$\varphi(r,t) = g(t - \frac{r}{v}) + g(t + \frac{r}{v}) \Rightarrow \varphi(r,t) = \frac{1}{r} g(t - \frac{r}{v}) + \frac{1}{r}(t + \frac{r}{v})$

le terme $\{\frac{1}{r} g(t - r/v)\}$ correspond à une onde sphérique

le terme $\{1/r \; g(t + r/v)\}$ correspond à une onde sphérique convergente ($r \searrow$ qd $t \nearrow$)

Solution générale

l'onde sphérique monochromatique divergente

$$\varphi(r,t) = \frac{A_m}{r} \cos(\omega t - k r + \varphi)$$

km . h → m.s^{-1}

TD - Électromagnétisme

Exercice 1

1) ~~1,8 ms . cm^{-1}~~ 6 carreaux = 12 ms.cm^{-1} =

$\nu = 83{,}3$ Hz

2) 1 carreaux = 2 ms.

Exercice 2

1) $\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ et $\mu = \frac{m}{\ell} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{F\ell}{m}}$

$$\lambda = \frac{1}{100} \times \sqrt{\frac{3 \times 6}{0{,}08}} = 0{,}15 \text{ m} = 15 \text{ cm}$$

2) a) $y(x,t) = 2 \sin[200\pi(t + \frac{x}{c})]$

$c = \lambda\nu = 15$ m.s^{-1}

$y(x,t) = 2 \sin(200\pi t + \frac{200\pi}{15} x)$

$= 2 \sin(200\pi t + \frac{40}{3}\pi x)$

b) $x_1 = 3$ m

$y(x_1, t) = 2 \sin(200\pi t + 40\pi)$

$= 2 \sin(200\pi t)$

$x_2 = -3\ m \qquad y(x_2, t) = 2 \sin(200\pi t - 50\pi)$

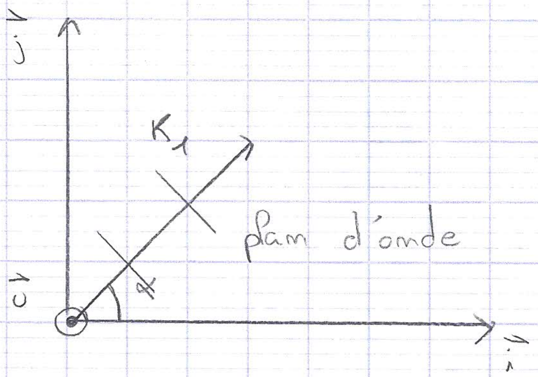
$= 2 \sin(200\pi t)$

TD - Électromagnétisme

Généralités sur les ondes

Exercice 3

1)



$$K_1 \begin{cases} K \cos\alpha \\ K \sin\alpha \\ 0 \end{cases}$$

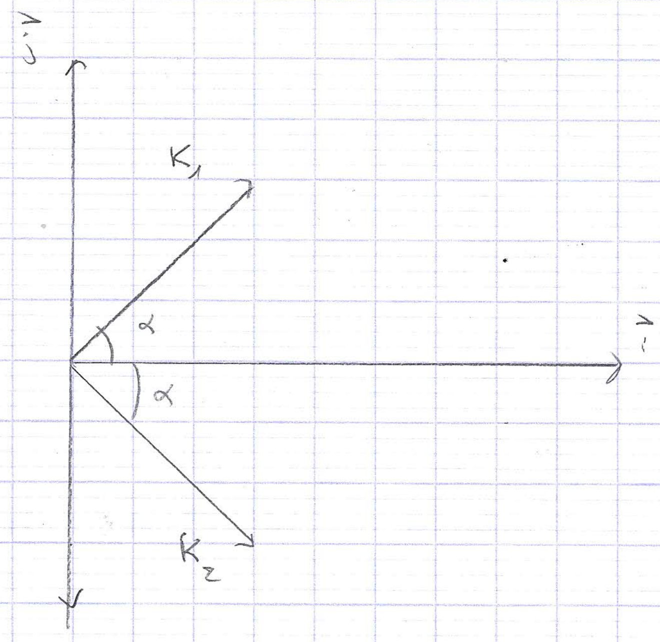
$u_1(O, t) = a\cos(\omega t)$

$u_1(M, t) = a\cos(\omega t - \vec{K}_1 . \vec{r})$ avec $\vec{r} = \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{u}$

$\vec{K} = K\cos\alpha\,\vec{i} + K\sin\alpha_1\,\vec{j}$

$u_1(M, t) = a\cos(\omega t - K\cos\alpha\, x - K\sin\alpha y)$

2)



$$K_2 \begin{cases} K \cos\alpha \\ -K\sin\alpha \\ 0 \end{cases}$$

$u_2(M, t) = a\cos(\omega t - \vec{K}_2 \vec{r})$

$= a\cos(\omega t - K\cos\alpha\, x + K\sin\alpha y)$

3) a) $u(M, t) = u_1(M, t) + u_2(M, t)$

$= a[\cos(\omega t - K\cos\alpha\, x - K\sin\alpha y) + \cos(\omega t - K\cos\alpha + K\sin\alpha y)]$

$= 2a\cos(\omega t - K\cos\alpha x)\cos(K\sin\alpha y)$

$$\boxed{u(M,t) = 2a\cos(K\sin\alpha\, y)\cos(\omega t - K\cos\alpha\, x)}$$

b) Les plans d'ondes sont perpendiculaire à $\vec{i}$ de plus l'onde est progressive. Elle a un vecteur d'onde : $\vec{K}' = K\cos\alpha\ \vec{i}$

$\|\vec{K}'\| = K\cos\alpha$

avec $\lambda' = \dfrac{2\pi}{K'} = \dfrac{2\pi}{K\cos\alpha} = \dfrac{\lambda}{\cos\alpha}$

c) $\mathcal{A} = 2a\cos(K\sin\alpha y)$

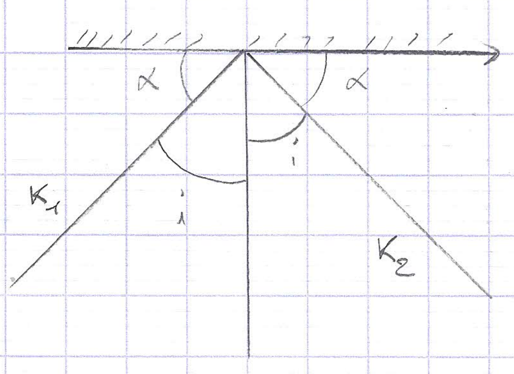
$\Rightarrow$ l'onde n'est pas plane

$\mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow \cos(K\sin\alpha y) = 0$

$K\sin\alpha y = (2m+1)\dfrac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow y_m = \dfrac{(2m+1)\pi}{2K\sin\alpha} = (2m+1)\dfrac{\lambda}{4\sin\alpha}$

4)



$\alpha + i = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} - i$

On cherche $d = \dfrac{\lambda}{4\sin\alpha} = \dfrac{\lambda}{4\sin\left(\frac{\pi}{2} - i\right)} = \dfrac{\lambda}{4\cos i} = 173$ mm

Exercice 4

1) $y = Y_m \cos(\omega t + \varphi) = Y_m \cos(2\pi N t + \varphi)$

de plus $t = 0$, $y(0) = 0$

$\Rightarrow Y_m \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ dans le sens de $\vec{j}$ $\Rightarrow \dot{y}(0) > 0$

$\dot{y}(t) = -\omega Y_M \sin(\omega t + \varphi)$

$\dot{y}(0) = -\omega Y_M \sin\varphi > 0$

$\Rightarrow \sin\varphi < 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$

$Y_m \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$

$= 5.10^{-3} \sin(200\pi t)$

2) $y_{M_1}(t) = y\left(t - \frac{x_1}{c}\right) = y_m \sin\left(\omega\left(t - \frac{x_1}{c}\right)\right)$

$= y_M \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x_1\right)$

$y = y_M \sin\left(200\pi t - \frac{200\pi \times 22}{4\ 100}\right)$

$= 5.10^{-3} \sin(200\pi t - 11\pi)$

$= 5.10^{-3} \sin(200\pi t - \pi)$

$= -5.10^{-3} \sin(200\pi t)$

$y_{M_2}(t) = y\left(t - \frac{x_2}{c}\right) = y_{M_2} \sin\left(\omega\left(t - \frac{x_2}{c}\right)\right)$

$= 5.10^{-3} \sin\left(200\pi t - \frac{200\pi \times 30}{4 \times 100}\right)$

$= 5.10^{-3} \sin(200\pi t - 15\pi)$

$= 5.10^{-3} \sin(200\pi t - \pi)$

$= 5.10^{-3} \sin(200\pi t)$

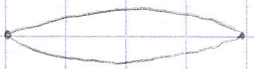
3) La corde est un résonnateur à fréquence multiple. Les conditions initiales imposent un noeud aux extrémités. La corde vibre avec n fuseau quand la fréquence de vibration est une des fréquences propre.

Avec $x = n\frac{\lambda}{2} = n\frac{c'}{2N}$

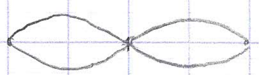
quand n varie entre 0 et 50 Hz

$\rightarrow \frac{2N}{c'}$ varie de 0 à $\frac{10}{3}$ et n peut prendre 3 valeurs $\{1, 2, 3\}$

$n = 1$



$N = \frac{c'}{2x} = 15\text{ Hz}$



$N = 30\text{ Hz}$

$N = 45\text{ Hz}$

Exercice 5

1) $u_1(x,t) = a\cos(\omega t - kx)$

$u_2(x,t) = a\cos(\omega t + kx)$

2) a) stationnaire car la phase $\frac{\pi}{4}t$ ne dépend que de t

b) $u(x,t) = a[\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)]$

$= a[\cos(\omega t)\cos(kx)]$

donc $\omega = \pi/4$, $k = \pi/6$

c) $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ donc $\lambda = 12\text{ m}$

$v = \frac{\omega}{k} = 1{,}5\text{ m.s}^{-1}$

d) ~~$u(0,t) = A\cos(\pi/4\ t)$~~

~~$u(9,t) = A\cos(\ 0$~~

$u(0,t) = 2a\cos(\omega t)$ le point d'abscisse $x=0$ est sur un plan ventral

$u(9,t) = 2a\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cos(\omega t)$

$= 0$ le point $x = 9$ est sur un plan nodal

Exercice 6

1) $y_s(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$.

