Physique

Électromagnétisme Semestre 2

J.CAYSSOL

Table des matières

Première partie

Électrostatique

1 Force, champ et potentiel électrostatiques

1.1 Force de Coulomb

En 1785, Charles Augustin de Coulomb a déterminé quantitativement l'expression de la force d'interaction entre deux corps chargés.

Considérons 2 particules supposées ponctuelles :

— M_1 de charge q_1.

— M_2 de charge q_2.

La force d'interaction électrostatique vérifie le principe des actions mutuelles : l'action et la réaction sont opposées et portées par la droite joignant les deux points.

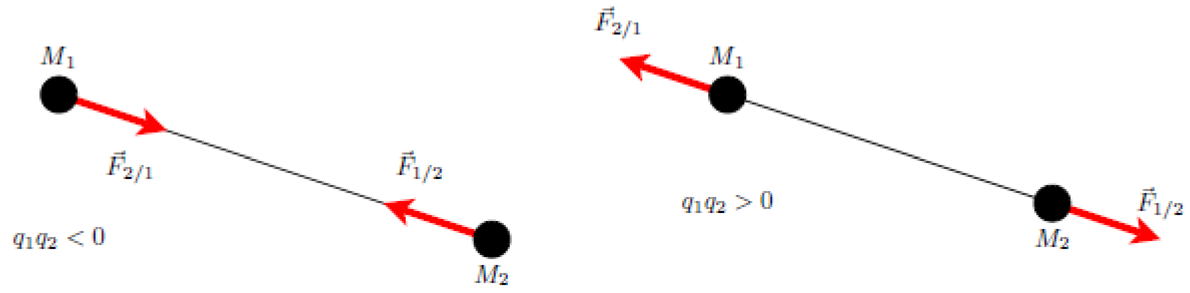


FIGURE 1 – Force de Coulomb

Des charges de signes opposés s'attirent, des charges de même signe se repoussent. La force est de plus proportionnelle à chaque charge et varie comme l'inverse de la distance entre les charges au carré.

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{M_1.M_2}}{M_1{M_2}^2}$$

$\vec{u}_{M_1M_2}$ est un vecteur unitaire orienté de la cause vers l'effet (de la charge créant la force vers celle la subissant).
La permittivité électrique du vide est notée $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-2} F.m^{-1} = \dfrac{1}{\mu_0 c^2}$

1.2 Champ électrique

En un point M de l'espace, plaçons une charge "test" notée q_{test}. La force de Coulomb $\vec{F}_{\text{test}}$. Le rapport des deux est appelé champ électrique :

$$\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}_{\text{test}}}{q_{\text{test}}}$$

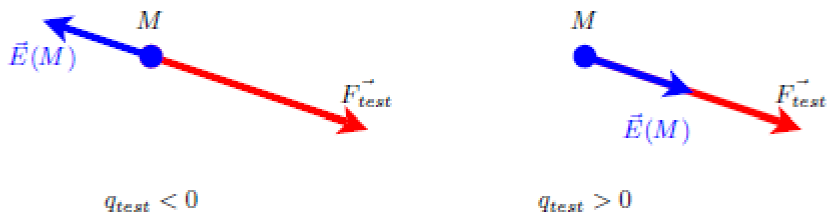


FIGURE 2 – Champ électrique

Champ créé par une charge ponctuelle. Plaçons une charge ponctuelle q en un point noté O (cause). La charge test q_{test} placée en M (effet) subit la force de Coulomb :

$$\vec{F}_{\text{test}} = \frac{qq_{\text{test}}}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{u}_{OM}}{OM^2}$$

$\vec{u}_{OM}$ est un vecteur unitaire orienté de la ause vers l'effet (de la charge créant l force vers celle la subissant). Le champ crée par la charge placée en O est alors donné par :

$$\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}_{\text{test}}}{q_{\text{test}}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{u}_{OM}}{OM^2}$$

En utilisant les coordonnées sphériques, le champ devient :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

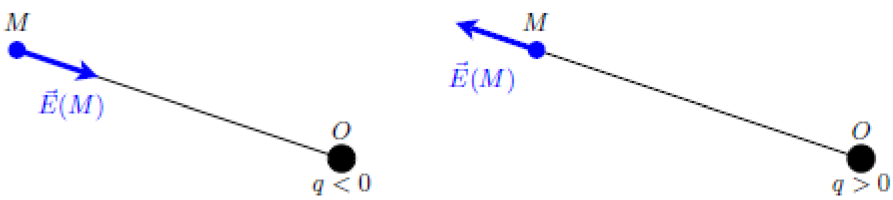


FIGURE 3 – Champ créé par une charge

Comme la force de Coulomb, le champ varie comme l'inverse de la distance à la charge au carré, il a toujours une direction radiale.

