Cours 10/2/21

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

∃ Eve ∀ Adam

Stratégies joueurs P_0, P_1

Comment on modélise un jeu, arène etc?

Arène : graphe orienté (V, E)

V : sommets

E : arêtes $E \subseteq V \times V$

$V = V_0 \dot\cup V_1$

V_0 : sommets de P_0

V_1 : sommets de P_1

- jeton : marque le noeud actuel
- coup : bouger le jeton

  Le joueur auquel appartient le sommet bouge le jeton, en le plaçant sur un successeur de ce sommet.
- partie π = chemin dans le graphe

  $(v_0, v_1, \dots)$

  $(v_i, v_{i+1}) \in E$, $\forall i \geq 0$

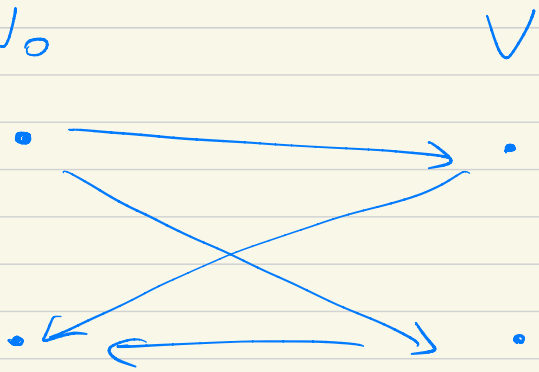
Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Ex. Nim $(n_1, \dots, n_K)$

$V \subseteq \mathbb{N}^K$

$E = \{ \langle (n_1, \dots, n_K), (n_1, \dots m_i, \dots n_K) \rangle : 1 \le i \le K, \quad 0 \le m_i < n_i \}$

$V_0 = V \times \{0\}$, $V_1 = V \times \{1\}$

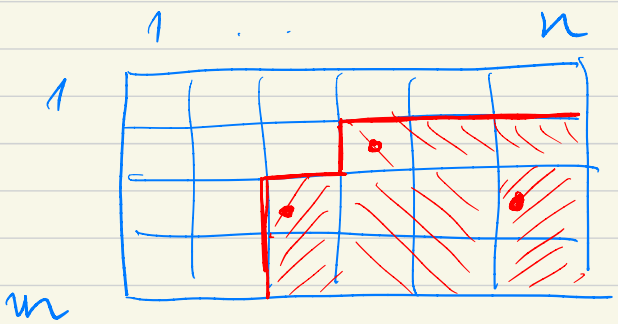


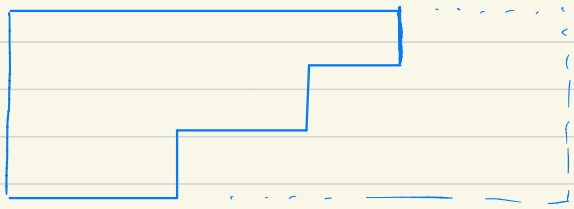
$V' = V_0 \dot\cup V_1$

graphe bipartite

$E' = \{ \langle (\bar n, 0), (\bar n', 1) \rangle : (\bar n, \bar n') \in E \} \cup \{ \langle (\bar n, 1), (\bar n', 0) \rangle : (\bar n, \bar n') \in E \}$

Ex Chocolat





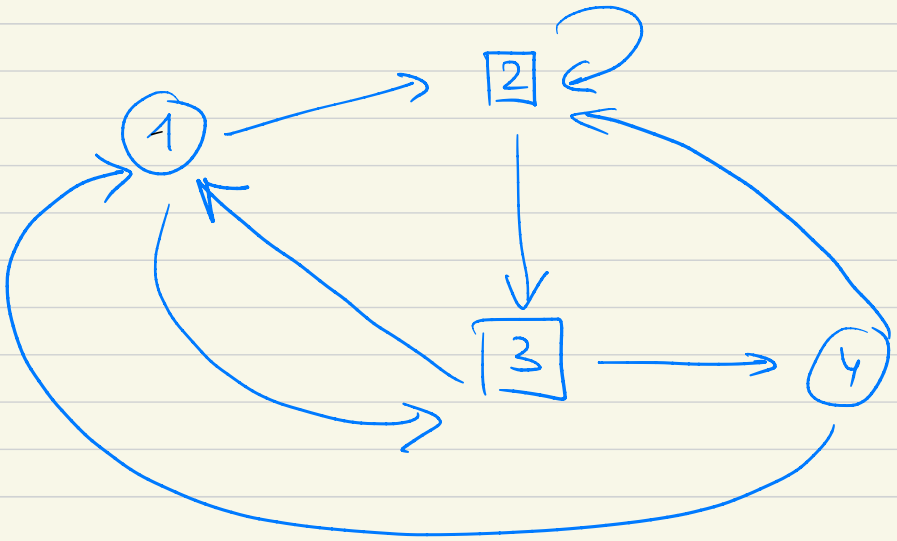
$(n_1, n_2, \dots, n_m)$

$0 \le n_i \le n$

$n_1 \ge \dots \ge n_m$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

V_0 : ○ V_1 : □



$V_0 = \{1, 4\}$

$V_1 = \{2, 3\}$

$F = \{4\}$

$v_0 = 1$

Parties

1, 2, 2, 3, 1, 3, 4 ...

P_0 P_1 P_1 P_1 P_0 P_1 P_0

1, 2, 2, 2, ...

