iF 122 28/4/21

Jeux de parité

$$(V_0 \dot\cup V_1,\ E,\ p : V \to \{0, \ldots, d\})$$

$p(v)$ = priorité (couleur) de v

$v_0 \to v_1 \to \ldots$ gagnée par P_0

ssi $\max\{p : \exists^\infty n : p(v_n) = p\}$ est paire

$\underset{3}{s} \longrightarrow \underset{2}{t}$ ↺ gagnée par P_0

On veut calculer :

$W_0 = \{v : v \text{ gagnant pour } P_0\}$

$W_1 = \qquad\qquad\qquad\qquad P_1$

On va montrer : ① $V = W_0 \dot\cup W_1$ (déterminé)

② stratégies gagnantes positionnelles

$\sigma_i : V_i \to V$

P_i

Algorithme récursif de McNaughton–Zielonka

Parity

Input : $G = (V_0, V_1, E)$, $p : V \to \{0, \dots, d\}$

Output : (W_0, W_1)

if $V = \emptyset$ **return** $(\emptyset, \emptyset)$ $\qquad i \in \{0,1\}$

$i := d$ **mod** 2 ;

$U := \{v \in V : p(v) = d\}$

$A := Attr_i(U)$; // attracteur de P_i

Parity $(G \setminus A) \to (W_0', W_1')$

if $W_{1-i}' = \emptyset$ **then**

$\quad W_i := W_i' \cup A$. $W_{1-i} := \emptyset$

$\quad$ return (W_0, W_1)

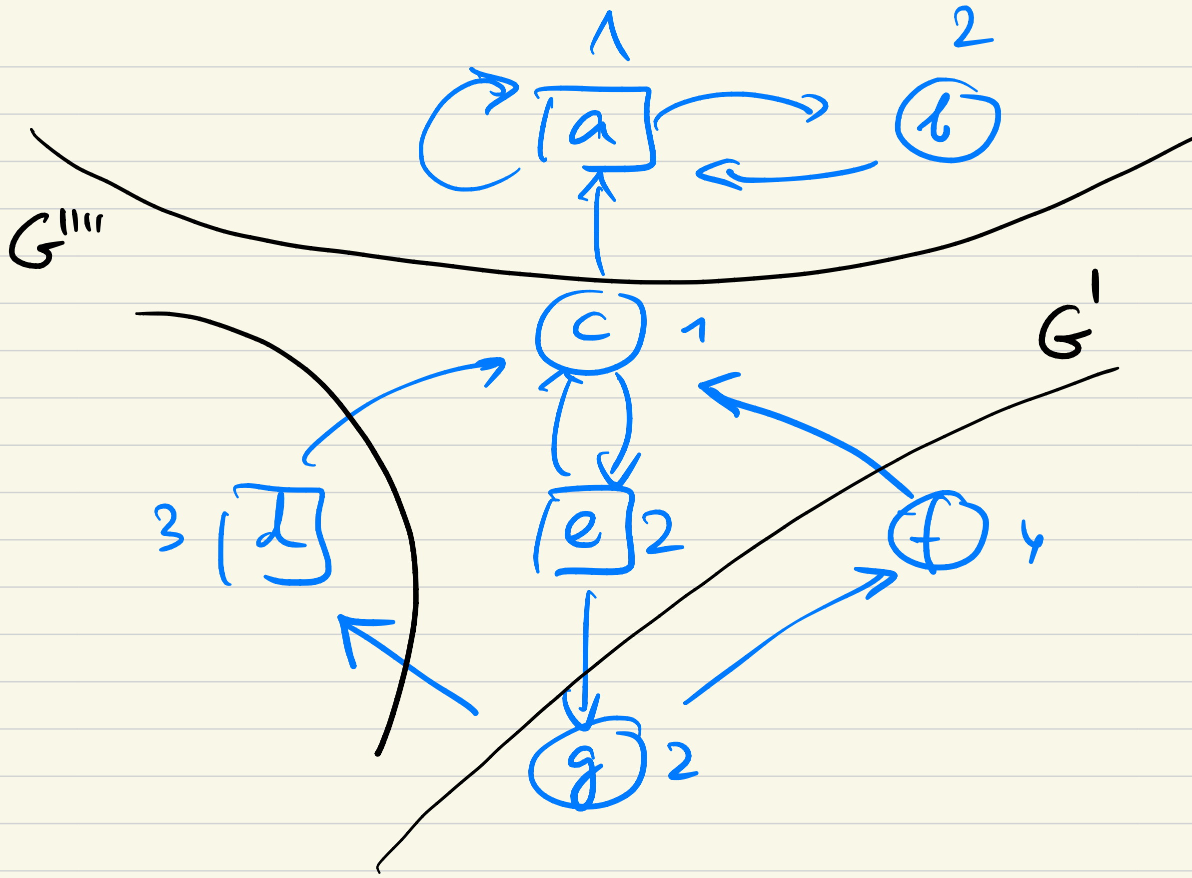
else $B := Attr_{1-i}(W_{1-i}')$ // $W_{1-i}' \neq \emptyset$