Champ créé par N charges ponctuelles Plaçons N charges ponctuelles q_i en des points notés P_i (cause). La charge test q_{test} placée en M (effet) subit la force de Coulomb :

$$\vec{F}_{\text{test}} = \sum_{i=1}^{N}\frac{q_i q_{\text{test}}}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{u}_{P_iM}}{P_iM^2}$$

$\vec{u}_{P_iM}$ est un vecteur unitaire orienté e la cause vers l'effet (de la charge créant la force vers celle la subissant). Le champ crée par les N charges est alors donné par :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{\vec{u}_{P_iM}}{P_iM^2}$$

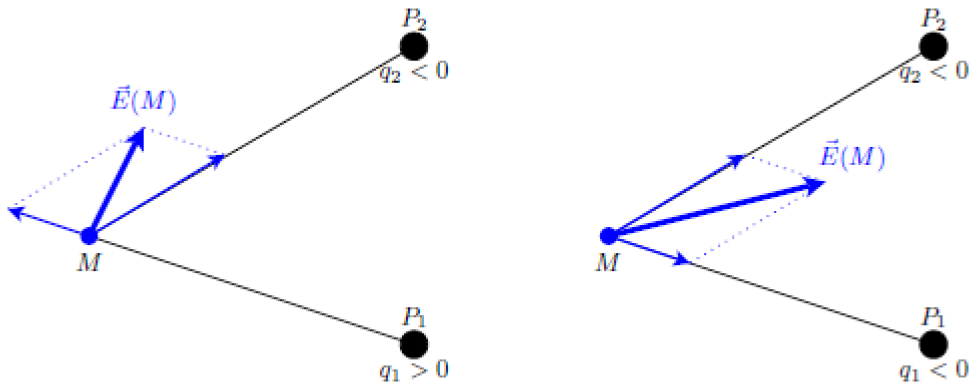


FIGURE 4 – Champ créé par deux charges

Théorème de superposition. Le champ créé par N charges est la somme (superposition) des champs créés par chaque charge prise indépendamment des autres.

Champ créé par une distribution continue. Une distribution continue de charge est en fait : soit un volume chargé V, soit une surface chargée S, soit une courbe chargée C.
Chaque élément infinitésimal de la distribution (noté dV ou dS ou dl) centré au point P (cause) porte une charge infinitésimale dq et crée un champ infinitésimal en M (effet) :

$$d\vec{E}(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2}$$

Selon le type de distribution, on peut définir une densité volumique ($C.m^{-3}$), surfacique ($C.m^{-2}$) ou linéique ($C.m^{-1}$) de charges électriques en divisant la charge infinitésimale de l'élément infinitésimal par sa mesure (volume, surface ou longueur) :

- Densité volumique de charge : $dq = \rho(P) \times dV$
- Densité surfacique de charge : $dq = \sigma(P) \times dS$
- Densité linéique de charge : $dq = \lambda(P) \times dl$

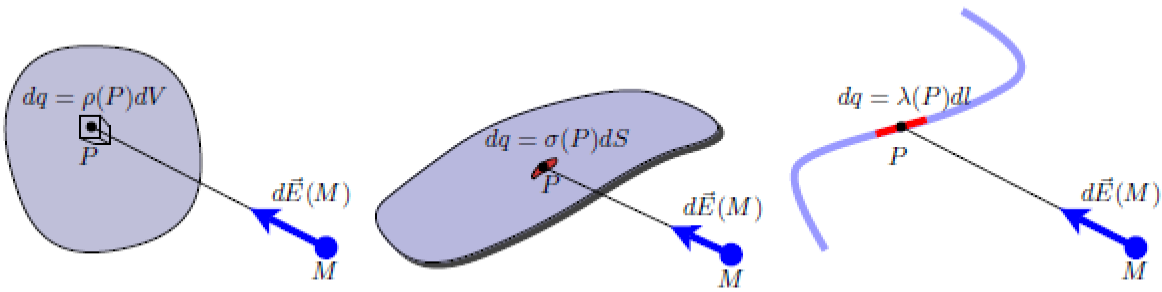


FIGURE 5 – Distributions continues

La distribution est dite uniformément chargée si sa densité de charge est uniforme. Le champ total crée par la distribution est obtenu en intégrant le champ infinitésimal : soit dans le volume V, soit sur la surface S, soit le long de la courbe C.

1.3 Potentiel électrique

Potentiel créé par une charge ponctuelle. Plaçons une charge ponctuelle q en un point noté O. En utilisant les coordonnées sphériques, le champ crée par la charge placée en O est alors donné par :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

En coordonnées sphériques, le gradient d'un champ scalire ne dépendant que de r est donné par :

$$\vec{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r$$

On remarque alors que :

$$\vec{grad}(\frac{1}{r} + cte) = -\frac{1}{r^2}\vec{u}_r$$

Pour le chmp créé par une charge placée à l'origine, on obtient :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\vec{grad}(\frac{1}{r} + cte)$$

Le champ électrique dérive donc d'un potentiel électrique par la relation :

$$\vec{E}(M) = -\vec{grad}(V(M))$$

Por une charge ponctuelle placée à l'origine :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + cte$$

Potentiel créé par N charges ponctuelles. Plaçons N charges ponctuelles q_i en des points notés P_i. Le champ crée par la charge q_i placée en P_i dérive d'un potentiel électrique :

$$\vec{E}_i(M) = -\vec{grad}(V_i(M)) = -\vec{grad}(\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 P_i M} + cte)$$

Le champ total est obtenu en sommant les champs créés par chaque charge :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(M) = -\vec{grad}(\sum_{i=1}^{N} V_i(M))$$

Le potentiel électrostatique crée par l'ensemble des N charges est alors donné par :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{P_i M} + cte$$

Théorème de superposition. Le potentiel créé par N charges est la (superposition) des potentiels créés par chaque charge prise indépendamment des autres.

