iF122 24/3/21

Méthode de résolution de jeux de type $Reach(F_1) \wedge Reach(F_2)$, ou $Reach(F_1) \wedge Avoid(F_2)$, etc.

$\rightsquigarrow$ <u>Jeux d'obligation</u>

Win = combinaison booléenne de cond. $Reach(F)$, $F \subseteq V$

$$= \mathcal{F} \subseteq 2^V$$

$2^V \hookrightarrow \{U : U \subseteq V\}$

$$\mathcal{F} = \{U_1, U_2, \ldots U_n\}$$

<u>Ex</u> $Win_1 = Reach(F_1) \wedge Reach(F_2)$

$\rightarrow \mathcal{F}_1 = \{U \subseteq V : U \cap F_1 \neq \emptyset$, et $U \cap F_2 \neq \emptyset\}$

$Win_2 = Reach(F_1) \wedge Avoid(F_2)$

$\rightarrow \mathcal{F}_2 = \{U \subseteq V : U \cap F_1 \neq \emptyset, U \cap F_2 = \emptyset\}$

Partie $\pi = v_0, v_1, \ldots$ est gagnée par P_0 ssi l'ensemble des états visités dans π app. à F.

Pour résoudre ces jeux, on va passer par les jeux de parité faible

$A = (V_0, V_1, E)$ + fonction de priorité $p : V_0 \cup V_1 \to \{0, \ldots, K\}$

$p(v)$ = priorité (couleur) de v

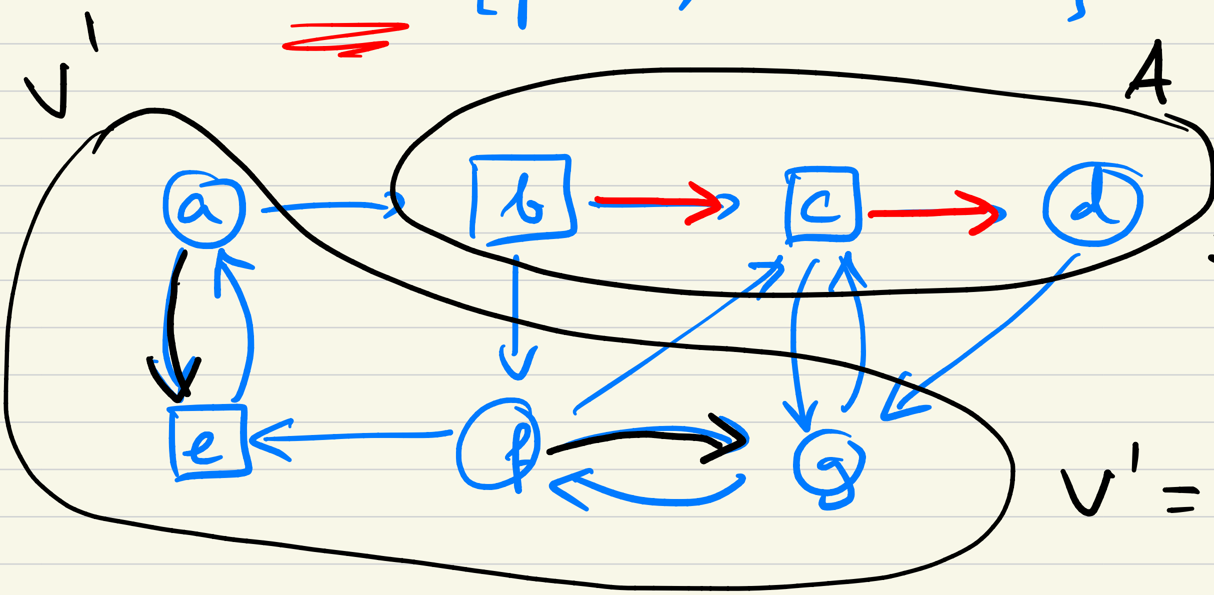
Partie $\pi = v_0, v_1, \ldots$ maximale

$$\begin{matrix} v_0, & v_1, & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \\ p(v_0) & p(v_1) & \ldots \end{matrix}$$

P_0 gagne π si la plus grande priorité vue dans π est paire (P_1 gagne si elle est impaire).

