

$\varphi(r, t) = g(t - \frac{r}{v}) + g(t + \frac{r}{v}) \Rightarrow \psi(r, t) = \frac{1}{r} g(t - \frac{r}{v}) + \frac{1}{r} g(t + \frac{r}{v})$
 Le terme $\{ \frac{1}{r} g(t - \frac{r}{v}) \}$ correspond à une onde sphérique
 Le terme $\{ \frac{1}{r} g(t + \frac{r}{v}) \}$ correspond à une onde sphérique
 convergente ($r \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$)

Solution générale

P'onde sphérique monochromatique divergente
 $\psi(r, t) = \frac{A_m}{r} \cos(\omega t - k r + \varphi)$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \text{m}^{-1}$$

TD - Électromagnétisme

Exercice 1

1) $18 \text{ ms} \cdot \text{cm}^{-1} \quad 6 \text{ carreaux} = 12 \text{ ms} \cdot \text{cm}^{-1} =$
 $v = 83,3 \text{ Hz}$

2) 1 carreaux = 2 ms.

Exercice 2

1) $\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ et $\mu = \frac{m}{\rho} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{F\rho}{m}}$

$$\lambda = \frac{1}{100} \times \sqrt{\frac{3 \times 6}{0,08}} = 0,15 \text{ m} = 15 \text{ cm}$$

2) a) $y(x, t) = 2 \sin[200\pi(t + \frac{x}{c})]$

$$c = \lambda \nu = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 y(x, t) &= 2 \sin(200\pi t + \frac{200\pi}{c} x) \\
 &= 2 \sin(200\pi t + \frac{40}{3}\pi x)
 \end{aligned}$$

b) $x_1 = 3 \text{ m}$

$$y(x_1, t) = 2 \sin(200\pi t + 40\pi)$$

$$= 2 \sin(200\pi t)$$

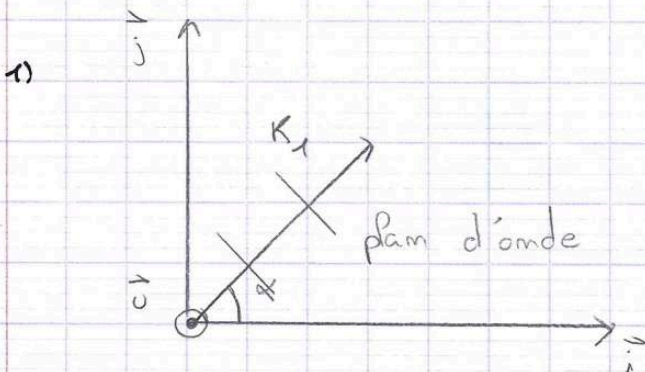
$$x_2 = -3 \text{ m} \quad y(x_2, t) = 2 \sin(200\pi t - 10\pi) \\ = 2 \sin(200\pi t)$$

TD - Électromagnétisme

2

Généralités sur les ondes

Exercice 3



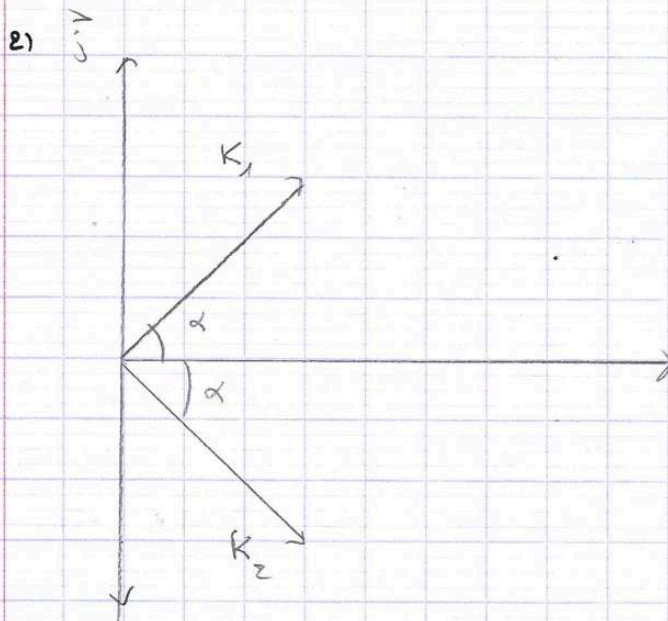
$$\vec{K}_1 = \begin{pmatrix} K \cos \alpha \\ K \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_1(0, t) = a \cos(\omega t)$$

$$u_1(M, t) = a \cos(\omega t - \vec{K}_1 \cdot \vec{r})$$

avec $\vec{r} = \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
 $\vec{K} = K \cos \alpha \vec{i} + K \sin \alpha \vec{j}$

$$u_1(M, t) = a \cos(\omega t - K \cos \alpha x - K \sin \alpha y)$$



$$\vec{K}_2 = \begin{pmatrix} K \cos \alpha \\ -K \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2(M, t) = a \cos(\omega t - \vec{K}_2 \cdot \vec{r})$$

$$= a \cos(\omega t - K \cos \alpha x + K \sin \alpha y)$$

3) a) $u(M, t) = u_1(M, t) + u_2(M, t)$

$$= a [\cos(\omega t - K \cos \alpha x - K \sin \alpha y) + \cos(\omega t - K \cos \alpha x + K \sin \alpha y)]$$

$$= 2a \cos(\omega t - K \cos \alpha x) \cos(K \sin \alpha y)$$

$$u(M, t) = 2a \cos(K \sin \alpha y) \cos(\omega t - K \cos \alpha x)$$

b) Les plans d'ondes sont perpendiculaires à $\vec{i}$ de plus l'onde est progressive. Elle a un vecteur d'onde : $\vec{K}' = K \cos \alpha \vec{i}$

$$\|\vec{K}'\| = K \cos \alpha$$

$$\text{avec } \lambda' = \frac{2\pi}{K'} = \frac{2\pi}{K \cos \alpha} = \frac{\lambda}{\cos \alpha}$$

$$c) \mathcal{R} = 2a \cos(K \sin \alpha y)$$

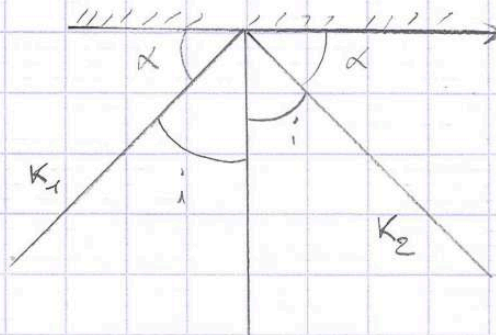
⇒ l'onde n'est pas plane

$$\mathcal{R} = 0 \Leftrightarrow \cos(K \sin \alpha y) = 0$$

$$K \sin \alpha y = (2m+1) \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow y_m = \frac{(2m+1) \frac{\pi}{2}}{2K \sin \alpha} = (2m+1) \frac{\lambda}{4 \sin \alpha}$$

4)



$$\alpha + i = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - i$$

$$\text{On cherche } d = \frac{\lambda}{4 \sin \alpha} = \frac{\lambda}{4 \sin(\frac{\pi}{2} - i)} = \frac{\lambda}{4 \cos i} = 173,8 \text{ mm}$$

Exercice 4

2

$$\begin{aligned} 1) \quad y &= Y_m \cos(\omega t + \varphi) = Y_m \cos(2\pi N t + \varphi) \\ \text{de plus } t=0, \quad y(0) &= 0 \\ \Rightarrow Y_m \cos \varphi &= 0 \Rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \text{dans le sens de } \dot{y} &\Rightarrow y(0) > 0 \\ \dot{y}(t) &= -\omega Y_m \sin(\omega t + \varphi) \\ \dot{y}(0) &= -\omega Y_m \sin \varphi > 0 \\ \Rightarrow \sin \varphi < 0 \Rightarrow \varphi &= -\frac{\pi}{2} \\ Y_m \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) & \\ = 5 \cdot 10^{-3} \sin(200\pi t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad y_{M_1}(t) &= y\left(t - \frac{x_1}{c}\right) = Y_m \sin\left(\omega\left(t - \frac{x_1}{c}\right)\right) \\ &= Y_m \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x_1\right) \\ y &= Y_m \sin\left(200\pi t - \frac{200\pi \times 22}{4 \times 100}\right) \\ &= 5 \cdot 10^{-3} \sin(200\pi t - 11\pi) \\ &= 5 \cdot 10^{-3} \sin(200\pi t - \pi) \\ &= -5 \cdot 10^{-3} \sin(200\pi t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{M_2}(t) &= y\left(t - \frac{x_2}{c}\right) = Y_{M_2} \sin\left(\omega\left(t - \frac{x_2}{c}\right)\right) \\ &= 5 \cdot 10^{-3} \sin\left(200\pi t - \frac{200\pi \times 30}{4 \times 160}\right) \\ &= 5 \cdot 10^{-3} \sin(200\pi t - 15\pi) \\ &= 5 \cdot 10^{-3} \sin(200\pi t - \pi) \\ &= 5 \cdot 10^{-3} \sin(200\pi t) \end{aligned}$$

3) La corde est un résonateur à fréquence multiple. Les conditions initiales imposent un nœud aux extrémités. La corde vibre avec m gousset quand la fréquence de vibration est une des fréquences propres.

