IF 122 28/4/21

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Jeux de parité

$(V_0 \dot\cup V_1, E, p : V \to \{0, \dots, d\})$

$p(v)$ = priorité (couleur) de v

$v_0 \to v_1 \to \dots$ gagnée par P_0

si $\max\{p : \exists^\infty n : p(v_n) = p\}$ est paire

$s \to t$ (3 → 2) gagnée par P_0

On veut calculer :

$W_0 = \{v : v$ gagnant pour $P_0\}$

$W_1 =$ P_1

On va montrer : ① $V = W_0 \dot\cup W_1$ (déterminé)

② stratégies gagnantes positionnelles

$\sigma_i : V_i \to V$

P_i ↙

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Algorithme récursif de McNaughton-Zielonka

Parity

Input : $G = (V_0, V_1, E)$, $p : V \to \{0, \dots, d\}$

Output : (W_0, W_1)

if $V = \emptyset$ return $(\emptyset, \emptyset)$ $\quad i \in \{0,1\}$

$i := d \bmod 2$;

$U := \{ v \in V : p(v) = d \}$

$A := Attr_i(U)$; // attracteur de P_i

Parity $(G \setminus A) \to (W_0', W_1')$

if $W_{1-i}' = \emptyset$ then

$W_i := W_i' \cup A \quad W_{1-i} := \emptyset$

return (W_0, W_1)

else $B := Attr_{1-i}(W_{1-i}')$ // $W_{1-i}' \neq \emptyset$

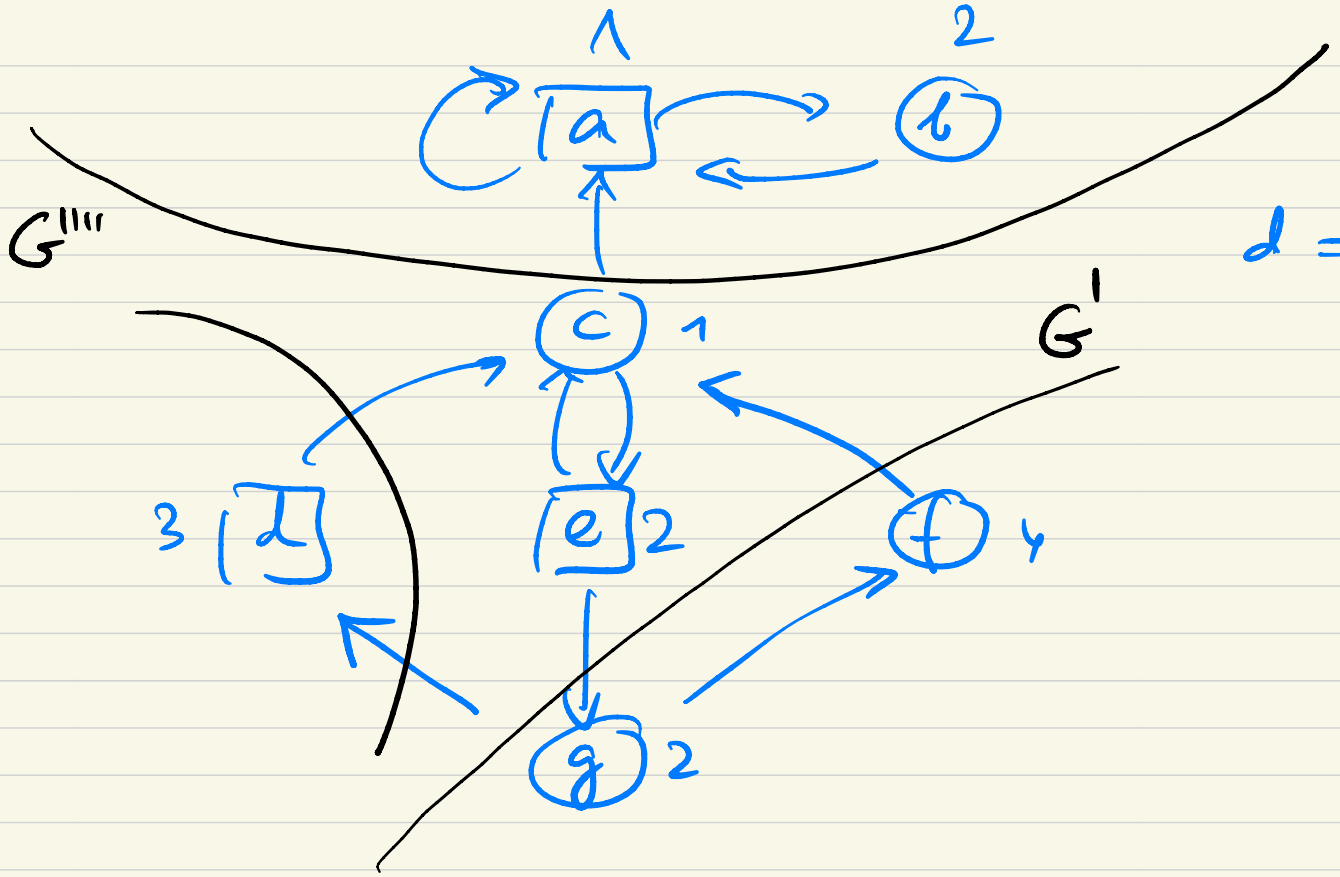
Parity $(G \setminus B) \to (W_0'', W_1'')$