Potentiel créé par une distribution continue. Chaque élément infinitésimal de la distribution (noté dV ou dS ou dl) centré au point P porte une charge infinitésimale dq et crée un potentiel infinitésimal :

$$dV(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 PM} + cte$$

Le potentiel total crée par la distribution est obtenu en intégrant le potentiel infinitésimale : soit dans le volume V, soit sur la surface S, soit le long de la courbe C.

Distribution	Uniformément chargée	Non uniformément chargée
Volumique	$V(M) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{dV}{PM} + cst.$	$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P)dV}{PM} + cst.$
Surfacique	$V(M) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{dS}{PM} + cst.$	$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(P)dS}{PM} + cst.$
Linéïque	$V(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{dl}{PM} + cst.$	$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(P)dl}{PM} + cst.$

1.4 Courants électriques : charges en mouvement

Notion d'intensité électrique

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \text{ en } C.s^{-1} \text{ ou } A$$

L'intensité du courant électrique dépend de q,$\vec{v_d}$ et de la densité d'électron n (en nombre d'électron par mètre cube). ΔN : nombre d'électrons dans un cylindre de longueur $v_d\Delta t$ et de section $S = n.$ 0Volume de ce cylindre $=$ $nv_d\Delta tS$

D'où $I = \frac{\Delta N q}{\Delta t} = nqv_dS = j.S$ avec j en $\frac{A}{m^2}$

Vecteur de courant 3D : $\vec{j} = nq\vec{v_d}$, il a le sens et la direction de $q\vec{v_d}$

L'intensité I est le flux du vecteur $\vec{j}$ à travers la section

$$I = \int\int \vec{j}.d\vec{S} = \vec{j}S$$

2 Propriétés du champ et du potentiel électriques

2.1 Champ conservatif

Circulation du champ électrique. La circulation le long d'une courbe (ou contour) d'un champ vectoriel $\vec{E}$ est donnée par :

$$\int_C \vec{E}d\vec{M} = -\int_C g\vec{rad}V(M).d\vec{M} = -\int_A^B dV = V(A) - V(B)$$

Pour un champ de gradient, cette circulation est indépendante du chemin suivi, elle ne dépend que de la différence de potentiels entre les points de départ et d'arrivée.
Dans le cas du champ électrique, cette différence de potentiels est appelée tension électrique :

$$U_{AB} = V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}.d\vec{M}$$

Comme le potentiel électrique est défini à une constante additive près, seules les différences de potentiels (indépendantes de cette constante) ont un sens physique.

La circulation du champ électrique sur tout contour fermé est nulle : c'est un champ conservatif.

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{M} = 0 \; \forall C$$

Lignes de champ et équipotentielles. Les équipotentielles sont des surfaces (en dimension 3) ou des courbes (en dimension 2) d'équation : $V(M) = cte$. Les lignes de champ électriques sont des courbes orientées (dans le sens du champ) en tout point tangentes à celui ci. Pour obtenir leurs équations, il faut intégrer la relation différentielle :

$$\vec{E} = \lambda d\vec{M} \; \lambda \in \mathbb{R}$$

Remarque.

— Les lignes de champ coupent orthogonalement les équipotentielles.

— Les lignes de champ sont orientées dans le sens des potentiels décroissants.

