéré est

$$d\mathcal{P} = (\rho^{(m)} d\tau) \vec{E} \cdot \vec{v}$$

Par définition du vecteur densité de courant volumique $\vec{j} = \rho^{(m)} \cdot \vec{v}$ on obtient

$$d\mathcal{P} = (\vec{j} \cdot \vec{E}) d\tau$$

L'énergie dW'' fournie aux particules chargées du volume τ par le champ électromagnétique est donc pendant le temps dt

$$dW'' = \int \int \int_{\tau} (\vec{j} \cdot \vec{E}) d\tau dt$$

La conservation de l'énergie est assurée si l'on exprime que la quantité d'énergie pénétrant dans le domaine τ est égale à la somme de l'augmentation du stock d'énergie du domaine τ et de l'énergie électromagnétique convertie

$$dW' = dW + dW''$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{P} \cdot \vec{n} dS + \int \int \int_{\tau} \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial u}{\partial t} d\tau = 0$$

Et en transformant l'intégrale de flux en intégrale de volume

$$\int \int \int_{\tau} (\vec{\nabla} \cdot \vec{P} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial u}{\partial t}) d\tau = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

5.2 Expression de u et de P

Pour trouver les expressions de u et de P , on transforme la relation précédente de conservation de l'énergie en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

qui permet d'exprimer \vec{j} en fonction de \vec{B} et \vec{E} : $\vec{j} = \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{B}}{\mu_0} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

En reportant dans l'équation du paragraphe 5.1

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} + \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \cdot \vec{E} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

On remarque que $\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t}$.

De plus, l'identité suivante

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{E} = (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot \vec{B} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{B})$$

permet de transformer l'équation en

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} + \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot \vec{B} - \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère : $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, on obtient finalement

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{P} - \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}) + \frac{\partial}{\partial t} (u - \frac{\epsilon_0 E^2}{2} - \frac{B^2}{2\mu_0}) = 0$$

Une manière très simple de satisfaire cette relation est de poser

$$\boxed{\vec{P} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

Ce sont ces expressions que l'on adopte en théorie de l'électromagnétisme pour décrire le flux de puissance électromagnétique (vecteur \vec{P}) et la répartition dans l'espace de l'énergie électromagnétique (densité volumique u). Le raisonnement qui précède ne prouve nullement que ces expressions sont les seules qui soient cohérentes à la fois avec les équations de Maxwell et le principe de conservation de l'énergie. Aussi bien, le choix de ces quantités doit être considéré comme un postulat supplémentaire de la théorie électromagnétique.

Le vecteur $\vec{P} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ s'appelle le vecteur de Poynting.

5.3 Intensité d'une onde électromagnétique

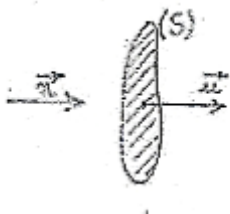
Les détecteurs d'ondes hertziennes (récepteurs de radio ou de télévision...) sont capables d'enregistrer les valeurs instantanées des champs de l'onde.

En revanche, les variations temporelles des champs constituant la lumière sont extrêmement rapides et ne peuvent pas être enregistrées par les détecteurs (œil, plaque ou film photographique, récepteurs photoélectriques) qui sont seulement capables, en général, de mesurer la puissance moyenne qu'ils reçoivent. Pour cette raison, on introduit la notion d'intensité

L'intensité d'une onde électromagnétique est égale à la puissance moyenne qui traverse un élément de surface d'onde d'aire unité.

Cette définition paraît supposer que l'onde est homogène. S'il n'en est pas ainsi, on considère sur la surface d'onde un élément d'aire dS . Désignant $d\mathcal{P}$ la puissance instantanée traversant cet élément, on a par définition de l'intensité

$$I = \frac{\langle d\mathcal{P} \rangle}{dS}$$



Considérons une onde électromagnétique plane homogène dont la direction de propagation est définie par le vecteur unitaire \vec{u} et soit (S) une surface plane disposée normalement à \vec{u} . D'après la définition du vecteur de Poynting, la puissance qui traverse la surface (S) est

$$\mathcal{P} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \cdot \vec{n} = \frac{E^2 \vec{u} S}{\mu_0 c} \cdot \vec{n} \text{ puisque } \vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$$

\vec{n} désigne le vecteur unitaire normal à la surface et S l'aire de cette surface. On a, par hypothèse $n = u$ d'où $\mathcal{P} = \frac{E^2}{\mu_0 c}$.

Par définition de l'intensité, on a donc, pour une onde plane homogène.

$$I = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{S} = \frac{\langle E^2 \rangle}{\mu_0 c} = \frac{c}{\mu_0} \langle B^2 \rangle$$

Pour une onde plane homogène sinusoïdale, les composantes de \vec{E} sont des fonctions sinusoïdales de pulsation ω du temps. En choisissant l'axe des z parallèle à \vec{u} et de même sens, on obtient

$$E^2 = E_{Ox}^2 \cos^2(\omega t - kz + \phi) + E_{Oy}^2 \cos^2(\omega t - kz + \psi)$$

et

$$\langle E^2 \rangle = \frac{E_{Ox}^2 + E_{Oy}^2}{2}$$

D'où

$$I = \frac{E_{Ox}^2 + E_{Oy}^2}{2\mu_0\epsilon_0}$$

Cette expression est valable quel que soit l'état de polarisation de l'onde, puis-qu'aucune hypothèse n'a été faite sur la différence $\psi - \phi$.

6 Aspects expérimentaux de la polarisation de la lumière

6.1 Sources de rayonnement électromagnétique polarisé

Les antennes des émetteurs de radiodiffusion et de télévision comportent des barreaux métalliques : le champ électrique de l'onde émise a une direction bien définie en relation avec la direction de ces barreaux, l'onde reçue directement (sans réflexion sur des obstacles) est donc polarisée rectilignement.

Le "rayonnement synchrotron" est émis par des électrons de très grande énergie, de vitesse pratiquement égale à celle de la lumière. Ces électrons sont maintenus en mouvement sur des orbites fermées, à l'intérieur d'une chambre à vide, par des champs magnétiques appropriés. Leur mouvement est fortement accéléré (du fait de la courbure de la trajectoire) et c'est pour cela qu'ils émettent du rayonnement électromagnétique, dans le domaine de la lumière ultraviolette et des rayons X ; la direction du champ électrique de ce rayonnement est parallèle au plan de la trajectoire, le rayonnement synchrotron est polarisé rectilignement.

