Cours 10/2/21

$\exists$ Eve $\forall$ Adam

Stratégies   joueurs P_0, P_1

Comment on modélise un jeu, arène etc ?

Arène : graphe orienté (V, E) → sommets ; → arêtes $E \subseteq V \times V$

$V = V_0 \dot{\cup} V_1$ → V_0 : sommets de P_0 ; V_1 : sommets de P_1

- jeton : marque le noeud actuel
- coup : bouger le jeton
  Le joueur auquel appartient le sommet bouge le jeton, en le plaçant sur un successeur de ce sommet.
- partie π = chemin dans le graphe
  $(v_0, v_1, \ldots)$

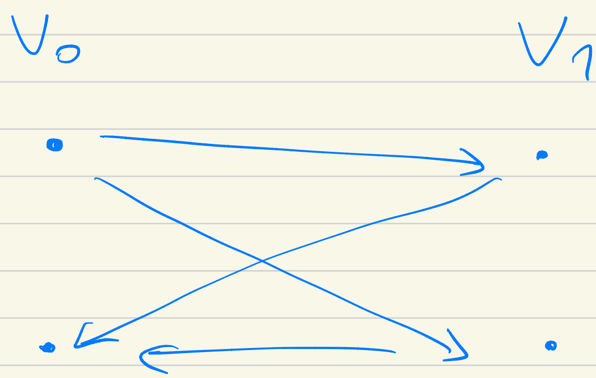
$(v_i, v_{i+1}) \in E \quad , \quad \forall i \geq 0$

Ex. Nim $(n_1, \dots, n_k)$

$V \subseteq \mathbb{N}^k$

$$E = \{ \langle (n_1, \dots, n_k), (n_1, \dots m_i, \dots n_k) \rangle : 1 \le i \le k, \quad 0 \le m_i < n_i \}$$

$$V_0 = V \times \{0\}, \quad V_1 = V \times \{1\}$$

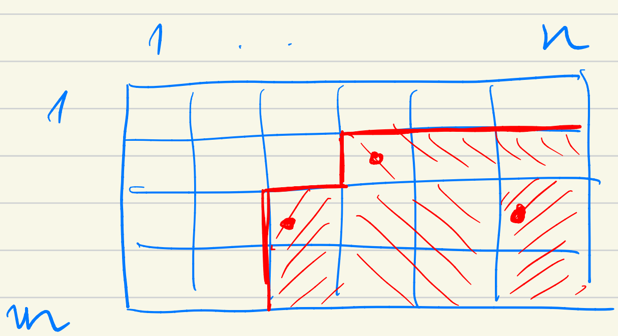


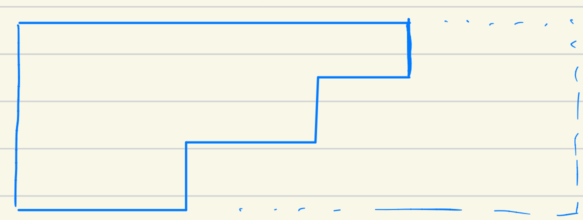
$V' = V_0 \dot\cup V_1$

graphe biparti

$$E' = \{ \langle (\bar{n}, 0), (\bar{n}', 1) \rangle : (\bar{n}, \bar{n}') \in E \} \cup$$
$$\{ \langle (\bar{n}, 1), (\bar{n}', 0) \rangle : (\bar{n}, \bar{n}') \in E \}$$

Ex Chocolat



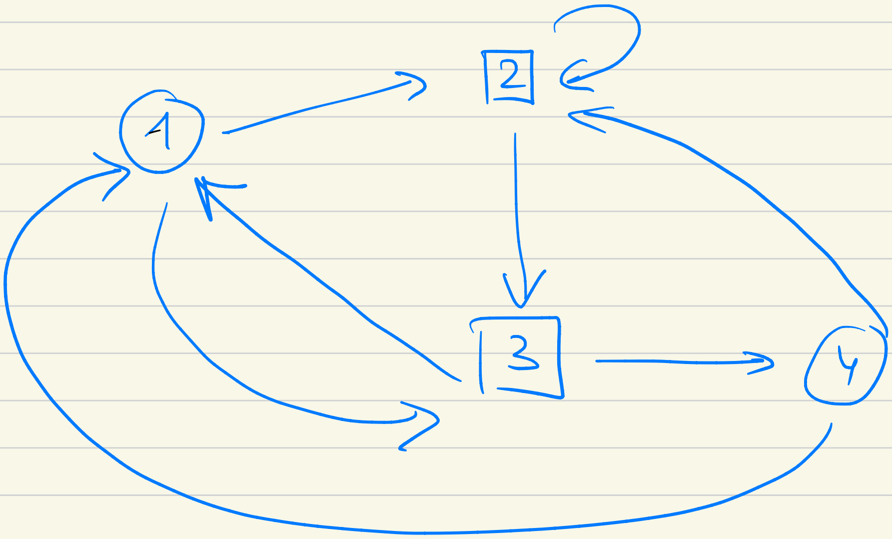


$(n_1, n_2, \dots, n_m)$

$0 \le n_i \le n$

$n_1 \ge \dots \ge n_m$

V_0 : ○ V_1 : □



$V_0 = \{1, 4\}$

$V_1 = \{2, 3\}$

$F = \{4\}$

$v_0 = 1$

Parties

$$\begin{array}{ccccccccc} 1, & 2, & 2, & 3, & 1, & 3, & 4 & \ldots \\ P_0 & P_1 & P_1 & P_1 & P_0 & P_1 & P_0 & \end{array}$$

$1, 2, 2, 2, \ldots$

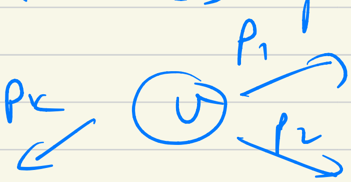
On s'intéresse aux parties <u>maximales</u>.