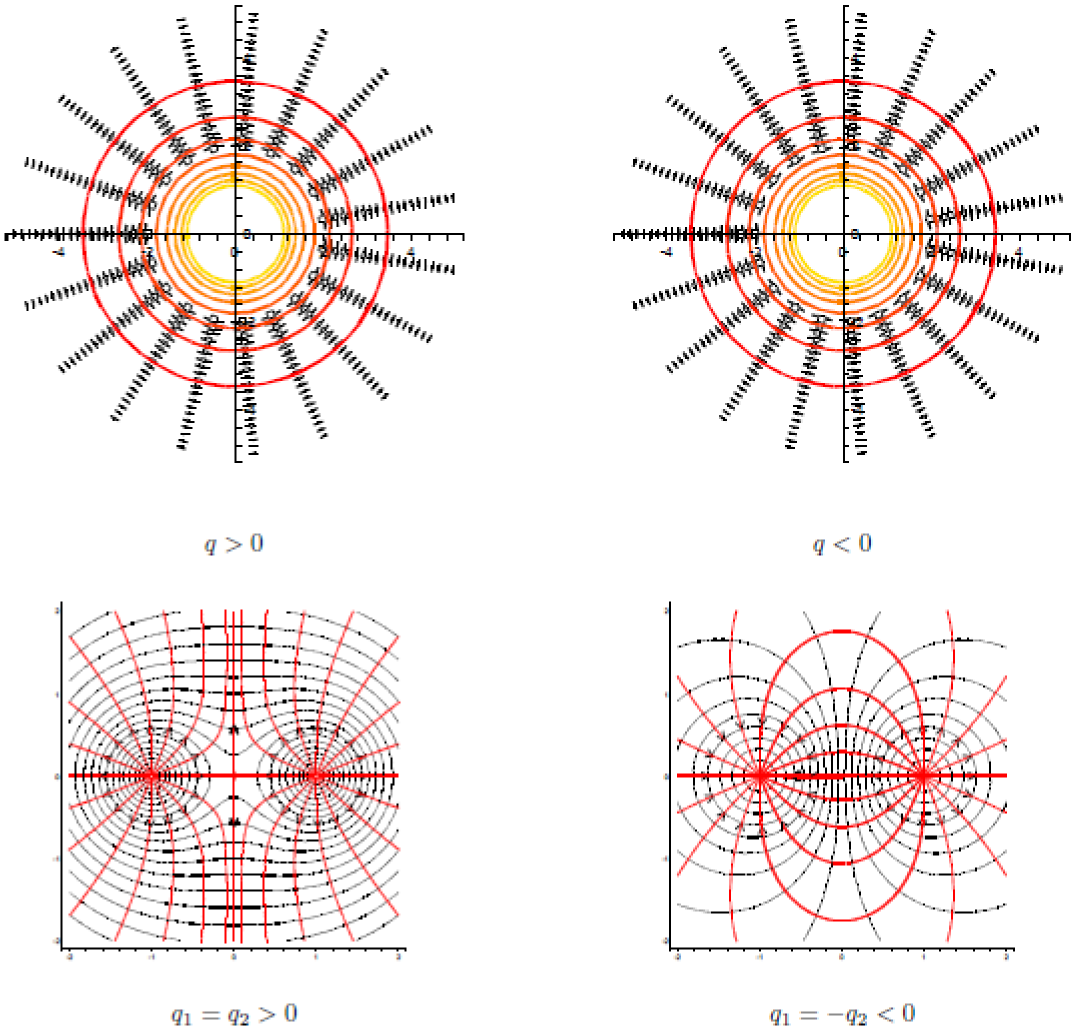


FIGURE 6 – Charges ponctuelles

2.2 Invariances et symétries

En électrostatique, les symétries des distributions de charges (causes) se retrouvent dans le champ et le potentiel électriques (effets). Les symétries envisagés sont des transformations géométriques qui laissent les distributions de chrges invariantes.

Invariances.

— Si une distribution de charges est invariante pour toute translation parallèle à un axe noté (Oz), champ et potentiel seront indépendants de la coordonnée cartésienne z.

— Si une distribution de charges est invariante pour toute translation parallèle à un plan noté (Oxy), champ et potentiel ne dépendront que de la coordonnée cartésienne z.

— Si une distribution de charges est invariante pour toute rotation autour d'un axe noté (Oz), champ et potentiel seront indépendants de la coordonnée cylindrique ϕ. Le problème est dit à symétrie de révolution.

— Si une distribution de charges possède les invariances (1) et (3), champ et potentiel ne dépendront que de la coordonnée cylindrique ρ. Le problème est dit à symétrie cylindrique.

— Si une distribution de charges est invariante pour toute rotation d'axe passant par un point noté O, champ et potentiel ne dépendront que de la coordonnée sphérique r. Le problème est dit à symétrie sphérique.

Symétries et anti-symétries planes. Une symétrie plane est une symétrique plane qui laisse invariante les charges électriques. A contrario une anti-symétrie plane est une symétrie plante qui change les signes de toutes les charges électriques. Ainsi en tout point d'un plan de symétrie, le champ électrique est contenu dans ce plan. A contrario en tout point d'un plan d'anti-symétrie, le champ électrique est orthogonal à ce plan.

3 Théorème de Gauss

3.1 Flux d'un champ vectoriel

Le flux d'un champ vectoriel $\vec{X}(M)$ à travers une surface orientée est donné par :

$$\Phi_S(\vec{X}) = \int\int_S \vec{X}.\vec{dS}$$

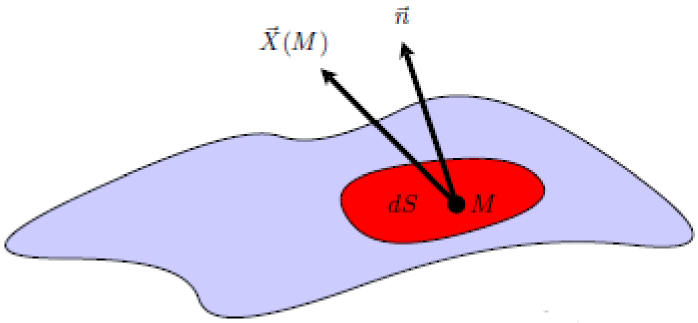


FIGURE 7 – Flux élémentaire

3.2 Théorème de Gauss

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée est égal à la charge contenue dans cette surface divisée par la permitivité électrique du vide.

$$\Phi(\vec{E}) = \oint\oint_{S_{\text{fermée}}} \vec{E}.vecdS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

En l'absence de charges, le champ électrique est à flux conservatif :

$$\Phi(\vec{E}) = \oint\oint \vec{E}\vec{dS} = 0$$

Exemple : le cylindre. Dans un problème à symétrie cylindrique, le champ $\vec{E}$ est dans tout plan de symétrie. Tout plan passant par l'axe z ou perpendiculaire à l'axe z sont des plans de symétrie ainsi :

$$\vec{E} = E_\rho \vec{e}_\rho$$

De plus on a une invariance par rotation selon ϕ et par translation selon z ainsi :

$$\vec{E} = E_\rho(\rho)\vec{e}_\rho$$

Calculons le flux d'un tel champ à travers un cylindre de rayon ρ, de hauteur h, de même axe de symétrie que la distribution : $\oint\oint \vec{E}.\vec{dS} = \int\int_{(S)} E_\rho(\rho).\vec{e}_\rho.dS.\vec{e}_\rho = \int\int E_\rho(\rho)dS = E_\rho(\rho)\oint\oint_{(S)} dS = E_\rho(\rho)2\pi\rho h.$
Le flux à travers les deux disques qui ferment le cylindre est nul car le champ électrique est tangent à ces disques.