Certains lasers émettent un rayonnement polarisé rectilignement. Cela provient du fait que des éléments optiques (fenêtres à incidence brewstérienne par exemple) disposés à l'intérieur de la cavité transmettent mieux la lumière ayant une certaine polarisation que la polarisation orthogonale.

La lumière diffusée par les atomes et les molécules est également, dans certaines conditions, polarisée rectilignement.

Mais les sources de lumière classiques (tubes à décharge, lampes à incandescence,...) émettent un rayonnement non polarisé. On va examiner ce point au paragraphe suivant.

6.2 Lumière quasi monochromatique

Il résulte des paragraphes 4.2 et 4.3, qu'une onde sinusoïdale (s'il s'agit de lumière, on parle d'une onde monochromatique) a nécessairement un état de polarisation bien défini, rectiligne, circulaire, elliptique.

On dit pourtant que la lumière émise par les sources "classiques" (lampes à incandescence, lampes à décharge,...) n'est pas polarisée même lorsqu'elle est "monochromatique" ou rendue telle par filtrage (exemple : radiation verte du mercure). Il semble qu'il y ait là un paradoxe mais ce n'est qu'une apparence : en fait, aucune source lumineuse n'est capable d'émettre une lumière rigoureusement monochromatique. Les sources lumineuses classiques sont constituées d'un nombre énorme d'émetteurs élémentaires (pour un tube à décharge se sont les atomes ou molécules contenues dans quelques millilitres de gaz sous faible pression) indépendants les uns des autres. Le rayonnement de chacun de ces émetteurs correspond à la transition entre deux niveaux d'énergie différentes (voir paragraphe 4.1). Ce rayonnement est éphémère puisque la quantité d'énergie qui est rayonnée

lors d'une telle transition est finie, de plus, l'émission d'un élément donné est perturbée par les collisions qu'il effectue avec les autres atomes ou molécules du milieu constituant la source. Le rayonnement de la source macroscopique est la superposition des rayonnements de ces émetteurs élémentaires : il n'est donc pas à priori sinusoïdal.

Pour une transition entre deux niveaux d'énergie E_2 et E_1 des atomes ou molécules d'un gaz, le rayonnement est toutefois quasi-sinusoïdal (ou quasi monochromatique) et peut être représenté par le modèle décrit ci-dessous. A grande distance de la source, l'onde peut être assimilée à une onde plane homogène. Dans un système de coordonnées cartésiennes dont l'axe Oz est perpendiculaire à la surface d'onde, les deux composantes E_x et E_y du champ électrique sont des fonctions sinusoïdales de pulsation $\omega = 2\pi \frac{(E_2 - E_1)}{h}$. Elles sont données par les formules du paragraphe 4.2 mais les phases additives ψ et ϕ et les amplitudes E_{Ox} et E_{Oy} , au lieu d'être constantes sont des fonctions lentement variables du temps

$$E_x = E_{Ox}(t)\cos(\omega t - kz + \phi(t))$$

$$E_y = E_{Oy}(t)\cos(\omega t - kz + \psi(t))$$

Les fonctions E_{Ox} , E_{Oy} , ϕ et ψ ont les propriétés suivantes

1. Elles sont lentement variables. Cela signifie qu'elles restent pratiquement constantes durant un intervalle de temps Δt de l'ordre de grandeur de la "période lumineuse" $\frac{2\pi}{\omega}$
2. Elles varient de manière aléatoire avec un temps caractéristique τ . Pendant un intervalle de temps $\Delta t \ll \tau$ la variation des fonctions est pratiquement négligeable. Mais, pour un intervalle de temps $\Delta t \geq \tau$, la variation est, en général, importante.

Le temps caractéristique τ est énorme par rapport à la période $\frac{2\pi}{\omega}$. Sur un intervalle de temps Δt tel que

$$\frac{2\pi}{\omega} \ll \Delta t \ll \tau$$

les quantités E_{Ox} , E_{Oy} , ϕ et ψ sont pratiquement constantes et les fonctions E_x et E_y apparaissent comme des fonctions sinusoïdales de pulsation ω du temps. C'est la raison pour laquelle le rayonnement ainsi décrit est dit quasi-sinusoïdale.

3. Enfin, le temps caractéristique τ est très inférieur au temps de réponse T des détecteurs usuels. Les ordres de grandeur des trois durées qui ont été introduites dans ce qui précède sont les suivants (pour de la lumière visible)

$$\frac{2\pi}{\omega} \sim 10^{-14} \quad \tau \sim 10^{-8} \quad T \sim 1s$$

6.3 Lumière non polarisée. Lumière naturelle. Lumière partiellement polarisée

Si on considère le champ électrique de l'onde précédente pendant un temps Δt tel que

$$\frac{2\pi}{\omega} \ll \Delta t \ll \tau$$

l'onde peut être assimilée à une onde sinusoïdale et son état de polarisation est bien défini ($\frac{E_{Ox}}{E_{Oy}}$ et $\psi - \phi$ sont pratiquement constants).

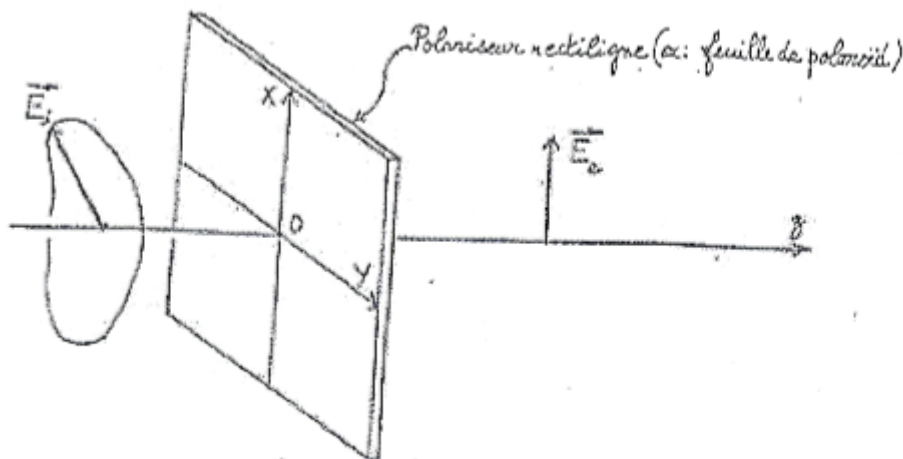
Mais, au cours du temps, cet état de polarisation évolue progressivement et, pendant le temps de réponse T du détecteur, tous les états de polarisation possibles apparaissent.