$W_i := W_i''$

$W_{1-i} := B \cup W_{1-i}''$

return (W_0, W_1)

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NCSA 4.0



$i = 0$ $\quad U = \{f\}$

$A_0 = Attr_0^G(f) = \{f, g\}$

$G' = G \setminus A_0 \rightarrow$ $\quad d = 3$

$i = 1$

$B_1 = Attr_1^{G'}(d)$

$= \{d\}$

- $G'' = G' \setminus B_1$

$Parity(G'') \rightarrow (W_0' = \{c, e\}, W_1' = \{a, b\})$

$B_2 := Attr_0^{G'}(\{c, e\}) = \{c, e, d\}$

$G''' := G' \setminus B_2$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$Parity(G''') \rightarrow (\emptyset, \{a,b\})$

$Parity(G') \rightarrow (\{c,c,d\}, \{a,b\})$

$W_1' \neq \emptyset$

$B_3 := Attr_1^G(\{a,b\}) = \{a,b\}$

$G'''' := G \setminus B_3$

$Parity(G'''') = (\{c,d,e,f\}, \emptyset)$ (W_0'', W_1'')

Rés. final $W_0 = \{c,d,e,f\}$

$W_1 = \emptyset \cup \{a,b\}$ (B_3, W_1'')

$= \{a,b\}$

Complexité : $|V| = n$, $|E| = m$

$T_{n,m}(d)$ temps de calcul

$T_{n,m}(d) \leq T_{n,m}(d-1)$ (A) $+$ $T_{n-1,m}(d)$ (B) $+ O(m+n)$ attr.

$\Downarrow$

$T_{n,m}(d) \leq O(m \cdot n^d)$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Rq. Si d est fixé, la complexité est polynomiale (dans la taille de l'arène).