$y_s(0) = a\sin\varphi = 0$

$\Rightarrow \varphi = \cancel{\frac{\pi}{2}}\ 0$ ou π

$\dot{y}_s(t) = \omega a\cos(\omega t + \varphi)$

$\dot{y}_s(0) = \omega a\cos\varphi > 0 \Rightarrow \varphi = 0$

donc $\boxed{y_s(t) = a\sin(2\pi N t)}$

2) a) $c = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \boxed{\lambda = cT = 0{,}3\ m}$

b) $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{20}{3}\pi}$

c) ~~$t = \frac{d}{v} = 0{,}015\ s$~~

$y = y_s\left(t - \frac{d}{c}\right)$

$= \cancel{y_s}\ a\sin\left[\omega\left(t - \frac{d}{c}\right)\right]$

$= a\sin(\omega t - kd)$

$= -1.10^{-2}\sin(200\pi t)$

3) a) On a des ondes stationnaires due à la superpositions d'ondes progressive de même amplitude et de même fréquence en sens contraire

$$\ell = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow n = \frac{2\ell}{\lambda} = 4 \text{ fuseaux}$$

$$y_M(t) = A\sin(kx)\cos(\omega t)$$

b) • ~~Amplitude~~ Phase indépendante de ~~temp~~ la position

• Amplitude : $A\sin kx$

$$x = \ell \Rightarrow A = \frac{a}{\sin k\ell}$$

Exercice 7

1) $y_M(t) = y(t - \theta) = a\cos(\omega(t-\theta))$

$$= a\cos(\omega(t - x/c))$$

$$= a\cos(\omega t - kx)$$

2) L'onde se réfléchit en B (rigide)

a) $y_{Bi}(t) = a\cos(\omega t)$

$y_{Br}(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$

En B on a

$$y = y_{Bi} + y_{Br} = a(\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \varphi)) = 0$$

$$= 2a\cos(\omega t + \varphi/2)\cos(\varphi/2)$$

$$\Rightarrow \varphi = \pi$$

b) $x = \overline{BM}$

b) $x = \overline{BM}$

$$y_{M_i}(t) = y_M \cos(\omega t - kx)$$
$$y_{M_r}(t) = y_M \cos(\omega t + kx + \pi)$$

donc la vibration totale est :

$$y = y_{M_i} + y_{M_r} = y_M (\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx + \pi))$$
$$= +2 y_M \sin(\omega t) \sin(kx)$$
$$= +2 y_M \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

On a donc une onde stationnaire.

Noeuds : $\sin\left(\frac{\omega}{c} x_n\right) = 0$

$$x_n = n \frac{\lambda}{2} \quad \forall n$$

Ventres : $\sin\left(\frac{\omega}{c} x_V\right) = \pm 1$

$$x_V = (2n+1) \frac{\lambda}{4} \quad \forall n$$

Exercice 8

1) "vitesse" de balayage

↳ $T = 8$ carreaux $= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$

pour 1 carreau → v_B

$$v_B = \frac{1}{8\nu} = 8,33 \cdot 10^{-5} \text{ s/cm}$$

2) Décalage de 1 carreau entre 2 signaux

→ $\Delta T = 83,3 \cdot 10^{-6}$ s

1ère méthode :

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta T}{T} = \frac{\pi}{4}$$

2ème méthode :

$$u_1(t) = U_{1m} \cos(2\pi\nu t + \overset{0 \text{ (par choix du système)}}{\varphi_1})$$

$$u_2(t) = U_{2m} \cos(2\pi\nu t + \varphi_2)$$

et $\cos(2\pi\nu t_2 + \varphi_2) = 1 \Rightarrow \varphi_2 = -2\pi\nu t_2$

$$= -\frac{\pi}{4}$$

2) Pour que les 2 courbes coïncident sur l'oscillo, il faut que $u_1(t)$ et $u_2(t)$ soient en phase et de même amplitude.

→ càd que les amplifications conduisent à la même valeur max. sur les 2 maxs

$u_1(t) = G_1 U_{1m} \cos(2\pi\nu t)$

$u_2(t) = G_2 U_{2m} \cos(2\pi\nu(t - d/c)) = G_2 U_{2m} \cos\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi\nu}{c} d\right)$

donc même amplitude $\rightarrow G_1 U_{1m} = G_2 U_{2m}$

même phase : $\frac{2\pi\nu}{c} d_k = k\,2\pi$

on donne $\Delta d = 22$

La distance entre 2 positions du micro pour lesquelles les 2 courbes ne sont pas déphasées

et on a : $d_k = k\frac{c}{\nu}$

$d_{k+1} = (k+1)\frac{c}{\nu}$

b) $y_{M'}(t) = y_M(\cos(\omega t - kx))$

$y_{M_1}(t) = y_M(\cos(\omega t + kx + \pi))$

donc $\Delta d = d_{k+1} - d_k$

$\Delta d = [(k+1) - k] \frac{c}{\nu}$

↳ $c = \nu \Delta d = 330 \ m.s^{-1}$

3) • 2 courbes non déphasées → on supprime le balayage horizontal

• sur la voie Y_1 : $y_1(t) = G_{1m} U_{1m} \cos(2\pi\nu t)$

• sur Y_2 : $y_2(t) = G_{2m} U_{2m} \cos(2\pi\nu t)$

on a donc $y_1(t) = y_2(t)$

II - Généralités sur les ondes (2ème partie).

Exercice 1

On effectue le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} p = t - x/v \\ q = t + x/v \end{cases}$$

1) a) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{v}\left[-\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right]$$

b) $$\frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2} = -\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right] + \frac{\partial}{\partial q}\left[-\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right] \times \frac{1}{v}$$

$$= \frac{1}{v^2}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} - 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2}\right]$$

donc $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\left[\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} - 2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}\right]$ par Schwartz

2) a) $$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial\varphi}{\partial q}$$

b) $$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial\varphi}{\partial q}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial\varphi}{\partial q}\right]\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial\varphi}{\partial q}\right]\frac{\partial q}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}$$

On réécrit dans l'équation d'onde :

$$\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q} = 0$$

<u>1ème version</u>

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right) = 0 \longrightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial q} \text{ indépendante de } p.$$

$\hookrightarrow \dfrac{\partial\varphi}{\partial q} = G(q)$

$\Rightarrow \varphi(p,q) = \int G(q)dq + f(p)$

Donc $\varphi(p,q) = f(p) + g(q)$

<u>2ème version</u> idem en prenant indépendant de q.

Donc en rétablissant x et t. La solution générale de l'équation d'onde est $f(t-\frac{x}{v})+g(t+\frac{x}{v})$.

Exercice 1

1) $y(x,t) = A\cos(\omega t \pm kx + \varphi)$

a) Propagation dans le sens des $x > 0$
donc négatif.
$\Rightarrow \psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$

b) $\nu = 3\,Hz$
$\hookrightarrow \omega = 2\pi\nu = 6\pi\ rad.s^{-1}$

c) Par le dessin $A = 2cm$

d) $\varphi \rightarrow$ dessin $y(x=0, t=0) = -1cm$
$2\cos\varphi = -1 \Rightarrow \cos\varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \pm\frac{2\pi}{3}$

$\frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega\sin(\omega t - kx + \varphi)$ et dessin + propagation $x > 0$

donc $\frac{\partial y}{\partial t} < 0$

$\frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega\sin\varphi = -A\omega\sin(\pm\frac{2\pi}{3})$

et comme $\frac{\partial y}{\partial t} < 0 \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$

e) D'après le dessin $\lambda = 0,75\ cm$
et $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{800\pi}{3}$

Soit au final $y(x,t) = 0,02\cos(6\pi t - \frac{800\pi}{3}x + \frac{2\pi}{3})$

2) On dérive par rapport au temps l'équation précédente

Exercice 5

1) $\psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\omega t - \varphi(\vec{r}))}$

$\varphi(\vec{r}) = 3x + 4y + 5z$

Quelles sont les surfaces d'ondes ?

→ Surfaces $\varphi(\vec{r}) = cte$

$3x + 4y + 5z = cte$

Équations de plans $\perp$ au vecteur $\vec{V} = 3\vec{u_x} + 4\vec{u_y} + 5\vec{u_z}$

2) Équation d'onde $\left[\Delta\psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \right]$

- $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -3i\,\psi(\vec{r}, t)$
- $\frac{\partial \psi}{\partial t} = i\omega\,\psi(\vec{r}, t)$
- $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -9\,\psi(\vec{r}, t)$
- $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2\,\psi(\vec{r}, t)$
- $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -16\,\psi(\vec{r}, t)$
- $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -25\,\psi(\vec{r}, t)$

On a donc l'équation d'onde :

$(-9\psi - 16\psi - 25\psi) - \frac{1}{v^2}(-\omega^2\psi) = 0$

$\Leftrightarrow -50\,\psi + \frac{\omega^2}{v^2}\psi = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\omega^2}{v^2} = 50$ or $\nu = 5\,Hz \Rightarrow \omega = 2\pi\nu = 10\pi\ rad.s^{-1}$

$\Rightarrow v = \pm\frac{10\pi}{\sqrt{50}} = \frac{10\pi}{5\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2}\ m.s^{-1}$

3) $\varphi(\vec{r}) = \vec{k}\,\vec{r}$ avec $\vec{k} = k.\hat{u}$ et $|\hat{u}| = 1$

a) d'où $\varphi(\vec{r}) = k_x x + k_y y + k_z z$

$\vec{k} = k\hat{u}$

$\vec{k} = 3\vec{e_x} + 4\vec{e_y} + 5\vec{e_z}$

$$\hat{u} = \frac{\vec{k}}{k} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}\,(3\vec{e_x} + 4\vec{e_y} + 5\vec{e_z})$$

b) cosinus directeurs de $\hat{u}$ (valeur des composantes)

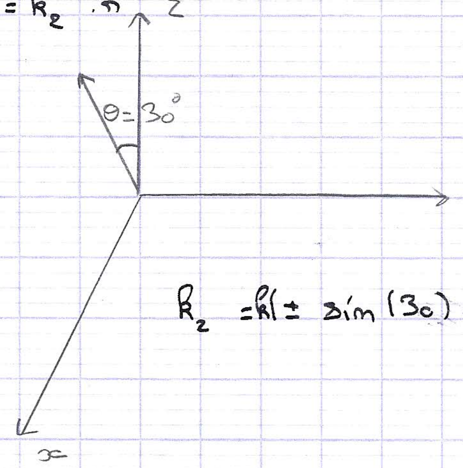
$\frac{3}{\cancel{2\sqrt{5}}\;5\sqrt{2}}$, $\frac{4}{5\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{5\sqrt{2}} = 0{,}89$ m

4) $v = \pi\sqrt{2} = 4{,}4$ m.s^{-1}

$\Psi_2(\vec{r}, t) = A\exp(i(\omega t - \varphi_2(\vec{r}))$

$= \vec{k_2}\,.\,\vec{r}$



$k_2 = k(\pm\sin(30)\,\vec{u_x} + \cos(30)\,\vec{u_z})$

Partie II - Induction

Exercice 1

1- Champ électrique de Hall

a) $\vec{j}$: densité de courant ($A.m^{-2}$)

$\vec{j} = -ne\vec{v}$

$\Leftrightarrow \vec{v} = -\frac{\vec{j}}{ne}$

b) Force s'exerçant sur une particule chargée dans un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$

La force de Lorentz.

