İF 122 31/3/21

Aujourd'hui : jeux infinitaires —

Büchi, parity

Jeux finitaires : Reach, Safety, obligation

états visités au cours d'une partie

Infinitaire : on parle de nb. infini de visites

Ex Conditions d'équité (en vérification)

par exemple : — une ressource demandée sera acquise

— chaque fois qu'une ressource est demandée, elle sera acquise plus tard → propriété non-régulière

- approximation :

  une ressource demandée ∞-souvent sera acquise ∞-souvent

  $\rightsquigarrow$ propriétés <u>ω-régulières</u>

  $\hat{=}$ propriétés sur des séquences infinies (ω-words) à l'aide d'automates finis

Les 2 prochains cours : jeux avec condition de victoire exprimée par ω-régulier

$\rightarrow$ jeux de parité $\hat{=}$

jeux qui sont la forme la plus générales des jeux ω-régulier

Jeux de parité

Arène (V_0, V_1, E) $\qquad E \subseteq V \times V$

Fct. de priorité

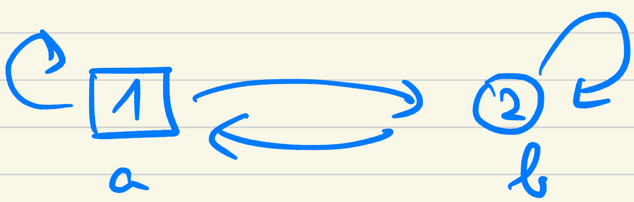
$$p : V \to \{0, \dots, K\}$$

Rq On suppose que chaque sommet a au moins 1 successeur

$\to$ parties maximales tjrs. infinies

Une partie $\pi : v_0 \to v_1 \to \dots$ est gagnée par P_0 si la priorité maximale visitée ∞-souvent dans π est paire.

ex



$p(a) = 1$

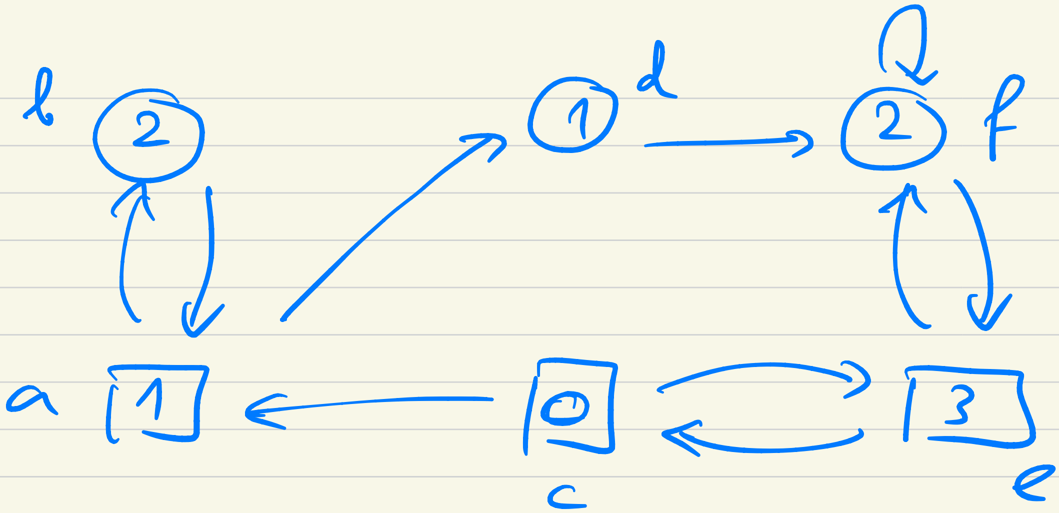
$p(b) = 2$

$\pi : b \to b \to b$ $\qquad$ prio. max $= 2$

∞-souvent $= 2$

$\pi' : b \to b \to a \to b \to a \to \dots$ $\qquad 2$

$\infty \qquad 1$



$p(a) = 1$, $p(b) = 2$, . . .