Rq

$p : V \to \{1, 2\}$

Büchi (accessibilité répétée

$d = 2$
$i = 0$

$F = \{v : p(v) = 2\}$

$A = Attr_0(F)$

$Parity(G \setminus A) \to (W_0', W_1')$

if $W_1' = \emptyset$: return $(A \cup W_0', \emptyset)$

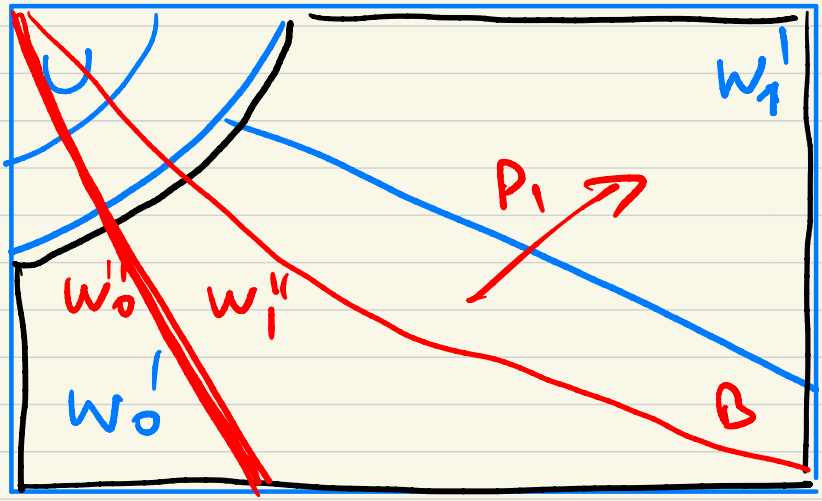
else $B = Attr_1(W_1')$

$Parity(G \setminus B) \to (W_0'', W_1'')$

return $(W_0'', B \cup W_1'')$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

d pair



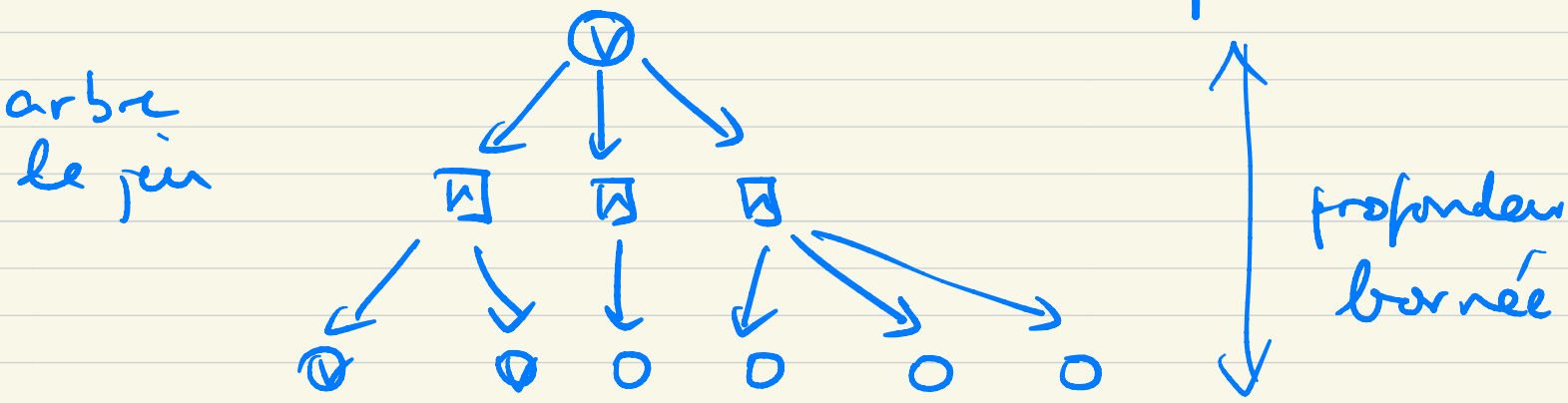
$A = \text{Attro}(U)$

$B = \text{Attr}_1(W_1')$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Jeux déterminés

Jeux finitaires : nb. fixé de coups



Les jeux finitaires sont déterminés.

P_0 : $\vee$ $\exists$ $\quad$ P_1 : $\wedge$ $\forall$

P_0 gagne si $\exists c_1 \forall d_1 \exists c_2 \forall d_2 \ldots$

$(c_1, d_1 \ldots)$ gagnant pour P_0

c_i : coups de P_0

d_i : " P_1

$\neg (\exists c_1 \forall d_1 \exists c_2 \ldots)$

$= \forall c_1 \exists d_1 \forall c_2 \exists d_2 \ldots$

$(c_1, d_1 \ldots)$ gagnant pour P_1

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Rq. Pour les jeux infinitaires, cet argument "à la de Morgan" ne marche plus :

$$\neg\,(\exists c_1\ \forall d_1\ \exists c_2 \dots) \quad \neq \quad \forall c_1\ \exists d_1\ \forall c_2\ \exists d_2$$

Exemple : jeu de Choquet

P_0, P_1 jouent, en alternance, des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} \supseteq I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots$$

P_0 commence par $I_0 = (0,1)$

P_0 gagne si $\bigcap_{n \geq 0} I_n \neq \emptyset$

Rq P_0 peut gagner, mais ce n'est pas évident comment.