$\vec{F}_{Lorentz} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \underbrace{q\vec{E}}_{\text{coulomb}} + \underbrace{q\vec{v} \wedge \vec{B}}_{\text{Laplace}}$

ici il y a seulement la composante magnétique (ie Laplace)

$\vec{F}_{L} = q(\vec{v} \wedge B) = -e\left[-\frac{\vec{j}}{ne} \wedge B\vec{e}_z\right]$

$= -e\left(-\frac{j\vec{e}_x}{ne} \wedge B\vec{e}_z\right)$

$= \frac{jB}{n}(\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z)$

$= -\frac{jB}{n}\vec{e}_y$

c) Les accumulations de charge sur les faces avant et arrières créent un champ électrique dit de Hall $\vec{E}_H$, la force associé ~~et~~ compense la force de Laplace.

Donc $\vec{F}_H + \vec{F}_L = \vec{0}$ (en régime permanent) et de ce fait, les électrons se déplacent toujours // à Ox ($\vec{j} \parallel \vec{e_x}$)

d) $\vec{F_H} + \vec{F_L} = \vec{0} \Leftrightarrow q\vec{E_H} + q\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$

$\Rightarrow -e\vec{E_H} + evB\vec{e_y} = 0 \Rightarrow \vec{E_H} = -vB\vec{e_y}$

$= -\frac{jB}{ne}\vec{e_y}$

2) a) $U_H = V_N - V_M = \int_M^N dV$

Or $\vec{E_H} = -\vec{\text{grad}}\, V = -\frac{dV}{dy}\vec{e_y} \Rightarrow dV = -\vec{E_H}\, dy\vec{e_y}$

b) d'où ~~E_H~~ $U_H = \frac{jbB}{ne} \times \frac{h}{h} = \frac{jBh}{h} \frac{1}{ne} B$

$= \frac{C_H}{h} I B$ avec $C_H = \frac{1}{ne}$

La mesure de U_H et I permet d'obtenir B

c) $B = \frac{hU_H}{C_H I} = 707\ mT$

$C_H = \frac{1}{ne} \Leftrightarrow n = \frac{1}{C_H e} \simeq 1,7 \cdot 10^{1}\ e^{-} \cdot cm^{-3}$

Exercice 2

a) Le fil rectiligne $\vec{D}_2$ crée un champ magnétique $\vec{B}$ en tout point de l'espace.

Théorème d'Ampère $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0\, I_{enlacée}$

$\oint B(\rho)\, \vec{e}_\theta \cdot dl\, \vec{e}_\theta = \mu_0 I$

$B(\rho) \oint dl = \mu_0 I$

$\vec{B}(\rho) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi \rho}\, \vec{e}_\theta$

Ici $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi x}\, \vec{e}_y$ on

$d\vec{F}_{MN} = I_1\, d\vec{l}_{MN} \wedge \vec{B}$ donc

$d\vec{F} = I_1 (dz\, \vec{e}_z) \wedge \dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi (x_0 - a)}\, dz\, (-\vec{e}_y)$

$= \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi (x_0 - a)}\, 2b\, (-\vec{e}_x)$

De même $d\vec{F}_{NP} = I_1\, d\vec{l}_{NP} \wedge \vec{B} = I_1 (dx\, \vec{e}_x) \wedge \dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi x}\, (+\vec{e}_y)$

$= \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\, \dfrac{dx}{x}\, \vec{e}_x$

$\vec{F}_{NP} = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \displaystyle\int_{x_0 - a}^{x_0 + a} \dfrac{dx}{x}\, \vec{e}_z$

$= \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\dfrac{x_0 + a}{x_0 - a}\right) \vec{e}_z$

On en déduit $\vec{F}_{PD} = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi (x_0 + a)}\, 2b\, \vec{e}_x$ et donc

$F_{MN} = \mu_0 I_1 I_2 \ln\left(\dfrac{x_0 + a}{x_0 - a}\right) (-\vec{e}_z)$

Finalement $\vec{F} = \vec{F}_{MN} + \vec{F}_{NP} + \vec{F}_{PD} + \vec{F}_{DM} = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2 b}{\pi} \left(\dfrac{1}{x_0 + a} - \dfrac{1}{x_0 - a} \right) \vec{e}_x$

$= -\dfrac{\mu_0 I_1 I_2 b}{\pi}\, \dfrac{2a}{x_0^2 - a^2}\, \vec{e}_x$

b) $\vec{F} = \dfrac{2\mu_0 I_1 I_2\, ab}{\pi (x_0^2 - a^2)}$ donc le fil attire le cadre

c) Travail des forces de Laplace pour x_0, $3a \to 11a$ le déplacement selon Ox est parallèle donc $\vec{F}_{NP}$ et $\vec{F}_{PM}$ ne travaillent pas pour ce déplacement.

$$dW_{MN} = \vec{F}_{MN} \cdot \vec{dx_0}$$
$$= -\frac{\mu_0 I_1 I_2 2b}{2\pi (x_0 - a)} \vec{e_x} \cdot dx_0 \vec{e_x}$$

$$\Rightarrow dW_{MN} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{\pi} \frac{dx_0}{x_0 - a}$$

$$\to W_{MN} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{\pi} \int_{3a}^{11a} \frac{dx_0}{x_0 - a}$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{\pi} \ln(5)$$

$$W_{3a \to 11a} = W_{MN} + W_{PQ} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{\pi} \ln(3/5) < 0$$

$$dW_{PQ} = \vec{F}_{PQ} \vec{dx_0}$$
$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{\pi} \left(\frac{dx_0}{x_0 + a} \right)$$

$$W_{PQ} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{\pi} \ln(3)$$

Par le théorème de maxwell $W_{3a \to 11a} = I_1 (\varphi(x_0 = 11a) - \varphi(x_0 = 3a))$
il faut calculer le champ $\vec{B}$ à travers le cadre $\varphi = \iint_{surface} \vec{B}\, d\vec{S} = \iint \mu_0 I_2 \cdot \frac{1}{2\pi x} \vec{e_y}\, dx\, dz \vec{e_y}$

$$= \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \int_{-b}^{+b} dz \int_{x_0 - a}^{x_0 + a} \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{\mu_0 I_2 b}{\pi} \ln\left(\frac{x_0 + b}{x_0 - b} \right)$$

$$\varphi(x = 11a) = \frac{\mu_0 I_2 b}{\pi} \ln(6/5)$$

$$\varphi(x = 3a) = \frac{\mu_0 I_2 b}{\pi} \ln(2)$$

d) Travail des forces de Laplace quand le cadre tourne de $\frac{\pi}{2}$ autour de Oy dans le plan xOz

Théorème de Maxwell : $W = I_1 [\varphi_2 - \varphi_1]$

or $\varphi_1 = \frac{\mu_0 I_2 b}{\pi} \ln\left(\frac{x_0+a}{x_0-a}\right)$

$$\varphi_2 = \frac{\mu_0 I_2 a}{\pi} \ln\left(\frac{x_0+b}{x_0-b}\right)$$

donc $W = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\left(a \ln\left(\frac{x_0+b}{x_0-b}\right) - b\ln\left(\frac{x_0+a}{x_0-a}\right)\right)$

Exercice 1

a) • Si $x \leq 0$ ou $x \geq 4a$

$\varphi_1(x) = \iint \vec{B}\,\vec{dS} = 0$ car $B=0$

• Si $0 \leq x \leq a$

$\varphi_2(x) = \iint \vec{B}\,\vec{dS} = \iint (B\vec{e_z})(dx\,dy\,\vec{e_z})$

$= B\int_0^h dy \int_0^x dx' = Bhx$

• Si $a \leq x \leq 3a$

$\varphi_3(x) = B\int_0^h dy \int_{x-a}^{x} dx'$

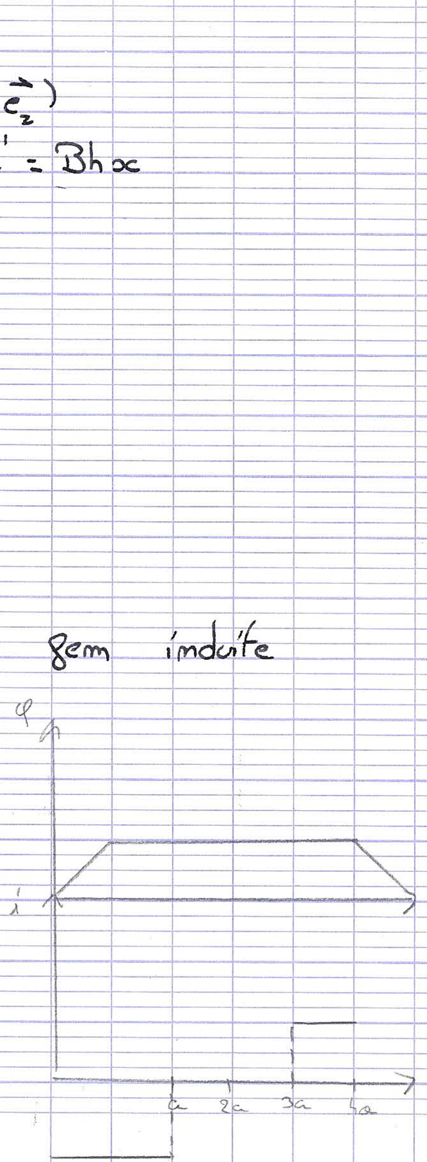
$= Bha$

• Si $3a \leq x \leq 4a$

$\varphi_4(x) = B\int_0^h dy \int_{x-a}^{3a} dx'$

$= Bh(4a - x)$

b) Intensité induite $e = -\frac{d\varphi}{dt}$ fem induite



Pour $x<0$: $i_1(x) = 0$

$0 \leq x \leq a$: $i_2(x) = -\frac{Bhv}{R}$

$a \leq x \leq 3a$: $i_3(x) = 0$

$3a \leq x \leq 4a$: $i_4(x) = +\frac{Bhv}{R}$

$4a \leq x$: $i_5(x) = 0$

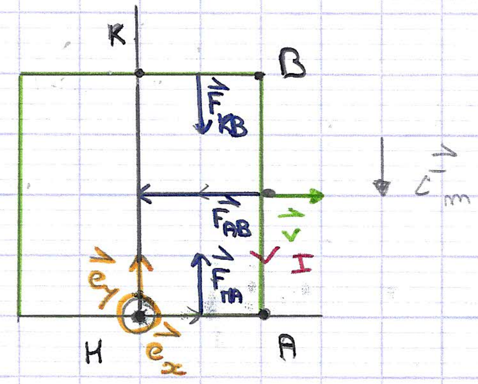
c) $\vec{E_m} = \vec{v} \wedge \vec{B}$ champ électromoteur