De ce fait, la lumière enregistrée par le détecteur n'a pas d'état de polarisation défini : lumière non polarisée. Les intensités lumineuses moyennes relatives aux deux composantes orthogonales du champ électrique (E_x et E_y) sont de plus égales entre elles dans le cas d'une source lumineuse classique : on dit qu'on a affaire à de la lumière naturelle ou de la lumière polarisée.

Il peut arriver que les intensités des deux composantes orthogonales d'une lumière naturelle soit affectées différemment par les réflexions et transmissions éventuellement subies au cours de la propagation : les intensités de ces deux composantes dans la lumière partiellement polarisée. La notion de la polarisation qui intervient ici est différente sous certains aspects de celle introduite au paragraphe 4.

6.4 Polarisation de la lumière

La lumière émise par les sources n'étant, en général, pas polarisée, il est nécessaire de lui faire subir un traitement si on a besoin de lumière polarisée. Plusieurs phénomènes physiques peuvent être utilisés dans ce but : réflexion ou transmission à travers une surface séparant deux diélectriques (dioptré air-verre par exemple), biréfringence de certains matériaux. En travaux pratiques, on utilise une grille pour polariser les ondes hertziennes. Le principe de fonctionnement de ces dispositifs ne peut être étudié dans ce chapitre, il sera détaillé ultérieurement. Notons simplement que le polariseur le plus simple à utiliser dans le domaine de la lumière visible est une transposition de la grille pour les ondes hertziennes : les barreaux macroscopiques de la grille sont remplacés par de longues molécules linéaires. Ce dispositif s'appelle polaroïde et se présente sous la forme de feuille de matière plastique. Un polarisateur est un dispositif qui ne transmet que la "composante" de la lumière polarisée suivant une direction donnée. Plus précisément, pour déterminer l'effet du polariseur, on projette le champ électrique de la lumière incidente sur la direction privilégiée Ox du polariseur et sur la direction perpendiculaire.



Le polariseur est représenté comme une lame à faces parallèles, de faible épaisseur, parallèle au plan Oxy . Sa direction de transmission est Ox .

L'onde incidente est une onde se propageant parallèlement à Oz . Elle arrive en incidence normale sur le polari-

seur. Son champ électrique est donné par

$$\vec{E}_i = E_{Ox} \cos(\omega t - kz + \phi) \vec{u}_z + E_{Oy} \cos(\omega t - kz + \psi) \vec{u}_y$$

La direction de E_i est quelconque (dans le plan Oxy), elle est éventuellement variable au cours du temps.

L'onde émergente est une onde plane se propageant parallèlement à Oz . Son champ électrique a une direction fixe parallèle à la direction de transmission du polariseur (Ox), il est donné par

$$\vec{E}_e = E_{Ox} \cos(\omega t' - kz + \phi) \vec{u}_x$$

Le changement d'origine des temps $t \rightarrow t'$ permet de tenir compte du retard dû à la traversée du polariseur dont l'indice est en général différent de celui du milieu extérieur.

L'amplitude du champ émergent E_{Ox} est égale à l'amplitude de la composante x du champ incident : le polariseur est supposé idéal, il tranmet parfaitement la composante de l'onde parallèle à Ox . Dans la pratique, il y a toujours une certaine atténuation de l'onde transmise de par exemple à la réflexion sur les faces d'entrée et de sortie du polariseur.

Si on envoie de la lumière naturelle sur le polariseur, il en sort de la lumière polarisée rectilignement suivant la direction Ox et l'intensité de l'onde émergente est donc égale à la moitié de l'intensité incidente puisque

$$I_x = I_y = \frac{I_x + I_y}{2} = 1/2$$

6.5 Loi de Malus

Supposons maintenant qu'on éclaire le polariseur avec une onde déjà polarisée rectilignement (par un autre polariseur par exemple) et cherchons à exprimer l'intensité émergente en fonction de l'angle α que fait la direction du champ électrique avec la direction privilégiée du polariseur.

Soit $\vec{E}_i = E_{Ox} \cos(\omega t) \vec{u}_x$ le champ électrique de l'onde incidente. Le champ électrique émergent du polariseur est

$$\vec{E}_e = E_{Ox} \cos(\alpha) \cos(\omega t) \vec{u}_x$$

L'intensité de cette onde est

$$I_e = \frac{E_{Ox}^2 \cos^2(\alpha)}{2\mu_0 c} = I_i \cos^2(\alpha)$$

Donc l'intensité émergente varie comme le carré du cosinus de l'angle entre la direction du champ incident et la direction du polariseur. Cette propriété constitue la loi de Malus.

7 Vue d'ensemble des radiations électromagnétiques, émetteurs, récepteurs.

Dans ce paragraphe, on passe en revue l'ensemble des rayonnements constituant les ondes électromagnétiques, le paramètre variable qui les différencie étant la fréquence (ou la longueur d'onde dans le vide). D'un point de vue fondamental, tous ces rayonnements sont identiques et constitués par la propagation d'un champ électrique

et d'un champ magnétique, mais ils sont émis et détectés par des dispositifs différents et leurs effets sur la matière ainsi que l'usage qu'on peut en faire sont différents.

7.1 Les ondes de radio/fréquence

Leur fréquence varie de quelques Hz à $1000MHz$ environ, leur longueur d'onde de quels milliers de kilomètres à $0.3m$. C'est dans ce domaine que se situent les ondes de la radiodiffusion et de la télévision : elles sont émises et détectées par des dispositifs électroniques macroscopiques munis d'antennes.

Il n'y a pas de limite inférieure à la fréquence des ondes électromagnétiques. Les réseaux de distribution d'électricité émettent ainsi les ondes de fréquences $50Hz$, mais on peut imaginer des émetteurs de fréquences encore plus basse.