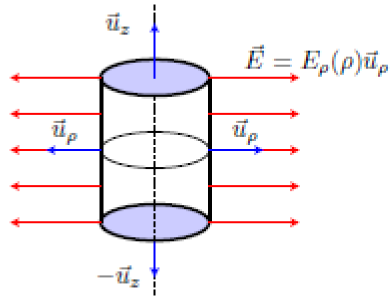


FIGURE 8 – Théorème de Gauss en symétrie cylindrique

Si on se place à l'extérieur de la distribution de taille R ($\rho > R$), le théorème de Gauss nous donne : $4\pi\rho^2 h E_\rho(\rho) = \dfrac{PV}{\epsilon_0} \Rightarrow E(\rho) = \dfrac{PR^3}{3\epsilon_0\rho^2}$
Le potentiel électrique s'obtient par intégration par rapport à ρ en posant $V(\rho_0) = 0$.

4 Le champ électrique dans les matériaux. Cas des métaux.

4.1 Métaux et isolants

Les solides sont une assemblée d'atomes dont les noyaux forment un réseau plus ou moins ordonné mais rigide.

Isolant. Lorsqu'on applique un champ électrique (gradient de voltage) les électrons restent **tous** piégés dans leurs atomes respectifs.

Conducteurs (Métal, semi-conducteurs). Chaque cuivre (métal monovalent) libère un électron libre. On a un **gaz** d'électrons libres qui s'agitent au sein d'un réseau **rigide d'ions** Cu^+.
Pourquoi ce gaz d'électron libre ne fuit pas en dehors du fil de cuivre ? La densité de ce gaz d'électron libre vaut $n_{el} = n_{at} \approx 10^{30}$électron$/m^3$Il y a donc une très forte densité. Ainsi si l'électron approche une extrémité du fil la puissance des forces de rappel font qu'il reste à l'intérieur.

4.2 Conducteur parcouru par un courant : modèle du gaz d'électron de conduction

En 1804 la pile de volta est créée, en 1900 le modèle de Drude est crée. Il se base sur le fait que si on a $< \vec{v}_e >= \vec{0}$ alors la tension est nulle. En revanche si $< \vec{v}_e >= \vec{v}_{\text{dérive}} \neq \vec{0}$ alors il y a présence de tension.

Modèle quantitatif de Drude. En appliquant les équations de Newton sur un électron soumis au champ $\vec{E}$ de la pile :

$$m\frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E}\ \frac{m}{\tau}\ \vec{v}$$

Il vient donc que τ est un temps qui caractérise l'intensité de la force de frottement. On ne va pas chercher à résoudre cette équation à partir de conditions initiales. On va plutôt cherche si il existe un **régime stationnaire** : $\frac{d\vec{v}_e}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{0} = -e\vec{E}\ \frac{m}{\tau}\ \vec{v}_e$.

$$\vec{v}_e = -\frac{e\tau}{m}\ \vec{E}$$

Avec $-\frac{e\tau}{m}$ la mobilité des électrons dans ce matériau en $m^2.V^{-1}.s^{-1}$. La mobilité est très recherchée dans les transistors. τ est le temps nécessaire pour que le courant s'établisse (on) ou disparaisse (off). Les électrons de conduction dérivent tous à la vitesse $\vec{v}_{e\ \text{lim}}$ donc on a un vecteur densité de courant : $\vec{j} = n(-e)\vec{v}_{e\ \text{lim}} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}$ donc :

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \text{ avec } \sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$$

Où σ est la conductivité qui est intrinsèque au matériau (à l'échantillon). Si n augmente et τ augmente alors σ augmente. Cette relation conduit à $I = GU \Leftrightarrow U = RI$.

4.3 Conducteur en équilibre électrostatique

Définition. Les électrons ne bougent plus $< \vec{v}_e >= \vec{0}$

Théorème.

- Dans un métal à l'équilibre électrostatique (quand il n'y a pas de courant) le champ électrique est $\vec{E}_{\text{métal}} = \vec{0}$
- A travers la surface $\oint\oint_{\sum} \vec{E}_{\text{métal}} d\vec{S} = \dfrac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow 0$. Ainsi dans un métal à l'équilibre électrostatique il n'y a pas de **charges** ($\neq 0$) dans le volume $\rho = 0$ (neutralité électrique parfait entre les électrons et les ions).
- En revanche, il existe des accumulations de charges non nulles à la surface d'un conducteur à l'équilibre. Ces charges de surface sont mêmes cruciales pour annuler le champ à l'intérieur du conducteur.

$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_{\text{extérieur appliqué}} + \vec{E}_{\text{réponse de la matière}} = \vec{0}$$

Deuxième partie

Magnétostatique

5 Le champ magnétique

5.1 Introduction

Il faut attendre la fin du XIXème siècle pour qu'une théorie complète apparaisse, la théorie de l'électromagnétisme. Tout commença avec l'expérience de Oersted en 1820. Il plaça un fil conducteur au dessus d'une boussole et y fit passer un courant. En présence d'un courant l'aiguille de la boussole est effectivement déviée, prouvant sans ambiguïté un lien entre le courant électrique et le champ magnétique. L'étude quantitative des interactions entre aimants et courants fut faire par les physiciens Biot et Savart (1820). Ils mesurèrent la durée des oscillations d'une aiguille aimantée en fonction de sa distance à un courant rectiligne. Ils trouvèrent que la foce agissant sur un pôle est dirigée perpendiculairement à la direction reliant ce pôle au conducteur et qu'elle varie en raison inverse de la distance. De ces expériences, Laplace déduisit ce qu'on appelle aujourd'hui la loi de Biot et Savart.