$= (v\vec{e_x}) \wedge (B\vec{e_z})$

$= -vB\vec{e_y}$

fem induite $e = \int \vec{E_m}\, \vec{dl}$

Cas 2 : $0 \leq x \leq a$



On a une fem induite dans le segment BA.

$$e_{AB} = \int \vec{E}_m \, dy \vec{e}_y = \int (-JB\vec{e}_y)(dy\,\vec{e}_y) = -JB\int_0^h dy = -JBh.$$

Force de Laplace : $d\vec{F}_{AB} = |i_{AB}| \, d\vec{l}_{AB} \wedge \vec{B}$

$$d\vec{F}_{AB} = |i_{AB}| (-dy\,\vec{e}_y) \wedge (B\vec{e}_z) = |i_{AB}| \, B dy \, \vec{e}_x$$

d'où $\vec{F}_{AB} = -\dfrac{vBh}{R} B \displaystyle\int_0^h dy \, \vec{e}_x$

$$= -\frac{vB^2h^2}{R} \vec{e}_x$$

$e_{AH} = \int \vec{E}_m \, dx \vec{e}_x = \int (-JB\vec{e}_y)(dx\,\vec{e}_x)$

mais le courant $i_{AB} = \dfrac{-vBh}{R}$ circule dans tout le circuit

$i_{AB} = -\dfrac{vBh}{R}$ dans tout le circuit.

donc $d\vec{F}_{AH} = |i_{AB}| (-dx\,\vec{e}_x) \wedge (B\vec{e}_z)$

$\Rightarrow d\vec{F}_{AH} = |i_{AB}| B dx \, \vec{e}_y$

$\Rightarrow \vec{F}_{AH} = |i_{AB}| B \displaystyle\int_0^{vt} dx' \, \vec{e}_y$

$\Rightarrow \vec{F}_{AH} = |i_{AB}| \, B(vt) \, \vec{e}_y$

$e_{KB} = 0$ mais i_{AB} circule dans KB.

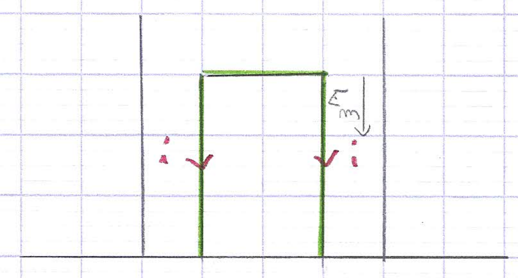
$\Rightarrow \vec{F}_{KB} = |i_{AB}| \, Bvt \, (-\vec{e}_y)$

Donc résultante $\vec{R}_2 = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AH} + \vec{F}_{KB}$

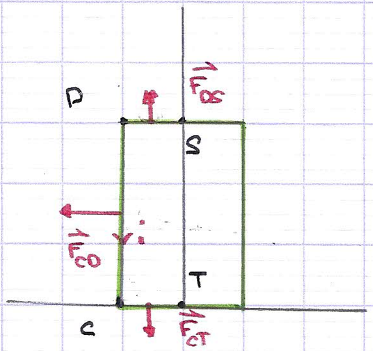
$$= -\frac{vB^2h^2}{R}\vec{e}_x$$

Cas 3 $\quad a \leq x \leq 3a$

Courant total nul



Cas 4 $\quad 3a \leq x \leq 4a$



Dans ce cas le courant induit (dans DC) circule dans le sens opposé à celui

$d\vec{F}_{CD} = |i_{cd}| B\, dy (-\vec{e}_x)$

$\Rightarrow \vec{F}_{cd} = |i_{cd}| B h (-\vec{e}_x)$

Dans CT et DS pas de fem induite directement mais i_{CD} circule dans tout le circuit.

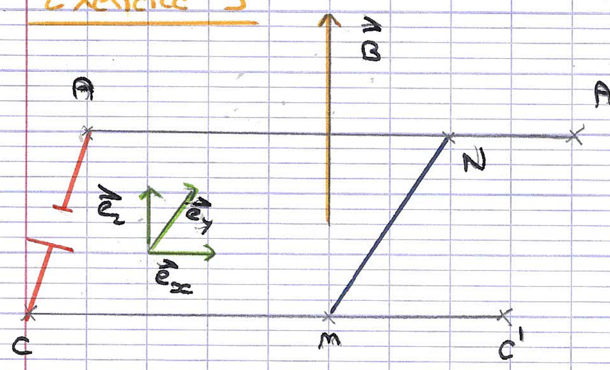
$\rightarrow \vec{F}_{CT} = -|i_{CD}| B (4a - vt)\, \vec{e}_y$

$\vec{F}_{DS} = |i_{cd}| B (4a - vt)\, \vec{e}_y$

Dans les 2 cas, la force de Laplace est une force de freinage (loi de Lenz).

Pour compenser il faut donc exercer une force positive d'intensité $\frac{vB^2h^2}{R}$.

Exercice 5



1) Batterie : $I = \frac{6}{2} = 3A$

Force de Laplace sur le barreau MN.

$\vec{dF} = |I| \vec{dl} \wedge \vec{B} = |I|(-dy\,\vec{e_y}) \wedge (B\vec{e_z})$

$= |I| B\, dy\, (-\vec{e_x})$

$\vec{F} = |I| B \int_{-a/2}^{a/2} dy\, (-\vec{e_x}) = -|I| B a\, \vec{e_x}$

$\|\vec{F}\| = 0,3\,N.$

2) Plus de batterie mais $v = 5\,m.s^{-1}$

Cas 1 : $\vec{v} = v\vec{e_x}$

$\vec{E_m} = \vec{v} \wedge \vec{B} = v\vec{e_x} \wedge B\vec{e_z} = -vB\vec{e_y}$

D'où la fem induite : $e_{MN} = \int_{MN} \vec{E_m} \cdot \vec{dl} = \int_{-a/2}^{a/2} (-vB\vec{e_y})(dy\vec{e_y})$

$= -vBa.$

et $i_{MN} = \frac{-vBa}{R} \Rightarrow \vec{F_L} = \frac{vB^2a^2}{R} \vec{e_x}$

Cas 2 : $\vec{v} = -v\vec{e_x}$

$\rightarrow \vec{E_m} = \vec{v} \wedge \vec{B} = vB\,\vec{e_y} \rightarrow e_{MN} = vBa$

$i_{MN} = \frac{vBa}{R}$

Force de Laplace : $\vec{dF_L} = |i_{MN}|\, \vec{dl} \wedge \vec{B} = |i_{MN}|(-dy\vec{e_y}) \wedge (B\vec{e_z})$

$\Rightarrow \vec{F_L} = \frac{vB^2a^2}{R} (-\vec{e_x}).$

AN: $i = \frac{vBa}{R} = 0{,}25 A$

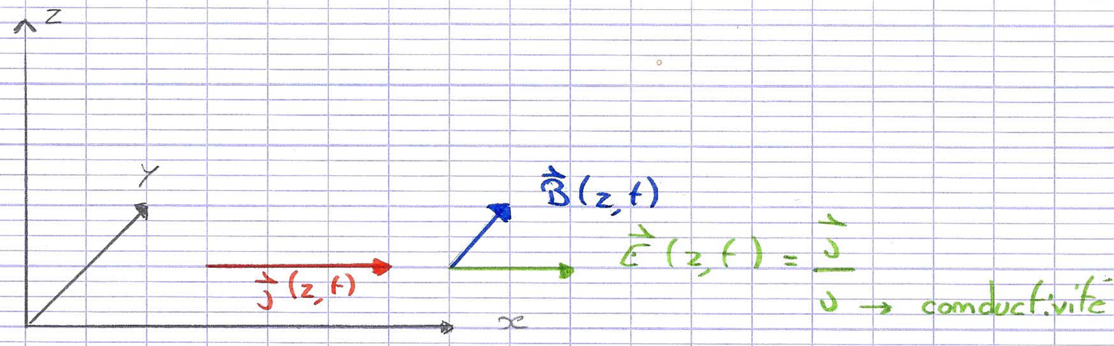
3) Batterie à nouveau dans le circuit

cas 2 : I et i opposés

$I_{tot} = I - i = 2{,}75 A$

Équations de l'électromagnétisme en régime variable.

Exercice 13 : Effet de peau



$\vec{j}(\vec{r},t) = j_0 e^{\alpha z} e^{i\omega t} \vec{u}_x$

Loi d'Ohm $\vec{j} = \gamma \vec{E} \rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma}$ et on donne aussi
$\vec{B}(\vec{r},t) = B_0 e^{\alpha z} e^{i\omega t} \vec{u}_y$

1) Justification de $\vec{B}$

a) Théorème d'Ampère $\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

$\rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

$\vec{B} \perp \vec{j}$

b) Plan xOz : Plan de symétrie pour $\vec{j}$

$\Rightarrow \vec{B}$ est donc $\perp$ au plan xOz

$\Rightarrow \vec{B} \parallel O_y$

2) a) Théorie de Maxwell - Ampère

$$\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ Maxwell - Gauss

$$\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{Maxwell - Faraday}$$

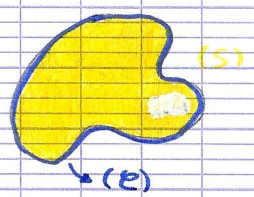
$\text{div}\,\vec{B} = 0 \longrightarrow \vec{B}$ à flux conservatif

$$\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{Maxwell - Ampère}$$

Rajout de J.C Maxwell pour que le théorème Maxwell-Ampère soit cohérent avec la conservation de la charge électrique $\text{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Forme intégrée : $\iint_{(S)} \vec{rot}\,\vec{B}\,\vec{dS} = \mu_0 \iint_{(S)} (\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})\,\vec{dS}$

S ~~est~~ une surface quelconque



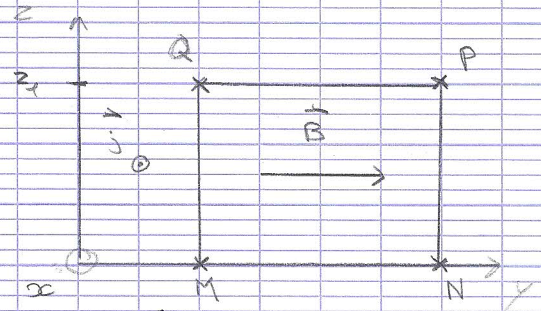
<u>Théorème stokes</u> : $\iint_{(S)} \vec{rot}\,\vec{B}\,\vec{dS} = \oint \vec{B}.\vec{dl}$

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 \iint_{(S)} (\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})\,\vec{dS}$$

<u>Remarque</u> Théorème ampère en statique

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \rightarrow \oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 \iint \vec{j}.\vec{dS}$$

b)



i) Circulation de $\vec{B}$ sur le contour MNPQ

$$\oint_{MNPQ} \vec{B}\,\vec{dl} = \int_{MN} \vec{B}.\vec{dl}_{MN} + \underbrace{\int_{NP} \vec{B}\,\vec{dl}_{NP}}_{0} + \int_{PQ} \vec{B}.\vec{dl}_{PQ} + \underbrace{\int_{QM} \vec{B}.\vec{dl}_{QM}}_{0}$$

$$= \int B_0 e^{\alpha z} \vec{u_y} (dy\,\vec{u_y}) + \int B_0 e^{\alpha z} e^{i\omega t} \vec{u_y} (-dy\,\vec{u_y})$$

d'où $\oint \vec{B}\,\vec{dl} = B_0\, e^{i\omega t} \int_0^L dy - B_0 e^{\alpha z_1} e^{i\omega t} \int_0^L dy$

Soit $\oint \vec{B}\,\vec{dl} = B_0 L e^{i\omega t} [1 - e^{\alpha z_1}]$

iii) Flux de $\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ à travers la surface (S) limitée par MNPQ.