$\quad$ **Parity** $(G \setminus B) \to (W_0'', W_1'')$

$\quad W_i := W_i''$

$\quad W_{1-i} := B \cup W_{1-i}''$

$\quad$ return (W_0, W_1)



$d = 4$

$i = 0$ $\qquad U = \{f\}$

$A_0 = Attr_0^{G}(f) = \{f, g\}$

$\underline{\underline{G' = G \setminus A_0}} \quad \rightarrow \quad d = 3$

$i = 1$

$B_1 = Attr_1^{G'}(d)$

$= \{d\}$

$G'' = G' \setminus B_1$

$Parity(G'') \rightarrow (\overset{W_0'}{\{c, e\}}, \overset{W_1'}{\{a, b\}})$

$B_2 := Attr_0^{G'}(\{c, e\}) = \{c, e, d\}$

$G''' := G' \setminus B_2$

$\text{Parity}(G''') \to (\emptyset, \{a, b\})$

$\text{Parity}(G') \to (\{c, e, d\}, \{a, b\})$

$W_1' \neq \emptyset$

$B_3 := \text{Attr}_1^G(\{a, b\}) = \{a, b\}$

$G'''' := G \setminus B_3$

$\text{Parity}(G'''') = (\underset{W_0''}{\{c, d, e, f\}}, \underset{W_1''}{\emptyset})$

Rés. final $\quad W_0 = \{c, d, e, f\}$

$W_1 = \underset{B_3}{\emptyset} \cup \underset{W_1''}{\{a, b\}}$

$= \{a, b\}$

<u>Complexité</u> : $\quad |V| = n, \ |E| = m$

$T_{n,m}(d)$ tmp. de calcul

$T_{n,m}(d) \leq \underset{\to A}{T_{n,m}(d-1)} +$

$\underset{\to B}{T_{n-1,m}(d)} + \underset{\text{attr.}}{O(m+n)}$

$\Downarrow$

$T_{n,m}(d) \leq O(m \cdot n^d)$

Rq. Si d est fixé, la complexité est polynomiale (dans la taille de l'arène).