$$\text{Avec } x = m \frac{\lambda}{2} = m \frac{c'}{2N}$$

quand m varie entre 0 et 50 Hz
 $\rightarrow \frac{2N}{c'}$ varie de 0 à $\frac{10}{3}$ et m peut prendre 3 valeurs 1, 2, 3

$$m=1$$



$$N = \frac{c'}{2x} = 15 \text{ Hz}$$



$$N = 30 \text{ Hz}$$



$$N = 45 \text{ Hz}$$

Exercice 5

1) $u_1(x, t) = a \cos(\omega t - kx)$

$$u_2(x, t) = a \cos(\omega t + kx)$$

2) a) Stationnaire car la phase $\frac{\pi}{4}t$ ne dépend que de t

b) $u(x, t) = a [\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)]$
 $= a [\cos(\omega t) \cos(kx)]$

donc $\omega = \pi/4$, $k = \pi/6$

c) $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ donc $\lambda = 12 \text{ m}$

$$v = \frac{\omega}{k} = 1,5 \text{ m.s}^{-1}$$

d) $u(0, t) = A \cos(\frac{\pi}{2} t)$

$u(9, t) = A \cos(0)$

$u(0, t) = 2a \cos(\omega t)$ le point d'abscisse $x=0$
est sur un plan ventral

$u(9, t) = 2a \cos(\frac{3\pi}{2}) \cos(\omega t)$
 $= 0$

le point $x=9$
est sur un plan nodal

Exercice 6

1) $y_s(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$

$y_s(0) = a \sin \varphi = 0$

$\Rightarrow \varphi = 0 \text{ ou } \pi$

$\dot{y}_s(t) = \omega a \cos(\omega t + \varphi)$

$\dot{y}_s(0) = \omega a \cos \varphi > 0 \Rightarrow \varphi = 0$

donc $y_s(t) = a \sin(2\pi N t)$

2) a) $c = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = cT = 0,3 \text{ m}$

b) $R = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,3} \text{ m}^{-1}$

c) $t = \frac{d}{v} = 0,015 \text{ s}$

$y = y_s(t - \frac{d}{c})$

$= a \sin[\omega(t - \frac{d}{c})]$

$= a \sin(\omega t - R d)$

$= -1,10^{-2} \sin(200\pi t)$

3) a) On a des ondes stationnaires due à la superposition d'ondes progressives de même amplitude et de même fréquence en sens contraire

$$P = m \frac{\lambda}{2} \Rightarrow m = \frac{2P}{\lambda} = 4 \text{ noeuds}$$

$$y_m(t) = A \sin(kx) \cos(\omega t)$$

b) ^{Phase} Amplitude indépendante de temps la position

• Amplitude: $A \sin kx$

$$x=2 \Rightarrow A = \frac{a}{\sin kP}$$

Exercice 7

1) a) $y_m(t) = y(t - \tau) = a \cos(\omega(t - \tau))$
 $= a \cos(\omega(t - x/c))$
 $= a \cos(\omega t - kx)$

2) L'onde se réfléchit en B (rigide)

a) $y_{B_i}(t) = a \cos(\omega t)$
 $y_{B_r}(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$

En B on a

$$y = y_{B_i} + y_{B_r} = a(\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \varphi)) = 0$$

$$= 2a \cos(\omega t + \varphi/2) \cos(\varphi/2)$$

$$\Rightarrow \varphi = \pi$$

b) $x = \overline{BM}$

b) $x = \overline{BM}$

$$y_{M_1}(t) = y_M \cos(\omega t - kx)$$

$$y_{M_2}(t) = y_M \cos(\omega t + kx + \pi)$$

donc la vibration totale est :

$$\begin{aligned} y &= y_{M_1} + y_{M_2} = y_M (\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx + \pi)) \\ &= +2y_M \sin(\omega t) \sin(kx) \\ &= +2y_M \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \end{aligned}$$

On a donc une onde **stationnaire**.

Noeuds : $\sin\left(\frac{\omega}{c} x_m\right) = 0$

$$x_m = m \frac{\lambda}{2} \quad \forall m$$

Ventres : $\sin\left(\frac{\omega}{c} x_M\right) = \pm 1$

$$x_v = (2m+1) \frac{\lambda}{4} \quad \forall m$$

Exercice 8

1) "vitesse" de balayage

$$\rightarrow T = 8 \text{ carreaux} = \frac{8\pi}{\omega} = \frac{1}{\gamma}$$

pour 1 carreau $\rightarrow v_B$

$$v_B = \frac{1}{8\gamma} = 8,33 \cdot 10^{-5} \text{ s/cm}$$

2) Décalage de 1 carreau entre 2 signaux

$$\rightarrow \Delta T = 83,3 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

1^{ère} méthode:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta T}{T} = \frac{\pi}{4}$$

2^{ème} méthode:

o (par choix du système)

$$u_1(t) = U_{1m} \cos(2\pi\nu t + \varphi_1)$$

$$u_2(t) = U_{2m} \cos(2\pi\nu t + \varphi_2)$$

$$\text{et } \cos(2\pi\nu t_2 + \varphi_2) = 1 \Rightarrow \varphi_2 = -2\pi\nu t_2 \\ = -\frac{\pi}{4}$$

2) Pour que les 2 courbes coïncident sur l'oscillo, il faut que $u_1(t)$ et $u_2(t)$ soient en phase et de même amplitude.

→ c-à-d que les amplifications conduisent à la même valeur max. Sur les 2 max

$$u_1(t) = G_1 U_{1m} \cos(2\pi\nu t)$$

$$u_2(t) = G_2 U_{2m} \cos(2\pi\nu (t - d/c)) = G_2 U_{2m} \cos(2\pi\nu t - \frac{2\pi\nu d}{c})$$

$$\text{donc même amplitude} \Rightarrow G_1 U_{1m} = G_2 U_{2m}$$

$$\text{même phase : } \frac{2\pi\nu d}{c} = k 2\pi$$

on donne $\Delta d = 22$

La distance entre 2 positions du micro pour lesquelles les 2 courbes ne sont pas déphasées

$$\text{et on a : } d_k = k \frac{c}{\nu} \\ d_{k+1} = (k+1) \frac{c}{\nu}$$

b) $y_{m_1}(t) = y_m(\cos(\omega t - kx))$
 $y_{m_2}(t) = y_m(\cos(\omega t + kx + \pi))$

donc $\Delta d = d_{R+1} - d_R$

$$\Delta d = [(R+1) - R] \frac{c}{v}$$

$$\Rightarrow c = v \Delta d = 330 \text{ m.s}^{-1}$$

3) 2 cannes non déphasées $\Rightarrow$ on supprime le balayage horizontal

• sur la voie y_1 : $y_1(t) = G_{1m} U_{1m} \cos(2\pi \nu t)$

• sur y_2 : $y_2(t) = G_{2m} U_{2m} \cos(2\pi \nu t)$

on a donc $y_1(t) = y_2(t)$

II - Généralités sur les ondes (2^{ème} partie).

Exercice 1

On effectue le changement de variable suivant:

$$\begin{cases} p = t - x/v \\ q = t + x/v \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad a) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} \\ &= \frac{1}{v} \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial q} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= -\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial q} \right] + \frac{\partial}{\partial q} \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial q} \right] \times \frac{1}{v} \\ &= \frac{1}{v^2} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} \right] \end{aligned}$$

donc $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial p \partial q} \right]$ par Schwartz

a) $\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t}$
 $= \frac{\partial \psi}{\partial p} + \frac{\partial \psi}{\partial q}$

b) $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \psi}{\partial p} + \frac{\partial \psi}{\partial q} \right]$
 $= \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{\partial \psi}{\partial p} + \frac{\partial \psi}{\partial q} \right] \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{\partial \psi}{\partial p} + \frac{\partial \psi}{\partial q} \right] \frac{\partial q}{\partial t}$
 $= \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial p \partial q}$

On remplace dans l'équation d'onde :

$$\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial p \partial q} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial p \partial q} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial p \partial q} = 0$$

1^{ère} version

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \psi}{\partial q} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial q} \text{ indépendante de } p.$$

$$\rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial q} = G(q)$$

$$\Rightarrow \psi(p, q) = \int G(q) dq + g(p)$$

Donc $\psi(p, q) = g(p) + g(q)$

2^{ème} version idem en prenant indépendant de q.

Donc en rétablissant x et t , la solution générale⁷ de l'équation d'onde est $f(t - \frac{x}{v}) + g(t + \frac{x}{v})$.

Exercice 1

1) $y(x, t) = A \cos(\omega t \pm kx + \varphi)$

a) Propagation dans le sens des $x > 0$
donc négatif.

$$\Rightarrow \psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

b) $\nu = 3 \text{ Hz}$

$$\hookrightarrow \omega = 2\pi\nu = 6\pi \text{ rad.s}^{-1}$$

c) Par le dessin $A = 2 \text{ cm}$

d) $\varphi \rightarrow$ dessin $y(x=0, t=0) = -1 \text{ cm}$

$$2 \cos \varphi = -1 \Rightarrow \cos \varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \sin(\omega t - kx + \varphi) \text{ et dessin + propagation } x > 0$$

$$\text{donc } \frac{\partial y}{\partial t} < 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \sin \varphi = -A\omega \sin\left(\pm \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\text{et comme } \frac{\partial y}{\partial t} < 0 \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

e) D'après le dessin $\lambda = 0,75 \text{ cm}$

$$\text{et } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{800\pi}{3}$$

$$\text{Soit au final } y(x, t) = 0,02 \cos\left(6\pi t - \frac{800\pi}{3}x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

2) On dérive par rapport au temps l'équation précédente

Exercice 5

1) $\psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\omega t - \phi(\vec{r}))}$

$$\phi(\vec{r}) = 3x + 4y + 5z$$

Quelles sont les surfaces d'ondes?