d, f gagnants pour P_0 : P_0 reste dans f

c, e gagnants pour P_1 : P_1 va cycler entre c, e

a gagnant pour P_0 : soit P_1 fait $a \to b$, ou $a \to d$ $(\to f)$

$W_0 = \{a, b, d, f\}$

$W_1 = \{c, e\}$

Cas spécial : $k = 1$

$\rightarrow$ 2 priorités : 1 et 2

$\pi : v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots$

π est gagnée par P_0 $\Leftrightarrow$

priorité max. visitée ∞-souvent $= 2$

$\Leftrightarrow$ π passe ∞-souvent par

$F := \{ v \; : \; p(v) = 2 \}$

$\rightsquigarrow$ Jeux d'accessibilité répétée,

ou jeux avec cond. de Büchi

- P_0 gagne π si π passe par F ∞-souvent, et (Büchi)
- P_1 gagne π si π passe par F finiment souvent (co-Büchi)

$$\underbrace{v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \cdot}\;\Big|\;\underbrace{v_n \rightarrow \cdots}_{\neg F}$$

— Première solution pour les jeux de Büchi

Büchi (V, E, F)

Entrée : (V_0, V_1, E) , $F \subseteq V$

Sortie : régions gagnantes $W_0, W_1 \subseteq V$

(+ strat. gagnantes)

$X := V \setminus Attr_0(F)$ // $X \subseteq W_1$

piège pour P_0

$Y := Attr_1(X)$ // $Y \subseteq W_1$

if $X = \emptyset$ then $W_0 = V$, $W_1 = \emptyset$

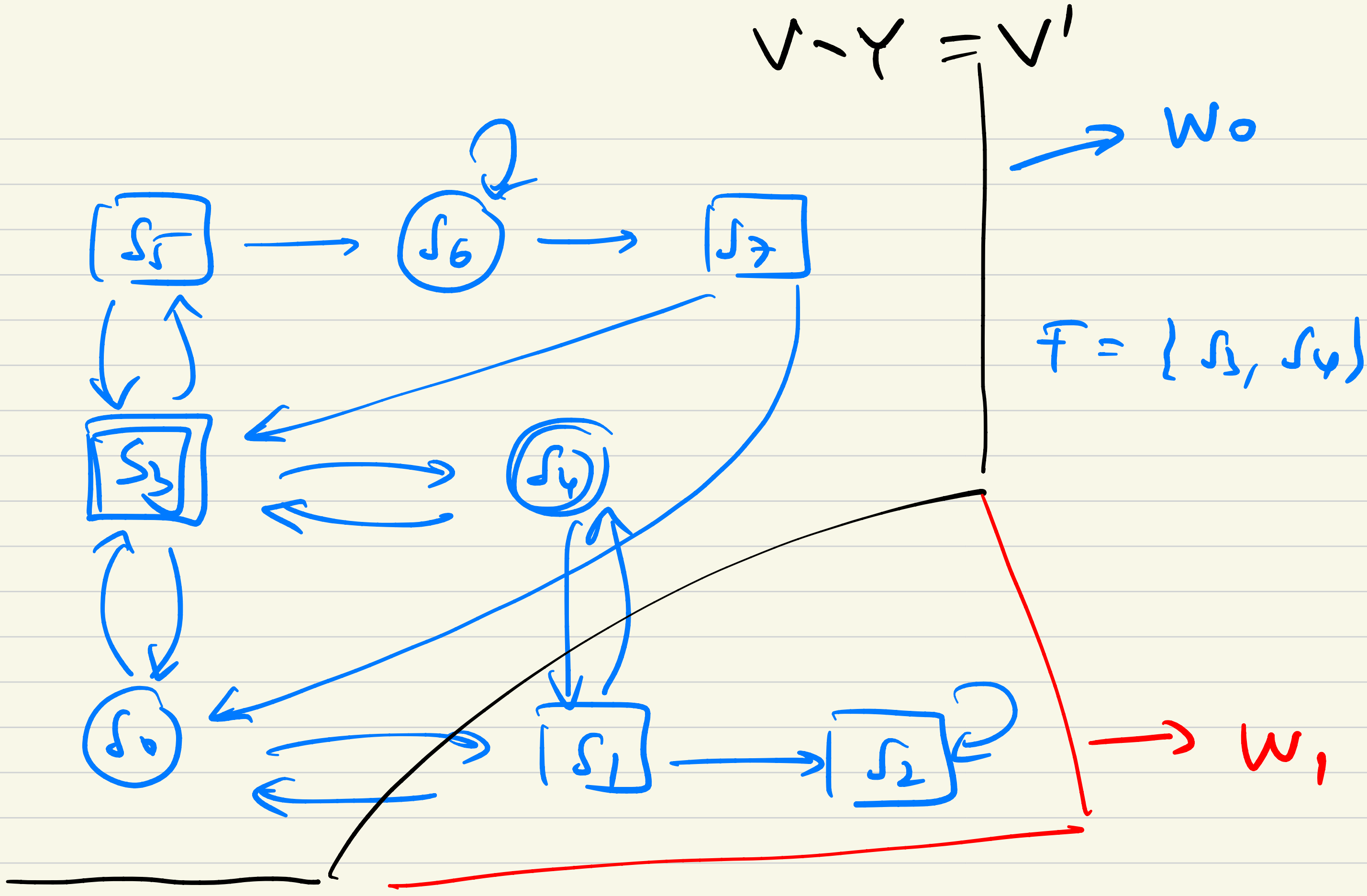
else Büchi $(V \setminus Y) =: (W_0', W_1')$