5.2 Expressions du champ magnétique

Champ magnétique créé par une charge en mouvement. Le champ magnétique créé en un point M par une particule de charge q située en un point P et animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen est

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \wedge \vec{PM}}{||\vec{PM}||^3}$$

L'unité du champ magnétique dans le système international est le Tesla (T). Dans le système Centimètre.Gramme.Seconde on peut utiliser le Gauss (G) et on a $1G = 10^{-4}T$.
Le facteur μ_0 est la perméabilité du vide : il décrit la capacité du vide à laisser passer le champ magnétique. Sa valeur dans le système international est $\mu_0 = 4\pi 10^-7 H.m^{-1} H.m^{-1}$

Remarques. De même pour le champ électrostatique, le principe de superposition s'applique au champ magnétique. Si on considère deux particules 1 et 2 alors le champ magnétique créé en un point M quelconque de l'espace sera la somme vectorielle des champs créés par chaque particule.

Champ magnétique créé par un ensemble de charges en mouvement. Considérons N particules de charges q_i situés en des points P_i et des vitesse $\vec{v_i}$. En vertu du principe de superposition, le champ magnétique créé en un point M est la somme vectorielle des champs créés par chaque particule et vaut

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i \vec{v_i} \wedge \vec{P_i M}}{||\vec{P_i M}||^3}$$

Le passage à la limite continue consiste à assimiler tout volume élémentaire dV, situé autour d'un point P' quelconque de la distribution de charges en mouvement, à une charge dq animée d'une vitesse moyenne $\vec{v}$. Le champ magnétique résultant s'écrit alors :

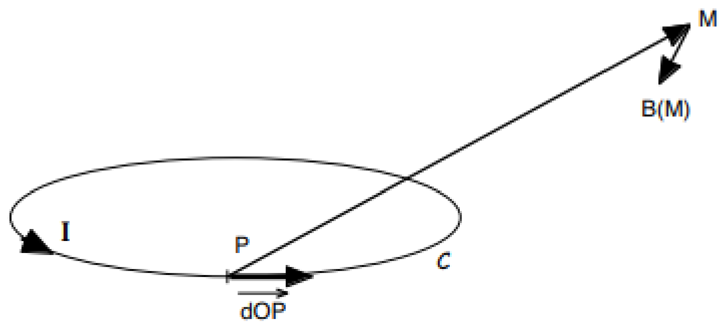
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{dq\vec{v}(P') \wedge \vec{P'M}}{||\vec{P'M}||^3}$$

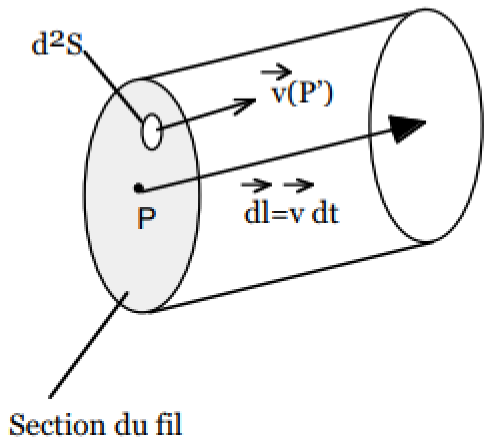
où l'intégrale porte sur le volume V total embrassé par ce charges.
On peut exprimer cette formule en fonction du vecteur densité locale de courant $\vec{j}$. L'expression du champ magnétique créé par une distribution volumique de charges quelconque est donc

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_V \frac{\vec{j}(P') \wedge \vec{P'M}}{||\vec{P'M}||^3}dV$$

Ce résultat est général et valable quelle que soit la forme du conducteur. On peut l'appliquer, par exemple, à l'intérieur d'un métal de volume V quelconque.

Champ créé par un circuit électrique formule de Biot et Savart Dans le cas particulier d'un circuit filiforme fermé, parcouru par un courant permanent I, la formule précédente va nous fournir la loi de Biot et Savart.



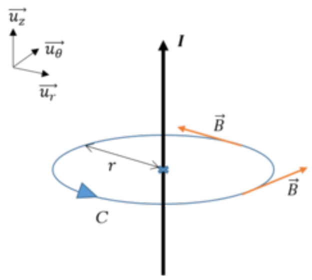


Dans ce cas, le volume élémentaire s'écrit $dV = dS.dl$ où dS est un élément de surface transverse situé en P' et dl un élément de longueur du fil. Or, on considère toujours des cas où le point M est situé à une distance telle du fil qu'on peut considerer celui-ci comme très mince. Plus précisément, le vecteur vitesse (ou densité de courant) a la même orientation sur toute la section du fil ($\vec{j}$ parallèle à $\vec{dl}$ et à $\vec{dS}$). Ainsi, on écrit : $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint dl \int\int \frac{\vec{j}(P') \wedge \vec{P'M}}{||\vec{P'M}||^3}dS = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{I\vec{dl} \wedge \vec{PM}}{||\vec{PM}||^3}$

Formule de Biot et Savart. On obtient donc la formule de Biot et Savart qui donne les éléments infinitésimaux de champ magnétique :

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{I\vec{dl} \wedge \vec{PM}}{||\vec{PM}||^3}$$

Chaque $\vec{dB}$ est défini par un produit vectoriel. Il faut donc faire attention à l'orientation des circuits. (Règle des 3 doigts , du bonhomme d'Ampère)



Tout plan contenant le segment est plan de symétrie de la distribution donc $\vec{B}$ est suivant $\vec{u}_\phi$.