→ Surfaces $\phi(\vec{r}) = \text{cte}$

$$3x + 4y + 5z = \text{cte}$$

Équations de plans $\perp$ au vecteur $\vec{v} = 3\vec{u}_x + 4\vec{u}_y + 5\vec{u}_z$

2) Équation d'onde $\Delta\psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$

$$\cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = -3i \psi(\vec{r}, t)$$

$$\cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} = i\omega \psi(\vec{r}, t)$$

$$\cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -9 \psi(\vec{r}, t)$$

$$\cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi(\vec{r}, t)$$

$$\cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -16 \psi(\vec{r}, t)$$

$$\cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -25 \psi(\vec{r}, t)$$

On a donc l'équation d'onde:

$$(-9\psi - 16\psi - 25\psi) - \frac{1}{v^2} (-\omega^2 \psi) = 0$$

$$\Rightarrow -50\psi + \frac{\omega^2}{v^2} \psi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2}{v^2} = 50 \quad \text{or} \quad v = 5 \text{ Hz} \Rightarrow \omega = 2\pi v = 10\pi \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\Rightarrow v = \pm \frac{10\pi}{\sqrt{50}} = \frac{10\pi}{5\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{\text{m.s}^{-1}}$$

3) $\varphi(\vec{n}) = \vec{R} \cdot \vec{n}$ avec $\vec{R} = R \cdot \hat{u}$ et $|\hat{u}| = 1$

a) d'où $\varphi(\vec{n}) = R_x x + R_y y + R_z z$

$\vec{R} = R \hat{u}$

$\vec{R} = 3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 5\vec{e}_z$

$\hat{u} = \frac{\vec{R}}{R} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}} (3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 5\vec{e}_z)$

b) cosinus directeurs de $\hat{u}$ (valeurs des composantes)

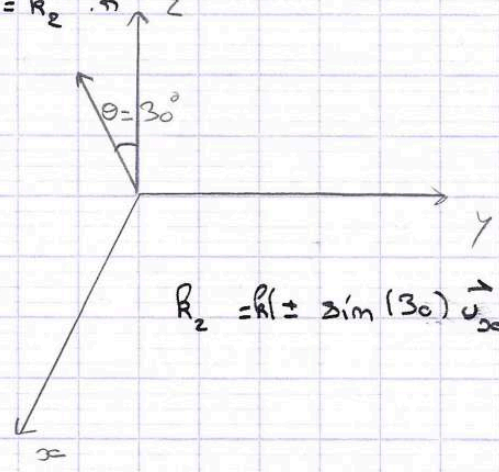
$\frac{3}{\sqrt{50}}, \frac{4}{\sqrt{50}}, \frac{5}{\sqrt{50}}$

c) $\lambda = \frac{2\pi}{R} = \frac{2\pi}{5\sqrt{2}} = 0,89 \text{ m}$

4) $v = \omega \lambda = 4,4 \text{ m.s}^{-1}$

$\varphi_z(\vec{n}, t) = A \exp(i(\omega t - \varphi_z(\vec{n})))$

$= \vec{R}_z \cdot \vec{n}$



$R_z = R(\sin(30^\circ) \vec{u}_y + \cos(30^\circ) \vec{u}_z)$

Partie II - Induction

Exercice 1

1- Champ électrique de Hall

#

a) $\vec{j}$: densité de courant ($A.m^{-2}$)

$$\vec{j} = -ne \vec{v}$$
$$\Leftrightarrow \vec{v} = -\frac{\vec{j}}{ne}$$

b) Force s'exerçant sur une particule chargée dans un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$
La force de Lorentz.

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \underbrace{q\vec{E}}_{\text{Coulomb}} + \underbrace{q\vec{v} \wedge \vec{B}}_{\text{Laplace}}$$

ici il y a seulement la composante magnétique (ie Laplace)

$$\begin{aligned}\vec{F}_x &= q(\vec{v} \wedge \vec{B}) = -e \left[-\frac{\vec{j}}{ne} \wedge B \vec{e}_z \right] \\ &= -e \left(-\frac{j \vec{e}_x}{ne} \wedge B \vec{e}_z \right) \\ &= \frac{jB}{n} (\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z) \\ &= -\frac{jB}{n} \vec{e}_y\end{aligned}$$

c) Les accumulations de charge sur les faces avant et arrière créent un champ électrique dit de Hall $\vec{E}_H$, la force associée et compense la force de Laplace.

Donc $\vec{F}_H + \vec{F}_L = \vec{0}$ (en régime permanent) et de

ce fait, les électrons se déplacent toujours // à Ox
($\vec{j} \parallel \vec{e}_x$)

$$\begin{aligned} d) \quad \vec{F}_H + \vec{F}_L &= \vec{0} \Leftrightarrow q\vec{E}_H + q\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0} \\ \Rightarrow -e\vec{E}_H + evB\vec{e}_y &= \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_H = -vB\vec{e}_y \\ &= -\frac{jB}{ec} \vec{e}_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) a) \quad U_H &= V_N - V_M = \int_M^N dV \\ \text{On } \vec{E}_H &= -\text{grad } V = -\frac{dV}{dy} \vec{e}_y \Rightarrow dV = -\vec{E}_H dy \vec{e}_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \text{ d'où } U_H &= \frac{jB}{me} \times \frac{h}{h} = \frac{jBh}{h} \frac{1}{me} B \\ &= \frac{C_H}{h} IB \quad \text{avec } C_H = \frac{1}{me} \end{aligned}$$

La mesure de U_H et I permet d'obtenir B

$$c) \quad B = \frac{hU_H}{C_H I} = 701 \text{ mT}$$

$$C_H = \frac{1}{me} \Leftrightarrow m = \frac{1}{C_H e} \simeq 1,7 \cdot 10^{-1} \text{ e}^-, \text{cm}^{-3}$$

Exercice 2

10

a) Le g.p. rectiligne $\vec{D}_2$ crée un champ magnétique $\vec{B}$ en tout point de l'espace.
Théorème d'Ampère $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacée}}$

$$\oint B(\rho) \vec{e}_\theta \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B(\rho) \oint d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$\vec{B}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \vec{e}_\theta$$

Ici $\vec{B} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x} \vec{e}_y$ on

$$d\vec{F}_{MN} = I_1 d\vec{l}_{MN} \wedge \vec{B} \quad \text{donc}$$

$$d\vec{F} = I_1 (dz \vec{e}_z) \wedge \frac{\mu_0 I_2}{2\pi (x_0 - a)} dz (-\vec{e}_y)$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi (x_0 - a)} dz (-\vec{e}_x)$$

De même $d\vec{F}_{NP} = I_1 d\vec{l}_{NP} \wedge \vec{B} = I_1 (dx \vec{e}_x) \wedge \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x} (+\vec{e}_y)$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{dx}{x} \vec{e}_z$$

$$\vec{F}_{NP} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{x_0-a}^{x_0+a} \frac{dx}{x} \vec{e}_z$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{x_0+a}{x_0-a}\right) \vec{e}_z$$

On en déduit $\vec{F}_{PD} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi (x_0+a)} 2b \vec{e}_x$ et donc

$$F_{MN} = \mu_0 I_1 I_2 \ln\left(\frac{x_0+a}{x_0-a}\right) (-\vec{e}_z)$$

Finalement $\vec{F} = \vec{F}_{MN} + \vec{F}_{NP} + \vec{F}_{PD} + \vec{F}_{DH} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{\pi} \left(\frac{1}{x_0+a} - \frac{1}{x_0-a} \right) \vec{e}_x$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{\pi} \frac{2a}{x_0^2 - a^2} \vec{e}_x$$

b) $\vec{F} = \frac{2\mu_0 I_1 I_2 ab}{\pi (x_0^2 - a^2)} \vec{e}_x$ donc le g.p. attire le cadre

c) Travail des forces de Laplace pour x_0 , $3a \rightarrow 11a$ le déplacement dx_0 est parallèle donc $\vec{F}_{MN}$ et $\vec{F}_{PQ}$ ne travaillent pas par ce déplacement.

$$dW_{MN} = \vec{F}_{MN} \cdot d\vec{x}_0$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi(x_0 - a)} \vec{e}_x \cdot dx_0 \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow dW_{MN} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{\pi} \frac{dx_0}{x_0 - a}$$

$$\Rightarrow W_{MN} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{\pi} \int_{3a}^{11a} \frac{dx_0}{x_0 - a}$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{\pi} P_m(5)$$

$$W_{3a \rightarrow 11a} = W_{MN} + W_{PQ} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{\pi} P_m(3/5) < 0$$

$$dW_{PQ} = \vec{F}_{PQ} \cdot d\vec{x}_0$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{\pi} \left(\frac{dx_0}{x_0 + a} \right)$$

$$W_{PQ} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{\pi} P_m(3)$$

Par le théorème de Maxwell $W_{3a \rightarrow 11a} = I_1 (q(x_0 = 11a) - q(x_0 = 3a))$ il faut calculer le champ $\vec{B}$ à travers $q(x_0 = 3a)$

$$\text{le cadre } q = \iint_{\text{surface}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint \mu_0 I_2 \cdot \frac{1}{2\pi x} \vec{e}_y \cdot dx dz \vec{e}_y$$

$$= \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \int_{-b}^{+b} dz \int_{x_0+a}^{x_0+b} \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{\mu_0 I_2 b}{\pi} P_m\left(\frac{x_0+b}{x_0-b}\right)$$

$$q(x=11a) = \frac{\mu_0 I_2 b}{\pi} P_m(6/5)$$

$$q(x=3a) = \frac{\mu_0 I_2 b}{\pi} P_m(2)$$

d) Travail des forces de Laplace quand le cadre tourne de $\frac{\pi}{2}$ autour de Oy dans le plan xoz

Théorème de Maxwell : $W = I_1 [\varphi_2 - \varphi_1]$

$$\text{on } \varphi_1 = \frac{\mu_0 I_2 b}{\pi} \ln \left(\frac{x_0 + a}{x_0 - a} \right)$$

$$\varphi_2 = \frac{\mu_0 I_2 a}{\pi} \ln \left(\frac{x_0 + b}{x_0 - b} \right)$$

$$\text{donc } W = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi} \left(a \ln \left(\frac{x_0 + b}{x_0 - b} \right) - b \ln \left(\frac{x_0 + a}{x_0 - a} \right) \right)$$

Exercice 1

a) Si $x \leq 0$ ou $x \geq 4a$

$$\varphi_1(x) = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{car } B=0$$

• Si $0 \leq x \leq a$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint (B \vec{e}_z) (dx dy \vec{e}_z) \\ &= B \int_0^h dy \int_0^x dx' = Bhx \end{aligned}$$

• Si $a \leq x \leq 3a$

$$\begin{aligned} \varphi_3(x) &= B \int_0^h dy \int_{x-a}^x dx' \\ &= Bha \end{aligned}$$