$\mu_0 \iint (\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot \vec{dS}$

or $\vec{j} = \gamma \vec{E} \rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma}$

$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$ or $\vec{j} = j_0 e^{\alpha z} e^{i\omega t} \vec{u_x}$

$\hookrightarrow \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = i\omega \vec{j}$; $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{i\omega}{\gamma} \vec{j}$

d'où $\mu_0 \iint_{(S)} (\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \vec{dS} = \mu_0 (1 + i \frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma}) \iint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{dS}$

$\iint_{(S)} \vec{j}\,\vec{dS} = \iint j_0 e^{\alpha z} e^{i\omega t} \vec{u_x} \,(dy\,dz\,\vec{u_x})$

$= j_0 e^{i\omega t} \int_0^L dy \int_0^{z_1} e^{\alpha z} dz = j_0 e^{i\omega t} L \frac{1}{\alpha} [e^{\alpha z}]_0^{z_1}$

$\iint_{(S)} \vec{j}\,\vec{dS} = j_0 e^{i\omega t} \frac{L}{\alpha} [e^{\alpha z_1} - 1]$

donc $\mu_0 \iint_{(S)} (\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \vec{dS}$

$= \mu_0 (1 + i \frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma}) j_0 e^{i\omega t} \frac{L}{\alpha} [e^{\alpha z_1} - 1]$

Donc dans ce cas particulier le Théorème de Maxwell ampère mène à :

$B_0 e^{i\omega t} L [1 - e^{\alpha z_1}] = -\mu_0 (1 + i \frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma}) j_0 e^{i\omega t} \frac{L}{\alpha} [1 - e^{\alpha z_1}]$

c) donc $B_0 = -\mu_0 \left(1 + \frac{i\varepsilon_0\omega}{\gamma}\right)\frac{j_0}{\alpha}$

d) courant de déplacement vs courant de conduction

↳ $\frac{\frac{\varepsilon_0\omega}{\gamma}}{1} = \varepsilon_0\omega\frac{1}{\gamma} = 1,5 \cdot 10^{-10} \ll 1$

⇒ courant de déplacement négligeable par rapport au courant vrai

$$B_0 = -\frac{\mu_0 j_0}{\alpha} \qquad (1)$$

3) a) Théorème Maxwell - Faraday

$\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ or ici $\vec{E} = \frac{j_0}{\gamma} e^{\alpha z} e^{i\omega t}\vec{u_x}$

et $\vec{B} = B_0 e^{\alpha z} e^{i\omega t}\vec{u_y}$

$\vec{rot}\,\vec{E} = 0\,\vec{u_x} + \frac{\partial}{\partial z}E_x(z,t)\,\vec{u_y} - \frac{\partial}{\partial y}E_x(z,t)\,\vec{u_z}$

d'où $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

⇒ $\frac{\partial}{\partial z}E_x(z,t)\,\vec{u_y} = -\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial t}\vec{u_y}$

⇒ $\alpha\frac{j_0}{\gamma} e^{\alpha z} e^{i\omega t} = -i\omega B_0 e^{\alpha z} e^{i\omega t}$

⇒ $-i\omega B_0 = \frac{\alpha j_0}{\gamma}$

⇒ $B_0 = i\frac{\alpha j_0}{\gamma\omega}$ $\qquad$ (2)

b) Avec les relations 1 et 2, on a

$\frac{\mu_0 j_0}{\alpha} = i\frac{\alpha j_0}{\gamma\omega}$ ⇒ $\alpha^2 = i\mu_0\gamma\omega$

⇒ $\alpha = \pm\sqrt{i(\mu_0\gamma\omega)}$

or $\sqrt{i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

Donc $\alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\sqrt{\mu_0 \gamma \omega}$
$= \pm (1+i)\sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}}$

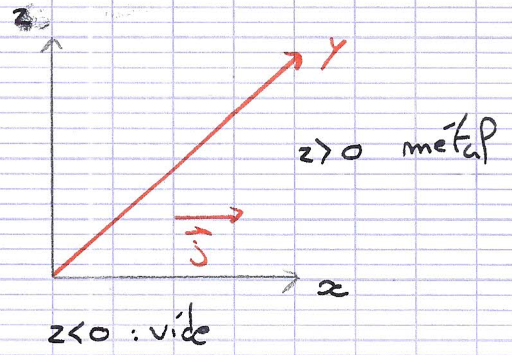
5) a) On pose $\alpha = \alpha' + i\alpha''$

$\Rightarrow \alpha = \pm\left[\sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}} + i\sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}}\right]$

donc $\alpha' = \alpha'' = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}}$

→ Interprétation

$\vec{j} = j_0 e^{\alpha z} e^{i\omega t} \vec{u}_x$



b) $\Rightarrow \vec{j} = j_0 e^{\pm\alpha' z \pm i\alpha'' z} e^{i\omega t} \vec{u}_x$

$\Rightarrow \vec{j} = j_0 e^{\pm\alpha' z} e^{i(\omega t + \alpha'' z)} \vec{u}_x$

↳ $\ominus$ seule solution physiquement acceptable

$\Rightarrow \vec{j} = j_0 e^{-\alpha' z} e^{i(\omega t - \alpha'' z)} \vec{e}_x$

↳ effet de peau : décroissance exponentielle de la densité de courant quand on s'éloigne de l'interface
→ courant se propage sur une "peau"

On pose $\delta = \frac{1}{\alpha'}$ $\Rightarrow$ $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} = 5,1\ \mu m$

↳ distance au bout de laquelle la densité de courant est plus faible.

c) phénomène ondulatoire qui se propage le long de z. $\vec{j} = j_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i\omega(t) - \alpha'' z} \vec{u}_x$

(le courant se déplace sur x mais se propage)

Exercice 15

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - ay - \frac{a}{2}z)} \vec{e}_x$$

1) a) Vecteur d'onde

$$-\vec{k}\vec{r} = -(k_x x + k_y y + k_z z) \Rightarrow k_x = 0,\ k_y = 0,\ k_z = \frac{a}{2}$$
$$= -ay - \frac{a}{2}z$$

$$\vec{k} = a\vec{e}_y + \frac{a}{2}\vec{e}_z$$

b) Vecteur unitaire de la direction de propagation : $\vec{e}_u$

$\hookrightarrow \vec{e}_u = \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|} = \frac{\vec{k}}{k}$ $\qquad k = \frac{\sqrt{5}}{2}a$

donc $\vec{e}_u = \frac{\vec{k}}{k} = \frac{\sqrt{5}}{5}(2\vec{e}_y + \vec{e}_z)$

c) Longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{4\pi}{\sqrt{5}\,a}$

d) Fréquence $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{\sqrt{5}\,ac}{4\pi}$

2) a) Champ magnétique

$$\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - ay - \frac{a}{2}z))\,\vec{e}_x$$
$$\hookrightarrow \vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$\vec{B}$ associé : $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \rightarrow -i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega\vec{B}$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{k}\,\vec{e}_u \wedge \vec{E}$$

d'où $\vec{B} = \frac{1}{c}[\sqrt{5}/5\,(2\vec{e}_y + \vec{e}_z)] \wedge [E_0 \exp(i(\omega t - ay - \frac{a}{2}z))\,\vec{e}_x]$

$$= \frac{E_0}{\sqrt{5}c}\exp(i(\omega t - ay - \frac{a}{2}z))((2\vec{e}_y + \vec{e}_z) \wedge \vec{e}_x)$$
$$= \frac{E_0}{\sqrt{5}c}\exp(i(\omega t - ay - \frac{a}{2}z))[-2\vec{e}_z + \vec{e}_y]$$

Soit $\vec{B} = \dfrac{E_0}{\sqrt{5}c} \exp(i(\omega t - ay - \frac{a}{2}z)) \, (\vec{e}_y - 2\vec{e}_z)$

b) $Re(\vec{E}) = E_0 \cos(\omega t - ay - \frac{a}{2}z)\,\vec{e}_x$

$Re(\vec{B}) = \dfrac{E_0}{\sqrt{5}c} \cos(\omega t - ay - \frac{a}{2}z)\,(\vec{e}_y - 2\vec{e}_z)$

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0}[Re(\vec{E}) \wedge Re(\vec{B})] = \frac{E_0^2}{\sqrt{5}\mu_0 c} \cos^2(\omega t - ay - \frac{a}{2}z)(\vec{e}_x \wedge (\vec{e}_y - 2\vec{e}_z))$$

$$= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - a/2\, z)\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(2\vec{e}_y + \vec{e}_z)\right]$$

On $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\mu_0 c} = \varepsilon_0 c$

Exercice 16

$$\vec{E} \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y(y,z,t) = E_0 \cos(\pi/a \ y) \exp(i(\omega t - k_0 z)) \\ E_z(y,z,t) = \alpha E_0 \sin(\pi/a \ y) \exp(i(\omega t - k_0 z)) \end{cases}$$

1) Théorème de Maxwell-Gauss

- $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ → dans le vide $\rho = 0$.

