Modèle cinématique

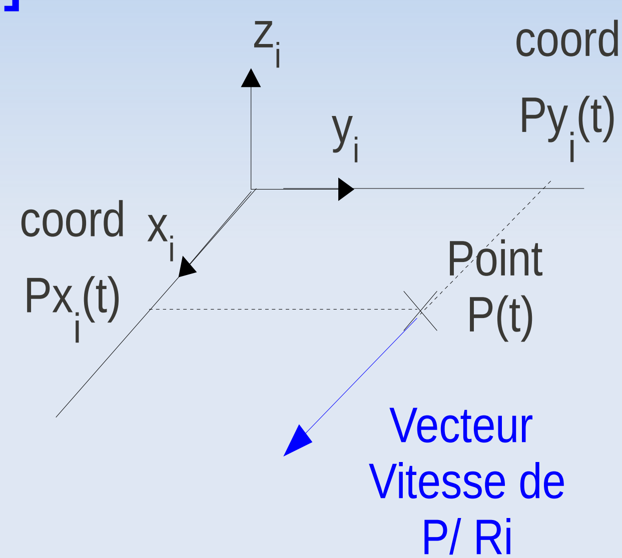
- Cinématique (étude des vitesses)
  - Vitesse d'un point lié à un repère
    - Vitesse de translation
    - Vitesse de rotation, matrice S, produit vectoriel
  - Jacobienne d'une articulation en un point
    - Vitesse d'une articulation, en un point
    - Jacobienne
    - Déplacement virtuel
    - Calcul de la jacobienne (DH)
    - Singularites d'un robot
    - Travail virtuel, et modèle de force statique
    - Modèle cinématique inverse

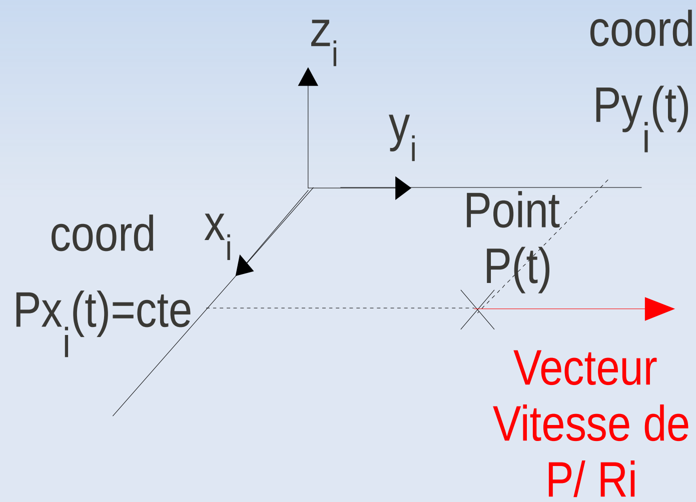
Repère lié à un solide

- un point P est lié au repère affine i: O_i, R_i ssi
  - ses coordonnées ${}^iP$ sont fixes : ${}^iP$ =cte
- un solide est lié au repère i ssi
  - Tout point P du solide est lié au repère i
- On dit aussi que le repère i est lié au solide...

Vitesse d'un point P / repère i définition intuitive

- Repère i lié à la salle de cours, Vous êtes le point *P*(*t*)
- [1] Vous avancez suivant xi
- [2] Vous avancez suivant yi





- Définition du vecteur vitesse d'un point *P*(*t*) / repère Ri

$$\overrightarrow{v_{P/Ri}}(t)=\overrightarrow{x_i(t)}.\dot{P}_{xi}(t)+\overrightarrow{y_i(t)}.\dot{P}_{yi}(t)+\overrightarrow{z_i(t)}.\dot{P}_{zi}(t)\Leftrightarrow {}^{i}\overrightarrow{v_{P/Ri}}=\begin{bmatrix}\dot{P}_{xi}(t)\\ \dot{P}_{yi}(t)\\ \dot{P}_{zi}(t)\end{bmatrix}$$

Vitesse d'un point P / repère i définition

- La vitesse du point P par rapport au repère Ri est le vecteur dont les coordonnées dans le repère i sont les dérivées temporelles des coordonnées de P dans le repère i
- En bref (on oublie la flèche pour alléger la notation)

$v_{P/Ri}$ est le vecteur tel que : $${}^{i}v_{P/Ri} = \left[{}^{i}\dot{P}\right] = \frac{d\left[{}^{i}P\right]}{dt}$$

Vitesse / Rk
d'un point P, fixe / Ri

- Vous êtes immobile / au repère i lié à la salle : $v_{P/Ri} = 0$
- Mais vous vous déplacez / repère k lié au soleil : $v_{P/Rk} =?$
- Équation liant $v_{P/Ri}$ et $v_{P/Rk}$? transformations homogènes :

$$ {}^{k}v_{P/Rk} = \frac{d\left[{}^{k}P\right]}{dt} = \frac{d\left[{}^{k}R_i \,.\, {}^{i}P + {}^{k}O_i\right]}{dt} $$

$$ {}^{k}v_{P/Rk} = \underbrace{\frac{d\left[{}^{k}R_i\right]}{dt} \,.\, \left[{}^{i}P\right]}_{\text{chgt orientation Ri /Rk}} + \underbrace{\cancel{{}^{k}R_i \,.\, \frac{d\left[{}^{i}P\right]}{dt}}}_{{}^{k}v_{P/Ri}=0} + \underbrace{\frac{d\left[{}^{k}O_i\right]}{dt}}_{{}^{k}v_{Oi/Rk}} $$

Chgt Orientation Ri / Rk lien avec le produit vectoriel 1

- On s'intéresse seulement au terme $\dfrac{d\left[{}^kR_i\right]}{dt}$

$${}^kR_i \text{ est orthogonale } : \left[{}^kR_i\right].\left[{}^kR_i\right]^T = Id$$

- En dérivant temporellement, on obtient :

$$\underbrace{\frac{d\left[{}^kR_i\right]}{dt}.\left[{}^kR_i\right]^T}_{S \text{ anti-symétrique}} + \underbrace{\left[{}^kR_i\right].\frac{d\left[{}^kR_i\right]^T}{dt}}_{S^T \text{ anti-symétrique}} = 0$$

- Et donc : $$\frac{d\left[{}^kR_i\right]}{dt} = S.{}^kR_i, avec\, S = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}}_{\text{S anti-symétrique, notée } S(\omega)}$$

Chgt Orientation Ri / Rk lien avec le produit vectoriel [2]

- Le terme dû au changement d'orientation est un produit vectoriel, exprimé dans le repère k

$$\underbrace{{}^{k}v_{P/Rk}}_{\text{chgt orient Ri /Rk}} = \frac{d\left[{}^{k}R_{i}\right]}{dt}.{}^{i}P = S({}^{k}\omega).{}^{k}R_{i}.{}^{i}\overrightarrow{O_{i}P} = \boxed{S({}^{k}\omega).{}^{k}\overrightarrow{O_{i}P}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\omega_{zk} & \omega_{yk} \\ \omega_{zk} & 0 & -\omega_{xk} \\ -\omega_{yk} & \omega_{xk} & 0 \end{bmatrix}}_{\text{S anti-symétrique, notée } S({}^{k}\omega)} . \underbrace{\begin{bmatrix} b_{xk} \\ b_{yk} \\ b_{zk} \end{bmatrix}}_{\vec{b}=\overrightarrow{O_{iP}}} = \begin{bmatrix} \omega_{yk}.b_{zk} - \omega_{zk}.b_{yk} \\ \omega_{zk}.b_{xk} - \omega_{xk}.b_{yk} \\ \omega_{xk}.b_{yk} - \omega_{yk}.b_{zk} \end{bmatrix} = \boxed{{}^{k}\left[\vec{\omega} \times \overrightarrow{O_{i}P}\right]}$$