• Si $3a \leq x \leq 4a$

$$\begin{aligned} \varphi_4(x) &= B \int_0^h dy \int_{x-a}^{3a} dx' \\ &= Bh(4a - x) \end{aligned}$$

b) Intensité induite $e = - \frac{d\varphi}{dt}$

gem induite

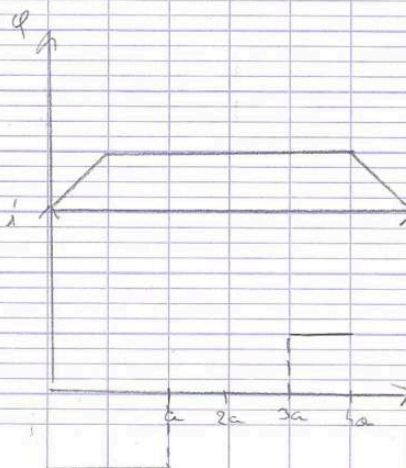
Pour $x < 0$: $i_1(x) = 0$

$$0 \leq x \leq 3a : i_2(x) = - \frac{Bh}{R}$$

$$a \leq x \leq 3a : i_3(x) = 0$$

$$3a \leq x \leq 4a : i_4(x) = + \frac{Bh}{R}$$

$$4a \leq x : i_5(x) = 0$$

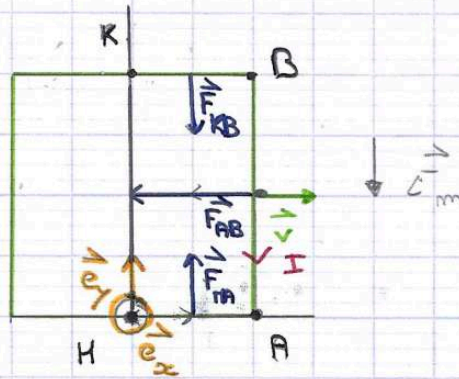


$$\begin{aligned}
 c) \quad \vec{\mathcal{E}}_m &= \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \text{champ électromoteur} \\
 &= (v\vec{e}_x) \wedge (B\vec{e}_z) \\
 &= -vB\vec{e}_y
 \end{aligned}$$

sem induite

$$e = \int \vec{\mathcal{E}}_m \cdot d\vec{P}$$

Cas 2 : $0 \leq x \leq a$



Gm a une fem induite dans le segment BA.

$$e_{AB} = \int \vec{E}_m \cdot d\vec{y} \vec{e}_y = \int (-\nabla B \vec{e}_y) \cdot (dy \vec{e}_y) = -\nabla B \int_0^h dy = -\nabla B h.$$

Force de Laplace : $d\vec{F}_{AB} = |i_{AB}| d\vec{l}_{AB} \wedge \vec{B}$

$$d\vec{F}_{AB} = |i_{AB}| (-dy \vec{e}_y) \wedge (B \vec{e}_z) = |i_{AB}| B dy \vec{e}_x$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \vec{F}_{AB} &= -\frac{\nabla B h}{R} B \int_0^h dy \vec{e}_x \\ &= -\frac{\nabla B^2 h^2}{R} \vec{e}_x \end{aligned}$$

$$e_{AH} = \int \vec{E}_m \cdot dx \vec{e}_x = \int (-\nabla B \vec{e}_x) \cdot (dx \vec{e}_x)$$

mais le courant $i_{AB} = \frac{-\nabla B h}{R}$ circule dans tout le circuit

$$i_{AB} = -\frac{\nabla B h}{R} \text{ dans tout le circuit.}$$

$$\text{donc } d\vec{F}_{AH} = |i_{AB}| (-dx \vec{e}_x) \wedge (B \vec{e}_z)$$

$$\Rightarrow d\vec{F}_{AH} = |i_{AB}| B dx \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{AH} = |i_{AB}| B \int_0^{vt} dx \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{AH} = |i_{AB}| B (vt) \vec{e}_y$$

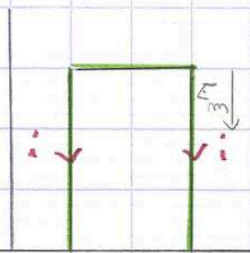
$e_{KB} = 0$ mais i_{AB} circule dans KB.

$$\Rightarrow \vec{F}_{KB} = |i_{AB}| B vt (-\vec{e}_y)$$

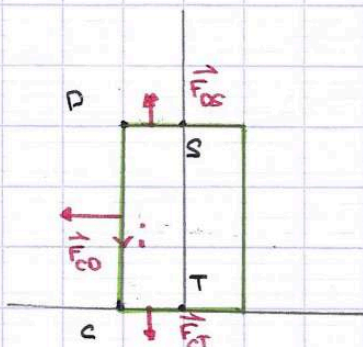
Donc résultante $\vec{R}_z = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AH} + \vec{F}_{KB}$
 $= -\frac{\sqrt{B^2 h^2}}{R} \vec{e}_x$

Cas 3 $a \leq x \leq 3a$

Courant total nul



Cas 4 $3a \leq x \leq 5a$



Dans ce cas le courant induit (dans DC) circule dans le sens opposé à celui

$$d\vec{F}_{cd} = I'_{cd} B dy (-\vec{e}_x)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{cd} = I'_{cd} B h (-\vec{e}_x)$$

Dans CT et DS

pas de sem induite directement mais i_{cd} circule dans tout le circuit.

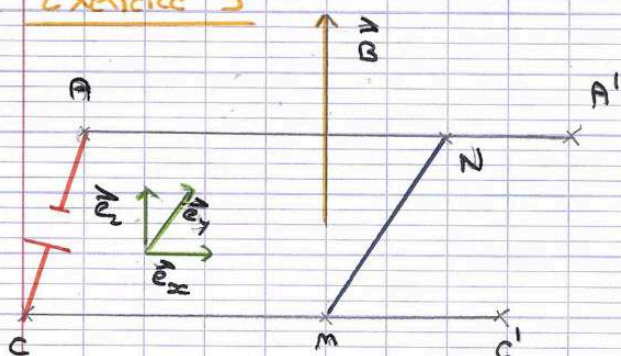
$$\vec{F}_{CT} = -I'_{cd} B (5a - vt) \vec{e}_x$$

$$\vec{F}_{DS} = I'_{cd} B (4a - vt) \vec{e}_x$$

Dans les 2 cas, la force de Laplace est une force de freinage (Loi de Lenz).

Pour compenser, il faut donc exercer une force positive d'intensité $\frac{\sqrt{B^2 h^2}}{R}$.

Exercice 5



1) Batterie: $I = \frac{6}{2} = 3A$

Force de Laplace sur le barreau MN.

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= I d\vec{P} \wedge \vec{B} = I (-dy \vec{e}_y) \wedge (B \vec{e}_z) \\ &= I B dy (-\vec{e}_x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= I B \int_{-a/2}^{a/2} dy (-\vec{e}_x) = -I B a \vec{e}_x \\ \|\vec{F}\| &= 0,3 N. \end{aligned}$$

2) Plus de batterie mais $v = 5 m.s^{-1}$

Cas 1: $\vec{v} = v \vec{e}_x$

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = v \vec{e}_x \wedge B \vec{e}_z = -v B \vec{e}_y$$

D'où la fem induite: $\epsilon_{MN} = \int_{MN} \vec{E}_m \cdot d\vec{P} = \int_{-a/2}^{a/2} (-v B \vec{e}_y) (dy \vec{e}_y) = -v B a$

et $i_{MN} = \frac{-v B a}{R} \Rightarrow \vec{F}_L = \frac{v B^2 a^2}{R} \vec{e}_x$

Cas 2: $\vec{v} = -v \vec{e}_x$

$$\begin{aligned} \vec{E}_m &= \vec{v} \wedge \vec{B} = -v \vec{e}_x \wedge B \vec{e}_z = v B \vec{e}_y \Rightarrow \epsilon_{MN} = v B a \\ i_{MN} &= \frac{v B a}{R} \end{aligned}$$

Force de Laplace: $d\vec{F}_L = i_{MN} d\vec{P} \wedge \vec{B} = i_{MN} (-dy \vec{e}_y) \wedge (B \vec{e}_z)$
 $\Rightarrow \vec{F}_L = \frac{v B^2 a^2}{R} (-\vec{e}_x)$

AN: $i = \frac{\sqrt{3}a}{R} = 0,25A$

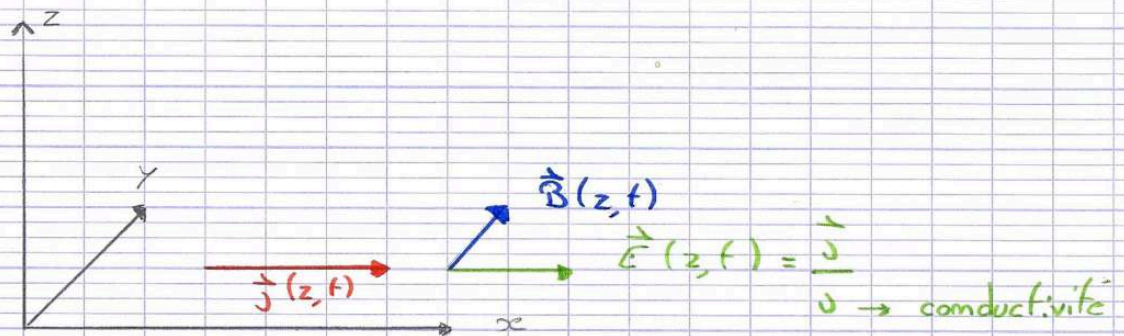
3) Batterie $\hat{=}$ nouveau dans le circuit

cas 2: I et i opposés

$$I_{\text{tot}} = I - i = 2,75A$$

Equations de l'électromagnétisme en régime variable.