On s'intéresse aux parties maximales,

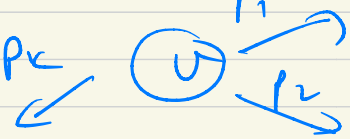
s'il n'y a pas de sommet puit, les parties maximales sont toujours infinies.

Cette modélisation : jeux à information complète : on chaque joueur sait où se trouve le jeton et connaît (V, E)

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

ex Jeux qui ne rentrent pas dans cette modélisation :

- jeux à info incomplète (jeux de cartes)
- jeux concurrents (Pierre-feuille-ciseaux) où 2 joueurs jouent en même temps
- jeux probabilistes : la différence est qu'il y a des probab. sur les arêtes :



$\sum p_i = 1$

Stratégies $\sigma, \tilde{\sigma}, \ldots$ $\sigma_0 : P_0$, $\sigma_1 : P_1$

$\sigma_0 : V^* V_0 \to V$

V^* : historique de partie ; V_0 : sommet actuel

$\sigma_0(v_0 \ldots v_k v) = v'$ si

(1) $v_0, \ldots, v_k, v$ chemin de (V, E),

(2) $v \in V_0$, $v' \in \{w : (v, w) \in E\}$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

$\sigma_1 : V^* V_1 \to V$ strat. pour P_1

$\pi = (v_0, v_1, \ldots)$ partie (chemin)

π est conforme à la stratégie σ_0 :

si pour tout $i \geq 0$ tq. $v_i \in V_0$:

$v_{i+1} = \sigma_0(v_0, \ldots v_i)$

(chaque comp de P_0 est conforme à σ_0)

Condition de victoire d'un jeu (pour P_0)

$\boxed{Win}$ = ensemble de parties max.

ex. Win = chemins qui passent par un ensemble de sommets F

$\rightsquigarrow$ jeux d'accessibilité

" P_0 gagne par rapport à Win si toute partie passe par F "

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Une stratégie $\sigma_0 : V^* V_0 \to V$ est gagnante pour P_0* par rapport à W_0 si toute partie π maximale** qui est σ_0-conforme, appartient à W_0.

* à partir d'un sommet v

** qui commence dans v

Soit $v \in V$.

v est gagnant pour P_0 (par rapport à W_0) s'il existe une stratégie gagnante pour P_0 à partir de v.

Pour P_1 : stratégie σ_1, sommet gagnant pour P_1

W_0 = parties gagnantes pour P_0

$\overline{W_0}$ = ——————→ P_1

(complém.)

→ pas de parties infinies

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Ex $F \subseteq V$

Win = parties qui passent par F

Notations

Ens. des chemins finis $\subseteq V^*$

infinis $\subseteq V^\omega$

V^ω : séquences infinies sur alphabet V

$Win = V^* F V^* \cup V^* F V^\omega$

chemins finis qui passent par F ; infinis

$\overline{Win}$ = $(V \setminus F)^* \cup (V \setminus F)^\omega$

(complémentaire)

chemins finis qui évitent F ; infinis

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Jeu $(V_0 \dot{\cup} V_1, E)$, Win

P_0, P_1

V

arène de jeu

chemin gagnant pour P_0

$(\overline{\text{Win}} : P_1)$

$v \in V$

Q : est-ce que v est gagnant pour P_0, ou P_1, ou aucun ?

Jeu est déterminé : pour chaque v, v est soit gagnant pour P_0 ou pour P_1.

v gagnant pour P_0 $\Leftrightarrow$ P_0 a une stratégie gagnante σ_0 à partir de v.

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

σ_0 : stratégie pour P_0

σ_1 ——————— P_1

$v \in V$ sommet de départ

$\sigma_0 * \sigma_1(v)$: unique partie à partir de v qui est à la fois σ_0-conf. et σ_1-conf.

ex $\sigma_0(1) = 3$ $\sigma_1(3) = 1$

$\sigma_0 * \sigma_1(\Delta) = 1\,3\,1\,3\,\ldots = (13)^\omega$

σ_0 est gagnante pour P_0 à partir de v si pour toute stratégie τ de P_1 :

$\sigma_0 * \tau(v) \in Win$

$\exists$

v est gagnant pour P_0 s'il existe

$\forall$

σ_0 tq. pour tout τ :

$\sigma_0 * \tau(v) \in Win$

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0

Un jeu est déterminé si on peut inverser les quantificateurs :

$$\neg\left(\exists \sigma_0\ \forall \hat{\imath}\ :\ \sigma_0 * \hat{\imath}(v) \in \mathrm{Win}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\exists \sigma_1\ \forall \hat{\imath}'\ :\ \hat{\imath}' * \sigma_1(v) \notin \mathrm{Win}\right)$$

$$\neg(v \text{ gagnant pour } P_0) \iff v \text{ gagnant pour } P_1$$

! Tout jeu fini, sans partie indécise, est déterminé.

$\rightsquigarrow$ arbre de jeu

$$\neg\Big(\underset{P_0}{\exists c_0}\ \underset{P_1}{\forall c_0'}\ \underset{P_0}{\exists c_1}\ \forall c_1' \ \ldots \text{ P gagne}\Big)$$

$\forall c_0\ \exists c_0'\ \forall c_0\ \exists c_1'\ \ldots$ P_0 perd P_1 gagne

Sébastien Delpeuch · delpeuch.net · CC BY-NC-SA 4.0