Rq

$p : V \to \{1, 2\}$

Büchi / accessibilité répétée

$d = 2$

$i = 0$

$F = \{ v : p(v) = 2 \}$

$A = \mathrm{Attr}_0(F)$

$\mathrm{Parity}(G \setminus A) \to (W_0', W_1')$

if $W_1' = \emptyset$: return $(A \cup W_0', \emptyset)$

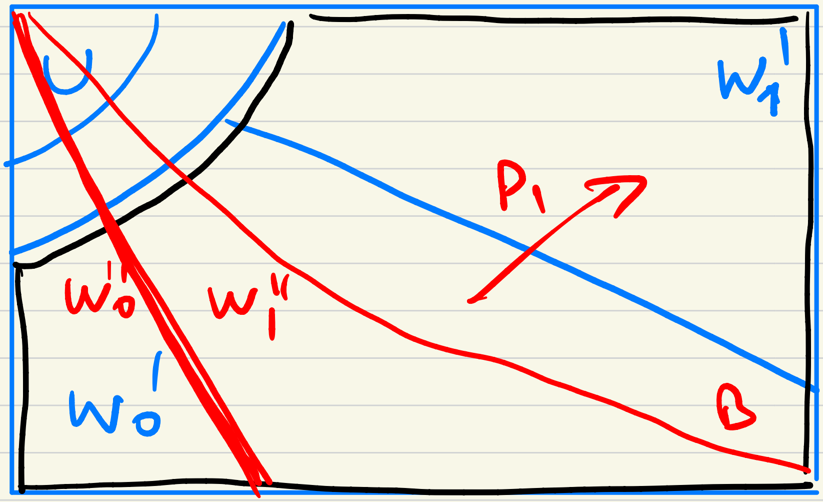
else $B = \mathrm{Attr}_1(W_1')$

$\mathrm{Parity}(G \setminus B) \to (W_0'', W_1'')$

return $(W_0'', B \cup W_1'')$

d pair

$A = Attr_0(U)$

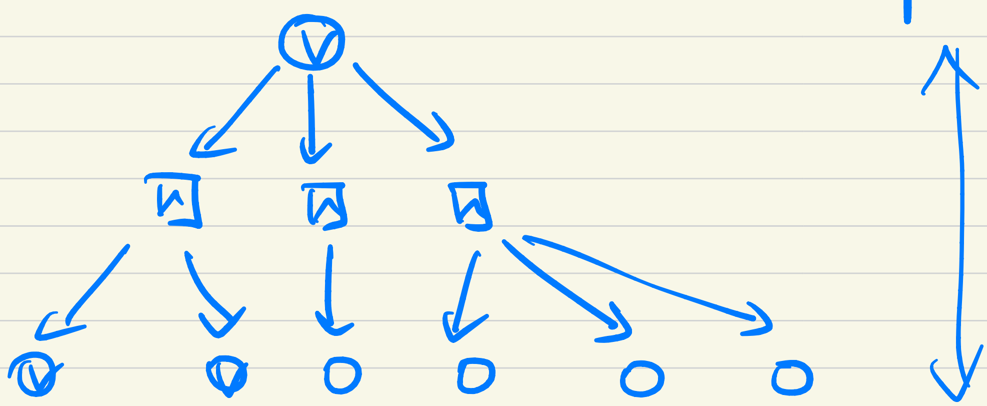


$B = Attr_1(W_1')$

Jeux déterminés

Jeux finitaires : nb. fixé de coups

arbre de jeu



profondeur bornée

Les jeux finitaires sont <u>déterminés</u>.

P_0 : $\vee$, $\exists$ $\qquad$ P_1 : $\wedge$, $\forall$

P_0 gagne si $\exists c_1 \forall d_1 \exists c_2 \forall d_2 \dots$ $(c_1, d_1 \dots)$ gagnant pour P_0

c_i : coups de P_0

d_i : " P_1

$$\neg(\exists c_1 \forall d_1 \exists c_2 \dots)$$

$$= \forall c_1 \exists d_1 \forall c_2 \exists d_2 \dots$$

$(c_1, d_1 \dots)$ gagnant pour P_1

Rq. Pour les jeux infinitaires, cet argument "à la de Morgan" ne marche plus :

$$\neg (\exists c_1 \forall d_1 \exists c_2 \dots) \neq \forall c_1 \exists d_1 \forall c_2 \exists d_2$$

Exemple : jeu de Choquet

P_0, P_1 jouent, en alternance, des intervales ouverts de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} \supseteq I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots$$

P_0 commence par $I_0 = (0,1)$

P_0 gagne si $\bigcap_{n \geq 0} I_n \neq \emptyset$

Rq P_0 peut gagner, mais ce n'est pas évident comment.

Supposons que P_0 choisit tjrs. l'interval choisi par P_1 avant (parce que c'est le plus grand). Alors P_0 perd:

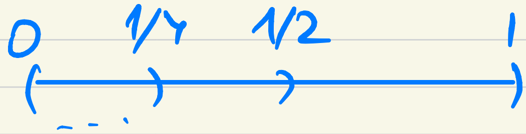
P_0 : $(0,1)$

P_1 : $(0, 1/2)$

P_0 : $(0, 1/2)$

P_1 : $(0, 1/4)$

$\vdots$



$$\bigcap_{n \geq 0} \left(0, \frac{1}{2^n}\right) = \emptyset$$

Mais P_0 peut gagner ce jeu !

La stratégie de P_0 est le choisir $I_n = (a_n, b_n)$ tq.

$$a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} a_n = a \\ \lim_{n\to\infty} b_n = b \end{array}\right\} \quad a \leq b, \quad \underbrace{[a,b]}_{\neq \emptyset} \subseteq \bigcap_{n\geq 0} I_n$$

Un jeu infinitaire qui n'est pas déterminé : on utilisera l'axiome du choix

On cherche un "XOR infini", qui sera une fonction $f : \{0,1\}^\omega \to \{0,1\}$

suites binaires infinies

avec la propriété :

si $w, w' \in \{0,1\}^\omega$ diffèrent seulement à une position, alors $f(w) \neq f(w')$

L'axiome du choix nous dit qu'une telle fonction f existe.