7.2 Les microondes

Leur fréquence varie de $1GHz$ à $300GHz$, leur longueur d'onde de $30cm$ à $1mm$. Elles peuvent être émises et absorbées par des dispositifs électroniques macroscopiques et transportées par des guides d'onde. Mais elles correspondent aussi aux transitions entre niveaux de rotation des molécules. De ce fait, elles peuvent être absorbées de manière très efficace par les molécules : ainsi, la molécule d'eau absorbe très fortement à la fréquence $\nu = 2.45GHz$ (four à microonde). Les microondes ont une multitude d'applications pratiques (radars, téléphone...)

7.3 L'infrarouge

Les radiations infrarouges ont des fréquences situées entre $3 \times 10^{11}Hz$ et $4 \times 10^{14}Hz$, les longueurs d'onde correspondantes varient de $1mm$ à $0.75\mu m$. Elles sont émises par les objets chauds (mais la température ordinaire suffit) et leurs fréquences sont dans le domaine des transitions entre les niveaux de vibration des molécules. Elles peuvent être produites de manière plus spécifique par des lampes et détectées par des bolomètres et des thermopiles, dispositifs qui mesurent en fait l'énergie convertie en chaleur, transportées par ces ondes. Il existe des films photographiques et des photomultiplicateurs sensibles au proche infrarouge.

7.4 La lumière visible

Ce domaine du rayonnement électromagnétique est défini par les limites en fréquence de la sensibilité de l'oeil : les fréquences sont comprises entre 4×10^{14} et 7.7×10^{14} , les longueurs d'onde entre 750 et $400 nm$. La lumière visible est émise par les objets très chauds : lampes à incandescence, soleil. Les fréquences correspondantes aux transitions entre niveaux des atomes.

On rappelle ici (mais ces aussi valable pour les transitions entre niveaux de rotation ou de vibration des molécules) que lorsqu'un atome effectue une transition entre un niveau d'énergie E_2 et un niveau d'énergie E_1 plus faible, il émet un photon de fréquence $\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}$.

La fréquence ν est en fait la fréquence de l'onde électromagnétique associée à ce photon.

Les lampes spectrales émettent ainsi des ondes de fréquences bien définies (il peut y avoir beaucoup de telles fréquences parce que les atomes possèdent plus de deux niveaux d'énergie) : on dit qu'elles fournissent un spectre

de raies (exemple : raies jaunes du sodium, raie verte du mercure...)

La lumière visible peut être détectée par l'oeil mais aussi par des plaques et films photographiques, par des dispositifs photoélectriques (cellule, photomultiplicateurs).

7.5 L'ultraviolet

Les rayonnements ultraviolets ont des fréquences comprises entre $8 \times 10^{14}Hz$ et $3.4 \times 10^{16}Hz$ environ, des longueurs d'onde comprises entre $400nm$ et $10nm$.

Les objets portés à très haute température émettent de la lumière ultraviolette, ainsi que le soleil (la lumière UV émise par le soleil n'arrive que très affaiblie jusqu'à la terre parce qu'elle est absorbée par l'ozone, O_3 , contenu dans l haute atmosphère).

Mis à part l'oeil dans différent milieux (surtout le cristallin) absorbent l'ultraviolet, les détecteurs d'UV sont du même type que ceux de la lumière visible.

Les radiations UV correspondent aux transitions des atomes ionisés, voir fortement ionisés pour l'ultraviolet lointain. Les transitions "électroniques" des molécules sont situées dans l'UV, de sorte que la plupart des matériaux sont opaques à ces rayonnements (verre en dessous de $350nm$, quartz en dessous de $300nm$, air en dessous de $200nm$).

7.6 Rayon X

Les fréquences des rayons X s'étendent en gros de $2.4 \times 10^{16}Hz$ à $5 \times 10^{19}Hz$, leurs longueurs d'onde de $15nm$ à $0.05nm$.

Ils sont émis lors de transition mettant en jeu les couches internes des atomes, ils peuvent être détectés par des films photographiques spéciaux (cliché X médicaux) et par des chambres à ionisation.

7.7 Rayon γ

Les rayons γ sont émis, par définition, lors de transitions effectuées par les noyaux radioactifs. Dans la matière normale, les noyaux sont dans leur état fondamental (état de plus basse énergie) et ne peuvent émettre e rayonnement par passage à un état d'énergie inférieure mais il existe des noyaux instables ou produit dans des niveaux excités qui sont susceptibles de se désintégrer ou de se désexciter en émettant du rayonnement électromagnétique : les photons associés à ce rayonnement s'appellent les photons γ .

Les rayons γ ne sont donc pas définis par un domaine de fréquence mais par un mode d'émission. Leur fréquence est en général située entre 10^{19} et $10^{22}Hz$.

Ils peuvent être détectés par des émulsions photographiques, par des compteurs à scintillation, par des compteurs Geiger...

7.8 Quelques exemples intéressants

Le générateur utilisé par H.Hertz consistait essentiellement en un circuit résonnant LC de fréquence $\nu = 55MHz$, donc située dans le domaine des radiofréquences, le détecteur était une boucle présentant une petite coupure et se comportant comme un circuit LC de même fréquence.

Le rayonnement synchrotron est émis par les électrons en mouvement dans un accélérateur ou un anneau de collision. Ce rayonnement comporte un spectre continu de fréquences dans un domaine qu'on peut faire varier en agissant sur l'énergie des électrons. On obtient ainsi des impulsions très brèves (les électrons sont groupés en paquets qui tournent dans le tube à vide de l'appareil : on obtient ainsi une impulsion à chaque passage du paquet) et très intenses de rayonnement à des fréquences qui peuvent varier de celles des rayons X à l'infrarouge. A Orsay il existe un important laboratoire appelé LURE où sont menées des expériences de biologie, de physique, de chimie mettant en oeuvre le rayonnement synchrotron émis dans des anneaux de stockage d'électrons (ACO puis SUPERACO).

Les laboratoires d'astrophysiques détectent des rayonnements électromagnétiques de toute sorte émis par les objets célestes (planètes, étoiles, galaxies,...). Ce sont les émissions de lumière visible qui sont en sûr étudiées mais tous les types de rayonnement électromagnétique sont maintenant utilisés. Il existe en particulier une très importante émission de l'atome d'hydrogène dans le domaine des microondes, la raie à $\lambda = 21cm$, de fréquence $\nu = 1420MHz$. Beaucoup de ces rayonnements, intéressants pour l'astrophysique, sont absorbés par l'atmosphère mais on peut les recevoir dans des télescopes embarqués dans des satellites.