return $(W_0, W_1' \cup Y)$

$\downarrow W_0$ $\downarrow W_1$

Complexité : $O(\underbrace{n}_{\#\text{appels}} \cdot (\underbrace{m+n}_{\text{attracteur}}))$

$|E| = m$
$|V| = n$



$\mathrm{Attr}_0(s_3, s_4) = \{s_3, s_4, s_0, s_7, s_6, s_5\}$

$X = V \setminus \mathrm{Attr}_0(s_3, s_4) = \{s_1, s_2\}$

$Y = \mathrm{Attr}_1(X) = \{s_1, s_2\}$

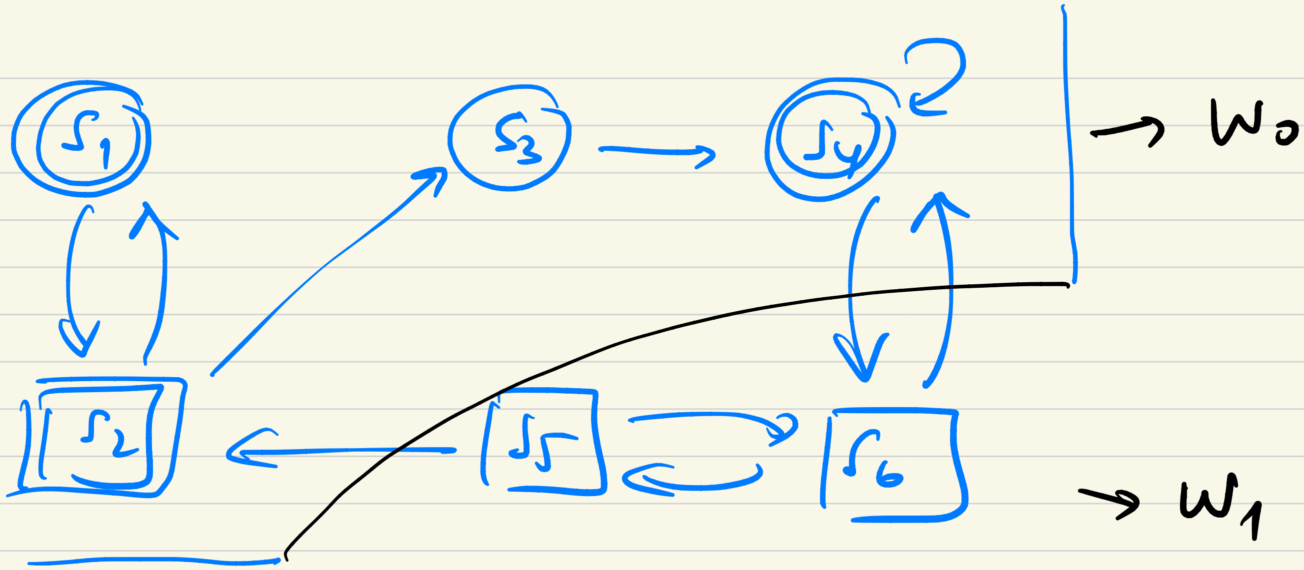
Büchi sur l'arène induite par $V \setminus Y$