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Supposons que P_0 choisit toujours l'intervalle choisi par P_1 avant (parce que c'est le plus grand). Alors P_0 perd:

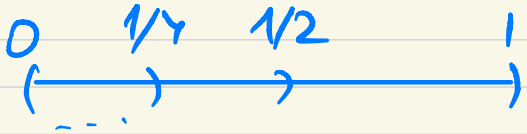
P_0 : $(0,1)$

P_1 : $(0, 1/2)$

P_0 : $(0, 1/2)$

P_1 : $(0, 1/4)$

⋮



$$\bigcap_{n \geq 0} \left(0, \frac{1}{2^n}\right) = \emptyset$$

Mais P_0 peut gagner ce jeu !

La stratégie de P_0 est de choisir $I_n = (a_n, b_n)$ tq.

$$a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} a_n = a \\ \lim_{n\to\infty} b_n = b \end{array}\right\} \quad a \leq b$$

$$[a,b] \subseteq \bigcap_{n \geq 0} I_n \neq \emptyset$$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Un jeu infinitaire qui n'est pas déterminé : on utilisera l'axiom du choix

On cherche un "XOR infini", qui sera une fonction $f : \{0,1\}^\omega \to \{0,1\}$

↑ suites binaires infinies

avec la propriété :

> Si $w, w' \in \{0,1\}^\omega$ différent seulement à une position, alors $f(w) \neq f(w')$

L'axiome du choix nous dit qu'une telle fonction f existe.

dém Considérons la relation d'équiv. suivante sur $\{0,1\}^\omega$:

$w \sim w'$ si w, w' différent sur un nombre fini de positions

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Soit $S \subseteq \{0,1\}^\omega$ un ensemble de représentants, un pour chaque classe d'équivalence ($\to$ axiome du choix)

Pour $w \in \{0,1\}^\omega$ on écrit

$r(w) \in S$ le représentant de la classe de w ($\{w' : w' \sim w\}$)

On déf.

$$f(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \text{ et } r(w) \text{ diffèrent sur nb. pair de positions} \\ 0 & \text{sinon (impair)} \end{cases}$$

Rq si w, w' diffèrent sur <u>une</u> position exactement $\Rightarrow w \sim w'$, et $f(w) \neq f(w')$

$r(w) = r(w') = r$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Avec f on déf. le jeu suivant :

P_0, P_1 jouent en alternance, chaque coup correspondant à un mot de $\{0,1\}^*$

P_0 joue u_i, P_1 joue v_i

Partie : $\alpha = u_0 v_0 u_1 v_1 \ldots \in \{0,1\}^\omega$

P_0 gagne la partie si : $\underline{f(\alpha) = 1}$

Ce jeu n'est pas déterminé.

On montre ça par contradiction, en supposant que P_1 a une stratégie gagnante $\underline{\sigma_1}$ (l'autre cas est symétrique).

On montre qu'on peut construire une partie gagnée par P_0 (α')

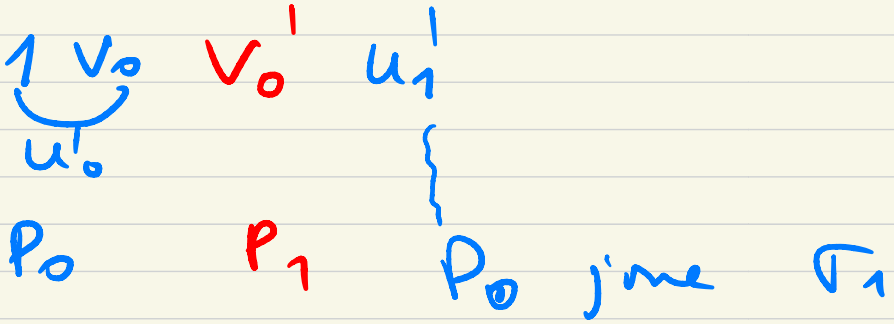
$\rightarrow$ contradiction car on sait que σ_1 est gagnante pour P_1

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Si P_0 commence par $u_0 = 0$
alors soit $v_0 = \sigma_1(0)$ la
réponse de P_1.
0 v_0 u_1 . .