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

donc $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$

$$\Rightarrow -E_0 (\pi/a) \sin(\pi/a \ y) \exp(i(\omega t - k_0 z)) - ik_0 \alpha [\sin(\pi/a \ y) \exp(i(\omega t - k_0 z))] = 0$$

$$\Rightarrow -\cancel{E_0} \left(\frac{\pi}{a}\right) - ik_0 \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-\pi}{a i k_0} = i \frac{\pi}{a k_0} \qquad \text{I}$$

Équation de d'Alembert

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \Delta E_y - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 E_y}{dt^2} = 0 & (1) \\ \Delta E_z - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 E_z}{dt^2} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$-\frac{\pi^2}{a^2} E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} y\right) e^{i(\omega t - k_0 z)} + (-ik_0)^2 E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} y\right) e^{i(\omega t - k_0 z)}$$

$$-\frac{1}{c^2} (i\omega)^2 E_0 \cos(\pi/a \ y) e^{i(\omega t - k_0 z)} = 0.$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{\pi}{a}\right) - k_0^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\omega^2}{c^2} = k_0^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \qquad \text{II}$$

$$(e) \rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 .$$

$$\rightarrow -\frac{\pi^2}{a^2} - k_0^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \qquad \text{idem}$$

2) Théorème Maxwell - Faraday $\quad \vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\vec{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right]\vec{e}_x + \left[0 - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right]\vec{e}_y + \left[\frac{\partial E_y}{\partial z} - 0\right]\vec{e}_z$$

$$= \frac{\pi}{a}\alpha E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}y\right)e^{i(\omega t - k_0 z)} - (-ik_0)E_0\cos\left(\frac{\pi}{a}y\right)e^{i(\omega t - k_0 z)}\vec{e}_x$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha\frac{\pi}{a} + ik_0\right)E_0\cos\left(\frac{\pi}{a}y\right)e^{i(\omega t - k_0 z)}\vec{e}_x = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = -\frac{1}{i\omega}\left(\alpha\frac{\pi}{a} + ik_0\right)E_0\cos\left(\frac{\pi}{a}y\right)e^{i(\omega t - k_z)}\vec{e}_x$$

$$\left(\alpha\frac{\pi}{a} + ik_0\right) = \left(\frac{i}{k_0}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + ik_0\right)$$

$i\frac{\pi}{ak_0}$ (I)

$$= \frac{i}{k_0}\underbrace{\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k_0^2\right]}_{\frac{\omega^2}{c^2}\ (\text{II})}$$

donc $\quad \left(\alpha\frac{\pi}{a} + ik_0\right) = \frac{i}{k_0}\frac{\omega^2}{c^2}$

donc $\quad \vec{B} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{i}{k_0}\frac{\omega^2}{c^2}\right)E_0\cos\left(\frac{\pi}{a}y\right)e^{i(\omega t - k_0 z)}\vec{e}_x$

$$\vec{B} = -\frac{\omega}{k_0 c^2}E_0\cos\left(\frac{\pi}{a}y\right)e^{i(\omega t - k_0 z)}\vec{e}_x$$

3) a) Progressive car $\cos(\omega t - k_0 z) \rightarrow$ propagation de l'onde dans le sens des $z > 0$

b) $\vec{E}$ possède des composantes sur Oy et Oz direction de propagation
↳ Non transverse électrique à cause de la composante sur Oz

c) $\vec{B}$ n'a ~~pas~~ de composante que sur x
→ transverse magnétique

~~1) V~~

d) Harmonique de pulsation ω ↙ monochromatique

e) Non uniforme à cause des $\begin{cases} \cos(\pi/a\ y) \\ \sin(\pi/a\ y) \end{cases}$

4) Vecteur de Poynting

↳ $\mathrm{Re}(\vec{E}) = \begin{cases} \mathrm{Re}(E_x) = 0 \\ \mathrm{Re}(E_y) = E_0 \cos(\pi/a\ y) \cos(\omega t - k_0 z) \\ \mathrm{Re}(E_z) = -\dfrac{\pi}{a k_0} E_0 \sin(\pi/a\ y) \sin(\omega t - k_0 z) \end{cases}$

$$\mathrm{Re}(\vec{B}) = -\frac{\omega}{k_0 c^2} E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} y\right) \cos(\omega t - k_0 z) \vec{e}_x$$

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} [\mathrm{Re}(\vec{E}) \wedge \mathrm{Re}(\vec{B})] = \frac{1}{\mu_0} \Big| [\mathrm{Re}(E_y)\vec{e}_y + \mathrm{Re}(E_z)\vec{e}_z] \wedge [\mathrm{Re}(B_x)\vec{e}_x$$

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0}\left[\mathrm{Re}(E_z)\mathrm{Re}(B_x)\ \vec{e}_y - \mathrm{Re}(E_y)\ \mathrm{Re}(B_x)\vec{e}_z\right]$$

↳ $\vec{P} = P_y \vec{e}_y + P_z \vec{e}_z \qquad \begin{cases} P_y = 1/\mu_0\ \mathrm{Re}(E_z)\ \mathrm{Re}(B_x) \\ P_z = -1/\mu_0\ \mathrm{Re}(E_y)\ \mathrm{Re}(B_x) \end{cases}$

$$P_y = \frac{\omega \pi E_0^2}{\mu_0 a k_0^2 c^2} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right)\cos\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin(\omega t - k_0 z)\cos(\omega t - k_0 z)$$

$$P_y = \frac{\pi \omega E_0^2}{\mu_0 a k_0^2 c^2}\left(\frac{1}{4}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}y\right)\sin\left(2(\omega t - k_0 z)\right)$$

$$P_z = \frac{\omega}{\mu_0 k_0 c^2} E_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{a}y\right)\cos^2(\omega t - k_0 z)$$

<u>Valeur moyenne temporelle</u>

on intègre la puissance d'une fonction sur sa période.

$$\langle \vec{P} \rangle_T = \langle P_y \rangle_T \vec{e}_y + \langle P_z \rangle_T \vec{e}_z$$

$$\langle P_y \rangle_T = \frac{\pi \omega}{\mu_0 a k_0^2 c^2}\left(\frac{1}{4}\right) \sin\left(2\frac{\pi}{a}y\right) \frac{1}{T}\underbrace{\int_0^{T=\frac{2\pi}{\omega}} \sin(2(\omega t - k_0 z))\,dt}_{=0}$$

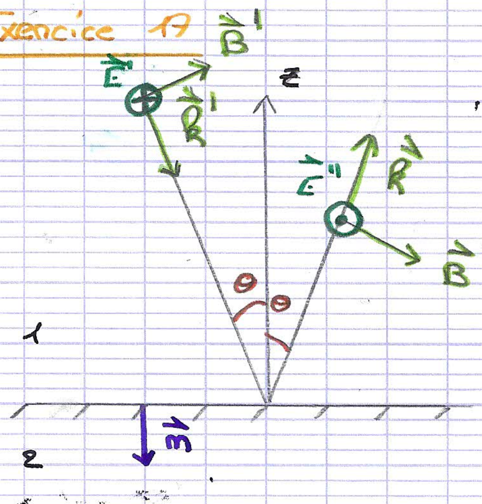
$$\text{et } \langle P_z \rangle_T = \frac{\omega E_0^2}{\mu_0 k_0 c^2}\cos^2\left(\frac{\pi}{a}y\right) \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t - k_0 z)\,dt}_{=1/2}$$

$$= \frac{\omega E_0^2}{2\mu_0 k_0 c^2}\cos^2\left(\frac{\pi}{a}y\right)$$

$$\text{donc } \langle \vec{P} \rangle_T = \frac{\omega E_0^2}{2\mu_0 k_0 c^2}\cos^2\left(\frac{\pi}{a}y\right)\vec{e}_z$$

Propagation de l'énergie associée à l'onde, en moyenne le long de Oz.

Exercice 17



Métal parfait (conductivité infinie).

<u>Rappel</u> Équations de passage du champ EM entre 2 milieux.

$$\begin{cases} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \dfrac{\sigma_s}{\varepsilon_0} \vec{n} \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 (\vec{j_s} \wedge \vec{n}) \end{cases}$$

valables dans le plan de l'interface $\vec{n}$ orientée de 1 vers 2.

σ_s et j_s : densité de charges et de courant superficielles dans le plan de l'interface.

$\vec{j_s} \wedge \vec{\sigma_s}$: vecteur // à l'interface

<u>1)</u> Vecteur d'onde incident : $\vec{k}' = \dfrac{2\pi\nu}{c} (\sin\theta \, \vec{e}_x - \cos\theta \, \vec{e}_z)$

Vecteur d'onde réfléchi : $\vec{k}'' = \dfrac{2\pi\nu}{c} (\sin\theta \, \vec{e}_x + \cos\theta \, \vec{e}_z)$

<u>2)</u>
$$\begin{aligned} \vec{E}' &= E_0 \, e^{i(\omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r})} \vec{e}_y \\ &= E_0 \exp\left[i\left(2\pi\nu t - \left(\frac{2\pi\nu}{c} \sin\theta x - \frac{2\pi\nu}{c} \cos\theta z\right)\right)\right] \vec{e}_y \\ &= E_0 \exp\left[i 2\pi\nu \left(t - \frac{\sin\theta}{c} x + \frac{\cos\theta}{c} z\right)\right] \vec{e}_y \end{aligned}$$

3) Équation de passage pour $\vec{E}$:

$$E_2 - E_1 = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_0} \vec{n}$$

onde incidente + onde réfléchie

projection // : $\underbrace{\vec{E}_2^{\,//}}_{= \vec{0} \text{ car métal de conductivité infinie}} - \vec{E}_1^{\,//} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_1^{\,//} = \vec{0}$

$$\Rightarrow E'_y(z=0) + E''_y(z=0) = 0$$

$$\Rightarrow E''_y(z=0) = - E_0 \, e^{i 2\pi\nu \left(t - \frac{\sin\theta}{c} x\right)}$$

$$\Rightarrow \vec{E}'' = - E_0 \exp\left(i 2\pi\nu \left(t - \frac{\sin\theta}{c} x - \frac{\cos\theta}{c} z\right)\right) \vec{e}_y$$

$e^{i\pi} \rightarrow$ phase de π à la réflexion

4) $\vec{B}'$ et $\vec{B}''$ → Maxwell - Faraday

• $\vec{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{d\vec{B}}{dt}$

$$\Rightarrow \vec{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \partial x & \partial_y & \partial z \\ 0 & E'_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial E'_y}{\partial z}\vec{e}_x + \frac{\partial E'_y}{\partial x}\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{B}'}{dt} = \frac{dE'_y}{dz}\vec{e}_x - \frac{dE'_y}{dx}\vec{e}_z$$

$$= i\frac{2\pi\nu}{c}E'_y\vec{e}_x + \frac{i2\pi\nu}{c}\sin\theta\, E'_y\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{B}' = \frac{\cancel{1}}{\cancel{i}}\frac{1}{i2\pi\nu}\left[i\frac{2\pi\nu}{c}\cos\theta\, E'_y\vec{e}_x + \dots\right]$$

$$\Rightarrow B' = \frac{1}{c}(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_z)E'_y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B'_x = \dfrac{\cos\theta}{c} E_0 \exp\left(i2\pi\nu\left(t - \dfrac{1}{c}(\sin\theta\, x - \cos\theta z)\right)\right) \\ B'_z = \dfrac{\sin\theta}{c} \quad '' \quad '' \end{cases}$$