Exercice 13 : Effet de peau



$$\vec{j}(\vec{r}, t) = j_0 e^{\alpha z} e^{i\omega t} \vec{u}_x$$

Loi d'Ohm $\vec{j} = \sigma \vec{E} \rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma}$ et on donne aussi:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = B_0 e^{\alpha z} e^{i\omega t} \vec{u}_y$$

1) Justification de $\vec{B}$

a) Théorème d'Ampère

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$
$$\vec{B} \perp \vec{j}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

b) Plan xoz : Plan de symétrie pour $\vec{j}$

$\Rightarrow \vec{B}$ est donc $\perp$ au plan xoz

$$\Rightarrow \vec{B} \parallel \vec{O}_y$$

2) a) Théorie de Maxwell - Ampère

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Maxwell - Gauss}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Maxwell - Faraday}$$

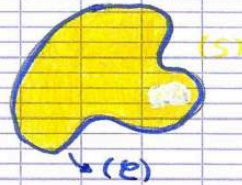
$$\text{div } \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B} \text{ est conservatif}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{Maxwell - Ampère}$$

Rajout de J.C. Maxwell pour que le théorème Maxwell-Ampère soit cohérent avec la conservation de la charge électrique $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Forme intégrée : $\iint_{(S)} \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_{(S)} \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$
 S est une surface quelconque

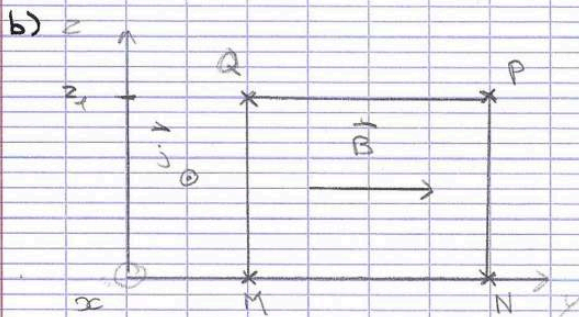
Théorème Stokes : $\iint_{(S)} \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{P}$



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{P} = \mu_0 \iint_{(S)} \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

Remarque

Théorème Ampère en statique
 $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{P} = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$



i) Circulation de $\vec{B}$ sur le contour MNPQ

$$\begin{aligned} \oint_{MNPQ} \vec{B} \cdot d\vec{P} &= \int_{MN} \vec{B} \cdot d\vec{P} + \int_{NP} \vec{B} \cdot d\vec{P} + \int_{PQ} \vec{B} \cdot d\vec{P} + \int_{QM} \vec{B} \cdot d\vec{P} \\ &= \int_{MN} B_0 e^{\alpha z} \vec{u}_y \cdot (dy \vec{u}_y) + \int_{NP} B_0 e^{\alpha z} e^{i\omega t} \vec{u}_y \cdot (dy \vec{u}_y) \end{aligned}$$

$$d'où \oint \vec{B} \cdot d\vec{P} = B_0 e^{i\omega t} \int_0^L dy - B_0 e^{\alpha z_1} e^{i\omega t} \int_0^L dy$$

$$\text{Soit } \oint \vec{B} \cdot d\vec{P} = B_0 L e^{i\omega t} [1 - e^{\alpha z_1}]$$

ii) Flux de $\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ à travers la surface (S)
limitée par MNPA.

$$\mu_0 \iint_{(S)} (\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$

$$\begin{aligned} \text{on } \vec{j} &= j_0 \frac{\vec{E}}{E_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{j_0}{\epsilon_0} \vec{j} \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad \text{on } \vec{j} = j_0 e^{\alpha z} e^{i\omega t} \vec{u}_x \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{\partial j}{\partial t} = i\omega j \quad ; \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{i\omega}{\epsilon_0} \vec{j}$$

$$d'où \mu_0 \iint_{(S)} (\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 (1 + i \frac{\epsilon_0 \omega}{j}) \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} &= \iint j_0 e^{\alpha z} e^{i\omega t} \vec{u}_x (dy dz \vec{u}_x) \\ &= j_0 e^{i\omega t} \int_0^L dy \int_0^{z_1} e^{\alpha z} dz = j_0 e^{i\omega t} L \frac{1}{\alpha} [e^{\alpha z}]_0^{z_1} \end{aligned}$$

$$\iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = j_0 e^{i\omega t} L \frac{1}{\alpha} [e^{\alpha z_1} - 1]$$

$$\text{donc } \mu_0 \iint_{(S)} (\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$

$$= \mu_0 (1 + i \frac{\epsilon_0 \omega}{j}) j_0 e^{i\omega t} L \frac{1}{\alpha} [e^{\alpha z_1} - 1]$$

Donc dans ce cas particulier le Théorème de Maxwell
ampère même à :

$$B_0 e^{i\omega t} L [1 - e^{\alpha z_1}] = -\mu_0 (1 + i \frac{\epsilon_0 \omega}{j}) j_0 e^{i\omega t} L \frac{1}{\alpha} [1 - e^{\alpha z_1}]$$

c) donc $B_0 = -\mu_0 \left(1 + \frac{i\epsilon_0\omega}{\gamma}\right) \frac{j_0}{\alpha}$

d) courant de déplacement vs courant de conduction

$$\hookrightarrow \frac{\frac{\epsilon_0\omega}{\gamma}}{1} = \epsilon_0\omega \frac{1}{\gamma} = 1,5 \cdot 10^{-10} \ll 1$$

$\Rightarrow$ courant de déplacement négligeable par rapport au courant vrai

$$B_0 = -\frac{\mu_0 j_0}{\alpha} \quad (1)$$

3) a) Théorème Maxwell - Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{on ici} \quad \vec{E} = \frac{j_0}{\gamma} e^{\alpha z} e^{i\omega t} \vec{u}_x$$

$$\text{et } \vec{B} = B_0 e^{\alpha z} e^{i\omega t} \vec{u}_y$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial z} E_x(z,t) \vec{u}_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x(z,t) \vec{u}_z$$

$$\text{d'où } \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} E_x(z,t) \vec{u}_y = -\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial t} \vec{u}_y$$

$$\Rightarrow \alpha \frac{j_0}{\gamma} e^{\alpha z} e^{i\omega t} = -i\omega B_0 e^{\alpha z} e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow -i\omega B_0 = \frac{\alpha j_0}{\gamma}$$

$$\Rightarrow B_0 = i \frac{\alpha j_0}{\gamma \omega} \quad (2)$$

1) Avec les relations 1 et 2, on a

$$\frac{\mu_0 j_0}{\alpha} = i \frac{\alpha j_0}{\gamma \omega} \Rightarrow \alpha^2 = i \mu_0 \gamma \omega$$

$$\Rightarrow \alpha = \pm \sqrt{i \mu_0 \gamma \omega}$$

$$\text{on } \sqrt{i} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)$$

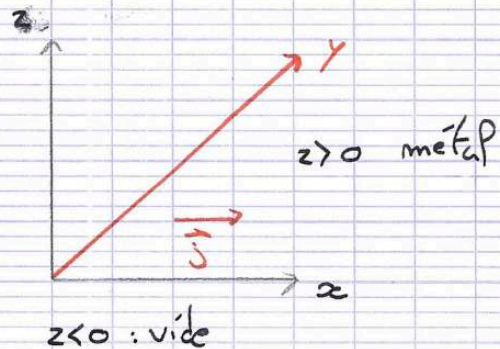
Donc $\alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \sqrt{\mu_0 \delta \omega}$
 $= \pm (1+i) \sqrt{\frac{\mu_0 \delta \omega}{2}}$

s) a) On pose $\alpha = \alpha' + i\alpha''$
 $\Rightarrow \alpha = \pm \left[\sqrt{\frac{\mu_0 \delta \omega}{2}} + i \sqrt{\frac{\mu_0 \delta \omega}{2}} \right]$

donc $\alpha' = \alpha'' = \sqrt{\frac{\mu_0 \delta \omega}{2}}$

→ Interprétation

$\vec{j} = j_0 e^{\alpha z} e^{i\omega t} \vec{u}_x$



b) $\Rightarrow \vec{j} = j_0 e^{\pm \alpha' z \pm i\alpha'' z} e^{i\omega t} \vec{u}_x$

$\vec{j} = j_0 e^{\pm \alpha' z} e^{i(\omega t \pm \alpha'' z)} \vec{u}_x$

↳ seule solution physiquement acceptable

$\Rightarrow \vec{j} = j_0 e^{-\alpha' z} e^{i(\omega t - \alpha'' z)} \vec{u}_x$

↳ effet de peau : décroissance exponentielle de la densité de courant quand on s'éloigne de l'interface

→ courant se propage sur une "peau"

On pose $\delta = \frac{1}{\alpha'}$ $\Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \delta \omega}} = 5,1 \mu m$

↳ distance au bout de laquelle la densité de courant est plus faible.

c) phénomène ondulatoire qui se propage le long de z .

$\vec{j} = j_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \alpha'' z)} \vec{u}_x$

(le courant se déplace sur x mais se propage)

Exercice 15

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - ay - \frac{a}{2}z)} \vec{e}_x$$

1) a) Vecteur d'onde

$$-\vec{R} \cdot \vec{r} = -(R_x x + R_y y + R_z z) \Rightarrow R_x = 0, R_y = 0, R_z = \frac{a}{2}$$
$$= -ay - \frac{a}{2}z$$

$$\vec{R} = a\vec{e}_y + \frac{a}{2}\vec{e}_z$$

b) Vecteur unitaire de la direction de propagation : $\vec{e}_0$

$$\vec{e}_0 = \frac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|} = \frac{\vec{R}}{R} \quad R = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$$\text{donc } \vec{e}_0 = \frac{\vec{R}}{R} = \frac{\sqrt{5}}{5} (2\vec{e}_y + \vec{e}_z)$$

c) Longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{R} = \frac{4\pi}{\sqrt{5}a}$

d) Fréquence $\gamma = \frac{c}{\lambda} = \frac{\sqrt{5}ac}{4\pi}$

2) a) Champ magnétique

$$\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - ay - \frac{a}{2}z)) \vec{e}_x$$

$$\hookrightarrow \text{not } \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\vec{B} \text{ associé: } \text{not } \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \rightarrow -\vec{R} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B}$$
$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{R} \wedge \vec{E}$$

$$\text{d'où } \vec{B} = \frac{1}{c} \left[\frac{\sqrt{5}}{5} (2\vec{e}_y + \vec{e}_z) \right] \wedge \left[E_0 \exp(i(\omega t - ay - \frac{a}{2}z)) \vec{e}_x \right]$$

$$= \frac{E_0}{\sqrt{5}c} \exp(i(\omega t - ay - \frac{a}{2}z)) ((2\vec{e}_y + \vec{e}_z) \wedge \vec{e}_x)$$
$$= \frac{E_0}{\sqrt{5}c} \exp(i(\omega t - ay - \frac{a}{2}z)) [-2\vec{e}_z + \vec{e}_y]$$

Soit $\vec{B} = \frac{E_0}{\sqrt{3}c} \exp(i(\omega t - ay - \frac{a}{2}z)) (\vec{e}_y - 2\vec{e}_z)$

b) $\text{Re}(\vec{E}) = E_0 \cos(\omega t - ay - \frac{a}{2}z) \vec{e}_x$
 $\text{Re}(\vec{B}) = \frac{E_0}{\sqrt{3}c} \cos(\omega t - ay - \frac{a}{2}z) (\vec{e}_y - 2\vec{e}_z)$