π est gagnée par P_0 si

$\max\{p(v_i) : i \geq 0\}$ est pair



$U = \{d\}$

$= Attr_1(U)$

$= \{d, c, b\}$

$V' = W_0'$

$p(a) = p(e) = 0$ $\qquad p(c) = p(g) = 2$

$p(b) = p(f) = 1$ $\qquad p(d) = 3$

$d \overset{?}{\in} W_1$ $\qquad c \in W_1$ $\qquad c \to d$
$\in V_1$

$g \rightleftarrows f$

$f\ g\ f\ g \ldots$ $\to \max 2$
$1\ 2\ 1\ 2$ $\quad P_0$ gagne

[Plus tard : jeu de parité $\to$
∞-souvent]

On veut montrer que les jeux de parité faible sont :

- déterminés $\quad (V = W_0 \dot\cup W_1)$
- résolubles en temps poly (calcul de W_0, W_1 en PTime)
- les stratégies gagnantes sont positionnelles
$$\sigma_0 : V_0 \to V$$
$$\sigma_1 : V_1 \to V$$

$\mathcal{A} = (V_0, V_1, E)$, $p : V \to \{0, .., k\}$

Supposons que k est impair (l'autre cas est symmetrique)

$U := \{ v \in V : p(v) = k \} \neq \emptyset$

On note que $U \subseteq W_1$, et aussi $A = Attr_1(U) \subseteq W_1$.

On considère $V \setminus A =: V'$

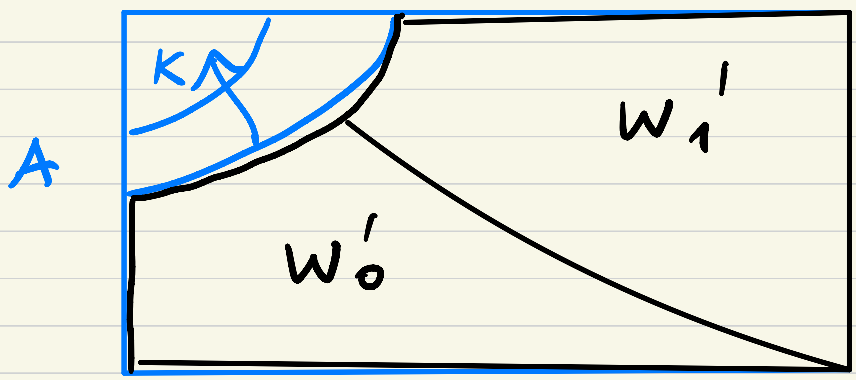
On résout le jeu de parité faible sur la sous-arène de jeu définie par V'

$$\mathcal{A}' = (V_0 \setminus A,\ V_1 \setminus A,\ E \cap (V' \times V'))$$

Par récurrence, on obtient des régions gagnantes $W_0' \subseteq V'$
$W_1' \subseteq V'$,

ainsi que des stratégies gagnantes positionnelles $\sigma_0' : V_0' \to V'$
$\sigma_1' : V_1' \to V'$

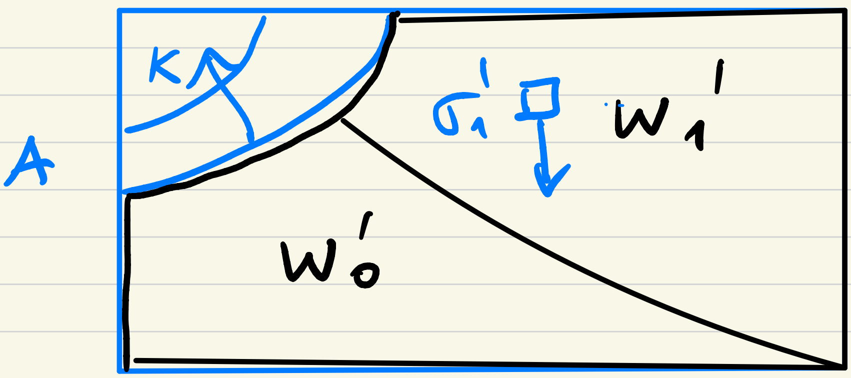
et $W_0' \cup W_1' = V'$.



On montre :

$W_0 = W_0'$

$W_1 = A \cup W_1'$



On montre :

$W_0 = W_0'$

$W_1 = A \cup W_1'$

$W_0' \subseteq W_0$ (Q1 du DM) parce que P_1 ne peut pas quitter V'.

$A \subseteq W_1$:

Dans A, P_1 applique la stratégie d'attracteur pour aller dans l'ensemble de priorité K, donc K sera la plus grande priorité.

$W_1' \subseteq W_1$

Dans W_1', P_1 applique la stratégie (gagnante sur V') σ_1'.

Si une partie commence dans W_1' et reste dans V', alors elle est gagnée par P_1 (par réc.)

Si une partie démarre et reste dans V', alors :

→ elle est gagnée par P_0, si elle démarre dans W_0'

resp.

par P_1, si elle démarre dans W_1' (par. hyp.)

Une partie peut quitter V' (à cause de P_0) et aller dans A, dans quel cas elle va être par P_1.

Les stratégies gagnantes :

$\sigma_0 = \sigma_0'$ sur W_0'

$\sigma_1 = \sigma_1'$ sur W_1', attracteur sur A

sont positionnelles.