• De la même façon pour $\vec{B}''$:

$$\begin{cases} \vec{B}''_x = \dfrac{\cos\theta}{c} E_0 \exp\left(i2\pi\nu\left(t - 1/c\,(\sin\theta x - \cos\theta z)\right)\right) \\ \vec{B}''_z = -\dfrac{\sin\theta}{c} E_0 \quad '' \quad '' \end{cases}$$

Équations de passage pour $\vec{B}$:

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0(\underbrace{\vec{j}_s}_{\text{dans le plan de l'interface}} \wedge \vec{n})$$

↳ composantes $\perp$ $= \underbrace{B_2^{\perp}}_{=0 \text{ car métal parfait}} - B_1^{\perp} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B}_1^{\perp} = \vec{0}$

$$\Rightarrow B'_z(z=0) + B''_z(z=0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{c} E_0 \exp\left(i2\pi\nu\left(t - \frac{\sin\theta}{c}x\right)\right) - \text{idem} = 0$$

5) Pour la composante tangentielle de $\vec{B}$

$$\vec{B}_2^{\,//} - \vec{B}_1^{\,//} = \mu_0 \, (\vec{j}_S \wedge \vec{n})$$

$$\Rightarrow \left[B'_x(z=0) + B''_x(z=0) \right] \vec{u}_x = -\mu_0 \, (\vec{j}_S \wedge (-\vec{u}_z))$$

$$\Rightarrow \mu_0 j_{Sy} = \frac{\cos\theta}{c} E_0 \exp\left[i 2\pi\nu \left(t - \frac{1}{c} \sin\theta x\right)\right] \quad \vec{j}_S = j_{Sy} \vec{u}_y$$

$$+ \frac{\cos\theta}{c} \exp\left[i 2\pi\nu \left(t - \frac{1}{c} \sin\theta x\right)\right]$$

$$\Rightarrow j_{Sy} = \frac{2\cos\theta}{\mu_0 c} E_0 \, e^{i 2\pi\nu \left(t - \frac{\sin\theta}{c} x\right)}$$

6) Champ électrique total

$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}''$$

$$= E_0 \exp\left[i 2\pi\nu \left(t - \frac{\sin\theta}{c} x + \frac{\cos\theta}{c} z\right)\right] \vec{e}_y$$

$$- E_0 \exp\left[i 2\pi\nu \left(t - \frac{\sin\theta}{c} x - \frac{\cos\theta}{c} z\right)\right] \vec{e}_y$$

$$= E_0 \exp\left[i 2\pi\nu \left(t - \frac{\sin\theta}{c} x\right)\right] \left[\exp\left(i \frac{2\pi\nu}{c} \cos\theta z\right) - \exp\left(-i \frac{2\pi\nu}{c} \cos\theta z\right)\right]$$

$$\vec{E} = 2i E_0 \sin\left(\frac{2\pi\nu}{c} \cos\theta z\right) e^{i 2\pi\nu \left(t - \frac{\sin\theta}{c} x\right)} \vec{e}_y$$

↳ L'onde résultante se propage dans le sens des $x > 0$ avec une amplitude modulée dans la direction Oz (onde non uniforme)

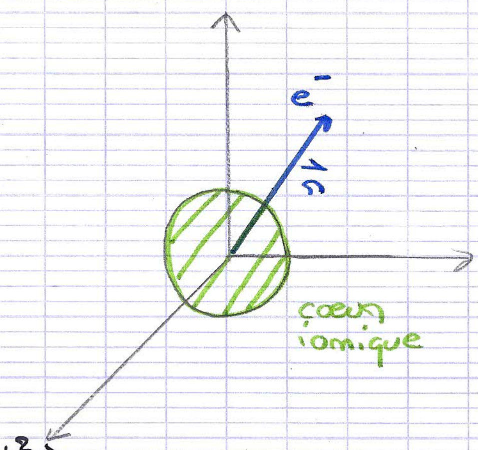
⇒ Vecteur d'onde de l'onde résultante

$$\vec{k}.\vec{n} = \frac{2\pi\nu}{c} \sin\theta \, \vec{e}_x$$

Exercice 19

plasma : gaz ionisé $\begin{cases} n\ e^- \text{ / unité de volume} \rightarrow \text{mobiles} \\ n \text{ ions de charge } +e \rightarrow \text{immobiles} \end{cases}$

1)



$$\vec F = -\frac{ne^2}{\varepsilon_0}\vec r$$

2nd loi de Newton

$$m\vec a = \vec F$$

$$\Rightarrow m\frac{d^2\vec r}{dt^2} = -\frac{ne^2}{\varepsilon_0}\vec r$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\vec r}{dt^2} + \underbrace{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}\vec r = \vec 0$$

ω_p : pulsation plasma
fréquence propre du plasma

$$\Rightarrow \frac{d^2\vec r}{dt^2} + \omega_p^2\vec r = \vec 0$$

$$\Rightarrow \vec r(t) = \vec r_0\, e^{i\omega_p t}$$

2) Champ $\vec E$ d'une onde qui se propage dans le plasma

$$\vec E = \vec E_0\, e^{i(\omega t - \vec k\cdot\vec r)}$$

↳ les e^- se met à osciller à la fréquence $\omega \rightarrow \vec v = \vec v_0\, e^{i\omega t}$

$$\rightarrow \frac{d\vec v}{dt} = i\omega\vec v \quad \text{et} \quad m\frac{d\vec v}{dt} = -e\vec E$$

$$\Rightarrow im\omega\vec v = -e\vec E$$

$$\Rightarrow \vec v = i\frac{e}{m\omega}\vec E$$

Densité de courant:

$$\vec j_e = -ne\vec v = -i\frac{ne^2}{m\omega}\vec E = \gamma\vec E$$

3) Équation de Maxwell $\quad \mathrm{div}\,\vec E = \frac{\cancel{\rho}}{\varepsilon_0} = 0$

$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{d\vec{B}}{dt}$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j_0} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{d\vec{E}}{dt}$

Équation de propagation de $\vec{E}$

$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \vec{\mathrm{rot}}\left(-\dfrac{d\vec{B}}{dt}\right)$

$\vec{\mathrm{grad}}(\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{E}}_{=0 \Rightarrow \text{th gauss}}) - \Delta\vec{E} = -\dfrac{d}{dt}(\underbrace{\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B}}_{\mu_0 \vec{j_0} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}})$

$\Rightarrow -\Delta\vec{E} = -\dfrac{d}{dt}\left(\mu_0 \vec{j_0} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{d\vec{E}}{dt}\right)$

$\Rightarrow \Delta\vec{E} = \mu_0 \dfrac{d\vec{j_0}}{dt} + \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{d^2\vec{E}}{dt^2}$

Opérateur d'Alembert en $\vec{\square} = \vec{\Delta} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$

$\Rightarrow \Delta\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{d^2\vec{E}}{dt^2} = \mu_0 \dfrac{d\vec{j_0}}{dt}$ $= \gamma\vec{E}$

Équation de propagation de $\vec{E}$: $\Delta\vec{E} = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

1) On $\vec{E} = \vec{E_0}\, e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$ $\qquad = -i\dfrac{\mu_0 m e^2}{m\omega}\dfrac{d\vec{E}}{dt}$

$\Delta\vec{E} = -k^2\vec{E}$

$\dfrac{d\vec{E}}{dt} = i\omega\vec{E} \qquad \Rightarrow -k^2\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}(-\omega^2\vec{E}) = -\dfrac{i\mu_0 m e^2}{m\,\cancel{\omega}}(i\cancel{\omega})\vec{E}$

$\dfrac{d^2\vec{E}}{dt^2} = -\omega^2\vec{E} \qquad \Rightarrow -k^2 + \dfrac{\omega^2}{c^2} = \dfrac{\mu_0 m e^2}{m}$

or $\mu_0 = \dfrac{1}{\varepsilon_0 c^2} \qquad \Rightarrow -k^2 + \dfrac{\omega^2}{c^2} = \dfrac{1}{c^2}\underbrace{\dfrac{mc^2}{m\varepsilon_0}}_{\omega_p^2}$

↳ Relation de dispersion de l'onde dans le plasma

$k^2 = \dfrac{1}{c^2}(\omega^2 - \omega_p^2)$

- Si $\omega < \omega_p \rightarrow k^2 < 0 \rightarrow k = \pm ib$ avec $b \in \mathbb{R}$

↳ $\vec{E} = \vec{E_0}\, e^{i(\omega t - kx)} = \vec{E_0}\, e^{i\omega t} e^{i(\pm ibx)}$

$= \vec{E_0}\, e^{i\omega t} e^{\pm bx}$

↳ Onde évanescente → l'onde ne se propage pas dans le plasma si $\omega < \omega_p$

Par contre si $\omega > \omega_p$ alors $k^2 > 0$ → k réel

↳ l'onde peut alors se propager dans le plasma.

Rappel: Vitesse de phase vs vitesse de groupe

$$v_g v_\varphi = c^2$$

* vitesse de phase : $(\omega t - kx)$ → $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ → homogène à une vitesse

on peut avoir $v_\varphi > c$.

* " de groupe : $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ ↖ vitesse de propagation de l'énergie de l'onde

$v_g < c$.

