Quatrième partie
La divisibilité dans $\mathbb{Z}$

1 La divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$: $a = b.q + r$ avec $0 \leq r < |b|$

Entier Premier : Tout entier n qui n'a comme diviseurs que les nombre n,-n,1,-1 (-1,0,1 n'est pas premier).

- Tout entier de $\mathbb{N}$ possède au moins un diviseur premier.
- Tout entier de$\mathbb{N}$ se décompose de façon unique en produit de facteurs premiers.
- Tout entier relatif se décompose de façon unique.

Plus Grand Commun Diviseur : L'ensemble $D(a) \cap D(b)$ des diviseurs communs de a et de b est l'ensemble des diviseurs d'un unique entier positif d, lui-même diviseur commun a et b et le plus grand d'entre eux. Ainsi $D(a) \cap D(b) = D(d)$ où d est le "plus grand commun diviseur de a et de b".

Prenons l'exemple de pgcd(456,252) :

Trouver le pgcd par l'algorithme d'Euclide :

$456 = 252X1 + 204$
$252 = 204X1 + 48$
$204 = 48X4 + 12$
$48 = 12X4 + 0$
donc pgcd $(456, 252) = 12$

Par l'utilisation des facteurs premiers

456	2	252	2
228	2	126	2
114	2	63	2
57	3	21	3
19	19	7	7
1	.	1	.

Entiers a et b " premiers entre eux " : Entiers a et b tels que $pgcd(a, b) = 1$. Conséquence : si $d = pgcd(a, b)$ alors $d = a.u + b.v$

Théorème de Bézout : Si $pgcd(a, b) = 1$ alors

$$a.u + b.v = 1$$

Théorème de Gauss : si $a|b.c$ et $pgcd(a, b) = 1$ alors $a|c$

2 Résolution d'une équation Diophantienne

Résoudre :

$$456.u + 252.v = 12 \tag{1}$$

$pgcd(456, 252) = 12$ Donc on se ramène à résoudre

$$38.u + 21.v = 1 \tag{2}$$

1. Effectuer "Euclide à l'endroit"
   $456 = 252X1 + 204$
   $252 = 204X1 + 48$
   $204 = 48X4 + 12$
   $48 = 12X4 + 0$

2. Effectuer "Euclide à l'envers"
   $1 = 17 - 16$
   $1 = 38 - 21 - 16$
   $1 = 38 - 21 - (21 - 17)(21 - 17)$
   $1 = 38 - 21 - 21.21 + 17.21 + 17.21 - 17.17$
   $1 = 38 + 12.21 - 17(38 - 21)$
   $1 = -16 * 38 + 29 * 21$
   Une solution particulière de (2) est $(-16, 29)$

$$38.x'_0 + 21.y'_0 = 1 \tag{3}$$

3. Etablir la solution générale On égalise (2) et (3) ainsi $38.x_0'+21.y_0' = 38.x+21.y \Leftrightarrow 38(x_0'-x) = 21(y_0'-y)$

   $38|21(y_0' - y)$ or $pgcd(38, 21) = 1$ donc $38|y_0' - y$ donc $\exists k \in \mathbb{Z}/y_0' - y = 38k \Rightarrow y = 29 - 38k$

   On remplace dans (3) ainsi $x = -16 - 21k$

Ainsi la solution générale est $(-16 - 21k, 29 - 38k)$