- $\vec{\omega}$ est le vecteur de coordonnées ${}^{k}\omega = \begin{bmatrix} \omega_{xk} \\ \omega_{yk} \\ \omega_{zk} \end{bmatrix}$ dans Rk

Matrice anti-symétrique S liée au produit vectoriel

- Soient 2 vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$, et leur produit vectoriel

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

- Expression dans un repère k (orthonormé direct) :

 <=> multiplication à gauche par la matrice S(^{k}a)

$$^k\vec{c} = \begin{bmatrix} c_{xk} \\ c_{yk} \\ c_{zk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{yk}.b_{zk} - a_{zk}.b_{yk} \\ a_{zk}.b_{xk} - a_{xk}.b_{zk} \\ a_{xk}.b_{yk} - a_{yk}.b_{xk} \end{bmatrix} = \underbrace{S({}^k\vec{a})}_{\text{matrice } 3\times 3} . \underbrace{{}^k\vec{b}}_{3\times 1}$$

avec :

$$S\left({}^k\vec{a}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -a_{zk} & a_{yk} \\ a_{zk} & 0 & -a_{xk} \\ -a_{yk} & a_{xk} & 0 \end{bmatrix}$$

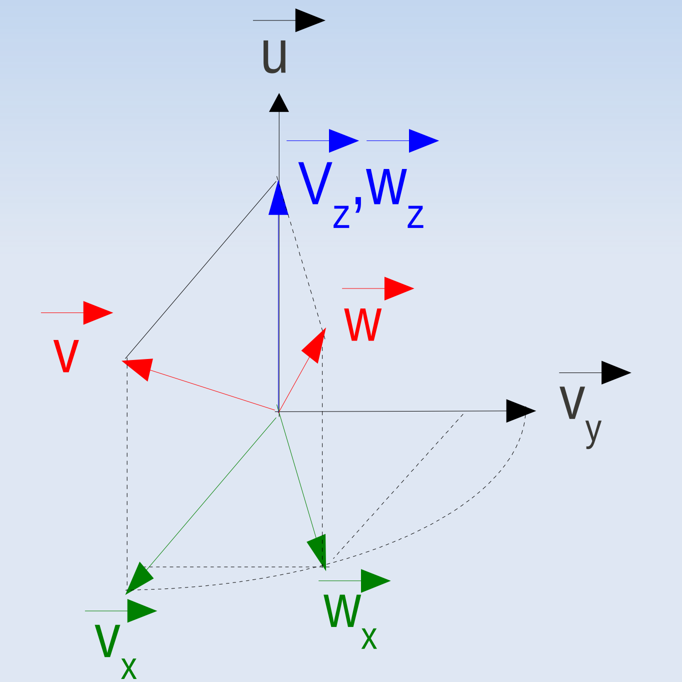
Formule de rodrigues, vecteur de rotation

- On peut représenter une rotation vectorielle d'un angle θ autour d'un axe de vecteur unitaire $\vec{u}$, par le vecteur $\vec{u}.\theta$

$$w = \overbrace{v_x.\cos(\theta) + v_y.\sin(\theta)}^{w_x} + v_z$$

$$\begin{cases} v_z = u.[u^t.v] = [u.u^T].v \\ v_x = v - v_z = [Id - u.u^T].v \\ v_y = u \times v_x = u \times v = s(u).v \end{cases}$$

Raisonnement sur les coordonnées dans un repère k, non précisé pour simplifier la lecture)



$\vec{w}$ est l'image de $\vec{v}$
par la rotation autour de $\vec{u}$

- Formule d'Olindes Rodrigues

$$w = \underbrace{\left[u.u^T.(1-\cos(\theta)) + Id_{3\times 3}.\cos(\theta) + S(u).\sin(\theta)\right]}_{\text{matrice de rotation } {}^kR \text{, exprimée dans le repère k}}.v$$

Cas d'une rotation infinitésimale

- Formule d'Olindes Rodrigues , pour δθ

$$w=\underbrace{\left[u.u^T.(1-\cos(\delta\theta))+Id_{3\times 3}.\cos(\delta\theta)+S(u).\sin(\delta\theta)\right]}_{\text{matrice de rotation, dans la base k}}.v$$

- Angle θ très petit :

$$\begin{cases}\cos(\delta\theta)\approx 1\\ \sin(\delta\theta)\approx\delta\theta\end{cases}$$

$$w\approx\underbrace{\left[u.u^T.(1-1)+Id_{3\times 3}.1+S(u).\delta\theta\right]}_{\text{matrice de rotation, dans la base i}}.v$$

- Variation due à la rotation :

$$\delta v=w-v\approx S(u).\delta\theta.v=[u.\delta\theta]\times v=\delta u\times v$$

Vecteur vitesse instantanée de rotation de Ri / Rk

- Soit P un point lié à Ri, la vitesse de P par rapport à Rk peut toujours s'écrire sous la forme

$$\boxed{\vec{v}_{P/Rk} = \left[\vec{\omega}_{Ri/Rk} \times \overrightarrow{O_i P}\right] + \vec{v}_{Oi/Rk}}$$

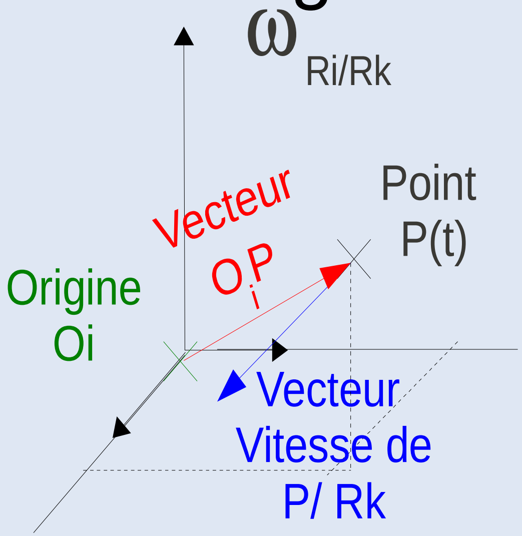
- La vitesse se décompose en 2 termes :
  - Terme 1 : Rotation autour de l'axe Oi, $\vec{\omega}_{Ri/Rk}$
  - Terme 2 : translation due au déplacement de Oi/Rk

- $\vec{\omega}_{Ri/Rk}$ est appelé : vecteur vitesse instantanée de rotation de Ri/Rk (longueur = vitesse angulaire, direction = axe)

Interprétation graphique

- Soit P : Lié à R_i, tournant autour d'un axe $O_i, \overrightarrow{\omega_{Ri/Rk}}$, à la vitesse angulaire ω (Oi est supposée fixe / Rk)
- La vitesse de P est orthogonale à l'axe $\overrightarrow{\omega_{Ri/Rk}}$, et à $\overrightarrow{O_i P}$
- , sa longueur algébrique est : $\omega . \sin\left(\widehat{\overrightarrow{\omega_{Ri/Rk}}, \overrightarrow{O_i P}}\right)$
- On peut donc 'représenter' la rotation avec un vecteur $\overrightarrow{\omega_{Ri/Rk}}$, colinéaire à l'axe de rotation, et de longueur algébrique ω
- Pour tout *P* lié a *R_i*, on aura

$$\boxed{\overrightarrow{v_{P/Rk}} = \left[\overrightarrow{\omega_{Ri/Rk}} \times \overrightarrow{O_i P}\right]}$$