Le champ crée en M par une longueur infinitésimale dl au point P du segment vaut :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I.\vec{dl} \wedge \vec{u}_r}{r^2}$$

Ainsi $R\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi r^2}(dz\vec{u}_z) \wedge (cos(\alpha)\vec{u_r} + sin(\alpha)\vec{u_z}) = \dfrac{\mu_0.I}{4\pi r^2}dzcos(\alpha)\vec{u}_\phi$

On intègre suivant α, on exprime toute nos variables en fonction de α et R

$$z = R.tan(\alpha)$$

$$dz = R\frac{R\alpha}{cos^2(\alpha)}$$

$$r = \frac{R}{cos(\alpha)}$$

On remplace et on obtient : $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}cos(\alpha)R\alpha\vec{u}_\phi$

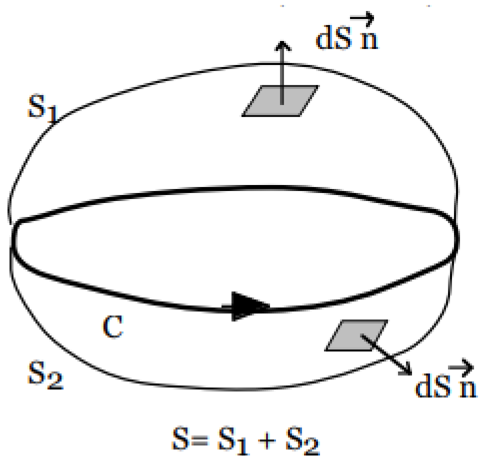
Finalement on obtient

$$\vec{B} = \frac{\mu_0.I}{4\pi R}[sin(\alpha)]_i^f\vec{u}_\phi$$

6 Lois fondamentales de la Magnétostatique

6.1 Flux du champ magnétique

Conservation du flux magnétique. Considérons une surface fermée S quelconque, s'appuyant sur une courbe C fermée et orientée, c'est à dire pour laquelle on peut définir localement un élément de surface $\vec{dS} = dS\vec{n}$ dont le vecteur normal est orienté vers l'extérieur comme en électrostatique.



Le flux du champ magnétique à travers cette surface fermée vaut

$$\Phi = \oint\oint_S \vec{B}.\vec{dS} = 0$$

La conservation du flux magnétique montre une différence fondamentale entre le champ magnétique et le champ électrostatique. (voir théorème de Gauss). Si la charge totale est positive, le flux est positif et il "sort" de cette surface un champ électrostatique (source). Si la charge est négative, le flux est négatif et le champ converge vers la surface (puits). On ne connaît pas de charge magnétique analogue à la charge électrique (pas de monopôle magnétique), tout le champ qui rentre dans une surface fermée doit également en ressortir, nous avons donc des dipôles (comme les aimants).

Lignes de champ et tubes de flux. Une ligne de champ d'un vecteur quelconque est une courbe C dans l'espace telle qu'en chacun de ces points le vecteur y soit tangent. La conservation du flux magnétique implique que les lignes de champ magnétique se referment sur elles-mêmes. Un tube de flux est alors un rassemblement de lignes de champ. Soit une surface S s'appuyant sur une courbe fermée C telle que le champ magnétique y soit tangent. En chaque point de C passe donc une ligne de champ particulière. En prolongeant ces lignes de champ on construit ainsi un tube de flux (exemple : les taches solaires).

6.2 Circulation du champ magnétique

Circulation du champ autour d'un fil infini. Nous avons vu que le champ $\vec{B}$ créé par un fil infini en un point $M(\rho, \phi, z)$ s'écrit en coordonnées cylindriques

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\vec{u}_\phi$$

Considérons maintenant une courbe fermée quelconque C. Un déplacement élémentaire le long de cette courbe s'écrit $\vec{dl} = dr\vec{u}_r + rd\phi\vec{u}_\phi + dz\vec{u}_z$. La circulation de $\vec{B}$ sur la courbe fermée C vaut alors

$$\oint \vec{B}\vec{dl} = \mu_0 I \oint \frac{d\phi}{2\pi}$$

On a donc plusieurs cas de figure :

— Si C n'enlace pas le fil, $\oint d\phi = 0$

— Si C enlace le fil une fois, $\oint d\phi = 2\pi$

— Si C enlace le fil N fois ; $\oint d\phi = 2N\pi$

La circulation de $\vec{B}$ sur une courbe fermée est donc reliée au courant qui traverse la surface délimitée par cette courbe. C'est ampère qui, en recherchant une explication du magnétisme dans une théorie de la dynamique des courants, découvrit cette propriété du champ magnétique.

Théorème d'Ampère. La circulation de $\vec{B}$ le long d'une courbe c quelconque, orientée et fermée, appelée contour d'Ampère, est égale à μ_0 fois la somme algébrique des courants qui traversent la surface délimitée par C.

