Outils Mathématiques – Calcul Intégral

Intégrales simples

IS1

$$Q=\int_{273}^{298}\frac{dQ}{dT}\,dT=\int_{273}^{298}34{,}5+4{,}2\cdot10^{-3}\,T\,dT=[34{,}5\,T+2{,}1\cdot10^{-3}\,T^2]_{273}^{298}\approx 892{,}5\,J$$

IS2

1) $I_1=\int_0^{\pi}x\cos(x)\,dx$ → IPP : $\left|\begin{array}{c} u(x)=x \rightarrow u'(x)=1 \\ v'(x)=\cos(x)\rightarrow v(x)=\sin(x)\end{array}\right|$

$$I_1=[x\sin(x)]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx=-[-\cos(x)]_0^{\pi}=-2$$

2) $I_2=\int_0^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$ avec a > 0 → Changement de variable : x = a sin u

- $x=a\sin u \Leftrightarrow u=\arcsin(\frac{x}{a})$
- $\left|\begin{array}{c} x=a\rightarrow u=\arcsin(\frac{a}{a})=\frac{\pi}{2} \\ x=0\rightarrow u=\arcsin(0)=0\end{array}\right|$
- $dx=d(a\sin u)=(a\cos u)\,du$

$$I_2=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2 u}{a^2}}\,a\cos u\,du=a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\,du=a\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^2 u}\cos u\,du=a\int_0^{\pi/2}\cos^2(u)\,du$$

$$I_2=a\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos(2u)}{2}du=\frac{a}{2}[u+\frac{\sin(2u)}{2}]_0^{\pi/2}=\frac{a}{2}[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(2\pi/2)}{2}-0-\frac{\sin(0)}{2}]=\frac{a\pi}{4}$$

3) $I_3=\int_0^2\frac{x^2}{x^2+4}dx=\int_0^2\frac{x^2+4-4}{x^2+4}dx=\int_0^2(1-\frac{4}{x^2+4})dx=\int_0^2 1\,dx-\int_0^2\frac{1}{\frac{x^2}{4}+1}dx=2-2\int_0^2\frac{1/2}{(x/2)^2+1}dx$

$$I_3=2-2[\arctan(\frac{x}{2})]_0^2=2-2[\arctan(1)-\arctan(0)]=2-2\frac{\pi}{4}=2-\frac{\pi}{2}$$

IS4

1a) La période étant T, $\forall T$, $\cos(\omega(t+T))=\cos(\omega T)$

donc $\omega(t+T)=\omega t+\omega T=\omega t+2\pi$ car la f° cosinus est 2π-périodq

Donc $\omega T=2\pi$ donc $\omega=\frac{2\pi}{T}$

1b)

$$\bar{\bar{I}}=\frac{1}{T}\int_0^T i(t)\,dt=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^T I_m\cos(\omega t)\,dt=\frac{\omega}{2\pi}I_m[\frac{\sin(\omega t)}{\omega}]_0^T=\frac{\omega}{2\pi}I_m(\frac{\sin(\omega T)}{\omega})=\frac{\omega}{2\pi}I_m(\frac{\sin(2\pi)}{\omega})$$

$$\bar{\bar{I}}=0$$

$$(I_{eff})^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t)\,dt = \frac{\omega}{2\pi} I_m^2 \int_0^T \frac{1+\cos(2\omega t)}{2}\,dt\ \frac{\omega}{2\pi} I_m^2 [\frac{t}{2}+\frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}]_0^T = \frac{\omega}{2\pi} I_m^2 (\frac{T}{2}+\frac{\sin(4\pi)-\sin 0}{4\omega})$$

$$(I_{eff})^2 = \frac{\omega I_m^2}{2\pi}\frac{T}{2} = \frac{\omega I_m^2}{4\pi}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{I_m^2}{2}$$, donc $I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

2a) On voit que $T_R = \pi / \omega$

2b) $\bar{I}_R = \frac{\omega}{\pi}\int_0^T I_m |\cos(\omega t)|\,dt$, $t \in [0, \frac{\pi}{\omega}] \Rightarrow \omega t \in [0, \pi]$

Donc pour , $\cos(\omega t) \geqslant 0 \Rightarrow |\cos(\omega t)| = \cos(\omega t)$

pour $t \in [\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$, $\cos(\omega t) \leqslant 0 \Rightarrow |\cos(\omega t)| = -\cos(\omega t)$

Ainsi $\bar{I}_R = \frac{\omega}{\pi}[\int_0^{\pi/2\omega} I_m \cos(\omega t)\,dt] + \int_{\pi/2\omega}^{\pi/\omega} -I_m \cos(\omega t)\,dt$

Par symétrie, $\bar{I}_R = 2\frac{\omega}{\pi}[\int_0^{\pi/2\omega} I_m \cos(\omega t)\,dt] = \frac{2\omega}{\pi} I_m [\frac{\sin(\omega t)}{\omega}]_0^{\pi/2\omega} = \frac{2\omega}{\pi} I_m [\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\omega}] = \frac{2}{\pi} I_m$

$$(I_{eff}^R)^2 = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} I_m^2 |\cos(\omega t)|^2\,dt = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} I_m^2 \cos^2(\omega t)\,dt = \frac{\omega}{\pi} I_m^2 \int_0^{\pi/\omega} \frac{1+\cos(2\omega t)}{2}\,dt = \frac{\omega}{\pi} I_m^2 [\frac{t}{2}+\frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}]_0^{\pi/\omega}$$

$$(I_{eff}^R)^2 = \frac{\omega}{\pi} I_m^2 [\frac{\pi}{2\omega}] = \frac{I_m^2}{2}$$

$$I_{eff}^R = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Notes :
f° : fonction(s)
q : -ique(s)
IPP : Intégration Par Parties