Calcul du vecteur vitesse instantanée de rotation de Ri / Rk

- calcul de $\overrightarrow{\omega_{Ri/Rk}}$
- Etape 1: on calcule la matrice anti-symétrique

$$S\left({}^{k}\omega_{Ri/Rk}\right)=\frac{d\left[{}^{k}R_{i}\right]}{dt}\cdot{}^{i}R_{k}=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & -\omega_{zk} & \omega_{yk}\\ \omega_{zk} & 0 & -\omega_{xk}\\ -\omega_{yk} & \omega_{xk} & 0\end{bmatrix}}_{\text{S anti-symétrique, notée } S\left({}^{k}\omega_{Ri/Rk}\right)}$$

- Etape 2 :on en déduit les coordoonnées dans le repère k

$$\boxed{{}^{k}\left[\overrightarrow{\omega_{Ri/Rk}}\right]=\begin{bmatrix}\omega_{xk}=S_{32}\\ \omega_{yk}=S_{13}\\ \omega_{zk}=S_{21}\end{bmatrix}}$$

important: additionnabilité des vitesses angulaires

- En bref $$\forall i,k,p: \overrightarrow{\omega_{Ri/Rk}} = \overrightarrow{\omega_{Ri/Rp}} + \overrightarrow{\omega_{Rp/Rk}}$$

- Dém: matrices S associées,dans la base *k* :

$$\underbrace{\frac{d\,{}^kR_i}{dt}}_{S({}^k\omega_{Ri/Rk}).{}^kR_i} = \frac{d\left[{}^kR_p.{}^pR_i\right]}{dt} = \underbrace{\frac{d\left[{}^kR_p\right]}{dt}}_{S({}^k\omega_{Rp/Rk}).{}^kR_p} .{}^pR_i + {}^kR_p . \underbrace{\frac{d\left[{}^pR_i\right]}{dt}}_{S({}^p\omega_{Ri/Rp}).{}^pR_i}$$

$$S({}^k\omega_{Ri/Rk}).{}^kR_i = S({}^k\omega_{Rp/Rk}).{}^kR_i + \boxed{{}^kR_p.S({}^p\omega_{Ri/Rp}).\left[{}^pR_k\right.}\left.{}^{}.{}^kR_p\right]_{ID}.{}^pR_i$$

$$S({}^k\omega_{Ri/Rk}).\cancel{{}^kR_i} = S({}^k\omega_{Rp/Rk}).\cancel{{}^kR_i} + \boxed{S({}^k\omega_{Ri/Rp})}.\cancel{{}^kR_i}$$

Vitesse de l'articulation i d'un robot

- Soit un(tout) point P lié à la i[ème] articulation du robot

  (<= de coordonnées connues, et fixes, dans le repère i)

- la vitesse de P par rapport au repère 0, sécrit :

$$\boxed{\overrightarrow{v_{P/R0}} = \left[\overrightarrow{\omega_{Ri/R0}} \times \overrightarrow{O_i P} \right] + \overrightarrow{v_{Oi/R0}}}$$

- Pour l' exprimer (dans le repère 0), on doit connaître :

$$\xi_i = \begin{bmatrix} {}^0\left[\overrightarrow{v_{Oi/R0}}\right] \\ {}^0\left[\overrightarrow{\omega_{Ri/R0}}\right] \end{bmatrix} \underbrace{=}_{\text{notation}} \begin{bmatrix} {}^0v_i \\ {}^0\omega_i \end{bmatrix}$$

Vecteur à 6 coordonnées, appelé

'Vitesse de l'articulation *i* du Robot'

Calcul direct de la vitesse de l'articulation i

$$\xi_i = \begin{bmatrix} {}^0[\overrightarrow{V_{Oi/R0}}] \\ {}^0[\overrightarrow{\omega_{Ri/R0}}] \end{bmatrix} \underbrace{=}_{\text{notation}} \begin{bmatrix} {}^0V_i \\ {}^0\omega_i \end{bmatrix} \qquad {}^0V_i = \begin{bmatrix} {}^{x0}V_i \\ {}^{y0}V_i \\ {}^{z0}V_i \end{bmatrix}, \; {}^0\omega_i = \begin{bmatrix} \boxed{{}^{x0}\omega_i} \\ \boxed{{}^{y0}\omega_i} \\ \boxed{{}^{z0}\omega_i} \end{bmatrix}$$

- [1] Coord. vitesse tangentielle de Oi (dans R0):

$${}^0V_i = \frac{d\,{}^0O_i}{dt}$$

- [2] Coord. Vitesse angulaire de Ri/R0 (dans R0):

$$S\left({}^0\omega_i\right) = \frac{d\,{}^0R_i}{dt} \cdot {}^iR_0 = \begin{bmatrix} 0 & -{}^{z0}\omega_i & \boxed{{}^{y0}\omega_i} \\ \boxed{{}^{z0}\omega_i} & 0 & -{}^{x0}\omega_i \\ -{}^{y0}\omega_i & \boxed{{}^{x0}\omega_i} & 0 \end{bmatrix}$$

jacobienne de l'articulation i, au point Oi

- Pour l' articulation *i* : O_i , ${}^0R_i$ = fct(q_1 ,..., q_i)

$$\underbrace{{}^0v_i}_{3\times1}=\underbrace{\frac{d\,{}^0O_i}{dt}}_{3\times1}=\sum_{k=1}^{i}\underbrace{\frac{\partial\,{}^0O_i}{\partial q_k}}_{3\times1}\cdot\frac{d\,q_k}{dt}=\underbrace{{}^0J_{vi}(q)}_{3\times i}\cdot\underbrace{\dot{q}}_{i\times1}$$

$$\underbrace{{}^0\omega_i}_{3\times1}=\underbrace{\sum_{k=1}^{i}J_k}_{3\times1}\cdot\frac{d\,q_k}{dt}=\underbrace{{}^0J_{\omega i}(q)}_{3\times i}\cdot\underbrace{\dot{q}}_{i\times1}$$

$$\begin{bmatrix}{}^0v_i\\{}^0\omega_i\end{bmatrix}={}^0J_{Oi,Ri}(q)\cdot\underbrace{\dot{q}}_{i\times1}$$

$$\underbrace{S\left({}^0\omega_i\right)}_{\left[\frac{d\,{}^0R_i}{dt}\right]\cdot{}^iR_0,\,3\times3}=\left[\sum_{k=1}^{i}\underbrace{\frac{\partial\,{}^0R_i}{\partial q_k}}_{3\times3}\cdot\underbrace{\frac{d\,q_k}{dt}}_{1\times1,\text{ prod ext commutatif}}\right]\cdot{}^iR_0=\underbrace{\sum_{k=1}^{i}\frac{\partial\,{}^0R_i}{\partial q_k}\cdot{}^iR_0}_{{}^0J_{Si}(q)\,3\times3}\cdot\frac{d\,q_k}{dt}$$

Calcul direct (depuis ${}^{0}T_i$) de la jacobienne en un pt Pi

$$ {}^{0}J_{Pi,Ri}\left[\text{ligne } i=1,2,3\,;\text{colonne } k\right]=\frac{\partial\,{}^{0}P_i}{\partial q_k}=\frac{\partial\,{}^{0}R_i}{\partial q_k}\cdot{}^{i}P_i+\frac{\partial\,{}^{0}O_i}{\partial q_k} $$

$$ {}^{0}J_{Pi,Ri}\left[\text{ligne } i=4,5,6\,;\text{colonne } k\right]=\frac{\partial\,{}^{0}\omega_i}{\partial \dot{q}_k} $$