<u>dém</u> Considérons la relation d'équiv. suivante sur $\{0,1\}^\omega$:

$w \sim w'$ si w, w' diffèrent sur un nombre <u>fini</u> de positions

Soit $S \subseteq \{0,1\}^\omega$ un ensemble de représentants, un pour chaque classe d'équivalence ($\to$ axiome du choix)

Pour $w \in \{0,1\}^\omega$ on écrit $r(w) \in S$ le représentant de la classe de w ($\{w' : w' \sim w\}$)

On déf.

$$f(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \text{ et } r(w) \text{ diffèrent sur nb. pair de positions} \\ 0 & \text{sinon (impair)} \end{cases}$$

<u>Rq</u> Si w, w' diffèrent sur <u>une</u> position exactement $\Rightarrow w \sim w'$, et $f(w) \neq f(w')$

$$r(w) = r(w') = r$$

Avec f on déf. le jeu suivant :

P_0, P_1 jouent en alternance, chaque coup correspond à un mot de $\{0,1\}^*$

P_0 joue u_i, P_1 joue v_i

Partie : $\alpha = u_0 v_0 u_1 v_1 \ldots \in \{0,1\}^\omega$

P_0 gagne la partie si $f(\alpha) = 1$

Ce jeu n'est pas déterminé.

On montre ça par contradiction, en supposant que P_1 a une stratégie gagnante σ_1 (l'autre cas est symmétrique).

On montre qu'on peut construire une partie gagnée par P_0 (α')

→ contradiction au fait que σ_1 est gagnante pour P_1

Si P_0 commence par $u_0 = 0$
alors soit $v_0 = \sigma_1(0)$ la réponse de P_1.

$0 \; v_0 \; u_1 \ldots$

Posons maintenant

$u_0 = 1 \, v_0$ (P_0 joue)

$\underbrace{1 \, v_0}_{u'_0} \; v'_0 \; u'_1$

$P_0 \qquad P_1 \qquad$ P_0 joue σ_1

P_0 joue σ_0 :
- premier coup $1 \, v_0$
- à partir du 2ème coup : σ_1

Pour le mot $\alpha' = (1 v_0)(v'_0)(u'_1)\ldots$:

on a la partie $\alpha = (0)(v_0)(v'_0)(u'_1)$
où P_1 joue σ_1, donc
α est gagnée par P_1.

α' est gagnée par P_0 : $f(\alpha') \neq f(\alpha)$

Donc, σ_1 n'est pas stratégie gagnante pour P_1 $\longrightarrow$ contradiction.

Pour les jeux infinitaires il y a une classe de conditions de victoire
$\longrightarrow$ conditions de Borel
pour laquelle on sait que les jeux sont déterminés.

$\boxed{\text{Borel}}$

On déf. une topologie sur $\{0,1\}^\omega$:

$$d(w, w') = 2^{-(n+1)}, \text{ où}$$

n = longueur maximale d'un préfixe commun de w, w'

ex $w = w'$ $\quad d(w, w') = 2^{-\infty} = 0$

$w = 0u$, $w' = 1u'$
$$d(w, w') = \frac{1}{2} \text{ etc.}$$

<u>Ouverts</u> : $X \cdot \{0,1\}^\omega$ $\quad X \subseteq \{0,1\}^*$

Les ensembles boréliens sur $\{0,1\}^\omega$ = la plus petite classe de sous-ensembles de $\{0,1\}^\omega$ qui

- contient les ouverts et les fermés
- est fermée par $\bigcup_{n\geq 0}$ et $\bigcap_{n\geq 0}$.

Hiérarchie de Borel :

Parity

$\Sigma_1^0 = \bigcup_{n\geq 0} \Pi_0^0 \qquad \Pi_1^0 = \bigcap_{n\geq 0} \Sigma_0^0$ Büchi

Reach Σ_0^0 = ouverts $\qquad \Pi_0^0$ = fermés

Safety

<u>Th</u> (Martin) Tout jeu avec condition de victoire $\in$ ens. de Borel est <u>déterminé</u>.