Posons maintenant

$u_0 = 1\ v_0$ (P_0 joue)



P_0 joue σ_0 :
- premier coup 1 v_0
- à partir du 2ème coup : σ_1

Pour le mot $\alpha' = (1v_0)(v_0')(u_1')$. :
on a la partie $\alpha = (0)(v_0)(v_0')(u_1')$
où P_1 joue σ_1, donc
α est gagnée par P_1.
α' est gagnée par P_0 : $f(\alpha') \neq f(\alpha)$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Donc, σ_1 n'est pas stratégie gagnante pour P_1 → contradiction.

Pour les jeux infinitaires il y a une classe de conditions de victoire → conditions de Borel pour laquelle on sait que les jeux sont déterminés.

Borel

On déf. une topologie sur $\{0,1\}^\omega$:

$d(w, w') = 2^{-(n+1)}$, où

n = longueur maximale d'un préfixe commun de w, w'

ex $w = w'$ $\quad d(w,w') = 2^{-\infty} = 0$

$w = 0u$, $w' = 1u'$

$d(w,w') = \frac{1}{2}$ etc.

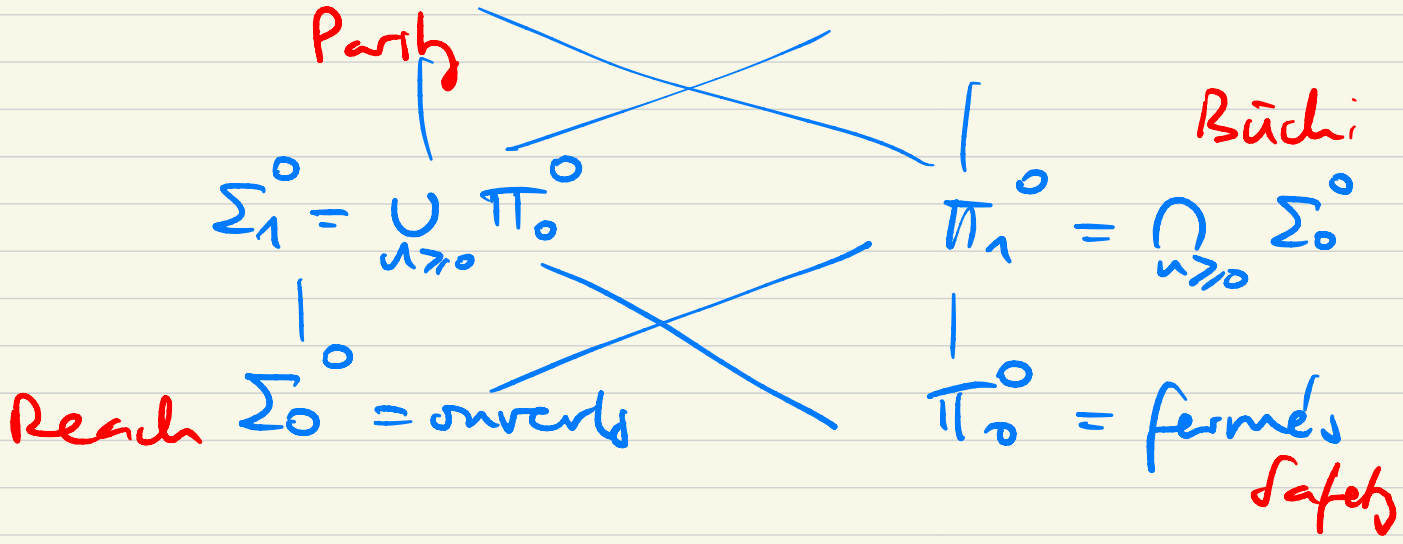
Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Ouverts : $X \cdot \{0,1\}^\omega$ $\quad X \subseteq \{0,1\}^*$

Les ensembles boréliens sur $\{0,1\}^\omega$ = la plus petite classe de sous-ensembles de $\{0,1\}^\omega$ qui

- contient les ouverts et les fermés
- est fermée par $\bigcup_{n\geq 0}$ et $\bigcap_{n\geq 0}$.

Hiérarchie de Borel :



Th (Martin) Tout jeu avec condition de victoire $\in$ ens. de Borel est <u>déterminé</u>.

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0