$\Uparrow$

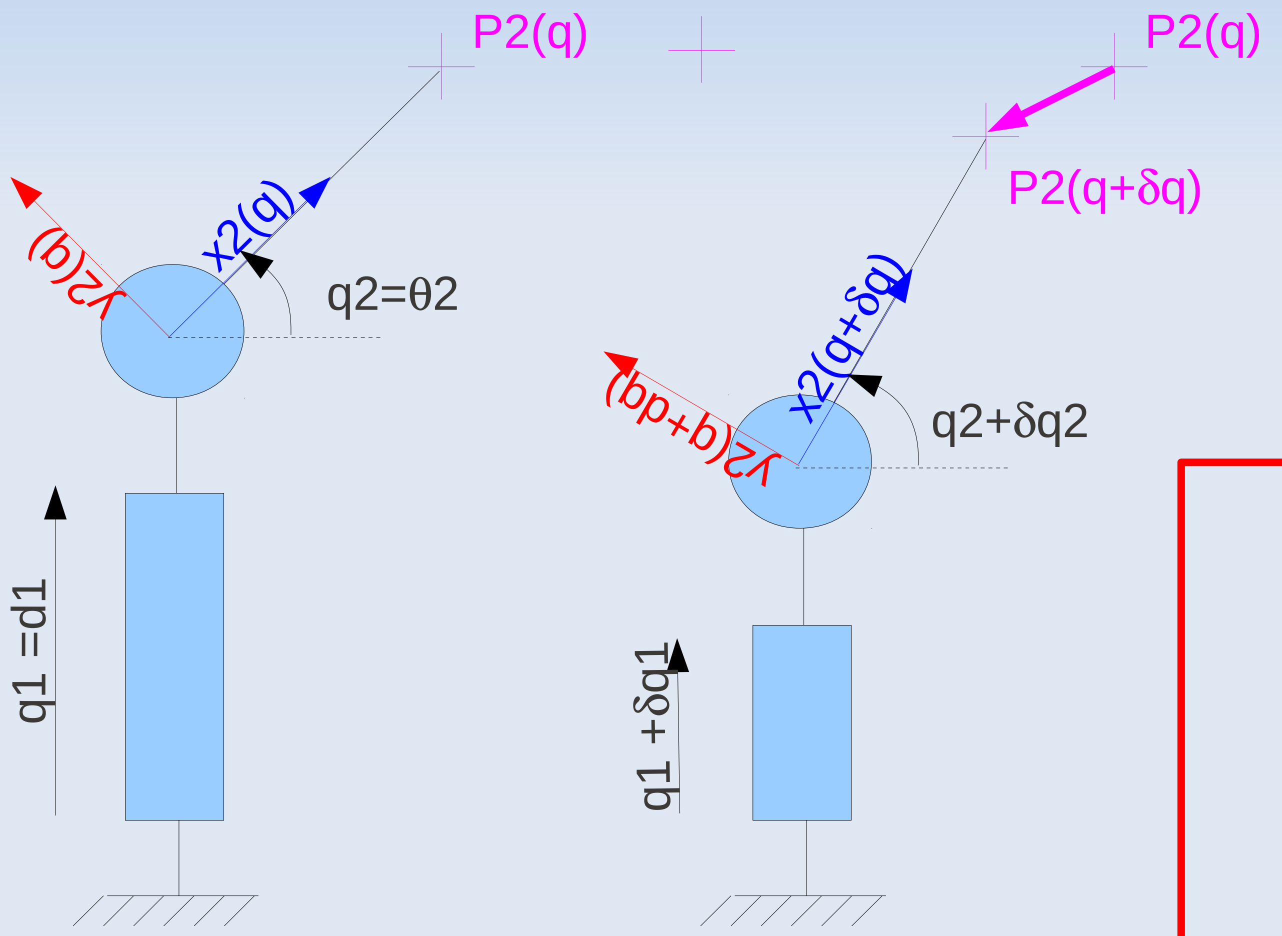
$$ \underbrace{\frac{\partial\,{}^{0}\omega_i}{\partial \dot{q}_k}}_{3\times 1}=\underbrace{\frac{\partial S({}^{0}\omega_i)}{\partial \dot{q}_k}}_{3\times 3}\begin{bmatrix}\text{ligne } 3\,,\text{colonne } 2\\ \text{ligne } 1\,,\text{colonne } 3\\ \text{ligne } 2\,,\text{colonne } 1\end{bmatrix} $$

$\Uparrow$

$$ \underbrace{\frac{\partial S({}^{0}\omega_i)}{\partial \dot{q}_k}}_{3\times 3}=\frac{\partial\,{}^{0}R_i}{\partial q_k}\cdot{}^{i}R_0 $$

déplacement virtuel d'une articulation en un point (6 X 1)

- δq : déplacement virtuel infinitésimal des q_k
- Point Pi lié à l'articulation i



réalité

$$\delta q = \dot{q} . dt$$

$$\delta \overrightarrow{O_0 P_i} = \vec{v}_{Pi} . dt$$

$$\delta \vec{u}_i = \overrightarrow{\omega_{Ri/R0}} . dt$$

virtualité

$$\delta q$$

$$\overrightarrow{\delta O_0 P_i} = fct(q, \delta q)$$

$$\overrightarrow{\delta u_i} = fct(q, \delta q)$$

déplacement virtuel

- Soit δq : déplacement virtuel infinitésimal des q_k
- Le déplacement correspondant de l'articulation i ,en un point Pi (lié a l'articulation i), est caractérisé par un vecteur à 6 coordonnées :

$$\underbrace{{}^{0}\delta_{Pi,Ri}}_{6\times1} = \begin{bmatrix} \overbrace{{}^{0}\delta P_i}^{\delta \text{ position du point Pi } 3\times1} \\ \underbrace{{}^{0}\delta u_i}_{\text{vct. rotation de l'articulation i } 3\times1} \end{bmatrix}$$

- $\left[{}^{0}\delta P_i(q,\delta q)\right]_{3\times1}$: variation de <u>position du point P</u>i :
- $\left[{}^{0}\delta u_i(q,\delta q)\right]_{3\times1}$: vecteur de rotation traduisant le <u>changement d'orientation du repère Ri</u>

déplacement virtuel en fonction de la jacobienne

- Le déplacement virtuel de l'articulation i ,en un point Pi peut s'écrire directement
  - en fonction de la jacobienne de l'articulation i, au point Pi
  - Et du déplacement virtuel des degrés de liberté (q1 à qi)

$$\underbrace{{}^{0}\delta_{Pi,Ri}}_{6\times 1} = \left[\begin{array}{c} \overbrace{{}^{0}\delta P_i}^{\delta \text{ position du point Pi } 3\times 1} \\ \underbrace{{}^{0}\delta u_i}_{\text{vct. rotation de l'articulation i } 3\times 1} \end{array} \right] = {}^{0}J_{Pi}(q).\delta q$$

- $\left[{}^{0}\delta P_i(q,\delta q) \right]_{3\times 1}$: variation de <u>position du point Pi</u> :
- $\left[{}^{0}\delta u_i(q,\delta q) \right]_{3\times 1}$: vecteur de rotation traduisant le <u>changement d'orientation du repère Ri</u>

Calcul de la jacobienne (DENAVIT-HARTENBERG)

- Lorsque seule la liaison k <=i, prismatique, varie :