$X' = \emptyset$

sur l'arène induite par V',

tout est gagnant pour P_0 $\rightarrow$

$W_0' = V'$



$Attr_0(\{s_1, s_2, s_4\}) = \{s_1, s_2, s_4, s_3\}$

$X = \{s_5, s_6\}$

$Y = Attr_1(X) = X$

$Büchi(V \setminus X) = Büchi(\{s_1, s_2, s_3, s_4\})$

$Attr_0(\{s_1, s_2, s_4\}) = \{s_1, s_2, s_4, s_3\}$

$X = \emptyset \quad \to \quad W_0' = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$

Th Büchi calcule correctement les régions gagnantes.

On le montre par récurrence.

Si $V = \emptyset$ alors $W_0 = W_1 = \emptyset$

Sinon :

- si $X = \emptyset = V \setminus Attr_0(F)$:

  $\forall v \in V$: $v \in Attr_0(F)$

  Donc si P_0 joue la stratégie d'attracteur : elle est toujours capable d'arriver dans F, à partir de n'importe quel sommet.

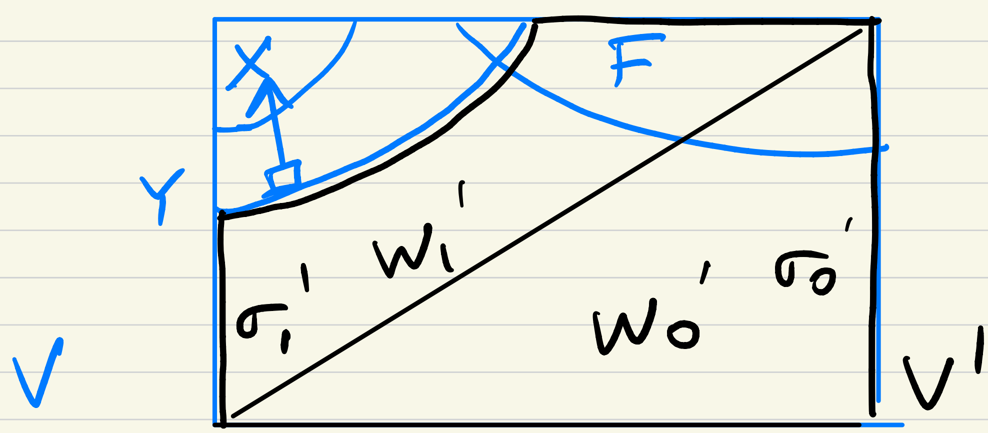
  $\Rightarrow$ P_0 garantit de cette façon de visiter F ∞ - souvent

- si $X \neq \emptyset$: appel réc. Büchi $(V \setminus Y)$

Par récurrence, l'appel réc. Büchi$(V \setminus Y)$ calcule les régions gagnantes W_0', W_1' sur la sous-arène $V \setminus Y$, et

$V \setminus Y = W_0' \dot\cup W_1'$ (jeu est dét.)

Stratégies gagnantes σ_0', σ_1' de P_0, resp. P_1, sur W_0', W_1'.



$W_0 = W_0'$, $W_1 = W_1' \cup Y$

sur W_1 : dans Y, P_1 gagne avec la stratégie d'attracteur qui le mène vers X. Dès que le jeu arrive dans X, P_1 joue la stratégie de piège pour y rester.

Dans W_1', P_1 joue σ_1'. Si le jeu reste dans W_1', ça sera gagné par P_1 (récurrence). Si le jeu va dans Y (à cause de P_0), P_1 va jouer la stratégie sur Y, et gagner. $\Rightarrow$ $\boxed{Y \cup W_1' \subseteq W_1}$

$W_0' \subseteq W_0$ (application Q1 du DM)

car $V \setminus Y$: piège pour P_1

Donc, en appliquant σ_0', P_0 gagne sur $W_0' = W_0$.

En particulier, on a :

- $V = W_0 \dot\cup W_1$ (jeu déterminé)
- strat. positionnelles :
  σ_0' pour P_0, σ_1' / attracteur pour P_1

2. Solution

$\mathrm{Attr}_0^+(F)$ attracteur strict de P_0 vers F

= ens. des sommets à partir desquels P_0 peut garantir d'arriver dans F en 1 ou plus coups.