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} [\text{Re}(\vec{E}) \wedge \text{Re}(\vec{B})] = \frac{E_0^2}{\sqrt{3}\mu_0 c} \cos^2(\omega t - ay - \frac{a}{2}z) (\vec{e}_x \wedge (\vec{e}_y - 2\vec{e}_z))$$

$$= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - \frac{a}{2}z) [\frac{\sqrt{3}}{3} (2\vec{e}_y + \vec{e}_z)]$$

On $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{\mu_0 c} = \epsilon_0 c$

Exercice 16

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y(y, z, t) = E_0 \cos(\pi/a y) \exp(i(\omega t - k_0 z)) \\ E_z(y, z, t) = \alpha E_0 \sin(\pi/a y) \exp(i(\omega t - k_0 z)) \end{cases}$$

1) Théorème de Maxwell - Gauss

$$\cdot \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \text{dans le vide } \rho = 0.$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\text{donc } \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow -E_0 \left(\frac{\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi}{a} y\right) \exp(i(\omega t - k_0 z)) - i k_0 \alpha [\sin\left(\frac{\pi}{a} y\right) \exp(i(\omega t - k_0 z))] = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{E_0}{a} \left(\frac{\pi}{a}\right) - i k_0 \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-\pi}{a i k_0} = i \frac{\pi}{a k_0} \quad \text{I}$$

Équation de d'Alembert

$$\Delta \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = \vec{0} \rightarrow \begin{cases} \Delta E_y - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 E_y}{dt^2} = 0 & (1) \\ \Delta E_z - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 E_z}{dt^2} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \\ & -\frac{\pi^2}{a^2} E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} y\right) e^{i(\omega t - k_0 z)} + (-i k_0)^2 E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} y\right) e^{i(\omega t - k_0 z)} \\ & - \frac{1}{c^2} (i\omega)^2 E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} y\right) e^{i(\omega t - k_0 z)} = 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k_0^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = k_0^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \quad \text{II}$$

$$(2) \rightarrow \frac{\partial^2 \bar{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}_z}{\partial t^2} = 0$$

$$\rightarrow -\frac{\pi^2}{a^2} - k_0^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad \text{idem}$$

2) Théorème Maxwell - Faraday $\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \bar{E}_y & \bar{E}_z \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial \bar{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[0 - \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial \bar{E}_y}{\partial z} - 0 \right] \vec{e}_z$$

$$= \frac{\pi}{a} \times \bar{E}_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} y\right) e^{i(\omega t - k_0 z)} - (-ik_0) \bar{E}_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} y\right) e^{i(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\pi}{a} + ik_0 \right) \bar{E}_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} y\right) e^{i(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_x = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = - \frac{1}{i\omega} \left(\frac{\pi}{a} + ik_0 \right) \bar{E}_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} y\right) e^{i(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_x$$

$$\left(\frac{\pi}{a} + ik_0 \right) = \left(\frac{i}{k_0} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + ik_0 \right)$$

$$= \frac{i}{k_0} \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + k_0^2 \right]$$

$\frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{(II)}$

donc $\left(\frac{\pi}{a} + ik_0 \right) = \frac{i}{k_0} \frac{\omega^2}{c^2}$

donc $\vec{B} = \frac{1}{\omega} \left(\frac{i}{k_0} \frac{\omega^2}{c^2} \right) \bar{E}_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} y\right) e^{i(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_x$

$$\vec{B} = - \frac{\omega}{k_0 c^2} \bar{E}_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} y\right) e^{i(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_x$$

3) a) Progressive car $(\omega t - k_0 z) \Rightarrow$ propagation de l'onde dans le sens des $z > 0$

b) $\vec{E}$ possède des composantes sur O_y et O_z direction de propagation

$\rightarrow$ Nom transverse électrique à cause de la composante sur O_z

c) $\vec{B}$ n'a pas de composante que sur x
 $\rightarrow$ transverse magnétique

4) $\checkmark$

d) Harmonique de pulsation ω $\swarrow$ monochromatique

e) Nom uniforme à cause des $\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{a} y) \\ \sin(\frac{\pi}{a} y) \end{cases}$

4) Vecteur de Poynting

$$\begin{aligned} \text{Re}(\vec{E}) &= \begin{cases} \text{Re}(\vec{E}_x) = 0 \\ \text{Re}(\vec{E}_y) = E_0 \cos(\frac{\pi}{a} y) \cos(\omega t - k_0 z) \\ \text{Re}(\vec{E}_z) = -\frac{\pi}{ak_0} E_0 \sin(\frac{\pi}{a} y) \sin(\omega t - k_0 z) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Re}(\vec{B}) = -\frac{\omega}{k_0 c^2} E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} y\right) \cos(\omega t - k_0 z) \vec{e}_x$$

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} [\text{Re}(\vec{E}) \wedge \text{Re}(\vec{B})] = \frac{1}{\mu_0} [\text{Re}(\vec{E}_y) \vec{e}_y + \text{Re}(\vec{E}_z) \vec{e}_z] \wedge [\text{Re}(\vec{B}_x) \vec{e}_x]$$

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} [\text{Re}(\vec{E}_z) \text{Re}(\vec{B}_x) \vec{e}_y - \text{Re}(\vec{E}_y) \text{Re}(\vec{B}_x) \vec{e}_z]$$

$$\vec{P} = P_y \vec{e}_y + P_z \vec{e}_z \quad \begin{cases} P_y = \frac{1}{\mu_0} \text{Re}(\vec{E}_z) \text{Re}(\vec{B}_x) \\ P_z = -\frac{1}{\mu_0} \text{Re}(\vec{E}_y) \text{Re}(\vec{B}_x) \end{cases}$$

$$P_y = \frac{\omega \mu \epsilon_0^2}{\mu_0 k_0 c^2} \sin\left(\frac{\pi}{a} y\right) \cos\left(\frac{\pi}{a} y\right) \sin(\omega t - k_0 z) \cos(\omega t - k_0 z)$$

$$P_y = \frac{\omega \mu \epsilon_0^2}{\mu_0 k_0 c^2} \left(\frac{1}{4}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a} y\right) \sin(2(\omega t - k_0 z))$$

$$P_z = \frac{\omega}{\mu_0 k_0 c^2} \epsilon_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{a} y\right) \cos^2(\omega t - k_0 z)$$

Valeur moyenne temporelle

on intègre la puissance
et d'une fonction sur sa
↑ période.

$$\langle \vec{P} \rangle_T = \langle P_y \rangle_T \vec{e}_y + \langle P_z \rangle_T \vec{e}_z$$

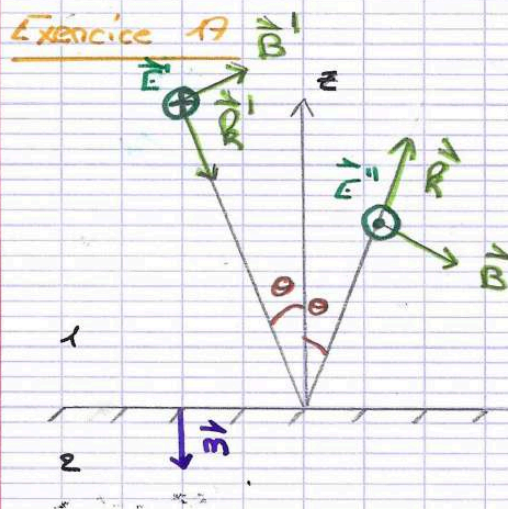
$$\langle P_y \rangle_T = \frac{\omega \mu \epsilon_0^2}{\mu_0 k_0 c^2} \left(\frac{1}{4}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a} y\right) \frac{1}{T} \int_0^{T=\frac{2\pi}{\omega}} \sin(2(\omega t - k_0 z)) dt = 0$$

$$\text{et } \langle P_z \rangle_T = \frac{\omega \epsilon_0^2}{\mu_0 k_0 c^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{a} y\right) \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - k_0 z) dt = 1/2$$

$$= \frac{\omega \epsilon_0^2}{2 \mu_0 k_0 c^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{a} y\right)$$

$$\text{donc } \langle \vec{P} \rangle_T = \frac{\omega \epsilon_0^2}{2 \mu_0 k_0 c^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{a} y\right) \vec{e}_z$$

Propagation de l'énergie
associée à l'onde,
en moyenne le long
de Oz.



Métal parfait (conductivité
infinie).

Rappel Équations de passage du champ EM entre 2 milieux.

$$\begin{cases} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0} \vec{n} \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 (\vec{j}_s \wedge \vec{n}) \end{cases}$$

variables dans le plan de l'interface $\vec{n}$ orientée de 1 vers 2.

σ_s et $\vec{j}_s$: densité de charges et de courant superficielles dans le plan de l'interface.