($q_k = d_k$ suivant z_{k-1})

$$ {}^0v_i = {}^0z_{k-1} . \dot{d}_k $$

$$ {}^0\omega_i = 0_{3\times1} $$

- Lorsque seule la liaison **k<=i**, rotoïde, varie

(θ_k autour de z_{k-1})

$$ {}^0\omega_i = \underbrace{{}^0z_{k-1} . \dot{\theta}_k}_{{}^0\omega_k} $$

$$ {}^0v_i = \underbrace{{}^0z_{k-1} \times [{}^0O_i - {}^0O_{k-1}] . \dot{\theta}_k}_{{}^0[\overrightarrow{\omega_{Ri/R0}} \times \overrightarrow{O_{k-1}O_i}]} $$

$$ J_{ck} = \begin{bmatrix} z_{k-1} \\ 0_{3\times1} \end{bmatrix} $$

Prismatique : $q_k = d_k$

$$ J_i(q) = [J_{c1}, J_{c2}, \dots, J_{ci}] $$

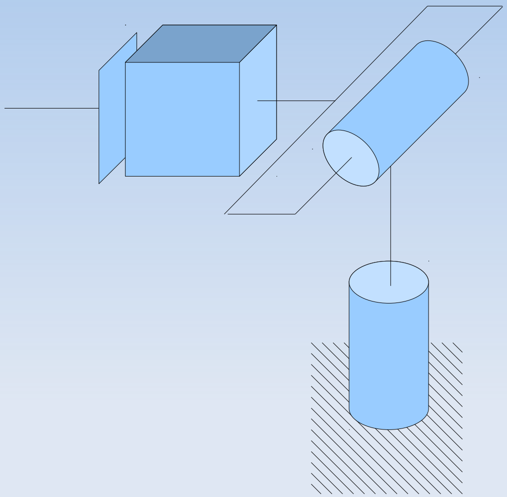
1- valable dans repère 0 ou autre

2- en Oi, on note J_i, au lieu de $J_{Oi,Ri}$

$$ J_{ck} = \begin{bmatrix} z_{k-1} \times (o_i - o_{k-1}) \\ z_{k-1} \end{bmatrix} $$

rotoïde : $q_k = \theta_k$

Exemple: jacobienne d'un robot sphérique (ou d'un scara) => RRP



i, i+1	Rot z_i	Trans x_{i+1}	Trans z_i	rot x_{i+1}
0,1	θ_{1*}		d_1	$\alpha_1=+90°$
1,2	θ_{2*}			$\alpha_2=-90°$
2,3			d_{3*}	

$$J_3={}^0J_{o3,R3}(q)=\left[\underbrace{\begin{matrix}{}^0z_0\times\left({}^0o_3-{}^0o_0\right)\\ {}^0z_0\end{matrix}}_{\text{rotoïde } \theta_1, z_0},\underbrace{\begin{matrix}{}^0z_1\times\left({}^0o_3-{}^0o_1\right)\\ {}^0z_1\end{matrix}}_{\text{rotoïde } \theta_2, z_1},\begin{matrix}{}^0z_2\\ \underbrace{0_{3\times1}}_{\text{prismatique } d_3, z_2}\end{matrix}\right]$$

Rq : On pourrait remplacer O_3 par n'importe quel point P_3 , lié au repère 3...

Application, calcul récursif des vitesses

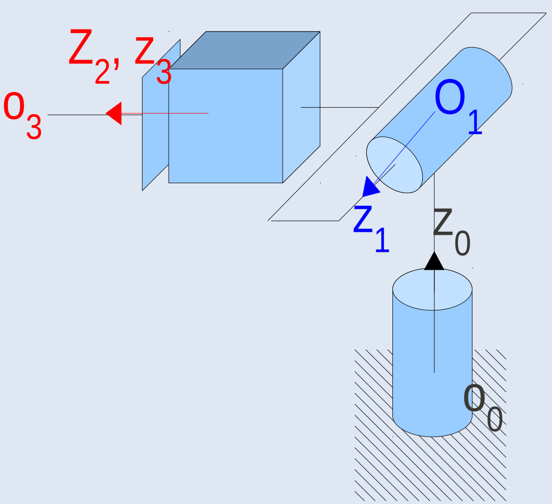
$$\boxed{{}^{i}\omega_{Ri/R0} = {}^{i}R_{i-1} . \left[{}^{i-1}\omega_{Ri-1/R0}\right] + \underbrace{{}^{i}z_{i-1}}_{\text{col 3 de } {}^{i}T_{i-1}} . \dot{q}_i . [1 - \underbrace{\sigma_i}_{\begin{cases} 0\ si\ rotoïde \\ 1\ si\ prismatique \end{cases}}]}$$

$${}^{i-1}v_{Oi/R0} = {}^{i-1}v_{Oi-1/R0} + \left[{}^{i-1}\omega_{Ri-1/R0}\right] \times \underbrace{{}^{i-1}O_i}_{\text{col 4 de } {}^{i-1}T_i} + \frac{\partial\, {}^{i-1}O_i}{\partial q_i} . \dot{q}_i$$

$$\boxed{{}^{i}v_i = {}^{i}R_{i-1} . \left[\left[{}^{i-1}v_{i-1} + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times {}^{i-1}O_i\right] + \frac{\partial\, {}^{i-1}O_i}{\partial q_i} . \dot{q}_i\right]}$$

Singularités d'un robot perte de direction de déplacement

$$ {}^{0}J_{o3}(q) = \left[\underbrace{\begin{matrix} {}^{0}z_0 \times \left({}^{0}o_3 - {}^{0}o_0 \right) \\ {}^{0}z_0 \end{matrix}}_{\text{rotoïde } \theta_1, z_0}, \underbrace{\begin{matrix} {}^{0}z_1 \times \left({}^{0}o_3 - {}^{0}o_1 \right) \\ {}^{0}z_1 \end{matrix}}_{\text{rotoïde } \theta_2, z_1}, \begin{matrix} {}^{0}z_2 \\ \underbrace{0_{3\times 1}}_{\text{prismatique } d_3, z_2} \end{matrix} \right] $$