On calcule des ensembles décroissants.

$$\begin{cases} X_0 := V \\ X_{n+1} := \mathrm{Attr}_0^+(F \cap X_n) \end{cases}$$

$X_1 \subseteq X_0$

$X_2 \subseteq X_1$

$\vdots$

$X_2 = \mathrm{Attr}_0^+(F \cap X_1)$

$X_1 = \mathrm{Attr}_0^+(F \cap X_0)$

$$X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots \supseteq X_n = X_{n+1}$$

$$X := \bigcap_{n \geq 0} X_n \qquad = X$$

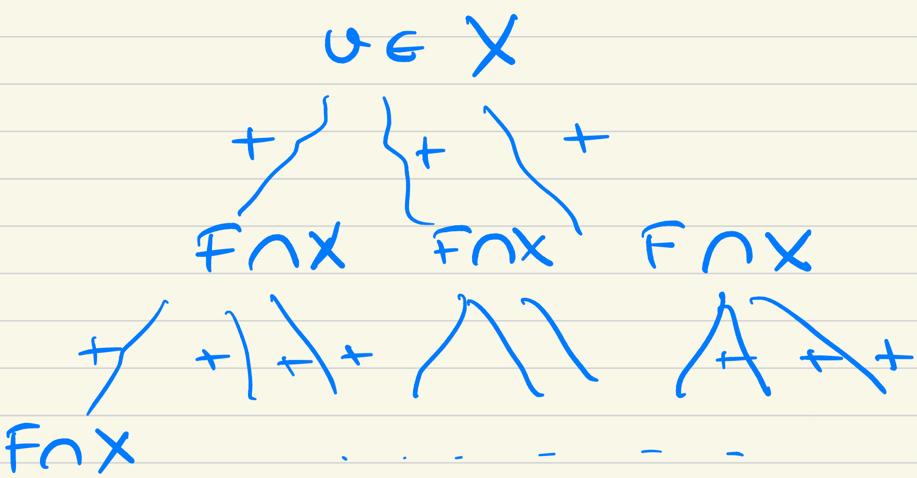
On montre :

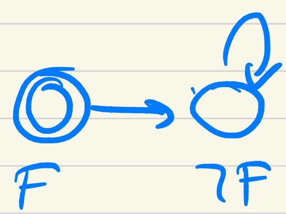
$X = \bigcap_{n \geq 0} X_n$ est la région gagnante de P_0 dans le jeu de Büchi :

$$X_0 = V \ , \quad X_{n+1} = Attr_0^+(F \cap X_n)$$

Par déf : $\boxed{X = Attr_0^+(F \cap X)}$

$$\Big(\underbrace{X_n}_{X} = X_{n+1} = Attr_0^+(F \cap \underbrace{X_n}_{X}) \Big)$$





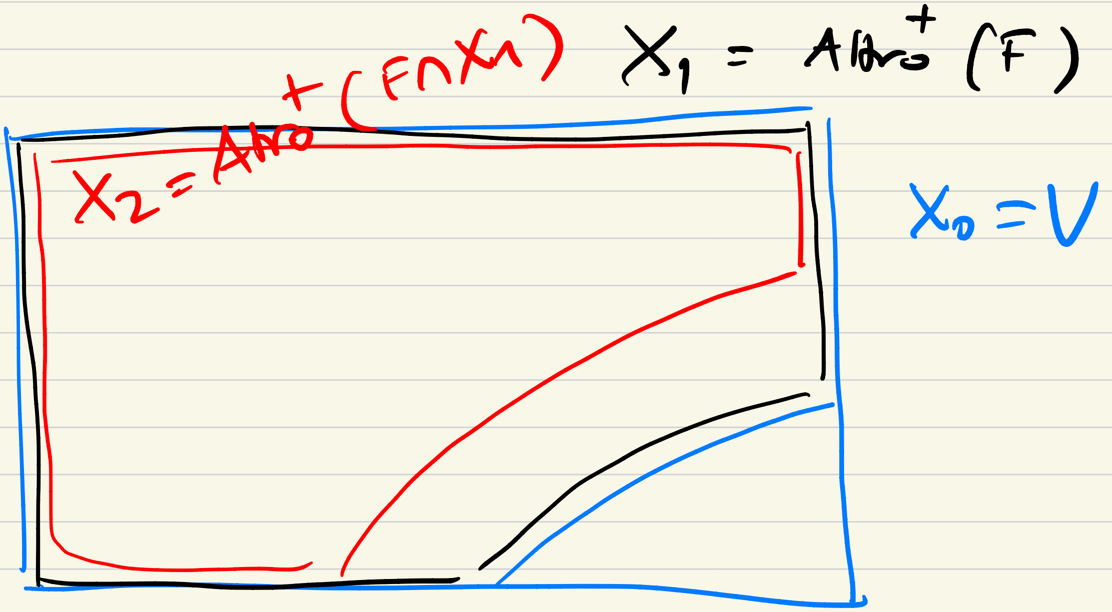
Donc à partir de X, si P_0 joue la stratégie d'attr. strict vers $F \cap X$