8 Ondes planes monochromatiques - vitesse de phase

Une solution particulière de l'équation de propagation est l'onde plane dépendant sinusoidalement du temps. Considérons une onde plane monochromatique se propageant dans la direction Ou , dans le sens des u croissants, les champs \vec{E} et \vec{B} sont transverses une composante quelconque de ces champs a pour expression

$$\Psi = \Psi_m \left[\omega \left(t - \frac{u}{c} \right) - \phi \right] = \Psi_m \cos(\omega t - ku - \phi)$$

où Ψ_m est l'amplitude, ω la pulsation, $k_0 = \frac{\omega}{c}$ le nombre d'onde et ϕ la phase à l'origine des temps et de l'espace. La quantité $\Phi = ku - \omega t + \phi$ est sa phase alors que $\phi = k_0 u$ est la phase à l'origine des temps.

Comme l'abscisse u s'écrit aussi $u = \vec{e}_u \cdot \vec{r}$, on définit le vecteur d'onde de norme k_0 et dirigé suivant sa direction de propagation : $\vec{k}_0 = k_0 \vec{e}_u$, alors

$$\Psi = \Psi_m \cos(\omega t - \vec{k}_0 \vec{r} - \phi) = \Psi_m \cos(\omega t - \Phi) \text{ avec } \Phi = \vec{k}_0 \vec{r} + \phi$$

8.1 Vitesse de phase

A un instant déterminé, la phase $\varphi = \vec{k}_0 \vec{r} - \omega t + \phi$ est sa phase alors que $\Phi = \vec{k}_0 \vec{r} + \phi$ est elle même uniforme. Comme ϕ a une valeur déterminée, Φ a même valeur en tout point du plan d'équation

$$\vec{k}_0 \vec{r} = \frac{\omega}{c} u = cte$$

La phase φ a la même valeur en des lieux et a des instants différents tels que

$$d\varphi = \vec{k}_0 d\vec{r} - \omega dt = k_0 du - \omega dt = 0$$

Ainsi les plans équiphases se déplacent à la vitesse v_ϕ , appelée vitesse de phase, définie par

$$v_\phi = \frac{du}{dt} = \frac{\omega}{k_0}$$

Comme $\omega = ck_0$ dans le vide, la vitesse de phase est indépendante de la fréquence de l'onde et égale à la vitesse de la lumière

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_0} = c$$

Dans le vide, la relation entre la pulsation temporelle ω et la pulsation spatiale k est linéaire, on dit que le vide est non dispersif. En revanche, dans un milieu quelconque, la relation $\omega = \omega(k)$ n'est pas linéaire : le milieu est dispersif.

9 Superposition d'ondes

L'équation d'onde étant linéaire, toute combinaison linéaire de solutions de cette équation est aussi une solution. Le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) résultant de la superposition des 2 champs (\vec{E}_1, \vec{B}_1) et (\vec{E}_2, \vec{B}_2) s'écrit donc

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \text{ et } \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

En revanche, le vecteur de Poyting et la densité d'énergie électromagnétique associés à l'onde résultante diffèrent en général des sommes des quantités correspondantes pour les deux ondes

$$u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\epsilon_0 (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2}{2} + \frac{(\vec{B}_1 + \vec{B}_2)^2}{2\mu_0} \neq u_1 + u_2$$

$$\vec{P} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \wedge (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)}{\mu_0} \neq \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$

Dans le cas simple de la superposition des 2 ondes planes, monochromatique de même polarisation rectiligne \vec{e}_x et de même amplitude E_m , qui se propagent dans la même direction Oz , on a :

$$\vec{E}_1 = E_m \cos(\omega_1 t - k_{1,z} z - \phi_1) \vec{e}_x \text{ et } \vec{E}_2 = E_m \cos(\omega_2 t - k_{2,z} z - \phi_2)$$

9.1 Superposition de 2 ondes de même pulsation : interférences

Lorsque les pulsations ω_1 et ω_2 des deux ondes sont égales, les phénomènes qui se produisent sont répertoriés sous le nom d'interférence.

Ici on se contentera d'examiner uniquement le cas particulier où les 2 ondes, de même pulsation, se propagent en sens inverse, c'est à dire ($k_{1,z} = -k_{2,z} = k$). En complexe, le champ résultant s'écrit

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_m e^{i\omega t} (e^{ikz} + e^{-ikz}) \vec{e}_x = 2E_m \cos(kz) e^{i\omega t} \vec{e}_x$$

Soit en notation réelle

$$\vec{E} = 2E_m \cos(kz) \cos(\omega t) \vec{e}_x$$

Ainsi le champ résultant \vec{E} est polarisé rectilignement suivant Ox , mais il ne représente pas une onde progressive. Ce champ, caractérisé par des dépendances spatiales et temporelles séparées, est dite stationnaire. son amplitude $2E_m \cos(kZ)$ dépend de la position

1. les points ou le champ est constamment nul, définis par $\cos(kz) = 0$, sont appelés le noeuds de vibration. Ils appartiennent à des plans fixes, d'équation

$$kz = (2m + 1) \frac{\pi}{2}$$

les noeuds sont distants de $d = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$

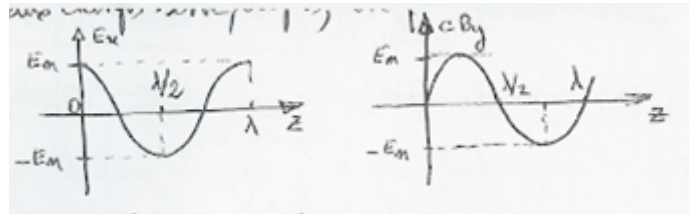
2. les points pour lesquels l'amplitude est maximale sont appelés les ventres de vibration. Ils appartiennent aux plans définis par

$$kz = m\pi$$

Quand au champ magnétique résultant, il s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}_1}{c} - \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}_2}{c} \\ &= \left(\frac{E_m}{c} e^{i\omega t} e^{-ikz} - \frac{E_m}{c} e^{i\omega t} e^{+ikz} \right) \vec{e}_y \\ &= -\frac{2E_m}{c} i \sin(kz) e^{i\omega t} \vec{e}_y \\ \vec{B} &= \frac{2E_m}{c} \sin(kz) \sin(\omega t) \vec{e}_y \end{aligned}$$

Ainsi les noeuds du champ magnétique coïncident avec les ventres champ électrique et vice-versa.