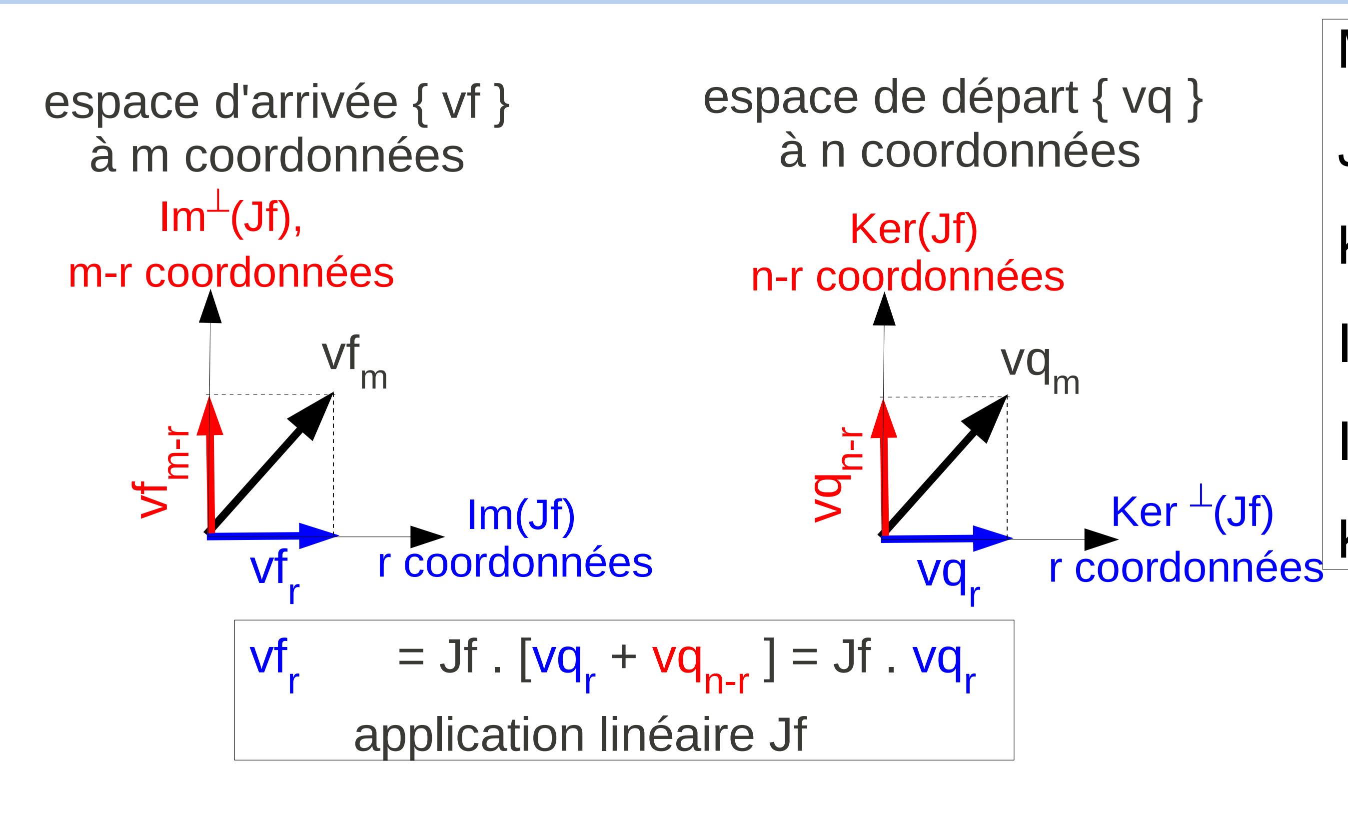


BLA-BLA-BLA,
Manque de systematique

- <u>3 colonnes</u> : <u>3 directions maximum</u>
- ~~Lignes 1 à 3 : translations v1,v2,v3, sauf singularités :~~
  - ~~$z_0 \times o_0o_3 = 0$: perte v1~~
  - ~~$z_1 \times o_1o_3 = 0$: perte v2~~
  - ~~2 colonnes colinéaires => perte direction orthogonale~~
- Nb dir. = taille plus grand mineur $\neq 0$

analyse: interprétation graphique des espaces

- Robot : $vf_{m\times 1} = Jf_{m\times n} . vq_{n\times 1}$, *Jf* de rang *r*



Maxima (calcul formel)

JfT:transpose(Jf)$

Ke_Jf:**nullspace**(Jf) $

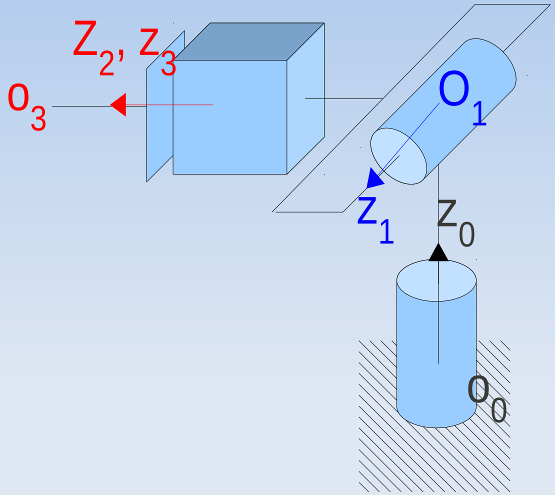
Im_Jf:**columnspace**(Jf)$

ImO_Jf:**nullspace**(JfT)$

KeO_Jf:**columnspace**(JfT)$

- [n-r] composantes de vq sans effet sur vf : Ker Jf
- [m-r] composantes de vf impossibles à modifier : $Im^{\perp}$ Jf
- Jf est une bijection de : $ker^{\perp}$ Jf vers Im Jf (de dimension r)

Singularités d'un robot analyse formelle 1/2

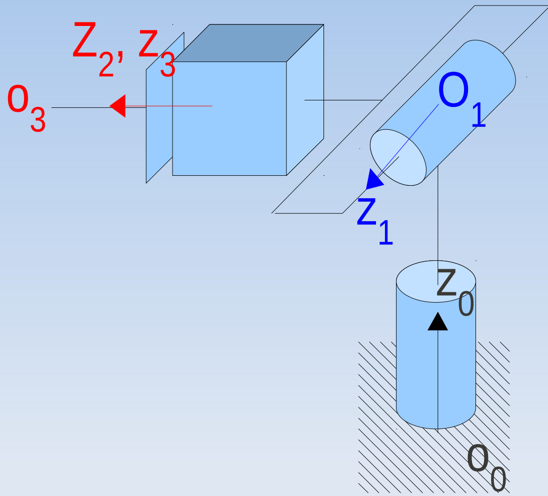



```
/* bout de programme maxima */
J:submatrix(4,5,6,JO3R3)$
print(" rang de J =", rank(J))$
ImJ:columnspace(J3P)$
Jred:matrix(part(ImJ,1),part(ImJ,2),part(ImJ,3));
detJred:determinant(Jred)$
print(" singularités lorsque :", detJred,"=0")$
```

Proviso :...conditions logiques

singularités lorsque : **d3 sin(t2) =0**

Singularités d'un robot analyse formelle 2/2



/* d3 sin(t2) =0 : d3=0, ou t2 =0 , ou t2= %pi*/

JSing1 : **subst**([d3=0],J)$

JSing2 : **subst**([t2=0],J)$

JSing3 : **subst**([t2=%pi],J)$

$$J_{d3=0}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -c1.s2 \\ 0 & 0 & -s1.s2 \\ \underbrace{0}_{q1=\theta_1} & \underbrace{0}_{q2=\theta_2} & \underbrace{-c2}_{q3=d_3} \end{bmatrix} \qquad J_{t2=0}=\begin{bmatrix} 0 & -c1.d3 & 0 \\ 0 & -d3.s1 & 0 \\ \underbrace{0}_{q1=\theta_1} & \underbrace{0}_{q2=\theta_2} & \underbrace{-1}_{q3=d_3} \end{bmatrix}$$

Pour aller plus loin : décomposition en valeurs singulières de Jf 1/3

- Robot : $Jf = U_{m\times m} . S_{m\times n} . V^T_{n\times n}, Jf$ de rang r

$$\underbrace{U}_{U^T U = Id} = \left[\underbrace{U_r}_{r \text{ colonnes}} , \underbrace{U_{m-r}}_{m-r \text{ colonnes}} \right]$$

$$S_{m\times n} = \begin{bmatrix} S_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ où } S_{r\times r} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r \end{bmatrix}}_{\sigma_1 > \cdots > \sigma_r > 0}$$

$$\underbrace{V}_{V^T V = Id} = \left[\underbrace{V_r}_{r \text{ colonnes}} , \underbrace{V_{n-r}}_{n-r \text{ colonnes}} \right]$$

robot

$$\left[U^T_r . vf\right] = S_{r\times r} . \left[V^T_r . vq\right] + 0 . \left[V^T_{n-r} . vq\right]$$

$$U^T_{m-r} vf = 0$$

insensible

sans action

- Action du robot limitée au *r* premières composantes:pour i<=r
  - La composante de vq suivant vi : $v^T_i . vq$
  - Est amplifiée de σi
  - Et fournit la composante de vf suivant ui : $u^T_i . vf$