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 I_{\text{enlacée}}$$

7 Action et énergie magnétiques

7.1 Force magnétique sur une particule chargée

La force de Lorentz. La force totale, électrique et magnétique suvie par une particule de charge q et de vitesse $\vec{v}$ mesurée dans un référentiel galiléen est

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

On appelle cette forle la force de Lorentz. On peut la mettre sous la forme

$$\vec{F} = \vec{F_e} + \vec{F_m} \text{ où } \begin{cases} \vec{F_e} = q\vec{E} \\ \vec{F_m} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \end{cases}$$

Trajectoire d'une particule chargée en présence d'un champ magnétique. Soit un référentiel considéré comme galiléen. On étudie le système crée par une particule de charge Q et de vitesse initiale $v_0.\vec{u}_x$. Cette particule est plongée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ suivant l'axe z. On choisi un référentiel cartésien centré sur la particule.

La particule est soumise à une force $F = Q\vec{v} \wedge \vec{B}$ où $Q\vec{v}$ est la force de Lorentz. Grâce au principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Ainsi $m(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = q(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \wedge (0, 0, B)$ donc $\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{qB}{m}\dot{y} \\ \ddot{y} = -\dfrac{qB}{m}\dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$ Pour simplifier lors des équations différentielles on note $\omega = \dfrac{qB}{m}$.

D'une part $\dot{z} = v_{0_z} \Leftrightarrow z = v_{0_z}t$ or la vitesse initiale est selon $\vec{u}_x$ donc $z = 0$.

D'autre part $\begin{cases} \ddot{x} = \omega\dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega\dot{x} \end{cases}$.

Pour résoudre ces équations il faut exprimer ces dernières selon une unique variable on pose $u = x + i.y$, ainsi $\ddot{u} = -i\omega\dot{u}$. On trouve donc $\dot{u} = v_{0_x}e^{-i\omega t}$. Il vient donc

$$\begin{cases} x = \dfrac{v_{0_x}}{\omega}sin(\omega t) \\ y = \dfrac{v_{0_x}}{\omega}cos(\omega t) - 1 \end{cases}$$

L'équation est sous la forme d'une courbe paramétrée du type $\begin{cases} x = \alpha + Rsin\phi \\ y = \beta + Rsin\phi \end{cases}$ ce qui correspond à un cercle de rayon R. La trajectoire de la particule sera un cercle de rayon $\dfrac{mv_{0_x}}{QB}$ et de centre $(0, -\dfrac{mv_{0_x}}{QB})$. (On note que dans le cas d'un proton dans un champ magnétique positif le cercle est parcouru dans le sens anti-trigonométrique).

7.2 Actions magnétiques sur un circuit fermé

La force de Laplace. Nous avons vu que la force subie par une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique, la force de Lorentz, s'écrit ; $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. Considérons un milieu comportant α espèces différentes de particules chargées, chaque espère ayant une densité volumique n_α, et une vitesse $\vec{v}_\alpha$. Ces divers porteurs de charges sont donc responsables d'une densité locale de courant

$$\vec{j} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \vec{v_\alpha}$$

Par ailleurs, chaque particule étant soumise à la force de Lorentz, la force s'exerçant sur un élément de volume dV comportant $\sum_\alpha n_\alpha dV$ particules s'écrit

$$d\vec{F} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha (\vec{E} + \vec{v}_\alpha \wedge \vec{B}) dV$$

On voit donc apparaître une force due au champ électrique. Cependant, si le volume élémentaire que l'on considère est suffisamment grand pour que s'y trouve un grand nombre de particules et si le conducteur est électriquement neutre on doit avoir

$$\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha = 0$$

On obtient donc

$$d\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B} dV$$

Dans le cas d'un circuit filiforme on obtient

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

7.3 Effet Hall et mesure de champ magnétique.

Cet effet a permis la construction de sondes de mesure du champ magnétiques.

Définition. L'effet Hall montre qu'un fil parcouru par un courat d'intensité I et plongé dans un champ magnétique qui lui est perpendiculaire créé une tension également perpendiculaire au fil.

Explications. Considérons une plaque parcourue par un courant d'intensité I et observons le mouvement des électrons.

- Ils sont soumis à la partie magnétique de la force de Lorentz, qui dévie les particules chargées négativement vers un côté se charge négativement, le côté opposé se charge alors positivement.
- Cette dissymétrie créé un champ électrique appelé **champ de Hall** et agit sur les particules en mouvement via la force de coulomb qui s'oppose à la force magnétique.
- Pendant le régime transitoire, la force de Lorentz est plus grande que la force de Coulomb due au champ de Hall, et les électrons sont déviés ; le régime permannet est atteint lorsque $q\vec{E_H} + q\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$, et les électrons ne sont plus déviés.

— Ainsi en régime permanent existe un champ de Hall donnant naissance à une tension de Hall :

$$E_h = vB \text{ et } U_H = E_H.l$$

Avec l la largeur de la plaque conductrice.

Mesure de champ magnétique. La tension de Hall dépend donc de v, la vitesse des porteurs de charges de B, l'intensité du champ magnétique. On peut relier v à I, l'intensité du courant par le vecteur densité de courant $\vec{j}$; et montrer que

$$U_H = R_H \times \frac{IB}{\epsilon}$$

Avec R_H une constante qui dépend du nombre de porteurs de charge de la plaque, de leur charge électrique et e l'épaisseur de cette plaque.

La mesure de la tension de Hall permet de mesurer l'intensité du champ magnétique si on connaît toutes les caractéristiques de la sonde ainsi que l'intensité I qui la parcourt.

FIN.