Déterminons le vecteur de Poyting :

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = 4c\epsilon_0 E_m^2 \vec{e}_z \cos(kz) \sin(kz) \cos(\omega t) \sin(\omega t) \\ &= c\epsilon_0 E_m^2 \vec{e}_z \sin(2kz) \sin(2\omega t) \end{aligned}$$

d'où $\langle \vec{P} \rangle = c\epsilon_0 E_m^2 \vec{e}_z \sin(2kz) \langle \sin(2\omega t) \rangle = 0$.

LA puissance rayonnée moyenne à travers toute surface par l'onde stationnaire est donc nulle. Calculons l'énergie électromagnétique volumique : $u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$

$$u = 2\epsilon_0 E_m^2 \cos^2(kz) \cos^2(\omega t) + \frac{2E_m^2}{\mu_0 c^2} \sin^2(kz) \sin^2(\omega t)$$

$$\langle u \rangle = \epsilon_0 E_m^2 [\cos^2(kz) + \sin^2(kz)] = \epsilon_0 E_m^2$$

Sa valeur moyenne est donc uniforme.

9.2 Superposition de deux ondes de pulsations voisines

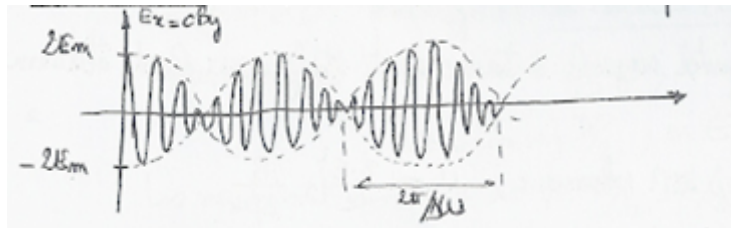
Considérons le cas où les deux ondes se propagent dans le même sens et présentent des pulsations voisines ($\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega \ll \omega_0$ avec $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$). En posant $\Delta k = k_{1,z} - k_{2,z} = \frac{\Delta\omega}{c}$ et en remarquant que $k_{1,z} + k_{2,z} = 2\frac{\omega_0}{c} = 2k_0$, il vient, puisque, $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$$\vec{E} = E_m \vec{e}_x e^{i[(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2})t - (k_0 + \frac{\Delta k}{2})z]} + E_m \vec{e}_x e^{i[(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2})t - (k_0 - \frac{\Delta k}{2})z]}$$

$$\vec{E} = 2E_m \vec{e}_x \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}$$

$$\vec{E} = 2E_m \vec{e}_x \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right) \cos(\omega_0 t - k_0 z)$$

L'onde résultante est donc plane, polarisée rectilignement mais pas monochromatique c'est un battement entre les deux ondes monochromatiques.



On peut la considérer comme une onde progressive de valeur d'onde $\vec{k}_0 = k_0 \vec{e}_x$ et de pulsation ω_0 , dont l'amplitude varie lentement dans l'espace et dans le temps cas $\Delta\omega \ll \omega_0$ et $\Delta k \ll k_0$.

Notons que la modulation de cette amplitude se propage avec la vitesse v_g telle que

$$\frac{\Delta\omega}{2} dt - \frac{\Delta k}{2} dz = 0$$

$$v_g = \frac{dz}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = c$$

L'onde se propage donc dans son ensemble, à la vitesse c sans se déformer puisqu'on a $\omega = ck_0 = c\Delta k$, le vide est non dispersif.

9.3 Paquet d'ondes

En physique toute onde est nécessairement limitée à la fois dans le temps et dans l'espace, ce qui fait apparaître l'onde monochromatique plane comme un modèle mathématique simple mais trop éloigné de la réalité.

Le caractère linéaire des équations de Maxwell est alors capital car il permet de représenter toute onde réelle sous la forme d'une superposition d'ondes monochromatiques planes.

Le paquet d'ondes résulte de la superposition d'un ensemble d'ondes groupées autour d'une pulsation moyenne

et d'un vecteur moyen. On définit la vitesse de groupe par l'expression

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

La relation entre ω et k appelée relation de dispersion, permet de calculer la vitesse de groupe.

Si le milieu n'est pas dispersif, les différentes composantes monochromatiques se propagent avec la même vitesse de phase et le paquet d'onde reste groupé. C'est le cas dans le vide

$$\omega = kc \Rightarrow v_g = c = v_\phi$$

Si le milieu est dispersif, chaque composante monochromatique se propage avec sa propre vitesse de phase et le paquet d'onde se déforme au cours de la propagation.

Huitième partie

Onde électromagnétique dans un milieu matériel

1 Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma

Un plasma est un milieu ionisé, constitué d'ion positifs de charge $+e$ et de masse M , et d'électrons de charge $-e$ et de masse m . Le plasma est supposé peu dense de telle sorte que les interactions entre les charges sont négligeables. Le milieu est neutre, il y a n_0 ions et n_0 électrons par unité de volume. On considère la propagation d'une onde électromagnétique progressive plane, transverse et monochromatique qui se propage dans la direction Oz .

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \text{ et } \vec{E}_0 \perp (Oz)$$

$$\vec{B}(r, t) = \frac{k}{\omega} (\vec{u}_z \wedge \vec{E}_0) e^{i(\omega t - kz)}$$

Sous l'action du champ électromagnétique, les particules chargées vont se mettre en mouvement, les ions étant beaucoup plus lourd que les électrons, on peut les supposer fixe et ne considérer que le mouvement des électrons. En appliquant le principe fondamental de la dynamique aux électrons on a

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -e \vec{E} - e \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{B}$$

Cette équation se simplifie car les électrons ne sont pas relativistes. Ainsi l'action de \vec{B} est négligeable devant celle de \vec{E} , le champ \vec{E} apparaît comme uniforme à l'échelle du déplacement des électrons. En effet $\|\vec{F}_m\| \equiv evB$ or $\|\vec{B}\| = \frac{kE}{\omega} = \frac{E}{v_\phi}$, on a $v_\phi \equiv c \Rightarrow \frac{\|\vec{F}_m\|}{\|\vec{F}_e\|} \equiv \frac{v}{c} \ll 1$ et l'amplitude a du mouvement d'un électron telle que :

$$\frac{a}{\lambda} \equiv \frac{v}{m\lambda} \equiv \frac{kv}{\omega} = \frac{v}{v_\phi} \equiv \frac{v}{c} \ll 1$$

le terme (kz) peut être considéré comme constant et inclus dans la phase de \vec{E} , l'équation l'équation devient

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -e \vec{E}_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \vec{v} = i \frac{e}{m\omega} \vec{E} \Rightarrow \vec{j} = \rho_{el} \vec{v}_{el} = -m_e e \vec{v}_{el} = -i \frac{n_0 e^2}{m\omega} \vec{E}$$

Posons $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0}} \Rightarrow \vec{j} = -i \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \vec{E}$.