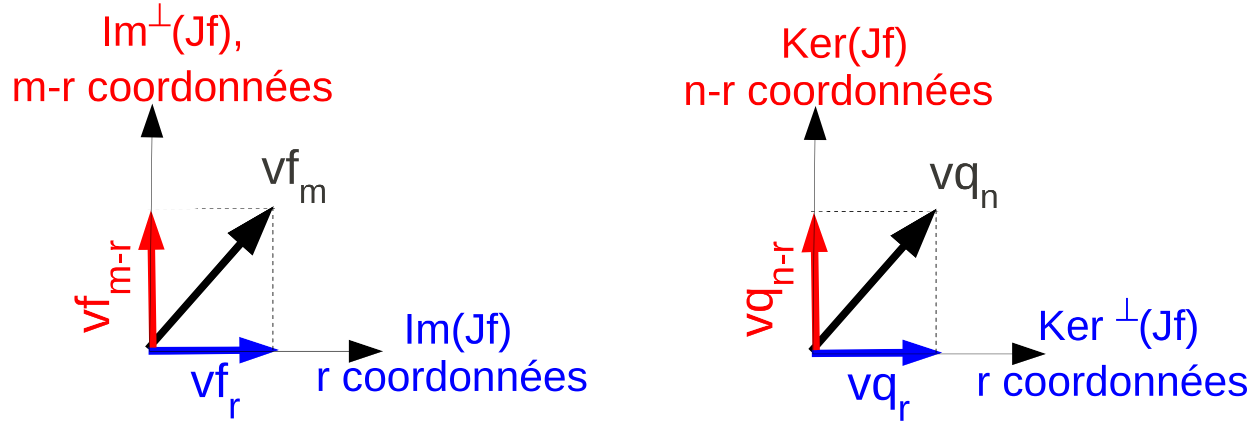
$$\forall i \leq r : \underbrace{vf_{ui}}_{u^T_i . vf} = \underbrace{\sigma_i}_{\text{gain réel} > 0} . \underbrace{vq_{vi}}_{v^T_i . vq}$$

- pour i>r
  - Les composantes de vq suivant vi n'a aucune influence sur la sortie
  - Les composantes de vf suivant ui ne sont pas influencees

décomposition en valeurs singulières de Jf 2/3

espace d'arrivée { vf }
à m coordonnées

espace de départ { vq }
à n coordonnées



vf_r = Jf . [vq_r + vq_{n-r}] = Jf . vq_r

application linéaire Jf

Robot:

action de vq_r sur vf_r

pour i=1..r :

coord. de vf suivant ui =

coord. de vq suivant vi

multipliée par σi

$$\underbrace{\left[U_r . U_r^+ \right]}_{\text{proj } sur \, \mathrm{Im}(Jf)} . vf_m = vf_r$$

$$\underbrace{\left[V_r . V_r^T \right]}_{\text{proj } sur \, Ker^{\perp}(Jf)} . vq = vq_r$$

$$\underbrace{\left[U_{m-r} . U_{m-r}^T \right]}_{\text{proj } sur \, \mathrm{Im}^{\perp}(Jf)} . vf_m = vf_{m-r}$$

$$\underbrace{\left[V_{n-r} . V_{n-r}^T \right]}_{\text{proj } sur \, Ker(Jf)} . vq = vq_{n-r}$$

Décomposition en valeurs singulières 3 /3

- La svd permet
  - de relativiser la notion de rang
  - de prédire la répétabilité du robot
  - d'inverser 'au mieux' Jf
- => Outil indispensable de l'ingénieur(pas seulement en robotique...)

Svd de [Jpos_effecteur . diag {1/vqi max}

$$S_{3\times 5}=\begin{bmatrix} 2.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

suivant u1, vitesse max = 2.7 m/s

suivant u3, vitesse max =0,05 m/s

(ellipsoïde de manipulabilité)

Vitesse vq optimale pour vf donnée (pseudo- inverse J^+ de J)

$$v_q=[v_1, v_2, v_3, v_4, v_5].\begin{bmatrix} \frac{1}{2.7} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1.1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{0.05} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ u_3^T \end{bmatrix}.vf$$

Travail virtuel, modèle de force statique [1]

- Soit δq : déplacement virtuel infinitésimal des q_k
- $$\underbrace{{}^0\delta_{Pi,Ri}(q)}_{6\times 1}=\underbrace{{}^0J_{Pi,Ri}(q)}_{6\times i}.\underbrace{\delta q}_{i\times 1}$$ le déplacement virtuel

  correspondant de l'articulation i, au point Pi

- Si on applique 3 forces (au point Pi), et 3 moments sur l'articulation i, le travail virtuel correspondant s'écrit :

$$[1]\,\delta w_{Pi,Ri}=\underbrace{\left[{}^0F\right]^T}_{3\,forces\,,\,3\,moments}.{}^0\delta_{Pi,Ri}(q)=\left[{}^0F\right]^T.{}^0J_{Pi,Ri}(q).\delta q$$

- Si on applique des (forces , couples) sur les articulations (prismatiques, rotoïdes), le travail correspondant s'écrit

$$[2]\,\delta w_q=\underbrace{\tau^T}_{\text{forces et couples articulaires}}.\delta q$$

modèle de force statique

- Principe des travaux virtuels : à l'équilibre, les deux travaux virtuels sont égaux

$$\underbrace{\left[{}^{0}F\right]^{T}.{}^{0}J_{Pi,Ri}(q).\delta q}_{\delta w_{Pi,Ri}}-\underbrace{\tau^{T}\delta q}_{\delta w_{q}}=0$$

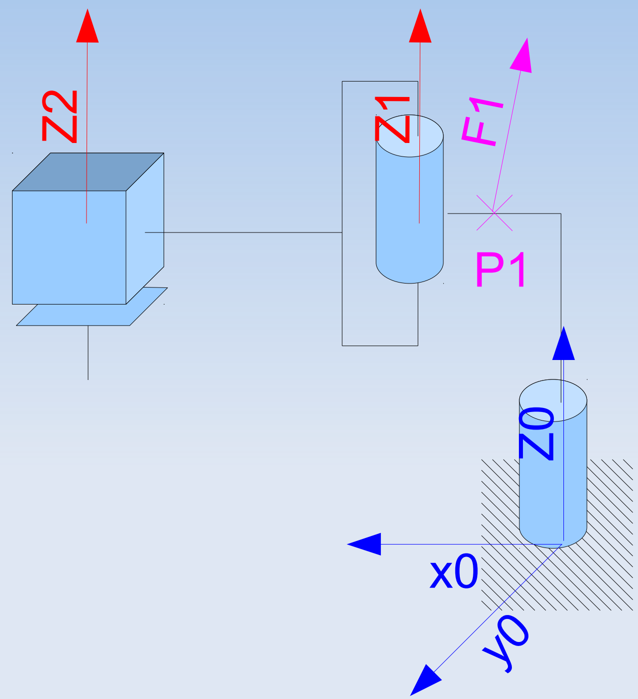
- D'où on déduit le modèle de forces statique de l'articulation i , au point Pi

$$\underbrace{\tau}_{\text{couples et variables articulaires}}=\left[{}^{0}J_{Pi,Ri}(q)\right]^{T}.\underbrace{{}^{0}F}_{\substack{\text{forces et moments appliqués}\\ \text{au point } Pi,\ \text{lié à } Ri}}$$