$\Rightarrow$ P_0 garantit de voir F ∞-souvent

$X \in W_0$

Il reste à montrer : $V \setminus X \in W_1$

$$X = X_n = X_{n+1} = \mathrm{Attr}_0^+(F \cap X_n)$$

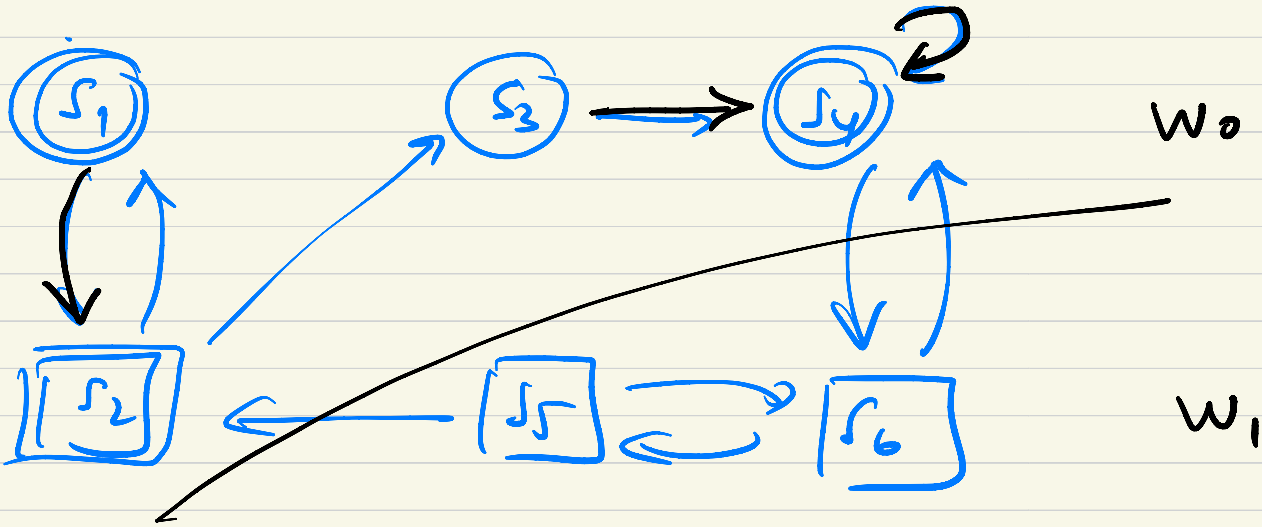


Il faut montrer une hypothèse plus forte :

(*) $v \in X_k \iff$ à partir de v P_0 peut garantir de visiter F au moins k fois (sans compter v)

Avec (*) : $V \setminus X$ est l'ens. de sommets à partir desquels P_0 peut garantir de visiter F au plus $(n+1)$ fois $\rightarrow$ donc finiment souvent

$\rightarrow$ P_0 perd



$X_0 = V$

$X_1 = \{s_3, s_1, s_2, s_4\}$

$X_2 = Attr_0^+(F \cap X_1) =$

$Attr_0^+(\{s_1, s_2, s_4\}) = X_1 = W_0$

$\sigma_0 : V_0 \rightarrow V$