Remarque. L'équation pour les électrons se réécrit $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -e \vec{E} \Rightarrow \vec{v}_e = i \frac{e}{m\omega} \vec{E}$.

L'équation pour les ions se réécrit $M \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = e \vec{E} \Rightarrow \vec{v}_i = -i \frac{e}{M\omega} \vec{E}$.

Comme $\vec{j}_E = -n_0 e \vec{v}_e + n_e e \vec{v}_c = -\frac{in_0 e^2}{\omega} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \vec{E}$. Comme $M \gg m$

$$\vec{j} \equiv \frac{-in_0 e^2 \vec{E}}{m\omega}$$

1.1 Relation de dispersion

On note les équations de Maxwell ici $\rho = 0$ car $\rho = -n_0e + n_0e = 0 \Rightarrow \text{div}(\vec{E}) = 0$, $\text{div}\vec{B} = 0$, $r\vec{\text{ot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow r\vec{\text{ot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}^2}{\partial t} = (-i\epsilon_0\mu_0\frac{\omega_p^2}{\omega} + i\omega\mu_0\epsilon_0)\vec{E}$ donc

$$r\vec{\text{ot}}(\vec{B}) = i\omega\mu_0\epsilon_0(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2})\vec{E} = i\frac{\omega}{c^2}(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2})\vec{E}$$

$$r\vec{\text{otr}}\vec{\text{ot}}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(r\vec{\text{ot}}(\vec{B})) = -i\frac{\omega}{c^2}(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2})\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{g}r\vec{a}d\text{div}(\vec{E}) - \Delta\vec{E}$$

$$\Delta\vec{E} = i\frac{\omega}{c^2}(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2})i\omega\vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2}(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2})\vec{E}$$

Remarque. $\Delta\vec{E} = -k^2\vec{E}$ la relation de dispersion est $-k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2})$.

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}) = \frac{1}{c^2}(\omega^2 - \omega_p^2)$$

Indice complexe.

$$k = \frac{n\omega}{c} \Rightarrow n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

1.2 Étude et interprétation de la relation de dispersion

$\omega > \omega_p$. k réel et on choisit $k > 0$ car on étudie la propagation d'une onde dans le sens z croissant.

$$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} \text{ et } n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

le milieu est dispersif. De plus, \vec{j} et \vec{E} sont en quadrature donc la puissance moyenne cédée par le champ aux porteurs de charges est donc nulle. Le champ ne perd pas d'énergie au cours de sa propagation, le milieu n'est pas absorbant, il est transparent. Sa vitesse de phase est

$$\begin{cases} v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \\ v_g = \frac{d\omega}{dh} = \frac{c^2}{v_\phi} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \end{cases}$$

d'où $v_\phi v_g = c^2$. La vitesse de phase est supérieure à c ce qui n'est pas gênant car elle ne représente pas la propagation d'une grandeur matérielle. En revanche, la vitesse de groupe est nécessairement inférieure à c , car elle représente la vitesse de propagation de l'information dans un milieu transparent.

$\omega < \omega_p$. Le vecteur d'onde est imaginaire pur, de la forme $k = \pm ik''$ avec $k'' = \frac{1}{c}\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$. Ainsi l'onde ne se propage pas, l'onde est de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-k''z} e^{i\omega t}$, l'onde est stationnaire dont l'amplitude décroît au fur et à mesure que l'on pénètre dans le milieu. La distance caractéristique d'atténuation est $\delta = \frac{1}{k''}$, l'indice est un imaginaire pur, $n = -in''$ avec $n'' = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$.

Conclusion. Pour qu'une onde se propage dans un plasma, il faut que sa fréquence soit supérieure à la pulsation plasma ω_p , celle-ci apparaît donc comme une pulsation de coupure.

1.3 Aspect énergétique

$$\text{Supposons que } \begin{cases} \vec{E} = E_0 e^{i(\omega k - kz)} \vec{e}_x \\ \vec{B} = \frac{k}{\omega} E_0 e^{i(\omega k - kz)} \vec{e}_y \end{cases}$$

$\omega > \omega_p$. On écrit le vecteur de Poyting :

$$\begin{aligned} \langle \vec{\pi} \rangle &= \langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \rangle = \frac{E_0 k}{2\mu_0 \omega} \vec{e}_z \\ \langle u_{en} \rangle &= \langle \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2}\right) \\ \langle u_e \rangle &= n_0 \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle \text{ et } \vec{v} = i \frac{e}{m\omega} \vec{E} \\ \langle u_c \rangle &= \frac{n_0 e^2}{4m\omega^2} E_0^2 = \frac{\epsilon E_0^2 \omega_p^2}{4 \omega^2} \\ \langle u_{tot} \rangle &= \langle u_e \rangle + \langle u_{en} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \end{aligned}$$

La vitesse de propagation de l'énergie v_e vérifie

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \langle u \rangle v_e \text{ d'où } v_e = e^2 \frac{k^2}{\omega} = \frac{e^2}{v_\phi} = v_g$$

$\omega < \omega_p$. $k = -ik'' \Rightarrow \vec{E} = E_0 e^{-k''z} e^{i\omega t} \vec{e}_x$ et $\vec{B} = -i \frac{k''}{\omega} E_0 e^{-k''z} e^{i\omega t} \vec{e}_y$. Ainsi $\langle \vec{\pi} \rangle = \vec{0}$, l'onde ne transmet pas d'énergie au plasma, toute l'énergie de l'onde est réfléchi. Le plasma se comporte comme un miroir.