$\vec{j}_s \wedge \vec{\sigma}_s$: vecteur // à l'interface

1) Vecteur d'onde incident : $\vec{k}' = \frac{2\pi\nu}{c} (\sin\theta \vec{e}_x - \cos\theta \vec{e}_z)$

Vecteur d'onde réfléchi : $\vec{k}'' = \frac{2\pi\nu}{c} (\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_z)$

2) $\vec{E}' = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r})} \vec{e}_y$
 $= E_0 \exp \left[i \left(2\pi\nu t - \left(\frac{2\pi\nu}{c} \sin\theta x - \frac{2\pi\nu}{c} \cos\theta z \right) \right) \right] \vec{e}_y$
 $= E_0 \exp \left[i 2\pi\nu \left(t - \frac{\sin\theta}{c} x + \frac{\cos\theta}{c} z \right) \right] \vec{e}_y$

3) Équation de passage pour $\vec{E}$:

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0} \vec{n}$$

onde incidente
+ onde réfléchie
↑

projection // : $\vec{E}_2'' - \vec{E}_1'' = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_1'' = \vec{0}$
 $= \vec{0}$ car métal de conductivité infinie

$$\Rightarrow E'(z=0) + E''(z=0) = 0$$

$$\Rightarrow E''(z=0) = - E_0 e^{i 2\pi\nu \left(t - \frac{\sin\theta}{c} x \right)}$$

$$\Rightarrow \vec{E}'' = - E_0 \exp \left(i 2\pi\nu \left(t - \frac{\sin\theta}{c} x - \frac{\cos\theta}{c} z \right) \right) \vec{e}_y$$

↑
 $e^{i\pi} \rightarrow$ phase de π à la réflexion

4) $\vec{B}'$ et $\vec{B}'' \rightarrow$ Maxwell - Faraday

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\Rightarrow \nabla \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} = - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \mathbf{e}_y$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{B}'}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dz} e_x^y - \frac{d\vec{r}'}{dx} e_z^y$$

$$= i \frac{2\pi v}{c} \frac{c^{-1}}{y} \frac{e_1}{x} + \frac{i 2\pi v}{c} \sin \theta \frac{c^{-1}}{y} \frac{e_2}{z}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^2} \left[i \frac{2\pi r}{c} \cos \theta \vec{e}_y + \dots \right]$$

$$\Rightarrow B' = \frac{1}{c} (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_z) \vec{e}_y'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B'_x = \frac{c \cos \theta}{c} \\ B'_z = \frac{c \sin \theta}{c} \end{cases} \quad \begin{matrix} \vec{L}_0 \exp(i 2\pi \gamma (t - \frac{1}{c} (\sin \theta x - \cos \theta z))) \\ \text{"} \quad \text{"} \end{matrix}$$

- De la même façon pour B'' :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A} \\ \vec{B} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{A} \\ \vec{B} \end{array} \right\} \exp(i 2 \pi \gamma (t - \frac{1}{c} (z \sin \theta_x - \cos \theta_z)))$$

Équations de passage pour $\vec{B}$:

$$B_2 - B_1 = \mu_0 (\underline{j}_2 - \underline{j}_1)$$

dans le plan
de l'intergare

→ composantes $\perp = \underline{B_2} - B_1 = \underline{0} \Rightarrow \underline{B_1} = \underline{0}$
 = 0 con metal
 parfait

$$\Rightarrow B_z'(z=0) + B_z''(z=c) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta}{c} \cdot \exp(i 2 \pi \nu (t - \frac{\sin \theta}{c} x)) = \text{idem} = 0$$

5) Pour la composante tangentielle de $\vec{B}$

$$\vec{B}_2'' - \vec{B}_1'' = \mu_0 (\vec{j}_S \wedge \vec{n})$$

$$\Rightarrow [B_x'(z=0) + B_x''(z=0)] \vec{u}_x = -\mu_0 (\vec{j}_S \wedge (-\vec{u}_z))$$

$$\Rightarrow \mu_0 j_{Sy} = \frac{\cos \theta}{c} \epsilon_0 \exp \left[i 2\pi \nu \left(t - \frac{1}{c} \sin \theta x \right) \right] \vec{j}_S = j_{Sy} \vec{u}_y$$

$$+ \frac{\cos \theta}{c} \exp \left[i 2\pi \nu \left(t - \frac{1}{c} \sin \theta x \right) \right]$$

$$\Rightarrow j_{Sy} = \frac{2 \cos \theta}{\mu_0 c} \epsilon_0 e^{i 2\pi \nu \left(t - \frac{\sin \theta}{c} x \right)}$$

6) Champ électrique total

$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}''$$

$$= \epsilon_0 \exp \left[i 2\pi \nu \left(t - \frac{\sin \theta}{c} x + \frac{\cos \theta}{c} z \right) \right] \vec{e}_y$$

$$- \epsilon_0 \exp \left[i 2\pi \nu \left(t - \frac{\sin \theta}{c} x - \frac{\cos \theta}{c} z \right) \right] \vec{e}_y$$

$$= \epsilon_0 \exp \left[i 2\pi \nu \left(t - \frac{\sin \theta}{c} x \right) \right] \left[\exp \left(i \frac{2\pi \nu}{c} \cos \theta z \right) - \exp \left(-i \frac{2\pi \nu}{c} \cos \theta z \right) \right]$$

$$\vec{E} = 2i \epsilon_0 \sin \left(\frac{2\pi \nu}{c} \cos \theta z \right) e^{i 2\pi \nu \left(t - \frac{\sin \theta}{c} x \right)} \vec{e}_y$$

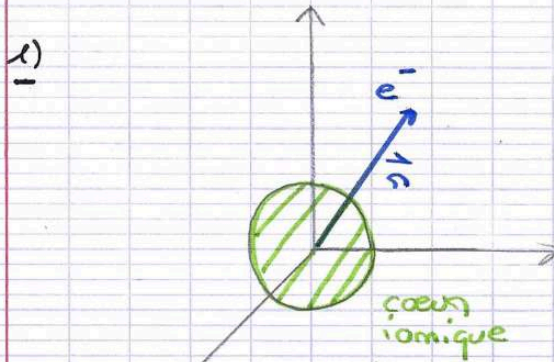
→ L'onde résultante se propage dans le sens des $x > 0$ avec une amplitude modulée dans la direction Oz (onde non uniforme)

⇒ Vecteur d'onde de l'onde résultante

$$\vec{k} = \frac{2\pi \nu}{c} \sin \theta \vec{e}_x$$

Exercice 19

plasma : gaz ionisé $\left\{ \begin{array}{l} m e^- / \text{unité de volume} \rightarrow \text{mobiles} \\ m \text{ ions de charge } +e \rightarrow \text{immobils} \end{array} \right.$



$$\Rightarrow \frac{d^2 \vec{n}}{dt^2} + \omega_p^2 \vec{n} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{n}(t) = \vec{n}_0 e^{i\omega_p t}$$

$$\vec{F} = - \frac{me^2}{\epsilon_0} \vec{n}$$

2nd loi de Newton

$$m \vec{a} = \vec{F} \Rightarrow m \frac{d^2 \vec{n}}{dt^2} = - \frac{me^2}{\epsilon_0} \vec{n}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \vec{n}}{dt^2} + \frac{me^2}{m\epsilon_0} \vec{n} = \vec{0}$$

ω_p : pulsation plasma
fréquence propre
du plasma

2) Champ $\vec{E}$ d'une onde qui se propage dans le plasma

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$\rightarrow$ e^- se met à osciller à la fréquence

$$\omega \rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 e^{i\omega t}$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = i\omega \vec{v}$$

$$\text{et } m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$$

$$\Rightarrow im\omega \vec{v} = -e\vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = i \frac{e}{m\omega} \vec{E}$$

Densité de courant :

$$\vec{j}_e = -e n \vec{v} = -i \frac{ne^2}{m\omega} \vec{E} = \gamma \vec{E}$$

3) Équation de Maxwell $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{d\vec{B}}{dt} \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \end{aligned}$$

Équation de propagation de $\vec{E}$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{rot}\left(-\frac{d\vec{B}}{dt}\right)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} &= -\frac{d}{dt}(\operatorname{rot} \vec{B}) \\ &= 0 \Rightarrow \text{th Gauss} & \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \\ \Rightarrow -\Delta \vec{E} &= -\frac{d}{dt}(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} = \mu_0 \frac{d\vec{j}}{dt} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = \mu_0 \frac{d\vec{j}}{dt} \rightarrow \delta \vec{E}$$

Opérateur d'Alembert

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Équation de propagation de $\vec{E}$: $\Delta \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

$$\begin{aligned} 1) \text{ On } \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} & &= -i \frac{\mu_0 m e^2}{m \omega} \frac{d\vec{E}}{dt} \\ \Delta \vec{E} &= -k^2 \vec{E} & & \\ \frac{d\vec{E}}{dt} &= i\omega \vec{E} & \Rightarrow & -k^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} (-\omega^2 \vec{E}) = -\frac{i\mu_0 m e^2}{m \omega} (i\omega) \vec{E} \\ \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} &= -\omega^2 \vec{E} & \Rightarrow & -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\mu_0 m e^2}{m} \end{aligned}$$

$$\text{on } \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \Rightarrow -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} \frac{m c^2}{m \epsilon_0} = \frac{\omega_p^2}{c^2}$$

↳ Relation de dispersion de l'onde dans le plasma

$$k^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2)$$

Si $\omega < \omega_p \rightarrow k^2 < 0 \rightarrow k = \pm ib$ avec $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ &= \vec{E}_0 e^{i\omega t} e^{i(\pm ibx)} \\ &= \vec{E}_0 e^{i\omega t} e^{\pm b x} \end{aligned}$$

→ Onde évanescente → l'onde ne se propage pas dans le plasma si $\omega < \omega_p$

Pour contre si $\omega > \omega_p$ alors $k^2 > 0 \Rightarrow k$ réel

→ l'onde peut alors se propager dans le plasma.

Rappel: Vitesse de phase vs vitesse de groupe

$$v_g v_\phi = c^2$$

* vitesse de phase: $(\omega t - kx) \rightarrow v_\phi = \frac{\omega}{k} \rightarrow$ homogène

on peut avoir $v_\phi > c$ à une

* " de groupe: $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ ← vitesse de propagation de l'énergie de l'onde
 $v_g < c$.

$$\text{Ici: } k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \Rightarrow v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

$$\text{5) } v_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}} = \frac{e}{2\pi} \sqrt{\frac{n}{m\epsilon_0}}$$

$$\text{AN: } \approx 10 \text{ MHz}$$

$$\text{6) } n = \frac{c}{v_\phi} \rightarrow n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

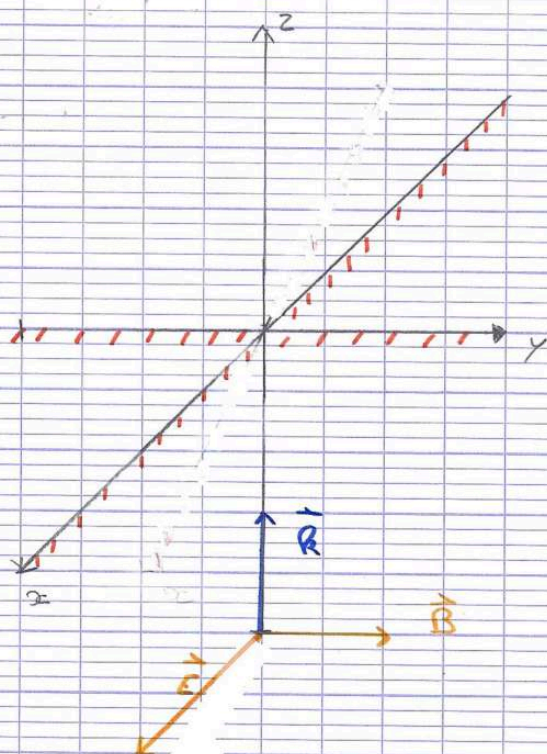
$$\Rightarrow n = \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi v_p}{2\pi \nu}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{v_p^2}{\nu^2}}$$

$$\text{AN: } v_p = 10 \text{ MHz}$$

$$n \approx 0,564$$

$$\nu = 12 \text{ MHz}$$

Exercice : Milieu conducteur



milieu conducteur $z > 0$

vide ($z < 0$)

$$\vec{B} = B(z) e^{i\omega t} \vec{u}_y$$

1) $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ on milieu neutre $\rho = 0$