Le temps de calcul sera quadratique :

Calcul de A : $O(|V| + |E|)$

Appel récursif sur V' : $O(|V'| + |E'|)^2$

$$t(V, E) \leq c \cdot (|V| + |E|) + c' \cdot (|V'| + |E'|)^2$$
$$\leq c'(|V| + |E|)^2$$

Jeux d'obligation :

$$\mathcal{F} \subseteq 2^V$$
$$\mathcal{F} = \{U_1, U_2, \ldots U_n\}$$

Il nous reste à réduire les jeux d'obligation à parité faible.

On va "mémoriser" les états visités.

Nouvelle arène $V \times \underset{\uparrow \atop \text{mémoire}}{2^V} = V'$

avec arêtes $E' \subseteq V' \times V'$:

$(u, X) \longrightarrow (v, Y)$ si

$(u, v) \in E$ et $Y = X \cup \{u\}$

$v_0 \to v_1 \to v_2 \to \cdots$ partie originale

$(v_0, \emptyset) \to (v_1, \{v_0\}) \to (v_2, \{v_0, v_1\}) \to \cdots$

partie dans l'arène A'

$V_0' = V_0 \times 2^V$

$V_1' = V_1 \times 2^V$

$(v_0, X_0) \to (v_1, X_1) \to \cdots$

$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \cdots$ $\qquad X_n = X_{n+1} = \cdots$

$$1 \to 2 \to 3 \to 2 \to 3 \to 2 \to 4 \to 3 \to 3 \ldots$$

$\emptyset \quad \{1\} \quad \{1,2\} \quad \{1,2,3\} \quad \ldots \quad \{1,2,3,4\}$

$\{1,2,3,4\} \overset{?}{\in} \mathcal{F}$: oui $\to P_0$ + ; non $\to P_1$ +

On déf. $p : V' \to \{0, \ldots, 2|V|+2\}$

$$p((u,X)) = \begin{cases} 2|X|+2 & \text{si } X \in \mathcal{F} \\ 2|X|+1 & \text{si } X \notin \mathcal{F} \end{cases}$$

$$|X| \leq |V|$$

<u>Rq</u> les priorités au cours d'une partie sont croissantes, parce que

$$(u_0, X_0) \to (u_1, X_1) \to \ldots$$

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \ldots$$

$$2|X_0| + 1/2 \leq 2|X_1| + 1/2 \leq \ldots$$

La plus grande priorité est $2|X_n| + 1/2$, où X_n = ens. des sommets visités.

Réduction du jeu d'obligation $(V_0, V_1, E, \mathcal{F})$ vers le jeu de parité faible (V_0', V_1', E', p) :

$$f(v) = (v, \emptyset)$$
$$v \in V \qquad\qquad \in V'$$

v est gagnant pour P_0 dans le jeu d'obligation $\iff$ $(v, \emptyset)$ est gagnant pour P_0 dans le jeu de parité faible.

$(\Rightarrow)$ P_0 a une stratégie gagnante σ_0

$\Rightarrow$ toute partie conforme à σ_0 :

$v_0 \to v_1 \to \cdots$ tq,

$\{v_i : i \geq 0\} \in \mathcal{F}$

Dans V', P_0 "joue" σ_0 :

(v, X), $v \in V_0$

$$\sigma_0'(v, X) := (\underline{\sigma_0(v)}, X \cup \{v\})$$

σ_0' est gagnante pour P_0, parce que la priorité max. est $2|X|+2$, où X = ens. des sommets visités ($X \in \mathcal{F}$)

($\Leftarrow$) soit σ_0' = strat. gagn. de P_0 dans le jeu de parité faible

$\sigma_0' : V_0' \to V$ strat. pos.

$\rightsquigarrow$ stratégie σ_0 pour P_0 avec mémoire 2^V dans le jeu d'obligation

$$\sigma_0 : V_0 \times \underbrace{M}_{= 2^V} \to V$$

$\sigma_0(v, X) := w$ tq. $\sigma_0'(v, X) = (\underline{w}, Y)$

$\text{update}(v, X) := X \cup \{v\}$

II Reach(F_1) $\wedge$ Reach(F_2)

$$(V_0; V_1, E) \longrightarrow (V_0', V_1', E')$$

$$V' = V \times 2^V$$

Ici : plus simple

ni F_1, F_2 — F_1, pas F_2 — F_1 et F_2

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$$

$(u, X) \rightarrow (v, X')$ si :

$u \rightarrow v$ et

$$X' = \begin{cases} X & \text{si } u \notin F_1, u \notin F_2 \\ X \cup \{1\} & \text{si } u \in F_1 \setminus F_2 \\ X \cup \{2\} & F_2 \setminus F_1 \\ X \cup \{1,2\} & u \in F_1 \cap F_2 \end{cases}$$

Réduction vers jeu d'accessibilité

$$\text{Reach}(\{(v, \{1,2\}) : v \in V\})$$