2 Propagation d'une onde dans un conducteur

Pour décrire le comportement électrique d'un conducteur métallique, nous adaptons le modèle de Drude : un électron est libre et soumis à la force qu'exerce le champ électromagnétique et à la force de frottement visqueux qui traduit globalement l'effet des collisions à l'intérieur du milieu, $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$, où τ est une constante positive, de l'ordre de grandeur 10^{-14} , dans un bon conducteur comme le cuivre.

Remarque. La vitesse \vec{v} considérée ici, est en fait la vitesse moyenne des électrons d'un volume $d\tau$ entravant l'électron considéré et non la vitesse totale d'un électron, composé de la vitesse d'agitation thermique et de la vitesse due à la présence d'un champ électrique.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique on a

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{m}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} - e\vec{E} - e \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{B}$$

Comme pour le plasma, les électrons ne sont pas relativistes l'action de \vec{B} est négligeable devant celle du champ \vec{E} . Le champ \vec{E} est uniforme à l'échelle du déplacement des électrons.

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{m}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} - e\vec{E}_0 e^{i\omega t}$$

En cherchant \vec{v} en régime forcé sous forme d'une OPPH (onde plane progressive harmonique).

$$\begin{aligned} \vec{v} = \vec{v}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} &\Rightarrow (im\omega + \frac{m}{\tau})\vec{v} = -e\vec{E} \\ \Rightarrow \vec{v} &= \frac{-e}{\frac{m}{\tau} + im\omega} \vec{E} = \frac{-\frac{eZ}{m}}{1 + iz\omega} \vec{E} \end{aligned}$$

or $\vec{j} = -n_0 e \vec{v}$

$$\vec{j} = \frac{n_0 e^2 \tau}{m} \vec{E} = \frac{\gamma_0}{1 + iZ\omega} \vec{E}$$

On définit la conductivité complexe γ par $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ avec

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + iZ\omega}$$

et $\gamma_0 = \frac{n_0 e^2 \tau}{m}$ la conductivité statique.

Remarque.

1. Si $\omega\tau \ll 1$ c'est à dire $\omega \ll \frac{1}{\tau} \sim 10^{14} \text{rad.s}^{-1} \Rightarrow \gamma = \gamma_0$ et la loi d'Ohm est valable : $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$.
2. γ complexe ce qui traduit un déphasage entre \vec{j} et \vec{E} (quand \vec{E} varie trop vite, les électrons n'ont pas le temps de suivre instantanément les variations de E et réagissent avec un certain retard qui se traduit par un déphasage entre la vitesse et E , donc entre \vec{j} et \vec{E}).
3. haute fréquence $\omega\tau \gg 1$ alors $\gamma \sim -i\frac{\gamma_0}{\tau\omega}$ donc \vec{j} et \vec{E} en quadrature et la masse volumique moyenne dissipée par l'effet joule est $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = 0$.

2.1 Équations de Maxwell

Nous avons $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, $\text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ et $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho &= 0 \\ \Rightarrow (i\omega + \frac{\gamma}{\epsilon_0}) \rho &= 0 \\ \Rightarrow \rho &= 0 \end{aligned}$$

De plus les équations de Maxwell donnent $\text{div}(\vec{E}) = 0$, $\text{div}(\vec{B}) = 0$, $r\vec{\text{ot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $r\vec{\text{ot}}\vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Donc

$$r\vec{\text{ot}}\vec{B} = \mu_0 (\gamma + i\omega\epsilon_0) \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 (1 + \frac{\gamma}{i\omega_0 \epsilon_0}) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Donc les équations de Maxwell dans le conducteur prennent la même forme que dans le vide, à condition de remplacer ϵ_0 par $\epsilon_0(1 + \frac{\gamma}{i\omega\epsilon_0})$. Donc l'équation de dispersion s'écrit alors

$$k^2 = \epsilon_0\mu_0\omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(1 + \frac{\gamma}{i\omega\epsilon_0}) = \frac{\omega^2}{c^2} - i\frac{\mu_0\epsilon_0\omega}{1 + i\tau\omega}$$

2.2 Effet de Peau

Relation de dispersion. Plaçons nous dans le cas des "basses fréquences" c'est à dire $\omega \ll \frac{1}{\tau}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\frac{\omega^2}{c^2}}{\mu_0\gamma_0\omega} &= \frac{\omega}{\mu_0\gamma_0c^2} \ll 1 \\ \Rightarrow k^2 &= -i\mu_0\gamma_0\omega \Leftrightarrow k = \pm \frac{1-i}{\delta} \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}} \end{aligned}$$

Vitesse de phase et vitesse de groupe.

$$k = \pm \frac{1-i}{\delta} = k'(\omega) + k''(\omega)$$

donc

$$k'(\omega) = \pm \frac{1}{\delta} = \pm \sqrt{\frac{\mu_0\gamma_0\omega}{2}} = -k''(\omega)$$

Pour simplifier les notations, on choisit $k' > 0$ ainsi $\begin{cases} v_\phi = \frac{\omega}{h'} = \omega\delta = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\gamma_0}} \\ v_g = \frac{d\omega}{dh'} = 2\sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\gamma_0}} \end{cases}$. Le milieu est dispersif. Un paquet d'onde s'y propage en se déplaçant, $k'' \neq 0$, donc le milieu est absorbant : au fur et à mesure de sa propagation, l'onde cède de l'énergie aux porteurs de charges.

Champ magnétique.

$$\vec{E} = E_0 \exp(-\frac{z}{\delta}) \exp(i(\omega t - \frac{z}{\delta})) \vec{e}_x$$

Si on considère une OPPH se propageant dans le sens des z croissant et polarisée rectilignement selon Ox . Ainsi

$$\vec{B} = \frac{\vec{h} \wedge \vec{t}}{\omega} = \frac{h}{\omega} E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} \vec{e}_y = \frac{1-i}{\omega\delta} E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} \vec{e}_y$$

En réel $\vec{E} = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} \vec{e}_x$ et $\vec{B} = \frac{E_0}{\omega\delta} e^{-\frac{z}{\delta}} (\cos(\omega t - \frac{z}{\delta}) + \sin(\omega t - \frac{z}{\delta})) \vec{e}_y$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{\omega\delta} e^{-\frac{z}{\delta}} \sqrt{2} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}) \vec{u}_y$$

Puissance moyenne.

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \langle \frac{E \wedge \vec{B}}{\mu_0} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0\omega\delta} e^{-\frac{2z}{\delta}} \vec{e}_z$$

FIN.