- Notation plus adaptée (forces généralisées: couple/force) :

$$F_{q}=\left[{}^{0}J_{Pi,Ri}(q)\right]^{T}.{}^{0}F_{Pi,Ri}$$

Forces statiques exemple de calcul

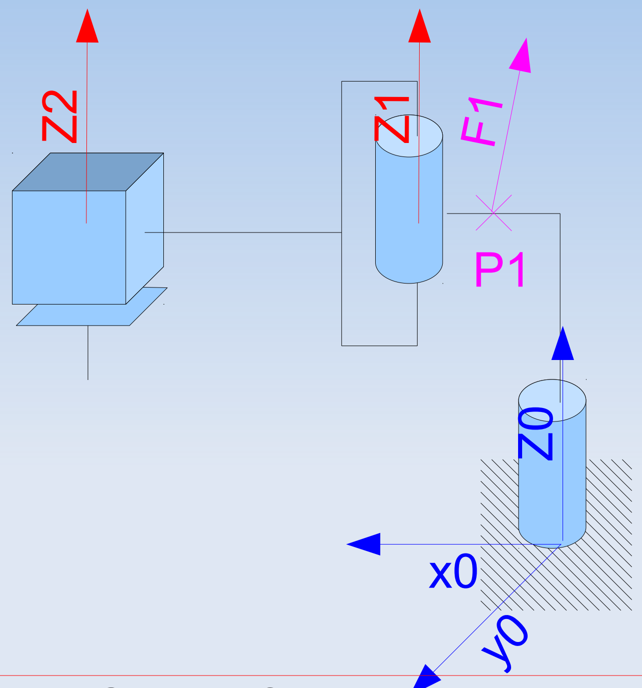


- On applique au point P1 lié à R1 une force F1. forces généralisées exercés sur les actionneurs ? réponse :

$$F_q=\left[{}^0J_{p1,R1}(q)\right]^T.{}^0F_{p1,R1}=\begin{bmatrix} -p1_{y0}.F_{x0}+p1_{x0}.F_{y0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^0J_{p1,R1}(q)=\left[\begin{array}{ccc} {}^0z_0\times\underbrace{\left({}^0p_1-{}^0o_0\right)} & & \\ -p1_{y0} & 0 & 0 \\ p1_{x0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \underbrace{1}_{{}^0z_0} & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad {}^0F_{p1,R1}(q)=\left[\begin{array}{c} Fp1_{x0} \\ Fp1_{y0} \\ Fp1_{z0} \\ \hline Mr1_{x0}=0 \\ Mr1_{y0}=0 \\ Mr1_{z0}=0 \end{array}\right]$$

Forces statiques exemple d'analyse



- On applique au point P1 lié à R1 une force F1, la force généralisée Fq est alors :

$$F_q = \begin{bmatrix} -p1_{y0}.F_{x0} + p1_{x0}.F_{y0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- q2 et q3 ne sont pas influencés par F1(à l'équilibre)
- Les composantes de F1 incompatibles avec le (orthogonales au) mouvement sont structurellement compensées
- Seules les composantes de F1 compatibles avec le mouvement ont de l'influence sur le couple articulaire (exemple : F_{x0} si $p_{y0} \neq 0$)
- Le robot ne peut exercer de forces déterminées que dans les directions compatibles avec son mouvement

Environnement → articulations a l'équilibre

- Si, au(x) point(s) Pi du robot, lié(s) à l'articulation i, on applique $F_{Pi,Ri}$, alors la force généralisée correspondante appliquée sur les articulations est :

$$F_q = \sum \left[{}^0J_{Pi,Ri}(q) \right]^T . {}^0F_{Pi,Ri}$$

- Seule la partie des efforts $F_{Pi,Ri}$ compatible avec le mouvement produit du couple articulaire

- Compensation des efforts: on pourra compenser le mouvement qui en résultera , en appliquant les forces articulaires opposées :

$$F_q = -\sum \left[{}^0J_{Pi,Ri}(q) \right]^T . {}^0F_{Pi,Ri}$$

Force statique et modèle cinématiqe (SVD de Jf)

$$\underbrace{{}^0J_{Pi,Ri}}_{m\times n}=[U_r,U_{m-r}].\begin{bmatrix}S_{r\times r} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}V_r^T\\ V_{n-r}^T\end{bmatrix}$$

$$\underbrace{{}^0J_{Pi,Ri}^T}_{n\times m}=[V_r,V_{n-r}].\begin{bmatrix}S_{r\times r} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}U_r^T\\ U_{m-r}^T\end{bmatrix}$$

$$^0v_{Pi,Ri}={}^0J_{Pi,Ri}(q).v_q$$

$$F_q={}^0J_{Pi,Ri}(q)^T.{}^0F_{Pi,Ri}$$

- Vitesses influencées par vq : $U_r U_r^T . {}^0v_{Pi,Ri}$
- Forces influençant Fq : $U_r U_r^T . {}^0F_{Pi,Ri}$
- Ellipsoïde de manipulabilité en vitesse {ui , σi }
- Ellipsoïde de manipulabilité en effort {ui , 1 / σi }

Modèle cinématique inverse cas simple

- Déterminer les vitesses articulaires à partir des vitesses opérationnelles
  - Relève de l'agèbre linéaire : inversion généralisée de matrice

$$\underbrace{\begin{bmatrix} {}^{0}v_{pf} \\ {}^{0}\omega_{f} \end{bmatrix}}_{\text{vitesse opérationnelle } V_f, 6\times 1} = \underbrace{{}^{0}J_{Pf,Rf}(q)}_{\text{jacobien opérationnel } J_f(q), 6\times f} \cdot \underbrace{\dot{q}}_{v_q, f\times 1}$$

  - Cas simple : robot à 6 degrés de liberté , bien conçu (J_f de rang 6 sauf sur les points singuliers)

$$v_f = J_f . v_q \Leftrightarrow v_q = J_f^{-1} . v_f$$

Modèle cinématique inverse
svd et pseudo-inverse

$$\underbrace{{}^{0}J_{Pi,Ri}}_{m\times n}=\left[U_r, U_{m-r}\right].\begin{bmatrix} S_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} V_r^T \\ V_{n-r}^T \end{bmatrix}$$

, où $S_{r\times r}=\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r \end{bmatrix}}_{\sigma_1>\cdots>\sigma_r>0}$

$$\underbrace{{}^{0}J^{+}_{Pi,Ri}}_{n\times m}=\left[V_r, V_{n-r}\right].\begin{bmatrix} S^{+}_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} U_r^T \\ U_{m-r}^T \end{bmatrix}$$

, où $S^{+}_{r\times r}=\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_r} \end{bmatrix}}_{\sigma_1>\cdots>\sigma_r>0}$

$\left\| {}^{0}v_{Pi,Ri} - {}^{0}J_{Pi,Ri}(q).v_q \right\|$ minimale lorsque $v_q={}^{0}J^{+}_{Pi,Ri}(q).{}^{0}v_{Pi,Ri}$

Exercice 1

- Déterminer de 2 façons la jacobienne de l'origine de l'effecteur d'un robot scara
  - Directement avec la matrice 0Tf
  - En employant denavit Hartenberg
- Déterminer les conditions de singularité en position correspondantes (det(Jpos) =0)
  - Étudier les directions dans lesquelles on peut déplacer l'effecteur, aux points singuliers.

Exercice 2

- On analyse le scara suivant :
  - [d1=0.5m,d2=1m vitesses max actionneurs angulaires = 180°/s, verin =1m/s]
- Saisir sous scilab une fonction renvoyant la jacobienne , à l'origine de l'effecteur
  - Employer grind() ,+copier-coller pour eviter les erreurs
- Soit le point $\theta 1=\theta 2=45°$, d3=0.1m
  - On veut une vitesse de 1m/s suivant y0, déterminer les vitesses articulaires, puis opérationnelles.
  - On veut imposer une force de 10N, suivant x0, déterminer les couples articulaires, puis opérationnels.

Exercice 3
Calcul récursif des vitesses

- Déterminer récursivement l'expression des

  Vitesses angulaires et de rotation des différentes articulations d'un robot scara, exprimées dans leur propre repère

  (très utile pour l'énergie cinétique)