S'il n'y a pas de sommet puits, les parties maximales sont toujours infinies.

Cette modélisation : jeux à information complète : $\rightsquigarrow$ chaque joueur sait où se trouve le jeton et connaît (V, E)

ex Jeux qui ne rentrent pas dans cette modélisation :

- jeux à info incomplète (jeux de cartes)
- jeux concurrents (Pierre-feuille-ciseaux) où 2 joueurs jouent en même temps
- jeux probabilistes : la différence est qu'il y a des probab. sur les arêtes :



$$\sum p_i = 1$$

Stratégies $\sigma, \tau, \ldots$ $\qquad$ $\sigma_0 : P_0$, $\sigma_1 : P_1$

$$\sigma_0 : \underbrace{V^*}_{\text{historique de partie}} \underbrace{V_0}_{\text{sommet actuel}} \to V$$

$\sigma_0(v_0 \ldots v_k v) = v'$ si

1. $v_0, \ldots, v_k, v$ chemin de (V, E),
2. $v \in V_0$, $v' \in \{w : (v,w) \in E\}$

$\sigma_1 : V^* \underline{V_1} \to V$ strat. pour P_1

$\pi = (v_0, v_1, \ldots)$ partie (chemin)

π est <u>conforme à la stratégie</u> σ_0 :

si pour tout $i \geq 0$ tq. $v_i \in V_0$:

$v_{i+1} = \sigma_0(v_0, \ldots v_i)$

(chaque coup de P_0 est conforme à σ_0)

Condition de <u>victoire</u> d'un jeu (pour P_0)

$\boxed{Win}$ = ensemble de parties max.

<u>ex.</u> Win = chemins qui passent par un ensemble de sommets F

$\rightsquigarrow$ jeux d'accessibilité

" P_0 gagne par rapport à Win si toute partie passe par F "

Une stratégie $\sigma_0 : V^* V_0 \to V$ est <u>gagnante</u> pour P_0 * par rapport à Win si <u>toute</u> partie π maximale ** qui est <u>σ_0 - conforme</u>, appartient à Win.

* à partir d'un sommet v

** qui commence dans v

Soit $v \in V$.

<u>v est gagnant pour P_0</u> (par rapport à Win) s'il existe une stratégie gagnante pour P_0 à partir de v.

Pour P_1 : stratégie σ_1, sommet gagnant pour P_1

Win = parties gagnantes pour P_0

$\overline{\text{Win}}$ = ——— P_1

(complém.) → pas de parties indécises

Ex $F \subseteq V$

Win = parties qui passent par F

Notations

Ens. des chemins finis $\subseteq V^*$

" infinis $\subseteq V^\omega$

V^ω : séquences infinies sur alphabet V

$$\mathrm{Win} = V^* F V^* \cup V^* F V^\omega$$

chemins finis · infinis

qui passent par F

$$\overline{\mathrm{Win}} = (V \setminus F)^* \cup (V \setminus F)^\omega$$

(complémentaire)

chemins finis · infinis

qui évitent F

Jeu $(V_0 \dot\cup V_1, E)$, Win

P_0, P_1

$\| $

V arène de jeu

Win: chemins gagnants pour P_0

($\overline{\text{Win}}$: P_1)

$v \in V$

<u>Q</u> : est-ce que v est gagnant pour P_0, ou P_1, ou aucun ?

Jeu est <u>déterminé</u> : pour chaque v, v est soit gagnant pour P_0 ou pour P_1.

v gagnant pour P_0 $\iff$ P_0 a une stratégie gagnante σ_0 à partir de v.

σ_0 : stratégie pour P_0

σ_1 : ——— P_1

$v \in V$ sommet de départ

$\sigma_0 * \sigma_1(v)$: unique partie à partir de v qui est à la fois σ_0-conf. et σ_1-conf.

ex. $\sigma_0(1) = 3$ $\quad \sigma_1(3) = 1$

$\sigma_0 * \sigma_1(1) = 1313\ldots = (13)^\omega$

σ_0 est gagnante pour P_0 à partir de v si pour toute stratégie τ de P_1 :

$\sigma_0 * \tau(v) \in Win$

$\boxed{v \text{ est gagnant pour } P_0}$ s'il existe σ_0 tq. pour tout τ :

$\sigma_0 * \tau(v) \in Win$

Jeu est déterminé si on peut inverser les quantificateurs :

$$\neg \left(\exists \sigma_0 \ \forall \hat{\iota} : \ \sigma_0 * \hat{\iota}(v) \in \mathrm{Win} \right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\exists \sigma_1 \ \forall \hat{\iota}' : \ \hat{\iota}' * \sigma_1(v) \notin \mathrm{Win} \right)$$

$\neg$ (v gagnant pour P_0) $\iff$ v gagnant pour P_1

! Tout jeu fini, sans partie indécise, est déterminé.

$\rightsquigarrow$ arbre de jeu

$$\neg \left(\underset{P_0}{\exists c_0} \ \underset{P_1}{\forall c_0'} \ \underset{P_0}{\exists c_1} \ \forall c_1' \ \ldots \ P_0 \text{ gagne} \right)$$

$$\forall c_0 \ \exists c_0' \ \forall c_0 \ \exists c_1' \ \ldots \ \begin{array}{l} P_0 \text{ perd} \\ P_1 \text{ gagne} \end{array}$$