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\vec{j}$ déplacement
 $\rightarrow \|\vec{j}_d\| \ll \|\vec{j}_c\|$

d'où

$$\begin{cases} \text{div } \vec{E} = 0 \\ \text{div } \vec{B} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

+ Loi d'Ohm $\vec{j}_c = \gamma \vec{E}$
 ↑ conductivité du métal

2) Théorème Maxwell - Ampère :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}) = \frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \vec{j}_c)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{grad}(\text{div } \vec{B}) - \Delta \vec{B} &= \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{j}_c) \\ &= \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \Delta \vec{B} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \vec{B}$$

$$\text{d'où } \Delta \vec{B} + i\mu_0 \gamma \omega \vec{B} = \vec{0}$$

On fait apparaître

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

$$\Rightarrow \mu_0 \gamma \omega = \frac{2}{\delta^2}$$

Soit $\Delta \vec{B} - \frac{2}{\delta^2} \vec{B} = \vec{0}$
 on $[\pm(1+i)]^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

$$\text{d'où } \Delta \vec{B} - \left(\frac{[\pm(1+i)]^2}{\delta^2}\right) \vec{B} = \vec{0}$$

3) $\vec{B} = B(z) e^{i\omega t} \vec{u}_y$ donc $\Delta \vec{B} - \alpha^2 \vec{B} = \vec{0}$

$$\hookrightarrow \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} - \alpha^2 B_x = 0$$

pas de composante en x.

idem en y et z

$$\hookrightarrow \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \alpha^2 B_y$$

$$\text{d'où } \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \alpha^2 B_y = 0 \quad \text{avec } \alpha = \pm \frac{(1+i)}{\delta}$$

La solution est de la forme $B_y(z) = A e^{\alpha z} + B e^{-\alpha z}$

$$\hookrightarrow B_y(z) = A \exp\left(\pm(1+i)\frac{z}{\delta}\right) + B \exp\left(\pm(1+i)\frac{z}{\delta}\right)$$

$$B_y(z) = \begin{cases} A e^{i\frac{z}{\delta}} e^{\frac{z}{\delta}} + B e^{-i\frac{z}{\delta}} e^{-\frac{z}{\delta}} \\ A e^{-i\frac{z}{\delta}} e^{-\frac{z}{\delta}} + B e^{i\frac{z}{\delta}} e^{\frac{z}{\delta}} \end{cases}$$

Pour éliminer
 $\rightarrow A=0$ le comportement
 $\rightarrow B=0$ en $e^{\frac{z}{\delta}}$

$\hookrightarrow$ croissance
 expo de $\vec{B}$
 pour $z \rightarrow +\infty$

$$\vec{B} = B_y(z) e^{i\omega t} \vec{u}_y = B_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} \vec{u}_y$$

onde évanescente "propagation" dans le zéro
 pour $z > 0$.

Champ électrique associé

Théorème Maxwell Ampère:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_c = \mu_0 j \vec{e}_z$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = - \frac{\partial B_y}{\partial z} \vec{e}_x$$

$$\text{d'où} \quad - \frac{\partial B_y}{\partial z} \vec{e}_x = \mu_0 j \vec{e}_z$$

$$\rightarrow - \frac{\partial}{\partial z} \left[B_0 e^{i\omega t} e^{-(1+i)z/\delta} \right] \vec{e}_x$$

$$= \frac{(1+i)}{\delta} B_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)} \vec{e}_x = \mu_0 j \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{e}_z = \frac{(1+i)}{\mu_0 j \delta} B_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)}$$

$$\text{d'où} \quad \vec{e}_z = \frac{\sqrt{2}}{\mu_0 j \delta} B_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4})} \vec{e}_x$$

$$\text{et donc} \quad \vec{J}_c = j \vec{e}_z = \frac{\sqrt{2}}{\mu_0 \delta} B_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4})} \vec{e}_x$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 j \omega}} \quad \text{épaisseur de peau ou profondeur de pénétration}$$

$$\text{AN:} \quad \delta = 2,07 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 2,07 \mu\text{m}$$

4) Vecteur de Poynting

$$\text{Re}(\vec{e}_z) = \frac{\sqrt{2}}{\mu_0 j \delta} B_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) \vec{e}_x$$

$$\text{Re}(\vec{B}) = B_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta) \vec{u}_y$$

$$\text{et } \vec{P} = \frac{1}{\mu_0} (\text{Re}(\vec{E}) \wedge \text{Re}(\vec{B})) = \frac{\sqrt{2}}{\mu_0^2 \delta} B_0^2 e^{-2z/\delta} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}) \cos(\omega t - \frac{z}{\delta}) (\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y)$$

$$= \frac{B_0^2}{2\mu_0^2 \delta} e^{-2z/\delta} \left[\cos(2\omega t - 2\frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \vec{u}_z$$

Valeur moyenne

$$\langle \vec{P} \rangle = \frac{B_0^2}{2\mu_0^2 \delta} e^{-2z/\delta} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\omega t - 2\frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}) dt + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{T} \int_0^T dt \right\} \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \langle \vec{P} \rangle = \frac{B_0^2}{2\mu_0^2 \delta} e^{-2z/\delta} \vec{u}_z$$

en W.m^{-2}

puissance par unité
de surface.

puissance
↓

$$\text{donc } \langle \varphi \rangle = \iint_{(S)} \langle \vec{P} \rangle \cdot d\vec{S}$$

puissance pénétrant dans
le conducteur.

$$= \iint_{(S)} \frac{B_0^2}{2\mu_0^2 \delta} e^{-2z/\delta} \vec{u}_z \cdot (dx dy \vec{u}_z)$$

$$= \frac{B_0^2}{2\mu_0^2 \delta} e^{-2z/\delta} \underbrace{\iint_{(S)} dx dy}_S$$

$$\text{donc } \langle \varphi(z) \rangle = \frac{B_0^2}{2\mu_0^2 \delta} e^{-2z/\delta} S$$

$$\text{et } \langle \varphi(z=0) \rangle = \frac{B_0^2 S}{2\mu_0^2 \delta}$$

Puissance moyenne entrant
dans le conducteur

5) Puissance moyenne dissipée par l'effet Joule dans le volume $\{S, z \in [0, +\infty[$ du conducteur

→ Puissance moyenne dissipée par unité de volume.

$$\frac{dP}{dz} = \vec{j}_c \cdot \vec{E} \Rightarrow \frac{dP}{dz} = j \operatorname{Re}(\vec{E}) \operatorname{Re}(\vec{E}) = \frac{2}{(\mu_0 \delta)^2} B_0^2 e^{-2z/\delta} \cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\langle P \rangle}{dz} = - \frac{2}{\mu_0^2 \delta^2 \gamma} B_0^2 e^{-2z/\delta} \underbrace{\left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) dt \right\}}_{1/2}$$

$$\text{d'où : } \frac{d\langle P \rangle}{dz} = \frac{B_0^2 e^{-2z/\delta}}{\mu_0^2 \delta^2 \gamma}$$

$$\begin{aligned} \text{et donc } \langle P \rangle &= \iiint \frac{d\langle P \rangle}{dz} dz \\ &= \iiint \frac{B_0^2 e^{-2z/\delta}}{\mu_0^2 \delta^2 \gamma} dx dy dz \\ &= \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \gamma} \underbrace{\iint_S dx dy}_S \int_0^{+\infty} e^{-2z/\delta} dz \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \langle P \rangle = \frac{B_0^2 S}{2\mu_0^2 \delta \gamma}$$

$$\text{d'où } \langle P(z=0) \rangle = \frac{B_0^2 S}{2\mu_0^2 \delta \gamma}$$

puissance moyenne pénétrant dans le conducteur.

$$\text{et } \langle P \rangle = \frac{B_0^2 S}{2\mu_0^2 \delta \gamma}$$

Exercice 11: auto-induction

$$\begin{aligned}
 1) \quad U_{CA} &= -Ri \\
 U_{BA} &= L \frac{di}{dt} \\
 i &= -\frac{U_{CA}}{R}
 \end{aligned}
 \quad \text{d'où} \quad U_{BA} = -\frac{L}{R} \frac{dU_{CA}}{dt}$$

$$\begin{aligned}
 \text{si } \frac{dU_{CA}}{dt} < 0 &\Rightarrow U_{BA} > 0 \\
 \text{si } \frac{dU_{CA}}{dt} > 0 &\Rightarrow U_{BA} < 0
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dU_{CA}}{dt} &= \frac{0-1}{10^{-3}} = -4 \cdot 10^3 \text{ V.s}^{-1} \\
 \frac{dU_{CA}}{dt} &= \frac{1-0}{2 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^3 \text{ V.s}^{-1}
 \end{aligned} \right\} \text{Ce qui explique la fonction en créneau.}$$

$$2) \text{ D'après 1 on a } L = -\frac{RU_{BA}}{\frac{dU_{CA}}{dt}} = \frac{1}{4} 10^{-2} \text{ H}$$

Exercice 12: Inductance mutuelle

$$\begin{aligned}
 \Phi_{21} &= MI_2 & B_1 &= \mu_0 \frac{N}{l} I_1 \\
 \Phi_{12} &= MI_1 \\
 \Phi_{12} &= \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}' N' = N' B_1 \int dS' \\
 \Phi_{12} &= N' B_1 S = \mu_0 \frac{NN'}{l} SI_1
 \end{aligned}$$