Ici: $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ ⇒ $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$

5) $\nu_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}} = \frac{e}{2\pi}\sqrt{\frac{n}{m\varepsilon_0}}$

AN: $\simeq 10$ MHz

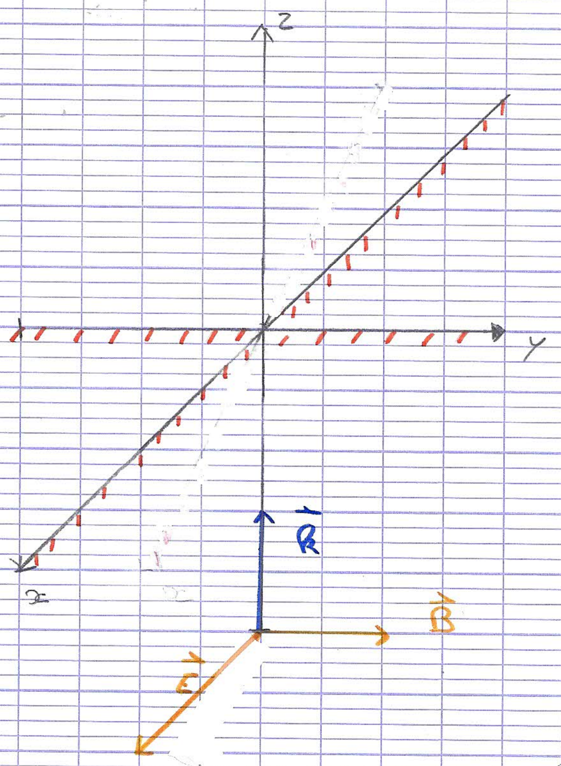
6) $n = \frac{c}{v_\varphi}$ → $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

⇒ $n = \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi\nu_p}{2\pi\nu}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{\nu_p^2}{\nu^2}}$

AN: $\nu_p = 10$ MHz $\qquad n \simeq 0{,}564$

$\nu = 12$ MHz

Exercice : Milieu conducteur



milieu conducteur $z > 0$

vide $(z < 0)$

$$\vec{B} = B(z)\, e^{i\omega t}\, \vec{u_y}$$

1) $\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ en milieu neutre $\rho = 0$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \boxed{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

$\vec{j}$ deplacement

$\rightarrow \|\vec{j_d}\| \ll \|\vec{j_c}\|$

d'où $\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t \\ \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$ + Loi d'Ohm $\vec{j_c} = \gamma \vec{E}$

conductivité du métal

2) Théorème Maxwell - Ampère :

$$\vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{B}) = \vec{\operatorname{rot}}(\mu_0 \vec{j_c})$$

$$\hookrightarrow \vec{\operatorname{grad}}\,(\underbrace{\operatorname{div} \vec{B}}_{0}) - \vec{\Delta} B = \mu_0\, \vec{\operatorname{rot}}(\vec{j_c})$$

$$= \mu_0\, \underbrace{\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{E}}_{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

$\Rightarrow \vec{\Delta B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\Delta B} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$

$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \vec{B}$

On fait apparaître $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$

d'où $\vec{\Delta B} + i\mu_0 \gamma \omega \vec{B} = \vec{0}$

$\Rightarrow \mu_0 \gamma \omega = \frac{2}{\delta^2}$

$\vec{E} \to \vec{B}$
↳ Faraday

Soit $\vec{\Delta B} - \frac{2i}{\delta^2} \vec{B} = \vec{0}$ d'où $\vec{\Delta B} - \left(\frac{[\pm(1+i)]}{\delta}\right)^2 \vec{B} = \vec{0}$

or $[\pm(1+i)]^2 = 1 + 2i - 1$

$= 2i$

3) $\vec{B} = B(z) e^{i\omega t} \vec{u_y}$ donc $\vec{\Delta B} - \alpha^2 \vec{B} = \vec{0}$

↳ $\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} - \alpha^2 B_x = 0$ pas de composante en x.

idem en ~~y~~ ~~x~~ z

↳ $\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \alpha^2 B_y$

d'où $\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \alpha^2 B_y = 0$ avec $\alpha = \pm \frac{(1+i)}{\delta}$

La solution est de la forme $B_y(z) = Ae^{\alpha z} + Be^{-\alpha z}$

↳ $B_y(z) = A\exp(\pm(1+i)\frac{z}{\delta}) + B\exp(\pm(1+i)\frac{z}{\delta})$

$$B_y(z) = \begin{cases} Ae^{i z/\delta} e^{z/\delta} + Be^{-i z/\delta} e^{-z/\delta} \\ Ae^{-i z/\delta} e^{-z/\delta} + Be^{i z/\delta} e^{z/\delta} \end{cases}$$

Pour éliminer le comportement
→ $A = 0$
→ $B = 0$ en $e^{z/\delta}$
↳ croissance expo de $\vec{B}$ pour $z \to +\infty$

$\vec{B} = B_y(z) e^{i\omega t} \vec{u_y}$

$= B_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)} \vec{u_y}$

onde évanescente "propagation" dans le sens des $z > 0$.

Champ électrique associé

Théorème Maxwell Ampère:

$$\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_c = \mu_0 \gamma \vec{E}$$

$$\vec{rot}\,\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\vec{u}_x$$

d'où $-\frac{\partial B_y}{\partial z}\vec{u}_x = \mu_0 \gamma \vec{E}$

$\hookrightarrow -\frac{\partial}{\partial z}\left[\vec{B}_0 e^{i\omega t} e^{(1+i)z/\delta}\right]\vec{u}_x$

$$= \frac{(1+i)}{\delta} B_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)}\vec{u}_x = \mu_0 \gamma \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{(1+i)}{\mu_0 \delta \gamma} B_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)}$$

d'où $\vec{E} = \frac{\sqrt{2}}{\mu_0 \delta \gamma} B_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta} + \pi/4)}\vec{u}_x$

et donc $\vec{j}_c = \gamma \vec{E} = \frac{\sqrt{2}}{\mu_0 \delta} B_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4})}\vec{u}_x$

$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ épaisseur de peau ou profondeur de pénétration

AN: $\delta = 2{,}07 \cdot 10^{-6}$ m $= 2{,}07$ µm

4) Vecteur de Poynting

$$Re(\vec{E}) = \frac{\sqrt{2}}{\mu_0 \gamma \delta} B_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right)\vec{u}_x$$

$\emptyset$

$\varphi \; \Phi$

$\Psi \; \varphi$

$$Re(\vec{B}) = B_0 \, e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta)\,\vec{u}_y$$

$$\text{et } \vec{P} = \frac{1}{\mu_0}\left(Re(\vec{E}) \wedge Re(\vec{B})\right) = \frac{\sqrt{2}}{\mu_0^2 \gamma \delta} B_0^2 \, e^{-2z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)(\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y)$$

$$= \frac{B_0^2}{\sqrt{2}\mu_0^2 \gamma \delta} e^{-2z/\delta}\left[\cos\left(2\omega t - 2\frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\vec{u}_z$$

Valeur moyenne

$$\langle \vec{P} \rangle = \frac{B_0^2}{\sqrt{2}\mu_0^2 \gamma \delta} e^{-2z/\delta}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \cos\left(2\omega t - 2\frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right)dt + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{T}\int_0^T dt\right\}\vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \langle \vec{P} \rangle = \frac{B_0^2}{2\mu_0^2 \gamma \delta} e^{-2z/\delta}\,\vec{u}_z$$

en $W.m^{-2}$
puissance par unité de surface.

puissance

$$\text{donc } \langle \varphi \rangle = \iint_{(S)} \underset{W.m^{-2}}{\langle \vec{P} \rangle}\, \underset{m^2}{\vec{dS}}$$

puissance pénétrant dans le conducteur.

$$= \iint_{(S)} \frac{B_0^2}{2\mu_0^2 \gamma \delta} e^{-2z/\delta}\,\vec{u}_z\,(dx\,dy\,\vec{u}_z)$$

$$= \frac{B_0^2}{2\mu_0^2 \gamma \delta} e^{-2z/\delta} \underbrace{\iint_{(S)} dx\,dy}_{S}$$

$$\text{donc } \langle \varphi(z) \rangle = \frac{B_0^2}{2\mu_0^2 \gamma \delta} e^{-z/\delta}\, S$$

$$\text{et } \langle \varphi(z=0) \rangle = \frac{B_0^2\, S}{2\mu_0^2 \gamma \delta}$$

Puissance moyenne entrant dans le conducteur

5) Puissance moyenne dissipée par Effet Joule dans le volume $\{S,\ z \in [0, +\infty[\}$ du conducteur

↳ Puissance moyenne dissipée par unité de volume.

$$\cancel{\frac{dP}{d\tau} = \vec{j}_c}\qquad \frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j}_c\,\vec{E} \Rightarrow \frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \gamma\, Re(\vec{E})\, Re(\vec{E}) = \frac{2}{(\mu_0\delta)^2\gamma} B_0^2\, e^{-2z/\delta} \cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\langle\mathcal{P}\rangle}{d\tau} = \frac{2}{\mu_0^2\delta^2\gamma} B_0^2\, e^{-2z/\delta} \underbrace{\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) dt\right\}}_{1/2}$$

d'où : $\dfrac{d\langle\mathcal{P}\rangle}{d\tau} = \dfrac{B_0^2\, e^{-2z/\delta}}{\mu_0^2\,\delta^2\,\gamma}$

et donc $\langle\mathcal{P}\rangle = \iiint \dfrac{d\langle\mathcal{P}\rangle}{d\tau}\, d\tau$

$$= \iiint \frac{B_0^2\, e^{-2z/\delta}}{\mu_0^2\,\delta^2\,\gamma}\, dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{B_0^2}{\mu_0^2\delta^2\gamma} \underbrace{\iint_{(S)} dx\,dy}_{S} \int_0^{+\infty} e^{-2z/\delta}\, dz$$

d'où $\langle\mathcal{P}\rangle = \dfrac{B_0^2 S}{2\mu_0^2\,\delta\gamma}$

d'où $\langle\phi(z=0)\rangle = \dfrac{B_0^2 S}{2\mu_0^2\delta\gamma}$ puissance moyenne pénétrant dans le conducteur.

et $\langle\mathcal{P}\rangle = \dfrac{B_0^2 S}{2\mu_0^2\delta\gamma}$

Exercice 11 : auto - induction

1) $U_{CA} = -Ri$
$U_{BA} = L\frac{di}{dt}$

$i = -\frac{U_{CA}}{R}$

donc $\boxed{U_{BA} = -\frac{L}{R}\frac{dU_{CA}}{dt}}$

• si $\frac{dU_{CA}}{dt} < 0 \Rightarrow U_{BA} > 0$

• si $\frac{dU_{CA}}{dt} > 0 \Rightarrow U_{BA} < 0$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dU_{CA}}{dt} = \frac{0-4}{10^{-3}} = -4.10^{3}\ V.s^{-1} \\ \frac{dU_{CA}}{dt} = \frac{4-0}{2.10^{-3}} = 2.10^{3}\ V.s^{-1} \end{array}\right\}$$ Ce qui explique la fonction en créneau.

2) D'après 1 on a $L = -\frac{RU_{BA}}{\frac{dU_{CA}}{dt}} = \frac{1}{4}\ 10^{-2}\ H$

Exercice 12 : Inductance mutuelle

$\varphi_{21} = MI_2$ $\qquad B_1 = \mu_0 \frac{N}{\ell} I_1$
$\varphi_{12} = MI_1$
$\varphi_{12} = \int \vec{B_1}\ \vec{dS'}N' = N'B_1\int dS'$
$\varphi_{12} = N'B_1S = \mu_0\frac{NN'}{\ell}SI_1$